

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Ahmed Zabana de Relizane



جامعة أحمد زبانة - غليزان
Ahmed Zabana Relizane University

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques

Courbes et surfaces

1^{ère} année master géométrie différentielle

Zagane Abderrahim

Année universitaire 2025-2026

Introduction	5
1 Espaces affines euclidiens	7
1.1 Espaces affines	8
1.2 Espaces euclidiens	11
1.3 Espaces affines euclidiens	27
Exercices	30
2 Courbes paramétrées	32
2.1 Généralités sur les courbes paramétrées	33
2.2 Longueur d'une courbe	38
Exercices	42
3 Courbes planes	44
3.1 Étude locale des courbes planes	45
3.2 Courbes planes en coordonnées polaires	53
3.3 Courbure	56
3.4 Tracé des courbes paramétrées planes	60
Exercices	62
4 Courbes gauches	64
4.1 Étude locale des courbes gauches	65
4.2 Étude métrique des courbes gauches	69
Exercices	73
5 Surfaces paramétrées	74
5.1 Généralités sur les surfaces paramétrées	75
5.2 Première forme fondamentale	82
Exercices	89

TABLE DES MATIÈRES	2
6 Seconde forme fondamentale	91
6.1 Seconde forme fondamentale	92
6.2 Courbures	97
Exercices	112
Bibliographie	114

TABLE DES FIGURES

1.1	Angle non orienté \widehat{ABC}	28
1.2	Hyperplan affine \mathcal{H} orthogonal à la droite affine \mathcal{D} de vecteur directeur n	29
1.3	Distance d'un point à une droite.	29
2.1	Graphe de la fonction $f : t \mapsto f(t) = -t \sin t$	33
2.2	Cercle de centre O et de rayon R	34
2.3	Courbe d'Horoptère.	34
2.4	Hélice circulaire.	34
2.5	Cycloïde.	35
2.6	Astroïde.	35
2.7	Tractrice.	35
2.8	Courbe paramétrée $\gamma(t) = (t^3, t^2)$	36
2.9	Courbe paramétrée $\gamma(t) = (t^3, t)$	36
2.10	Demi cercle.	37
2.11	Vecteur tangent $T(t)$ et vecteur normal $N(t)$ au point $\gamma(t)$	41
3.1	Courbe paramétrée $\gamma(t) = (t^3, \sin t)$	45
3.2	Courbe paramétrée $\gamma(t) = (\sqrt[3]{t}, t)$	46
3.3	Courbe paramétrée $\gamma(t) = (t^3, -t^3 + t^5)$	47
3.4	Quatre cas possibles pour l'allure d'un point stationnaire.	48
3.5	Point ordinaire.	50
3.6	Point d'inflexion.	50
3.7	Point de rebroussement de première espèce.	50
3.8	Point de rebroussement de deuxième espèce.	51
3.9	Courbe paramétrée $\gamma(t) = (\sqrt{t+1}, (t-1)\sqrt{t+1})$	52
3.10	Courbe paramétrée $\gamma(t) = (t^2 + \frac{1}{t}, t + \frac{2}{t})$	53
3.11	Coordonnées polaires.	53

3.12	Tangent en coordonnées polaires.	54
3.13	Tangent à la courbe d'équation polaire $\rho = 1 - 2 \cos \theta$	55
3.14	Asymptote d'une courbe en coordonnées polaires.	56
3.15	Repère de Serret-Frenet dans \mathbb{R}^2	57
3.16	Cercle osculateur.	59
3.17	La courbe paramétrée $\gamma(t) = (\sin(2t), \sin(3t))$	61
3.18	La courbe d'équation polaire $\rho(\theta) = 1 - \cos \theta$	62
4.1	Plan osculateur.	65
4.2	Plan normal, osculateur et la tangente.	67
4.3	Courbe paramétrée, tangente, plan osculateur et plan normal.	69
4.4	Repère de Serret-Frenet dans \mathbb{R}^3	69
5.1	Surface paramétrée.	75
5.2	Cylindre de révolution.	75
5.3	Sphère S^2	76
5.4	Cylindre elliptique.	76
5.5	Paraboloïde hyperbolique.	77
5.6	Paraboloïde elliptique.	77
5.7	Ellipsoïde.	78
5.8	Plan tangent à une surface paramétrée.	79
5.9	Courbe tracée sur une surface paramétrée.	83
5.10	Courbe tracée sur la sphère unité.	85
5.11	L'aire d'une partie de surface paramétrée.	86
5.12	L'aire du tore.	88
6.1	Orientation du cylindre de révolution.	92
6.2	Le ruban de Möbius.	93
6.3	La bouteille de Klein.	93
6.4	Application de Gauss	94
6.5	Application de Gausse d'un plan.	94
6.6	Courbure normale d'une courbe.	97
6.7	Hélicoïde.	106
6.8	Nature locale d'une surface au voisinage d'un point.	107
6.9	Paraboloïde elliptique.	108
6.10	Paraboloïde hyperbolique.	109
6.11	Tore de révolution.	109
6.12	Surface paramétrée $\varphi(u, v) = (u, v, u + v^3)$	110
6.13	Surface paramétrée $\varphi(u, v) = (u, v, u^2 + v^3)$	111

La géométrie est considérée comme l'un des domaines les plus complexes des mathématiques, en raison de ses liens étroits et de ses interactions avec la plupart des autres branches, telles que la topologie, l'analyse et l'algèbre. Il convient de rappeler que les origines de la géométrie remontent à des époques très anciennes, lorsqu'elle répondait à des besoins pratiques de l'humanité, tels que le calcul des distances, des aires et des volumes.

La géométrie différentielle constitue aujourd'hui l'un des champs les plus importants de la géométrie. Elle mobilise les outils du calcul différentiel et intégral, ainsi que de l'algèbre, pour étudier des problèmes d'ordre géométrique. Son importance s'est particulièrement affirmée avec l'avènement de la *théorie de la relativité d'Einstein*, qui postule que l'espace cosmique est courbé et non plat, contrairement à la conception euclidienne classique.

Cette discipline s'intéresse à l'étude des formes géométriques et des relations qui les unissent, notamment les courbes, les surfaces et leurs enveloppes, dans les espaces euclidiens et non euclidiens. Elle met particulièrement l'accent sur les propriétés différentielles des objets géométriques, c'est-à-dire celles qui demeurent invariantes sous les transformations du mouvement.

L'émergence de la géométrie différentielle est étroitement liée au développement du concept de coordonnées au cours de la première moitié du XVII^e siècle, grâce aux travaux de DESCARTES et FERMAT. NEWTON et LEIBNIZ ont ensuite introduit plusieurs notions fondamentales, telles que la tangente, la normale et la courbure.

Au XVIII^e siècle, EULER proposa la représentation paramétrique des courbes et définit les rayons principaux des surfaces, tout en introduisant la notion de torsion. En 1795, MONGE publia le premier traité complet de géométrie différentielle. Puis, en 1827, GAUSS, dans son œuvre « *Recherches générales sur les surfaces courbes* », formule les premières et secondes formes fondamentales des surfaces et démontre que la courbure totale est une propriété intrinsèque, invariante sous les isométries. Ce principe se retrouve également dans les formules de SERRET-FRENET pour les courbes.

Ce document présente les concepts fondamentaux relatifs aux courbes et aux surfaces

et s'adresse principalement aux étudiants de master en géométrie différentielle. Il couvre le programme de première année de master et est présenté sous forme de cours magistraux détaillés, accompagnés d'exemples et d'exercices corrigés. La présentation claire et progressive vise à faciliter la compréhension et l'assimilation des notions abordées. Chaque chapitre se conclut par une série d'exercices non résolus, destinés à renforcer la maîtrise des concepts étudiés.

L'organisation générale du document est structurée en six chapitres :

- **Chapitre 1** : Espaces affines euclidiens. Il introduit les notions d'espaces affines, de sous-espaces affines, d'espaces euclidiens, d'orthogonalité, d'orientation, de produit mixte et de produit vectoriel, accompagnées d'exemples et d'exercices corrigés.
- **Chapitre 2** : Courbes paramétrées. Il présente les notions générales relatives aux courbes, illustrées par des exemples détaillés et des exercices corrigés.
- **Chapitre 3** : Courbes planes. Il aborde l'étude locale des courbes planes, leur représentation en coordonnées polaires, ainsi que les notions de courbure et de tracé des courbes paramétrées. Des exemples et exercices résolus y sont également proposés.
- **Chapitre 4** : Courbes gauches. Il présente l'étude locale et métrique de ces courbes, accompagnée d'exemples et d'exercices commentés et détaillés.
- **Chapitre 5** : Surfaces paramétrées. Après des généralités sur les surfaces paramétrées, il aborde la première forme fondamentale, la longueur d'une courbe tracée sur une surface et l'aire d'une surface, avec de nombreux exemples et exercices résolus.
- **Chapitre 6** : Seconde forme fondamentale. Traite de l'orientation, de l'application de Gauss et de la seconde forme fondamentale. Il se conclut par une étude des différentes courbures (courbure normale, courbures et directions principales) et propose également plusieurs exercices détaillés.

CHAPITRE 1

ESPACES AFFINES EUCLIDIENS

Sommaire

1.1	Espaces affines	8
1.1.1	Espaces affines	8
1.1.2	Sous espace affine	10
1.2	Espaces euclidiens	11
1.2.1	Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques	11
1.2.2	Structure d'espace euclidien	13
1.2.3	Orthogonalité, Sous espaces orthogonaux	17
1.2.4	Orientation, produit mixte, produit vectoriel	22
1.3	Espaces affines euclidiens	27
1.3.1	Structure d'espace affine euclidien	27
1.3.2	Sous espaces affines orthogonaux	28
	Exercices	30

Dans ce chapitre, \mathbb{K} est un corps commutatif, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) et E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Nous signalerons quand l'hypothèse est faite que la dimension de E est finie.

1.1 Espaces affines

1.1.1 Espaces affines

Définition 1.1.

1. Un \mathbb{K} -espace affine est un ensemble \mathcal{E} non vide associé à E et à une application

$$\begin{aligned} + : \mathcal{E} \times E &\rightarrow \mathcal{E} \\ (A, u) &\mapsto A + u \end{aligned}$$

vérifiant les conditions suivantes

- (i) Pour tout $A \in \mathcal{E}$, $A + 0_E = A$.
 - (ii) Pour tout $A \in \mathcal{E}$ et $u, v \in E$: $A + (u + v) = (A + u) + v$.
 - (iii) Pour tout $A, B \in \mathcal{E}$, il existe un unique $u \in E$ tel que $B = A + u$.
2. On dit que E est l'espace directeur de \mathcal{E} .
3. Les éléments de \mathcal{E} sont appelés les points.
4. La dimension de \mathcal{E} est par définition la dimension de E et note $\dim \mathcal{E} = \dim E$.

Remarques 1.1

1. D'après la condition (iii) de la définition 1.1.1 on note par $u = B - A$ ou $u = \overrightarrow{AB}$, ainsi on a :

$$B = A + \overrightarrow{AB}.$$

2. Tout \mathbb{K} -espace vectoriel E est muni naturellement d'une structure d'un \mathbb{K} -espace affine, grâce à l'application

$$\begin{aligned} + : E \times E &\rightarrow E \\ (u, v) &\mapsto u + v. \end{aligned}$$

Exemple 1.1

L'ensemble \mathcal{E} des points du plan de coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est un \mathbb{R} -espace affine dirigé par $E = \mathbb{R}^2$. En utilisant l'application

$$\begin{aligned} + : \mathcal{E} \times E &\rightarrow \mathcal{E} \\ ((x, y), (a, b)) &\mapsto (x, y) + (a, b) = (x + a, y + b). \end{aligned}$$

Proposition 1.1

Soit \mathcal{E} un \mathbb{K} -espace affine de direction E , alors pour tous points A, B, C et $D \in \mathcal{E}$ on a :

- 1. $\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow A = B$,
- 2. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow B = C$,
- 3. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (relation de Chasles),
- 4. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ (règle de parallélogramme).

Démonstration

En utilisant directement la définition 1.1.1, on obtient les résultats. ■

Définition 1.2

Soit \mathcal{E} un \mathbb{K} -espace affine de direction E .

1. On appelle repère cartésien de \mathcal{E} tout couple $\mathcal{R} = (O, B)$ où O un point de \mathcal{E} et B est une base de E .
2. On dit alors que O est l'origine du repère \mathcal{R} et que B la base associée au repère \mathcal{R} .
3. On appelle coordonnées cartésiennes d'un point M de \mathcal{E} dans le repère, les composantes du vecteurs \overrightarrow{OM} dans la base B .

Remarques 1.2

1. Si (x_1, \dots, x_n) les composantes du \overrightarrow{OM} dans la base $B = \{e_i\}_{i=1, \dots, n}$, i.e. $\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ alors M s'écrit de façon unique

$$M = O + \overrightarrow{OM} = O + \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

et on note $M(x_1, \dots, x_n)$.

2. Si $M(x_1, \dots, x_n)$, on peut définir la matrice des coordonnées de M dans le repère \mathcal{R} par la matrice des composantes de \overrightarrow{OM} dans la base B et on note

$$X_M = X_{\overrightarrow{OM}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

3. Si A et M deux points de \mathcal{E} , alors

$$X_M = X_A + X_{\overrightarrow{AM}}, \quad \text{i.e.} \quad X_{\overrightarrow{AM}} = X_M - X_A.$$

Proposition 1.2

Soient \mathcal{E} un \mathbb{K} -espace affine de direction E , $\mathcal{R} = (O, B)$, $\mathcal{R}' = (O', B')$ deux repères cartésiens de \mathcal{E} et P la matrice de passage de B à B' . Si $M \in \mathcal{E}$, notons X_M , (resp. X'_M) la matrice des coordonnées de M dans \mathcal{R} (resp. \mathcal{R}'). Alors $X_M = P.X'_M + X_{O'}$.
où $X_{O'}$ la matrice des coordonnées de O' dans le repère \mathcal{R} .

Démonstration

Nous avons $X_{\overrightarrow{O'M}} = X_M - X_{O'}$ dans la base B et que $X_{\overrightarrow{O'M}} = X'_M$ dans la base B' et comme $P = \text{passage}(B, B')$, alors $X_M - X_{O'} = P.X'_M$, d'où $X_M = P.X'_M + X_{O'}$. ■

Exercice 1.1

Soit $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2)$ et $\mathcal{R}' = (O', e'_1, e'_2)$ deux repères d'un espace affine \mathcal{E} tels que $O' = O + 2e_1 + 3e_2$, $e'_1 = 2e_1 + e_2$ et $e'_2 = -e_1 + e_2$. Soit M un point dont les coordonnées

sont (x, y) dans le repère \mathcal{R} et (x', y') dans le repère \mathcal{R}' .

Déterminer une relation entre (x, y) et (x', y') .

Solution

On a $X_{O'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans \mathcal{R} et $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrice passage de $\{e_1, e_2\}$ vers $\{e'_1, e'_2\}$.

Si $M \in \mathcal{E}$ tel que $X_M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans \mathcal{R} et $X'_M = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans \mathcal{R}' , alors

$$X_M = P.X'_M + X_{O'} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x' - y' + 2 \\ y = x' + y' + 3 \end{cases}.$$

1.1.2 Sous espace affine

Soit \mathcal{E} un \mathbb{K} -espace affine de direction E .

Définition 1.3

Une partie \mathcal{F} de \mathcal{E} est un sous espace affine de \mathcal{E} , s'il existe un point A de \mathcal{E} et un sous espace vectoriel F de E tels que $\mathcal{F} = A + F$, i.e.

$$\mathcal{F} = \{A + u, u \in F\}.$$

Remarque 1.1

Soit $\mathcal{F} = A + F$ un sous espace affine de \mathcal{E} et $A \in \mathcal{E}$. Si $\{u_i\}_{i=1,p}$ une base de F , alors un point M appartient à \mathcal{F} si et seulement si, il existe une famille de scalaires $\{\lambda_i\}_{i=1,p} \subset \mathbb{R}$ tels que

$$M = A + \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p.$$

Proposition 1.3

Soit $\mathcal{F} = A + F$ un sous espace affine de \mathcal{E} et $A \in \mathcal{E}$, alors :

1. $\mathcal{F} \neq \emptyset$,
2. $F = \{\overrightarrow{AM}, M \in \mathcal{F}\}$.

Démonstration

1. Pour tout $A \in \mathcal{E}$, $A = A + 0 \in A + F = \mathcal{F}$.
2. Soit $u \in E$

$$\begin{aligned} u \in F &\Leftrightarrow A + u \in \mathcal{F} \\ &\Leftrightarrow \exists M \in \mathcal{F}, M = A + u \\ &\Leftrightarrow u = \overrightarrow{AM}. \end{aligned}$$



Définition 1.4

Soit $\mathcal{F} = A + F$ un sous espace affine de \mathcal{E} et $A \in \mathcal{E}$. L'espace vectoriel

$$F = \{\overrightarrow{AM}, M \in \mathcal{F}\}$$

est appelé espace directeur de \mathcal{F} , de sorte que, pour tout point $B \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F} = B + F$. Dans ce la dimension de \mathcal{F} est la dimension de F et note $\dim \mathcal{F} = \dim F$.

Définition 1.5

Soit \mathcal{F} un sous-espace affine de \mathcal{E} .

1. Si $\dim \mathcal{F} = 1$, on dit que \mathcal{F} est une droite affine de \mathcal{E} .
2. Si $\dim \mathcal{F} = 2$, on dit que \mathcal{F} est un plan affine de \mathcal{E} .
3. Si $\dim \mathcal{F} = \dim \mathcal{E} - 1$, on dit que \mathcal{F} est un hyperplan affine de \mathcal{E} .

1.2 Espaces euclidiens

1.2.1 Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques

Définitions 1.1

Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel et $f : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

1. f est dite forme bilinéaire sur E si f est linéaire par rapport à chaque variable, i.e.
 - (i) $\forall x, y, z \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : f(\alpha x + \beta y, z) = \alpha f(x, z) + \beta f(y, z)$ linéarité à gauche,
 - (ii) $\forall x, y, z \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : f(x, \alpha y + \beta z) = \alpha f(x, y) + \beta f(x, z)$ linéarité à droite,
2. f est dite symétrique si : $\forall x, y \in E : f(x, y) = f(y, x)$.

Remarque 1.2

Pour qu'une application $f : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ soit une forme bilinéaire symétrique, il faut et il suffit que : f est symétrique et f est linéaire à gauche ou f est linéaire à droite.

Définition 1.6

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel. On dit qu'une application $Q : E \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme quadratique sur E , s'il existe une forme bilinéaire f , telle que

$$\forall x \in E : Q(x) = f(x, x).$$

On dit encore que Q est une forme quadratique associée à f .

Exemple 1.2

L'application

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1 y_2 + x_2 y_1$$

est une forme bilinéaire symétrique et la forme quadratique associée Q est

$$Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto 2x_1x_2.$$

Proposition 1.4

Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel et Q une forme quadratique sur E . Alors il existe une forme bilinéaire symétrique unique f sur E , telle que

$$\forall x \in E : Q(x) = f(x, x).$$

Dans ce cas, f s'appelle la forme polaire associée à la forme quadratique Q et on a la relation suivante :

$$\forall x, y \in E : f(x, y) = \frac{1}{2}(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)).$$

Démonstration

Q est une forme quadratique sur E , donc, il existe une forme bilinéaire g sur E , telle que :

$$\forall x \in E : Q(x) = g(x, x).$$

Soit $f : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x, y \in E : f(x, y) = \frac{1}{2}(g(x, y) + g(y, x)).$$

Alors f est une forme bilinéaire symétrique sur E et on a :

$$\forall x \in E : f(x, x) = \frac{1}{2}(g(x, x) + g(x, x)) = g(x, x) = Q(x).$$

Puisque f est symétrique, alors

$$\begin{aligned} \forall x, y \in E : Q(x+y) &= f(x+y, x+y) \\ &= f(x, x) + 2f(x, y) + f(y, y) \\ &= Q(x) + 2f(x, y) + Q(y). \end{aligned}$$

donc, on obtient

$$\forall x, y \in E : f(x, y) = \frac{1}{2}(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)).$$

Définitions 1.2

Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie n , $\{e_i\}_{i=\overline{1,n}}$ une base de E et f une forme bilinéaire sur E . On dit qu'une matrice $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ est la matrice de f par rapport à la base $\{e_i\}_{i=\overline{1,n}}$, si

$$\forall i, j = \overline{1, n} : a_{ij} = f(e_i, e_j).$$

Remarques 1.3

1. Si $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ est la matrice de f par rapport à la base $\{e_i\}_{i=\overline{1,n}}$, alors A s'appelle aussi la matrice de Q par rapport à la base $\{e_i\}_{i=\overline{1,n}}$.

2. Pour tous $x, y \in E$, $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$

$$f(x, y) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j.$$

2. Si f une forme bilinéaire symétrique, $a_{ij} = a_{ji}$ par suite, dans ce cas, l'expression de $f(x, y)$ s'écrit sous la forme :

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i y_i + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} (x_i y_j + x_j y_i).$$

2. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et ${}^t X = (x_1, \dots, x_n)$, alors

$$f(x, y) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j = {}^t X A Y.$$

$$\text{où } A Y = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} y_j \end{pmatrix}.$$

1.2.2 Structure d'espace euclidien

Définitions 1.3

Soit $f : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur E , alors

1. f est dite définie si : $\forall x \in E : f(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$,
2. f est dite positive si : $\forall x \in E : f(x, x) \geq 0$,
3. f est dite définie positive si : $\forall x \in E \setminus \{0\} : f(x, x) > 0$.

Définitions 1.4

1. Un produit scalaire sur E est une forme bilinéaire symétrique, définie positive sur E , que l'on note par $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
2. Un \mathbb{R} -espace vectoriel E muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est dit pré-hilbertien réel, noté $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.
3. Un espace pré-hilbertien réel de dimension finie est dit euclidien.

Exemple 1.3

$(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n .

Exemple 1.4

$E = (\mathcal{C}[a, b], \mathbb{R})$ muni le produit scalaire

$$\forall f, g \in E : \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx,$$

E n'est pas un espace euclidien (espace pré-hilbertien).

Exemple 1.5

$M_n(\mathbb{R})$ muni le produit scalaire

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}) : \langle A, B \rangle = \text{tr}({}^t A, B),$$

$M_n(\mathbb{R})$ est un espace euclidien.

Définition 1.7

Soit (E, \langle, \rangle) un espace euclidien.

En posant, $\forall x \in E : \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est appelée norme euclidienne associée à \langle, \rangle .

Lemme 1.1. (Inégalité de Cauchy Schwarz)

Soit (E, \langle, \rangle) un espace euclidien, alors pour tout $x, y \in E$

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|. \quad (1.1)$$

Démonstration

Soit $x, y \in E$

1. Si $x = 0$ ou $y = 0$, $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ est évident.
2. Si $x \neq 0$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} \|\lambda x + y\|^2 &= \langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle \\ &= \lambda \langle x, \lambda x + y \rangle + \langle y, \lambda x + y \rangle \\ &= \lambda^2 \langle x, x \rangle + \lambda \langle x, y \rangle + \lambda \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 \lambda^2 + 2 \langle x, y \rangle \lambda + \|y\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

est un trinôme positif du second degré en λ . Il en résulte que son discriminant

$\Delta' = \langle x, y \rangle^2 - \|x\|^2 \|y\|^2$ est strictement négatif ou nul.

$$\begin{aligned} \Delta' \leq 0 &\Leftrightarrow (|\langle x, y \rangle| - \|x\| \|y\|)(|\langle x, y \rangle| + \|x\| \|y\|) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow |\langle x, y \rangle| - \|x\| \|y\| \leq 0. \end{aligned}$$

3. Si x et y est colinéaires (liés) $\Leftrightarrow \lambda x + y = 0$, i.e. $y = -\lambda x$ alors

$$\begin{aligned} \|y\| &= \|-\lambda x\| \\ &= \sqrt{\langle -\lambda x, -\lambda x \rangle} \\ &= \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} \\ &= |\lambda| \|x\|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\langle x, y \rangle| &= |\langle x, -\lambda x \rangle| = |-\lambda \langle x, x \rangle| \\
 &= |\lambda| \|x\|^2 \\
 &= \|x\| |\lambda| \|x\| \\
 &= \|x\| \|y\|.
 \end{aligned}$$

Proposition 1.5

Soit (E, \langle, \rangle) un espace euclidien, l'application :

$$\begin{aligned}
 \|\cdot\| : E &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\
 x &\mapsto \|x\|
 \end{aligned}$$

est une norme sur E .

Démonstration

1. $\forall x \in E : \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \geq 0$ car \langle, \rangle est positif.

2. $\forall x \in E :$

$$\begin{aligned}
 \|x\| = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{\langle x, x \rangle} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \langle x, x \rangle = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = 0.
 \end{aligned}$$

3. $\forall \lambda \in \mathbb{R} :$

$$\begin{aligned}
 \|\lambda x\| &= \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} \\
 &= \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} \\
 &= |\lambda| \|x\|.
 \end{aligned}$$

4. $\forall x, y \in E : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité de Minkowski ou triangulaire)

$$\begin{aligned}
 \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\
 &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\
 &= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2.
 \end{aligned}$$

En utilisant Inégalité de Cauchy Schwarz (1.1), on obtient,

$$\begin{aligned}
 \|x + y\|^2 &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\
 &\leq (\|x\| + \|y\|)^2
 \end{aligned}$$

donc $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Définition 1.8

Soit (E, \langle, \rangle) un espace euclidien, l'application

$$d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$(x, y) \mapsto d(x, y) = \|x - y\|$$

est dite la distance euclidienne associée au \langle, \rangle .

Propriétés 1.1

Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $x, y \in E$.

1. $\|\alpha x + \beta y\|^2 = \alpha^2 \|x\|^2 + 2\alpha\beta \langle x, y \rangle + \beta^2 \|y\|^2$,
2. $\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} [\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2]$,
3. $\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} [\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2]$,
4. $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} [\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2]$,
5. $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2[\|x\|^2 + \|y\|^2]$ (Identité du parallélogramme).

Démonstration

La preuve découle immédiatement de la définition de la norme. ■

Proposition-Définition 1.1

Soit (E, \langle, \rangle) un espace euclidien.

Pour tout $x, y \in E$, il existe un unique nombre réel noté $\widehat{x, y} \in [0, \pi]$ tel que

$$\cos \widehat{x, y} = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}. \quad (1.2)$$

Le nombre $\widehat{x, y}$ est appelé l'angle non orienté entre x et y .

Démonstration

En vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (1.1) si $x, y \in E \setminus \{0\}$, alors on a :

$$\frac{|\langle x, y \rangle|}{\|x\| \|y\|} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \leq 1.$$

Par conséquent, il existe un unique nombre réel $\widehat{x, y} \in [0, \pi]$ tel que

$$\cos \widehat{x, y} = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}. \quad \blacksquare$$

1.2.3 Orthogonalité, Sous espaces orthogonaux

Définition 1.9

Soit (E, \langle, \rangle) un espace euclidien.

1. On dit que deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux, si $\langle x, y \rangle = 0$ et on note $x \perp y$.
2. Une famille de vecteurs $(x_i)_{i=\overline{1,p}}$ de E est orthogonale si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

Théorème 1.1

Soit (E, \langle, \rangle) un espace euclidien.

Une famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre.

Démonstration

Soient $(x_i)_{i=\overline{1,p}}$ une famille de vecteurs non nuls de E et $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$.

Supposons que $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_p x_p = 0$.

En considérant le produit scalaire avec $x_i, i = \overline{1,p}$, donc on trouve,

$$\begin{aligned} \langle \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p, x_i \rangle &= \lambda_1 \langle x_1, x_i \rangle + \dots + \lambda_p \langle x_p, x_i \rangle \\ 0 &= \lambda_i \langle x_i, x_i \rangle \\ 0 &= \lambda_i \|x_i\|^2, \end{aligned}$$

donc $\lambda_i = 0$, pour tout $i = \overline{1,p}$ (puis que $\|x_i\| > 0, x_i \neq 0$). ■

Exemple 1.6

Soit $E = \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ et $f, g \in E$ telles que $f(t) = \cos(t), g(t) = t$.

Alors on a,

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt = \int_0^{2\pi} t \cos t dt = \left[t \sin t + \cos t \right]_0^{2\pi} = 0,$$

d'où $f \perp g$.

Définition 1.10

Soient (E, \langle, \rangle) un espace euclidien, F, G deux s.e.v de E et A une partie de E .

1. On dit que F et G sont orthogonaux et on note $F \perp G$ si

$$\forall x \in F, \forall y \in G : x \perp y.$$

2. On appelle orthogonal de F et note F^\perp , l'ensemble :

$$F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F, x \perp y\}.$$

3. On appelle orthogonal de A et on note A^\perp , l'ensemble :

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in A, x \perp y\}.$$

Proposition 1.6

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et A, B deux parties de E .

1. A^\perp est un s.e.v de E ,
2. $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$,
3. $A^\perp = (\text{vect}(A))^\perp$,
4. $A \perp B \Leftrightarrow A \subset B^\perp \Leftrightarrow B \subset A^\perp$,
5. Si F, G deux s.e.v de E , $F \perp G \Rightarrow F \cap G = \{0\}$.

Démonstration

1. On a : $A^\perp \neq \emptyset$ car $0 \in A^\perp$ i.e $\forall y \in A : \langle 0, y \rangle = 0$.

Soient $x, y \in A^\perp$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R} : \lambda x + \mu y \in A^\perp$,
soit $z \in A : \langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle = 0$,
donc $\lambda x + \mu y \in A^\perp$.

2. Soit $y \in E$ alors,

$$\begin{aligned} y \in B^\perp &\Rightarrow \forall z \in B, \langle y, z \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \forall z \in A \subset B, \langle y, z \rangle = 0 \\ &\Rightarrow y \in A^\perp. \end{aligned}$$

3. On a : $A \subset \text{vect}(A) \Rightarrow (\text{vect}(A))^\perp \subset A^\perp$

Soit $x \in A^\perp, \forall y \in \text{vect}(A) : y = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i$ où $a_i \in A, \lambda_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, m}$

$$\langle x, y \rangle = \langle x, \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i \rangle = \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle x, a_i \rangle = 0.$$

Donc $x \in (\text{vect}(A))^\perp \Rightarrow A^\perp \subset (\text{vect}(A))^\perp$.

Les autres égalités se démontrent de la même façon. ■

Définition 1.11

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, F et G deux s.e.v de E .

On dit que F et G sont supplémentaires orthogonaux dans E et on note $E = F \overset{\perp}{\oplus} G$ si et seulement si $E = F \oplus G$ et $F \perp G$.

Théorème 1.2

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et F un s.e.v de E , alors

$$E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp.$$

Démonstration

Supposons que $\dim F = m \leq \dim E = n$ et $B = \{e_1, \dots, e_m\}$ une base de F .

On a $F \perp F^\perp$, d'après la Proposition 1.6, nous avons $F \cap F^\perp = \{0\}$. Il suffit de démontrer

que

$$\dim F + \dim F^\perp = \dim E.$$

$F + F^\perp$ est s.e.v de E alors $\dim(F + F^\perp) \leq \dim E = n$.

$\dim(F + F^\perp) = \dim F + \dim F^\perp - \dim(F \cap F^\perp) = \dim F + \dim F^\perp$ d'où :

$$\dim F + \dim F^\perp \leq n.$$

Il reste de montrer que $\dim F + \dim F^\perp \geq n$.

Soit l'application,

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ x &\mapsto f(x) = (\langle x, e_1 \rangle, \dots, \langle x, e_m \rangle). \end{aligned}$$

Démontrons que $\ker f = F^\perp$.

En effet : Soit $x \in \ker f \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \forall i = \overline{1, m}, \langle x, e_i \rangle = 0$

$$\forall y \in F, y = \sum_{i=1}^m \lambda_i e_i, \lambda_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, m}$$

$$\langle x, y \rangle = \langle x, \sum_{i=1}^m \lambda_i e_i \rangle = \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle x, e_i \rangle = 0,$$

d'où $x \in F^\perp$, **i.e.** $\ker f \subset F^\perp$.

Soit $x \in E$,

$$\begin{aligned} x \in F^\perp &\Rightarrow \forall y \in F, y = \sum_{i=1}^m \lambda_i e_i, \lambda_i \in \mathbb{R}, \langle x, y \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \forall \lambda_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle x, e_i \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \forall i = \overline{1, m}, \langle x, e_i \rangle = 0 \\ &\Rightarrow x \in \ker f, \end{aligned}$$

i.e. $F^\perp \subset \ker f$,

d'une part on a,

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E,$$

donc,

$$\dim F^\perp + \dim \operatorname{Im} f = n,$$

d'une autre part on a,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}^m &\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f \leq m = \dim F \\ &\Rightarrow \dim F^\perp + \dim \operatorname{Im} f \leq \dim F + \dim F^\perp \\ &\Rightarrow n \leq \dim F + \dim F^\perp. \end{aligned}$$

■

Définition 1.12

Soit (E, \langle, \rangle) un espace euclidien de dimension n . On appelle base orthonormée (orthonormale) de E , toute base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E vérifiant

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Exemple 1.7

La base canonique de \mathbb{R}^3 , $B_0 = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ est une base orthonormale.

Exemple 1.8

Soit $B = \{v_1 = (2, 1, 0), v_2 = (-3, 6, 0), v_3 = (0, 0, 2)\}$ une base de \mathbb{R}^3 .

- (i) $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle = \langle v_2, v_3 \rangle = 0$, **i.e.** B est une base orthogonale de \mathbb{R}^3 .
- (ii) $\|v_1\| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \neq 1$, **i.e.** B n'est pas une base orthonormale de \mathbb{R}^3 .

Définition 1.13

Soient (E, \langle, \rangle) un espace euclidien de dimension n et F un s.e.v de E .

2. On dit que F est une droite vectorielle si $\dim F = 1$.
2. On dit que F est un plan vectoriel si $\dim F = 2$.
3. On dit que F est un hyperplan vectoriel si $\dim F = n - 1$.

Remarques 1.4

Soit F un s.e.v de E comme $F \oplus F^\perp = E$, alors

1. Si F est un hyperplan $\Rightarrow F^\perp$ est une droite.
2. Si F est une droite $\Rightarrow F^\perp$ est un hyperplan.

Définition 1.14

Soit (E, \langle, \rangle) un espace euclidien.

La normale à un hyperplan H de E est par définition la droite vectorielle H^\perp . Tout vecteur non nul de cette droite est dit vecteur normal à H .

Proposition 1.7

Soient (E, \langle, \rangle) un espace euclidien et $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base orthogonale de E .

Si H un hyperplan de E et $n = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ un vecteur normal à H . Alors H est définie par l'équation

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0.$$

Démonstration

Si $x = \sum_{i=1}^n a_i e_i \in E$ alors

$$\begin{aligned} n \in H &\Leftrightarrow n \perp x \\ &\Leftrightarrow \langle n, x \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0. \end{aligned}$$

■

Exercice 1.2

Soient $u_1 = (3, -1, 1)$, $u_2 = (3, 0, -3)$ deux vecteurs de \mathbb{R}^3 et $H = \text{vect}(u_1, u_2)$.

Déterminer une équation cartésienne de H .

Solution

On détermine une équation cartésienne de H , soit $n = (\alpha, \beta, \gamma)$ un vecteur normal à H

$$\begin{cases} \langle n, u_1 \rangle = 0 \\ \langle n, u_2 \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha - \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha - 3\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 4\gamma \\ \alpha = \gamma \end{cases}.$$

On prend : $\gamma = 1 \Rightarrow \beta = 4$ et $\alpha = 1$, $n = (1, 4, 1)$,

$u = (x, y, z) \in H \Leftrightarrow \langle u, n \rangle = 0 \Leftrightarrow x + 4y + z = 0$,

d'où $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 4y + z = 0\}$.

Définition 1.15

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et f un endomorphisme de E . On dit que f est symétrique (ou auto-adjoint) si et seulement si

$$\forall x, y \in E : \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle.$$

Proposition 1.8

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, $\{e_i\}_{i=\overline{1, n}}$ une base orthonormale de E et f un endomorphisme symétrique, alors la matrice de f par rapport à la base $\{e_i\}_{i=\overline{1, n}}$ est symétrique.

Démonstration

Soit $A = (a_{ij})$ est la matrice de f par rapport à la base orthonormale $\{e_i\}_{i=\overline{1, n}}$, alors pour

tout $i = \overline{1, n} : f(e_i) = \sum_{k=1}^n a_{ki} e_k$

$$\langle f(e_i), e_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n a_{ki} e_k, e_j \right\rangle = \sum_{k=1}^n a_{ki} \langle e_k, e_j \rangle = a_{ji}.$$

$$\langle e_i, f(e_j) \rangle = \langle e_i, \sum_{k=1}^n a_{kj} e_k \rangle = \sum_{k=1}^n a_{kj} \langle e_i, e_k \rangle = a_{ij}.$$

Puis que f un endomorphisme symétrique, alors $a_{ji} = a_{ij}$, pour tout $i, j = \overline{1, n}$. ■

Proposition 1.9

Soient (E, \langle, \rangle) un espace euclidien et f un endomorphisme symétrique de E .

1. L'application $B : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x, y \in E : B(x, y) = \langle f(x), y \rangle$$

est une forme bilinéaire symétrique sur E .

2. La forme quadratique associée à la forme bilinéaire B est donnée par

$$\forall x \in E : Q(x) = \langle f(x), x \rangle.$$

3. Dans une base orthogonale $\{e_i\}_{i=\overline{1, n}}$ de E , les deux applications f et B ont la même matrice.

Démonstration

1. La bilinéarité de B résulte de la linéarité de f et de la bilinéarité du produit scalaire.
2. Si (a_{ij}) (resp. (b_{ij})) est la matrice de f (resp. B) par rapport à la base orthonormale $\{e_i\}_{i=\overline{1, n}}$, alors

$$a_{ij} = \langle f(e_i), e_j \rangle = B(e_i, e_j) = b_{ij}.$$

■

1.2.4 Orientation, produit mixte, produit vectoriel

Lemme 1.2

Soient (E, \langle, \rangle) un espace euclidien et \mathcal{B} l'ensemble des bases de E . La relation binaire \mathcal{R} définie sur \mathcal{B} par,

$$B \mathcal{R} B' \Leftrightarrow \det(P) > 0, \quad (1.3)$$

pour toute $B, B' \in \mathcal{B}$ où P est la matrice de passage de B à B' est une relation d'équivalence, pour cette relation il y a exactement deux classes d'équivalences.

Démonstration

On vérifie aisément que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.

1. La réflexivité : résulte du fait que si $B \in \mathcal{B}$, la matrice de passage de B à B est la matrice unité I_n et $\det(I_n) = 1$.
2. La symétrie : résulte du fait que si $B, B' \in \mathcal{B}$, la matrice de passage de B' à B est l'inverse de la matrice de passage P de B à B' , et comme $\det(P^{-1}) = \frac{1}{\det(P)}$.
3. La transitivité : résulte du fait que si $B, B', B'' \in \mathcal{B}$, la matrice de passage de B à B''

est le produit PQ des matrices de passage P de B à B' et Q de B' à B'' , et de la formule $\det(PQ) = \det(P) \cdot \det(Q)$.

Soient $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ et $B' = \{-e_1, e_2, \dots, e_n\}$ deux bases de E . Le déterminant de la matrice de passage P de B à B' est -1 , ce qui montre qu'il existe au moins deux classes d'équivalences. Soient B'' une troisième base de E et Q la matrice de passage de B' à B'' . La formule $\det(PQ) = \det(P) \cdot \det(Q)$ montre que soit $\det(Q) > 0$, soit $\det(PQ) > 0$. Ainsi, la classe d'équivalence de B'' est soit la classe de B' , soit la classe de B . ■

Remarque 1.3

L'ensemble quotient de la relation \mathcal{R} est isomorphe au groupe multiplicatif $\{-1, 1\}$.

Définition 1.16

Soit (E, \langle, \rangle) un espace euclidien.

1. Une orientation de E est une classe d'équivalence pour la relation d'équivalence \mathcal{R} définie par la formule (1.3).
2. Deux bases de E , définissent la même orientation si elles sont dans la même classe d'équivalence, sinon on dit qu'elles définissent des orientations opposées.
3. L'espace E est orienté lorsqu'un choix est fait d'une orientation de E , i.e. est le choix d'une base de E .
4. Une base de E est dite directe si elle est dans l'orientation de E , indirecte ou rétrogrades dans le cas contraire.

Exemple 1.9

Supposons que (u, v) soit une base directe de E , avec $\dim E = 2$.

1. Les bases (u, v) , $(-u, -v)$ et $(-v, u)$ définissent la même orientation.
2. Les bases (u, v) et (v, u) définissent des orientations opposées.
3. Les bases (v, u) et $(-u, -v)$ et définissent des orientations opposées.

Définition 1.17.

Soient (E, \langle, \rangle) un espace euclidien orienté de dimension $n \geq 2$, H un hyperplan de E et n un vecteur normal à H . L'ensemble des bases $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ de H telle que la base $\{e_1, \dots, e_{n-1}, n\}$ soit une base directe de E est l'une des deux orientations de H appelée orientation normale de H associée au vecteur n . Toute base de H appartenant à cette orientation s'appelle base directement orthogonale à n .

Proposition 1.10

Soient (E, \langle, \rangle) un espace euclidien orienté, B et B' deux bases orthonormées directes de

E . Pour toute famille (v_1, \dots, v_n) de vecteurs de E , on a

$$\det(v_1, \dots, v_n)_B = \det(v_1, \dots, v_n)_{B'}.$$

Démonstration

Soit $(A$ resp. $A')$ la matrice des coordonnées de (v_1, \dots, v_n) dans la base $(B$ resp. $B')$ et P la matrice de passage de B à B' , on a $A = PA'$ d'où

$$\begin{aligned} \det(v_1, \dots, v_n)_B &= \det(A) = \det(PA') = \det(P) \det(A') = 1 \cdot \det(A') \\ &= \det(v_1, \dots, v_n)_{B'}. \end{aligned}$$

■

Définition 1.18

Soit (E, \langle, \rangle) un espace euclidien orienté de dimension n . Le produit mixte des vecteurs v_1, \dots, v_n (dans cet ordre) est le réel $\det(v_1, \dots, v_n)_B$, où B est une base orthonormée directe quelconque, on le note $[v_1, \dots, v_n]$, **i.e.** $[v_1, \dots, v_n] = \det(v_1, \dots, v_n)_B$.

Remarque 1.4

1. Le produit mixte est une forme n -linéaire alternée sur E .
2. $[v_1, \dots, v_n] = 0$ si et seulement si v_1, \dots, v_n sont linéairement dépendants.
3. Si $[v_1, \dots, v_n] > 0$ (resp. $[v_1, \dots, v_n] < 0$), alors $\{v_1, \dots, v_n\}$ est une base directe (resp. indirecte).

Proposition-Définition 1.2

Soient (E, \langle, \rangle) un espace euclidien orienté de dimension 3 et u, v deux vecteurs de E . L'unique vecteur $a \in E$ tel que, pour tout $w \in E$, $[u, v, w] = \langle a, w \rangle$, s'appelle le produit vectoriel de u et v (dans cet ordre) est noté $u \wedge v$, **i.e.** $[u, v, w] = \langle u \wedge v, w \rangle$.

Démonstration

Considérons l'application $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par pour tout $w \in E$,

$$\varphi(w) = [u, v, w] = \det(u, v, w).$$

Puisque le déterminant est une forme multilinéaire, alors φ est une forme linéaire sur E , donc d'après le lemme précédent, il existe un unique $a \in E$, tel que, pour tout $w \in E$; $\varphi(w) = \det(u, v, w) = \langle a, w \rangle$. ■

Propriétés 1.2

Soit (E, \langle, \rangle) un espace euclidien orienté de dimension 3, alors

1. L'application $(u, v) \rightarrow u \wedge v$ est bilinéaire antisymétrique.

2. Pour tous u, v, w de E , alors $\langle u \wedge v, w \rangle = \langle u, v \wedge w \rangle$.
3. Pour tous u, v de E , le vecteur $u \wedge v$ est orthogonal à u et à v .
4. Si u, v sont libres, alors la famille $\{u, v, u \wedge v\}$ est une base directe.
5. u, v sont liés, si et seulement si $u \wedge v = 0$.

Démonstration

1. (i) La bilinéarité du produit vectoriel résulte immédiatement de la bilinéarité du produit scalaire et de la linéarité du produit mixte par rapport à chaque variable.

(ii) Pour tout $w \in E$, on a :

$$\langle u \wedge v + v \wedge u, w \rangle = [u, v, w] + [v, u, w] = [u, v, w] - [u, v, w] = 0,$$

donc le vecteur $u \wedge v + v \wedge u$ est orthogonal à tout le monde, il est nul,

i.e. $u \wedge v = -v \wedge u$.

2. Pour tous $u, v, w \in E$, alors

$$\langle u \wedge v, w \rangle = [u, v, w] = -[v, u, w] = [v, w, u] = \langle v \wedge w, u \rangle = \langle u, v \wedge w \rangle.$$

3. Pour tous u, v de E , $\langle u \wedge v, u \rangle = [u, v, u] = 0$, de même $\langle u \wedge v, v \rangle = [u, v, v] = 0$ (car le produit mixte est un déterminant), d'où le vecteur $u \wedge v$ est orthogonal à u et à v .

4. Si u, v sont libres, on la complète en une base $\{u, v, w\}$, alors $\langle u \wedge v, w \rangle = [u, v, w] \neq 0$ ce qui prouve que $u \wedge v \neq 0$. En particulier, on a

$$[u, v, u \wedge v] = \langle u \wedge v, u \wedge v \rangle = \|u \wedge v\|^2 > 0,$$

ce qui prouve que $\{u, v, u \wedge v\}$ est une base directe de E .

5. (i) Si u, v sont liés, alors Pour tout $w \in E$, on a $\langle u \wedge v, w \rangle = [u, v, w] = 0$ (car le produit mixte est un déterminant), donc le vecteur $u \wedge v$ est orthogonal à tout le monde, **i.e.** $u \wedge v = 0$.

(ii) Réciproquement, il suffit de démontrer que u, v sont libres, alors $u \wedge v \neq 0$.

Cela a été démontré dans la propriété 4. ■

Proposition 1.11

Soient (E, \langle, \rangle) un espace euclidien orienté de dimension 3 et $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base ortho-normée directe de E . Alors :

1. $e_1 \wedge e_2 = e_3, e_2 \wedge e_3 = e_1$ et $e_3 \wedge e_1 = e_2$.
2. Pour tous $u = (u_1, u_2, u_3)$ et $v = (v_1, v_2, v_3)$, alors

$$u \wedge v = \left(\begin{array}{c} \left| \begin{array}{cc} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{array} \right|, - \left| \begin{array}{cc} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{array} \right| \end{array} \right).$$

Démonstration

- On a, $\langle e_1 \wedge e_2 - e_3, e_1 \rangle = [e_1, e_2, e_1] - \langle e_1, e_3 \rangle = 0$, donc $e_1 \wedge e_2 - e_3$ est orthogonal à e_1 . De même il est orthogonal à e_2 et à e_3 . il est orthogonal à tout le monde, **i.e.** $e_1 \wedge e_2 = e_3$. Les deux autres formules s'en déduisent car $\{e_2, e_3, e_1\}$ et $\{e_3, e_1, e_2\}$ sont aussi des bases orthonormées directes.
- Pour tous $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ et $w = (w_1, w_2, w_3)$, alors

$$\begin{aligned} \langle u \wedge v, w \rangle &= [u, v, w] \\ &= \det(u, v, w) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} w_1 - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} w_2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} w_3. \end{aligned}$$

■

Proposition 1.12

Soient (E, \langle, \rangle) un espace euclidien orienté de dimension 3 et $u, v, w \in E$. alors,

- $u \wedge (v \wedge w) = \langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w$ (formule du double produit vectoriel),
- $u \wedge (v \wedge w) + v \wedge (w \wedge u) + w \wedge (u \wedge v) = 0$ (identité de Jacobi),
- $\|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2$ (identité de Lagrange).
- $\|u \wedge v\| = \|u\| \|v\| \sin \theta$, $\theta \in [0, \pi]$ l'angle non orienté entre u et v .

Démonstration

- (i) Si l'un des trois vecteurs est nul, alors il est clair que la proposition est vérifiée. Donc dans la suite, on peut supposer que les trois vecteurs sont non nuls.
 - Si (v, w) est lié, alors $v \wedge w = 0$, donc $u \wedge (v \wedge w) = 0$. D'autre part, puisque v et w sont non nuls, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que $w = \alpha v$, donc on aura $\langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w = \langle u, \alpha v \rangle v - \langle u, v \rangle \alpha v = \alpha \langle u, v \rangle v - \alpha \langle u, v \rangle v = 0$. Donc, dans ce cas, la proposition est vérifiée.
 - Si (v, w) est libre, alors la famille $\{v, w, v \wedge w\}$ est une base directe de E , soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ son orthonormalisée, c'est encore une base directe. Écrivons les coordonnées dans cette base,

$v = \alpha e_1, w = \beta e_1 + \gamma e_2$ et $u = \lambda e_1 + \mu e_2 + \eta e_3$. On a alors,

$$u \wedge (v \wedge w) = (\lambda e_1 + \mu e_2 + \eta e_3) \wedge (\alpha \gamma e_3) = -\lambda \alpha \gamma e_2 + \mu \alpha \gamma e_1,$$

et

$$\langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w = \alpha(\lambda \beta + \mu \gamma) e_1 - \alpha \lambda (\beta e_1 + \gamma e_2) = -\lambda \alpha \gamma e_2 + \mu \alpha \gamma e_1.$$

d'où le résultat.

2. En utilisant la formule du double produit vectoriel, on aura

$$\begin{aligned} u \wedge (v \wedge w) + v \wedge (w \wedge u) + w \wedge (u \wedge v) &= \langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w \\ &\quad + \langle v, u \rangle w - \langle v, w \rangle u \\ &\quad + \langle w, v \rangle u - \langle w, u \rangle v \\ &= 0. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \|u \wedge v\|^2 &= \langle u \wedge v, u \wedge v \rangle = [u, v, u \wedge v] \\ &= [v, u \wedge v, u] = \langle v \wedge (u \wedge v), u \rangle \\ &= \langle \langle v, v \rangle u - \langle v, u \rangle v, u \rangle \\ &= \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle - \langle u, v \rangle \langle u, v \rangle \\ &= \|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2. \end{aligned}$$

4. En utilisant l'identité de Lagrange et la formule (1.2), on obtient

$$\begin{aligned} \|u \wedge v\|^2 + \langle u, v \rangle^2 &= \|u\|^2 \|v\|^2 \Rightarrow \|u \wedge v\|^2 + \|u\|^2 \|v\|^2 \cos^2 \theta = \|u\|^2 \|v\|^2 \\ &\Rightarrow \|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &\Rightarrow \|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \|u \wedge v\| = \|u\| \|v\| \sin \theta.$$

1.3 Espaces affines euclidiens

Dans cette partie \mathcal{E} est un \mathbb{R} -espace affine de direction E est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

1.3.1 Structure d'espace affine euclidien

Définition 1.19

Un espace affine euclidien est un \mathbb{R} -espace affine \mathcal{E} , sa direction E est un \mathbb{R} -espace vectoriel euclidien, i.e. E de dimension finie et muni d'un produit scalaire, et on note $(\mathcal{E}, E, \langle, \rangle)$.

Proposition-Définition 1.3

Soient $(\mathcal{E}, E, \langle, \rangle)$ un espace affine euclidien et $d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ une application définie par $d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$. Alors d est une distance sur \mathcal{E} , i.e. elle vérifie : pour tous $A, B, C \in \mathcal{E}$,

1. $d(A, B) \geq 0$ (positivité),
2. $d(A, B) = d(B, A)$ (symétrie),
3. $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$ (inégalité triangulaire),
4. $d(A; B) = 0 \Leftrightarrow A = B$ (séparation).

On l'appelle distance euclidienne sur \mathcal{E} associée à la norme euclidienne $\|\cdot\|$ de E .

Démonstration

La preuve découle immédiatement de la proposition 1.5. ■

Remarque 1.5

L'espace affine euclidien $(\mathcal{E}, E, \langle, \rangle)$ est muni la distance d , est un espace métrique.

Définition 1.20

Soient $(\mathcal{E}, E, \langle, \rangle)$ un espace affine euclidien et A, B, C sont trois points de \mathcal{E} avec A distinct de B et C . L'angle géométrique (non orienté) entre les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} noté \widehat{ABC} est le réel

$$\widehat{ABC} = \arccos \left(\frac{\langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle}{\|\vec{AB}\| \|\vec{AC}\|} \right) \in [0, \pi]. \quad (1.4)$$

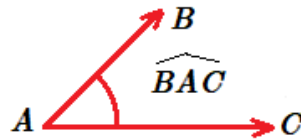


FIGURE 1.1 – Angle non orienté \widehat{ABC} .

1.3.2 Sous espaces affines orthogonaux

Définition 1.21

Soient $(\mathcal{E}, E, \langle, \rangle)$ un espace affine euclidien et \mathcal{F}, \mathcal{G} deux sous espaces affines de \mathcal{E} dirigés respectivement par F, G (F, G deux sous espaces vectoriels de E).

1. On dit que \mathcal{F} et \mathcal{G} sont orthogonaux si F et G le sont. On note alors $\mathcal{F} \perp \mathcal{G}$.
2. On dit que \mathcal{F} et \mathcal{G} sont perpendiculaires s'ils sont orthogonaux et $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$.
3. On dit que \mathcal{F} et \mathcal{G} sont supplémentaires orthogonaux si F et G le sont. On note alors $\mathcal{E} = \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$.

Définition 1.22

Soient $(\mathcal{E}, E, \langle, \rangle)$ un espace affine euclidien et \mathcal{H} un hyperplan affine de \mathcal{E} dirigé par H (H un hyperplan vectoriel de E).

1. On appelle vecteur normal à \mathcal{H} tout vecteur non nul orthogonal à H .
2. On dit qu'un hyperplan affine est orthogonal à une droite affine lorsque le vecteur directeur de la droite est un vecteur normal à l'hyperplan affine.

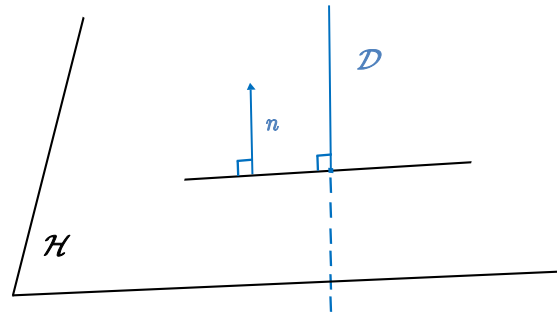


FIGURE 1.2 – Hyperplan affine \mathcal{H} orthogonal à la droite affine \mathcal{D} de vecteur directeur n .

Remarque 1.6

Si un hyperplan \mathcal{H} et une droite \mathcal{D} sont orthogonaux, alors ils sont automatiquement supplémentaires orthogonaux car $H \perp D$, $H \cap D = \{0\}$ et $\dim H + \dim D = \dim E$, donc sécants en un point i.e. \mathcal{H} et \mathcal{D} sont perpendiculaires. Où \mathcal{H} (resp. \mathcal{D}) est dirigé par H un hyperplan vectoriel de E (resp. D une droite vectorielle de E).

Exemple 1.10

Dans \mathbb{R}^3 , le plan affine d'équation $2x - y + z - 3 = 0$ passe par le point $(1, 0, 1)$ et possède comme vecteur normal le vecteur $n = (2, -1, 1)$.

Définition 1.23

Soient $(\mathcal{E}, E, \langle, \rangle)$ un espace affine euclidien et \mathcal{D} une droite affine de \mathcal{E} et A un point de \mathcal{E} . On appelle distance de A à \mathcal{D} le réel

$$d(A, \mathcal{D}) = \inf_{M \in \mathcal{D}} \|\overrightarrow{AM}\|.$$

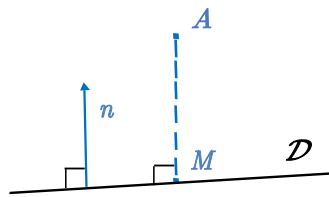


FIGURE 1.3 – Distance d'un point à une droite.

Proposition 1.13

Soit \mathcal{D} une droite affine de \mathcal{E} d'équation affine $ax + by + c = 0$, et soit $A = (x_0, y_0) \in \mathcal{E}$, alors :

$$d(A, \mathcal{D}) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Démonstration

Le vecteur $n = (a, b)$ est un vecteur normal à \mathcal{D} , et $M(x, y)$ est le projeté orthogonal de A sur \mathcal{D} , alors $\overrightarrow{AM} // n$ et $M \in \mathcal{D}$, si bien que :

$$d(A, \mathcal{D}) = \|\overrightarrow{AM}\| = \left| \left\langle \frac{n}{\|n\|}, \overrightarrow{AM} \right\rangle \right| = \frac{|a(x - x_0) + b(y - y_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax + by - ax_0 - by_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

et on conclut grâce au fait que $-ax_0 - by_0 = c$, puisque $M \in \mathcal{D}$. ■

Exercices**Exercice 1.3**

Dans l'espace affine \mathbb{R}^3 muni le repère $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$, où \mathcal{B} la base canonique. Soient les points $A(-2, 0, 2)$, $B(1, 1, 1)$, $C(1, 1, -2)$ et G tels que : $-3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + 4\overrightarrow{GC} = 0$.

- Déterminer \overrightarrow{OG} en fonction de \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} et \overrightarrow{OC} .
- Déterminer X_G la matrice des coordonnées de G dans le repère \mathcal{R} .
- Déterminer X'_G dans le repère $\mathcal{R}' = (O', \mathcal{B}')$ où $O'(1, 1, 1)$,
 $\mathcal{B}' = \{e'_1 = (1, 0, 1), e'_2 = (0, -1, 1), e'_3 = (1, 1, -1)\}$.

Exercice 1.4

Montrer que :

$$1) \mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 2a + b - c & a - b + c \\ 1 + a + b - 2c & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \text{ est un hyperplan de } M_2(\mathbb{R}).$$

$$2) \mathcal{F} = \{P(x) \in \mathbb{R}_2[X], P(1) = 2\} \text{ est un hyperplan de } \mathbb{R}_2[X].$$

Exercice 1.5

Soit l'application

$$\begin{aligned} \langle, \rangle : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) &\mapsto \text{Tr}({}^t A.B) \end{aligned}$$

- Montre que $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \langle, \rangle)$ est un espace euclidien.
- Montre que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : |\text{Tr}({}^t A)| \leq \sqrt{n \cdot \text{Tr}({}^t A.A)}$.
- Déterminer $(\text{vect}(I_n))^\perp$.

Exercice 1.6

Dans \mathbb{R}^4 muni du produit scalaire usuel, on pose : $V_1 = (1, 2, -1, 1)$ et $V_2 = (0, 3, 1, -1)$.

On pose $F = \text{vect}(V_1, V_2)$.

Déterminer une base orthonormale de F et un système d'équations de F .

Exercice 1.7

Dans \mathbb{R}^3 muni sa structure euclidien usuelle.

Soit le famille $B = \{u_1 = (1, 0, 0), u_2 = (1, 1, 0), u_3 = (1, 1, 1)\}$.

Vérifier que B est une base de \mathbb{R}^3 et l'orthonormalisée.

Exercice 1.8

Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3 et $u, v, w \in E$.

Montrer que

1. $u \wedge (v \wedge w) = (u \wedge v) \wedge w$ si et seulement si $\{u, v, u \wedge w\}$ est une famille liée.
2. $[u \wedge v, v \wedge w, w \wedge u] = [u, v, w]^2$.

Exercice 1.9

Dans \mathbb{R}^3 , on donne le point $M(0, 0, 1)$ et la droite D définie par

$$\begin{cases} 2x - y + 2z - 3 = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases}$$

Déterminer la distance de M à D .

Exercice 1.10

Dans \mathbb{R}^3 , déterminer la perpendiculaire commune aux droites

$$D \begin{cases} x + y - 3z + 4 = 0 \\ 2x - z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad D' \begin{cases} x = z - 1 \\ y = z - 1 \end{cases}$$

CHAPITRE 2

COURBES PARAMÉTRÉES

Sommaire

2.1 Généralités sur les courbes paramétrées	33
2.1.1 Définitions et exemples sur courbes	33
2.1.2 Courbe paramétrée régulière	36
2.2 Longueur d'une courbe	38
2.2.1 Longueur d'une courbe, abscisse curviligne	38
2.2.2 Paramétrisation naturelle	39
2.2.3 Vecteur tangent unitaire, vecteur normal unitaire	41
Exercices	42

Dans ce chapitre, \mathbb{R}^n , ($n \in \mathbb{N}^*$) muni du produit scalaire usuel noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\| \cdot \|$ la norme euclidienne induite.

2.1 Généralités sur les courbes paramétrées

2.1.1 Définitions et exemples sur courbes

Définitions 2.1

Une courbe paramétrée de \mathbb{R}^n est une application

$$\begin{aligned}\gamma : I &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))\end{aligned}$$

de classe $C^{+\infty}$, où I un intervalle de \mathbb{R} .

1. t est appelé le paramètre de la courbe paramétrée.
2. L'image de I par γ est appelée le support de γ , noté $\gamma(I) = \Gamma$. On dit que dans ce cas Γ est une courbe géométrique et que γ est une paramétrisation de Γ .
3. Si $[a, b] \subset I$, la restriction de γ sur $[a, b]$, $\gamma|_{[a,b]}$ est appelé un arc de γ compris entre les points $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$.
4. La dérivée $\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t))$ est appelée le vecteur tangent à la courbe paramétrée γ au point $\gamma(t)$.

Exemple 2.1 (Graphe d'une fonction)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^{+\infty}$ sur l'intervalle I de \mathbb{R} .

$$\begin{aligned}\gamma : I &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \gamma(t) = (t, f(t))\end{aligned}$$

est une courbe paramétrée de \mathbb{R}^2 , son support est le graphe de f .

Le vecteur tangent de γ est $\gamma'(t) = (1, f'(t))$, où f' est la dérivée de f .

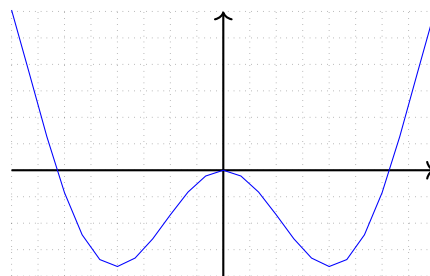


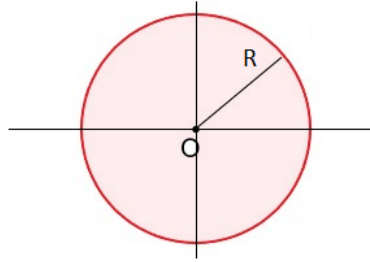
FIGURE 2.1 – Graphe de la fonction $f : t \mapsto f(t) = -t \sin t$.

Exemple 2.2 (Cercle)

$$\begin{aligned}\delta : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \delta(t) = (R \cos t, R \sin t), \quad R > 0.\end{aligned}$$

est une courbe paramétrée son support est le cercle de centre O et de rayon R .

Le vecteur tangent de δ est $\delta'(t) = (-R \sin t, R \cos t)$.

FIGURE 2.2 – Cercle de centre O et de rayon R .**Exemple 2.3 (Horoptère)**

Horoptère est une courbe paramétrée définie par

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \gamma(t) = \left(\frac{2a}{1+t^2}, bt, \frac{2at}{1+t^2} \right), \quad a, b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

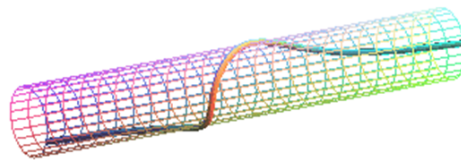


FIGURE 2.3 – Courbe d'Horoptère.

Exemple 2.4 (Hélice)

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \alpha(t) = (R \cos t, R \sin t, rt), \quad R > 0, \quad r \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

est une courbe paramétrée son support est l'hélice circulaire de rayon R et de pas r .

Le vecteur tangent de α est $\alpha'(t) = (-R \sin t, R \cos t, r)$.

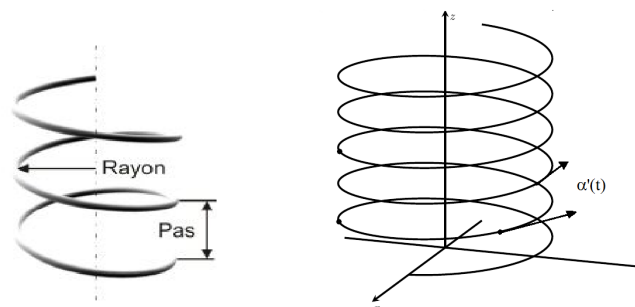


FIGURE 2.4 – Hélice circulaire.

Exemple 2.5 (Cycloïde)

Cycloïde est une courbe paramétrée définie par

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \gamma(t) = (R(t - \sin t), R(1 - \cos t)), \quad R \in \mathbb{R}_+^*. \end{aligned}$$

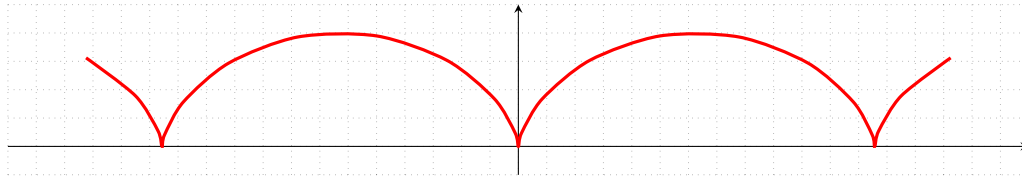


FIGURE 2.5 – Cycloïde.

Exemple 2.6 (Astroïde)

Astroïde est une courbe paramétrée définie par :

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \gamma(t) = (R \cos^3 t, R \sin^3 t), \quad R \in \mathbb{R}_+^*. \end{aligned}$$

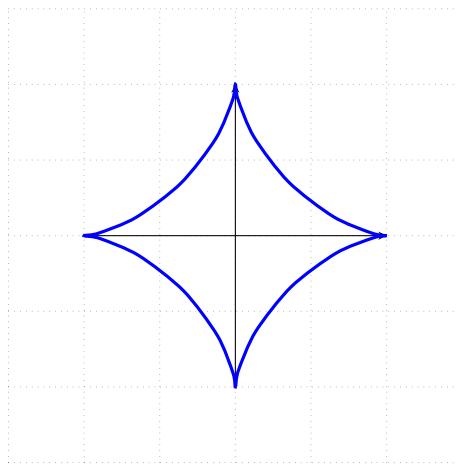


FIGURE 2.6 – Astroïde.

Exemple 2.7 (Tractrice)

Tractrice est une courbe paramétrée définie par

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \gamma(t) = \left(t - \tanh t, \frac{1}{\cosh t}\right). \end{aligned}$$

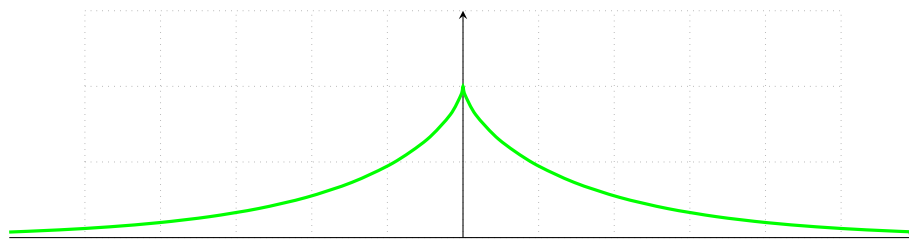


FIGURE 2.7 – Tractrice.

2.1.2 Courbe paramétrée régulière

Définitions 2.2

Soient $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée et $t_0 \in I$

La courbe γ a un point régulier en t_0 si $\gamma'(t_0) \neq 0$. Sinon, γ a un point stationnaire en t_0 .

La courbe γ est régulière si $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$.

Exemple 2.8

Soit la courbe paramétrée

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \gamma(t) = (t^3, t^2). \end{aligned}$$

Le vecteur tangent de γ est $\gamma'(t) = (3t^2, 2t)$.

Le point $\gamma(0)$ est un point stationnaire, si $t \neq 0$ tout les point $\gamma(t)$ sont des point réguliers.

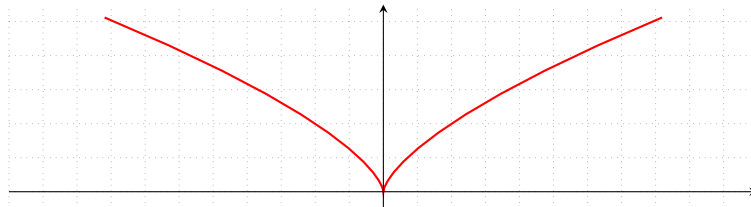


FIGURE 2.8 – Courbe paramétrée $\gamma(t) = (t^3, t^2)$.

Définitions 2.3

Soient $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée, $t_0 \in I$, $p \in \mathbb{N}$ et $p \leq n$. La courbe γ a un point p -régulier en t_0 si la famille $\{\gamma'(t_0), \gamma''(t_0), \dots, \gamma^{(p)}(t_0)\}$ est libre.

Si $p = 2$ on dit que la courbe γ a un point birégulier en t_0 .

Exemple 2.9

Soit la courbe paramétrée

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \gamma(t) = (t^3, t). \end{aligned}$$

On a $\gamma'(t) = (3t^2, 1)$, $\gamma''(t) = (6t, 0)$ et $\det(\gamma'(t), \gamma''(t)) = -6t$.

Le point $\gamma(0)$ n'est pas birégulier, si $t \neq 0$ tout les point $\gamma(t)$ sont des point biréguliers.

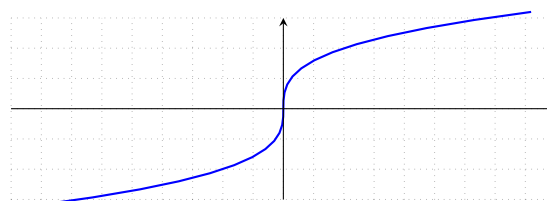


FIGURE 2.9 – Courbe paramétrée $\gamma(t) = (t^3, t)$.

Définition 2.1

On dit que deux courbes paramétrées $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont équivalentes, et on note par $\gamma \sim \alpha$, s'il existe un $C^{+\infty}$ -difféomorphisme $\phi : J \rightarrow I$ tel que $\alpha = \gamma \circ \phi$. On dira que ϕ est un changement de paramétrage.

Sur l'ensemble des courbes paramétrées de \mathbb{R}^n , \sim est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalences de la relation \sim sont appelées courbes géométriques. Tout représentant d'une courbe géométrique est une paramétrisation de cette courbe.

Remarques 2.1

Si γ et α sont équivalents, alors

1. γ et α représentant la même courbe géométrique, **i.e.** ont le même support.
2. γ est régulière $\Leftrightarrow \alpha$ est régulière.
3. Si $\phi'(t) > 0$ pour tout $t \in J$, on dit que γ et α définissent la même orientation, sinon on dit qu'elles définissent des orientations opposées.

Exercice 2.1

Soient les courbes paramétrées :

$$\begin{aligned} \gamma : [-1, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2 & \text{et} & & \alpha : [0, \pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t, \sqrt{1-t^2}) & & & t &\mapsto (\cos t, \sin t) \end{aligned}$$

Montrer γ et α que sont équivalentes.

Solution

Soit l'application

$$\begin{aligned} \phi : [0, \pi] &\rightarrow [-1, 1] \\ t &\mapsto \cos t \end{aligned}$$

est un $C^{+\infty}$ -difféomorphisme car la fonction \cos est de classe $C^{+\infty}$ et strictement décroissante sur $]0, \pi[$ et sa réciproque \arccos est de classe $C^{+\infty}$.

De plus $\alpha = \gamma \circ \phi$, d'où ϕ est un changement de paramétrage, **i.e.** γ et α sont équivalentes.

Pour tout $t \in]0, \pi[$, $\phi'(t) = -\sin t < 0$. Donc γ et α définissent des orientations opposées.

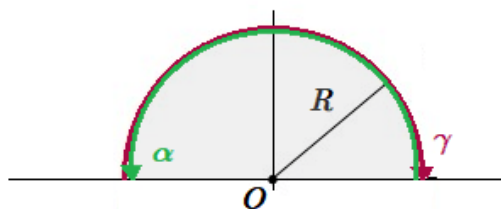


FIGURE 2.10 – Demi cercle.

2.2 Longueur d'une courbe

2.2.1 Longueur d'une courbe, abscisse curviligne

Définition 2.2

Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée et $[a, b]$ un intervalle incluse dans I .

1. La longueur de l'arc $\gamma|_{[a,b]}$ est définie par

$$l_{\gamma|_{[a,b]}} = \int_a^b \|\gamma'(u)\| du.$$

2. L'abscisse curviligne d'origine $\gamma(a)$ de γ est la fonction

$$\begin{aligned} \phi : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \phi(t) = \int_a^t \|\gamma'(u)\| du = l_{\gamma|_{[a,t]}}. \end{aligned}$$

Exemple 2.10

Soit l'application

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \gamma(t) = (R \cos t, R \sin t, rt), \quad R > 0, \quad r \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

La longueur de l'arc $\gamma|_{[0,1]}$ d'hélice circulaire est donné par

$$l_{\gamma|_{[0,1]}} = \int_0^1 \|\gamma'(u)\| du = \int_0^1 \sqrt{R^2 + r^2} du = \sqrt{R^2 + r^2}.$$

Exercice 2.2

Soit l'application

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \alpha(t) = (t^3, t^2). \end{aligned}$$

Déterminer l'abscisse curviligne d'origine $\alpha(0)$ de α .

Solution

L'abscisse curviligne d'origine $\alpha(0)$ de α est donné par $\phi(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du$

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \int_0^t \|\alpha'(u)\| du \\ &= \int_0^t \sqrt{9u^4 + 4u^2} du \\ &= \int_0^t 3u \sqrt{u^2 + \frac{4}{9}} du \\ &= \frac{3}{2} \int_0^t 2u \sqrt{u^2 + \frac{4}{9}} du \\ &= \left[\sqrt{\left(u^2 + \frac{4}{9}\right)^3} \right]_0^t \\ &= \sqrt{\left(t^2 + \frac{4}{9}\right)^3} - \frac{8}{27}. \end{aligned}$$

2.2.2 Paramétrisation naturelle

Définition 2.3

Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée régulière. On dit que γ est paramétrée par sa longueur (naturellement) ou γ une paramétrisation naturelle si pour tout $a, b \in I, a < b$,
 $l_{\gamma/[a,b]} = b - a$.

Exemple 2.11

Soit l'application

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \alpha(t) = \left(r \cos \frac{t}{r}, r \sin \frac{t}{r} \right), \quad r > 0. \end{aligned}$$

On a $\alpha'(t) = \left(-\sin \frac{t}{r}, \cos \frac{t}{r} \right)$ et $\|\alpha'(t)\| = 1$,
 pour tout $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, on a

$$\begin{aligned} l_{\alpha/[a,b]} &= \int_a^b \|\alpha'(u)\| du \\ &= \int_a^b 1 du \\ &= b - a. \end{aligned}$$

Proposition 2.1

Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée régulière, alors γ est paramétrée par sa longueur si et seulement si pour tout $s \in I, \|\gamma'(s)\| = 1$.

Démonstration

1. Supposons que pour tout $s \in I, \|\gamma'(s)\| = 1$, alors pour tout $a, b \in I, a < b$, on a

$$\begin{aligned} l_{\gamma/[a,b]} &= \int_a^b \|\gamma'(u)\| du \\ &= \int_a^b 1 du \\ &= b - a. \end{aligned}$$

2. Réciproquement, supposons que γ est paramétrée par sa longueur.

Soit $a \in I, a$ (fixé).

(i) Pour tout $s \geq a$, on a $l_{\gamma/[a,s]} = s - a$, d'autre part $l_{\gamma/[a,s]} = \int_a^s \|\gamma'(u)\| du$,
 mais la fonction $s \mapsto l_{\gamma/[a,s]}$ est dérivable de dérivée égale à $\|\gamma'(s)\|$.

Donc pour tout $s \geq a, \left(\int_a^s \|\gamma'(u)\| du \right)' = (s - a)',$ d'où $\|\gamma'(s)\| = 1$.

(ii) Pour tout $s \leq a$, on a $l_{\gamma/[s,a]} = a - s$, d'autre part

$$l_{\gamma/[s,a]} = \int_s^a \|\gamma'(u)\| du = - \int_a^s \|\gamma'(u)\| du,$$

mais la fonction $s \mapsto l_{\gamma/[s,a]}$ est dérivable de dérivée égale à $-\|\gamma'(s)\|$.

Donc pour tout $s \leq a$, $\left(-\int_a^s \|\gamma'(u)\| du\right)' = (a-s)'$, d'où $\|\gamma'(s)\| = 1$. ■

Proposition 2.2

Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée régulière. Alors il existe une courbe paramétrée par sa longueur $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ équivalente à γ .

Démonstration

Soient $a \in I$, ϕ est l'abscisse curviligne d'origine $\gamma(a)$.

$$\begin{aligned} \phi : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \phi(t) = \int_a^t \|\gamma'(u)\| du = l_{\gamma/[a,t]}. \end{aligned}$$

Posons $J = \phi(I)$, nous allons montrer que $\phi : I \rightarrow J$ est un $C^{+\infty}$ -difféomorphisme et que $\alpha = \gamma \circ \phi^{-1} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ équivalente à γ . En effet,

ϕ est surjective par définition, puisque ϕ est de classe $C^{+\infty}$, et $\phi'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0$ pour tout $t \in I$, alors ϕ est croissante donc est injective, d'où ϕ est bijective et ϕ^{-1} est de classe $C^{+\infty}$. Donc ϕ est $C^{+\infty}$ -difféomorphisme.

D'autre part on a, pour tout $t \in I$ il existe $s \in J$, $s = \phi(t) \Leftrightarrow t = \phi^{-1}(s)$

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= (\gamma \circ \phi^{-1})'(s) \\ &= \gamma'(\phi^{-1}(s))(\phi^{-1}(s))' \\ &= \gamma'(t) \frac{1}{\phi'(t)} \\ &= \gamma'(t) \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}, \end{aligned}$$

d'où pour tout $s \in J$, $\|\alpha'(s)\| = 1$. ■

Remarque 2.1

De la démonstration précédente, en établir la formule suivante.

$$\frac{ds}{dt} = \phi'(t) = \|\gamma'(t)\|. \quad (2.1)$$

Lemme 2.1

Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée par sa longueur, alors pour tout $s \in I$

$$\langle \gamma'(s), \gamma''(s) \rangle = 0, \text{ i.e. } \gamma'(s) \perp \gamma''(s).$$

Démonstration

On a, pour tout $s \in I$, $\|\gamma'(s)\| = 1 \Leftrightarrow \langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle = 1$.

En dérivant cette égalité on obtient $\langle \gamma'(s), \gamma''(s) \rangle = 0 \Leftrightarrow \gamma'(s) \perp \gamma''(s)$. ■

2.2.3 Vecteur tangent unitaire, vecteur normal unitaire

Définition 2.4

Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée régulière.

1. Le vecteur $T(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ est appelé le vecteur tangent unitaire de γ en t .
2. Le vecteur $N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$ est appelé le vecteur normal unitaire de γ en t .

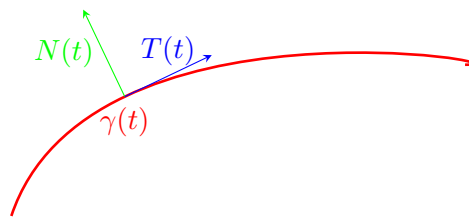


FIGURE 2.11 – Vecteur tangent $T(t)$ et vecteur normal $N(t)$ au point $\gamma(t)$.

Exemple 2.12

Soit la courbe paramétrée

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^t \cos t, \frac{1}{\sqrt{2}}e^t \sin t \right). \end{aligned}$$

D'après un calcul simple, on trouve

$$\gamma'(t) = \frac{e^t}{\sqrt{2}}(\cos t - \sin t, \cos t + \sin t) \text{ et } |\gamma'(t)| = e^t.$$

Le vecteur tangent unitaire est

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t - \sin t, \cos t + \sin t),$$

$$T'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t - \sin t, \cos t - \sin t) \text{ et } |T'(t)| = 1.$$

Le vecteur normal unitaire est

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t - \sin t, \cos t - \sin t).$$

Proposition 2.3

Soient $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux courbes paramétrées régulières sont équivalentes,

i.e. il existe un $C^{+\infty}$ -difféomorphisme $\phi : I \rightarrow J$, tel que, pour tous $t \in I$ et $s \in J$,

$\gamma(t) = (\alpha \circ \phi)(t) = \alpha(s)$, alors

$$T_\gamma(t) = \pm T_\alpha(s), \quad N_\gamma(t) = N_\alpha(s), \quad T'_\gamma(t) = |\phi'(t)|T'_\alpha(s).$$

Démonstration

Soient $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux courbes paramétrées régulières sont équivalentes,

alors il existe un $C^{+\infty}$ -difféomorphisme $\phi : I \rightarrow J$ tel que $\gamma = \alpha \circ \phi$.

On a pour tout $t \in I$ il existe $s \in J$, $s = \phi(t) \Leftrightarrow t = \phi^{-1}(s)$.

$$T_\gamma(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, \quad T_\alpha(s) = \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|} \text{ et } \gamma'(t) = \alpha'(\phi(t))\phi'(t) = \alpha'(s)\phi'(t).$$

Donc

$$T_\gamma(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{\alpha'(s)\phi'(t)}{\|\alpha'(s)\phi'(t)\|} = \frac{\phi'(t)}{|\phi'(t)|} T_\alpha(s) = \pm T_\alpha(s).$$

De même $N_\gamma(t) = \frac{T'_\gamma(t)}{\|T'_\gamma(t)\|}$ et $N_\alpha(s) = \frac{T'_\alpha(s)}{\|T'_\alpha(s)\|}$, alors

$$T'_\gamma(t) = \pm (T_\alpha(\phi(t)))' = \pm T'_\alpha(\phi(t))\phi'(t) = \frac{\phi'(t)}{|\phi'(t)|} T'_\alpha(s)\phi'(t) = |\phi'(t)| T'_\alpha(s),$$

et donc

$$N_\gamma(t) = \frac{T'_\gamma(t)}{\|T'_\gamma(t)\|} = \frac{|\phi'(t)| T'_\alpha(s)}{\| |\phi'(t)| T'_\alpha(s) \|} = \frac{T'_\alpha(s)}{\|T'_\alpha(s)\|} = N_\alpha(s).$$

Corollaire 2.1

Le signe du vecteur tangent unitaire dépend de l'orientation du paramétrisation choisie, par contre lorsqu'il existe le vecteur normal unitaire ne dépend pas du paramétrisation choisie.

Exercices

Exercice 2.3

Soit les courbes paramétrées :

$$\begin{aligned} \gamma :]0, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R}^2 & \alpha : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \left(t + \frac{1}{t}, t - \frac{1}{t}\right) & t &\mapsto (2 \cosh t, 2 \sinh t). \end{aligned}$$

1. Montrer que γ équivalente à α .
2. Déterminer une équation cartésienne de support de γ .

Exercice 2.4

Soient γ_1 et γ_2 deux courbes paramétrées telles que :

$$\begin{aligned} \gamma_1 :]-1, 1[&\rightarrow \mathbb{R}^2 & \gamma_2 :]0, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t, \sqrt{1-t^2}) & t &\mapsto \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right). \end{aligned}$$

1. Montrer que γ_1 et γ_2 sont équivalentes.
2. Déterminer le support de γ_2 .

Exercice 2.5

Soit l'application

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \alpha(t) = (t^3, t^2). \end{aligned}$$

Déterminer l'abscisse curviligne d'origine $\alpha(0)$ de α .

Exercice 2.6

On considère la courbe paramétrée :

$$\begin{aligned}\gamma : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (R \cos^3 t, R \sin^3 t), \quad R \in \mathbb{R}_+^*.\end{aligned}$$

1. Déterminer les points où la courbe γ est régulière.
2. Déterminer la longueur de l'arc $\gamma \setminus [0, 2\pi]$.

Exercice 2.7

On considère la courbe paramétrée :

$$\begin{aligned}\gamma : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (R(t - \sin t), R(1 - \cos t)), \quad R \in \mathbb{R}_+^*.\end{aligned}$$

1. Déterminer les points où la courbe γ est régulière.
2. Déterminer la longueur de l'arc $\gamma \setminus [0, 2\pi]$.

Exercice 2.8

On considère la courbe paramétrée :

$$\begin{aligned}\gamma : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto ((1 - \cos t) \cos t, (1 - \cos t) \sin t).\end{aligned}$$

1. Déterminer les points où la courbe γ est régulière.
2. Déterminer la longueur de l'arc $\gamma \setminus [0, 2\pi]$.

Exercice 2.9

On considère l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b \in \mathbb{R}^*.$$

1. Donner une paramétrisation de l'ellipse
2. Calculer la longueur de l'ellipse.

Exercice 2.10

On considère la courbe paramétrée :

$$\begin{aligned}\gamma : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t - \sinh t \cosh t, 2 \cosh t).\end{aligned}$$

Déterminer une abscisse curviligne d'origine $\gamma(0)$ de γ .

CHAPITRE 3

COURBES PLANES

Sommaire

3.1	Étude locale des courbes planes	45
3.1.1	Tangente	45
3.1.2	Allure de la courbe	47
3.1.3	Branches infinies	51
3.2	Courbes planes en coordonnées polaires	53
3.3	Courbure	56
3.4	Tracé des courbes paramétrées planes	60
3.4.1	En coordonnées cartésiennes	60
3.4.2	En coordonnées polaires	61
	Exercices	62

3.1 Étude locale des courbes planes

Le plan affine \mathbb{R}^2 est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Un point M de coordonnées (x, y) est le point $M = O + x\vec{i} + y\vec{j}$.

3.1.1 Tangente

Définition 3.1.

Soient $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée, $t_0 \in I$ et $u_0 \in \mathbb{R}^2$.

La droite $D = \gamma(t_0) + \text{vect}(u_0)$ (passant par le point $\gamma(t_0)$ et dirigée par le vecteur u_0 en t_0) est appelée tangente à γ en t_0 si

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \lambda(t)u_0 + \lambda(t)\varepsilon(t) \quad \text{avec} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t) = (0, 0)$$

où λ une fonction définie sur I et ε une fonction vectorielle définie sur I .

Exemple 3.1

La courbe paramétrée

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \alpha(t) = (t^3, \sin t) \end{aligned}$$

admet une tangente verticale en $t = 0$ dirigée par le vecteur $u_0 = (0, 1)$.

En effet : on a, $\alpha(t) = \alpha(0) + \sin t(0, 1) + \sin t \left(\frac{t^3}{\sin t}, 0 \right)$ et $\left(\frac{t^3}{\sin t}, 0 \right) \xrightarrow{t \rightarrow 0} (0, 0)$.

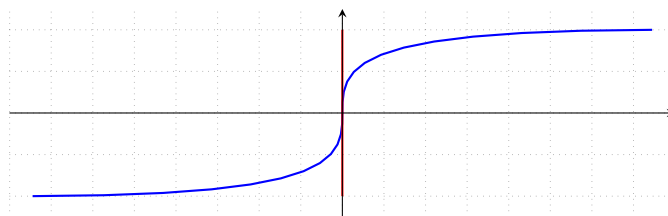


FIGURE 3.1 – Courbe paramétrée $\gamma(t) = (t^3, \sin t)$.

Proposition 3.1

Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée régulière, alors γ admet une tangente dirigée par le vecteur $\gamma'(t_0)$ en tout $t_0 \in I$.

Démonstration

Puisque γ est dérivable en tout $t_0 \in I$ alors

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)\gamma'(t_0) + (t - t_0)\varepsilon(t) \quad \text{avec} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t) = (0, 0).$$

Revenir à la définition 3.1.1 d'une tangente en posant $u_0 = \gamma'(t_0)$ et $\lambda(t) = (t - t_0)$. ■

Remarque 3.1

Nous avons vu que l'existence d'une tangente à la courbe paramétrée γ est liée à la dérivabilité de l'application γ . Cependant, il se peut que la courbe paramétrée γ admette une tangente sans que l'application γ ne soit dérivable.

Exemple 3.2

La courbe paramétrée

$$\begin{aligned}\gamma : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \gamma(t) = (\sqrt[3]{t}, |t|)\end{aligned}$$

admet une tangente horizontale en $t = 0$ dirigée par le vecteur $u_0 = (1, 0)$, bien que γ ne soit pas dérivable en $t = 0$.

En effet : on a, $\gamma(t) = \gamma(0) + \sqrt[3]{t}(1, 0) + \sqrt[3]{t}(0, \frac{|t|}{\sqrt[3]{t}})$ et $(0, \frac{|t|}{\sqrt[3]{t}}) \xrightarrow{t \rightarrow 0} (0, 0)$.

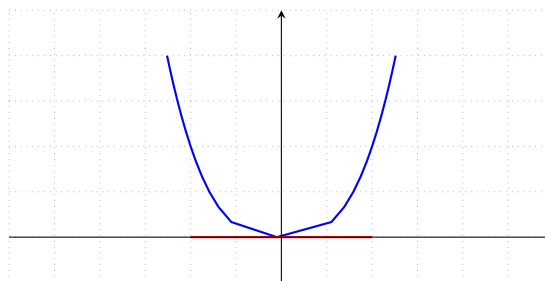


FIGURE 3.2 – Courbe paramétrée $\gamma(t) = (\sqrt[3]{t}, |t|)$.

Remarque 3.2

Dans le cas d'un point stationnaire, il y a généralement une tangente, la Proposition suivante le montre.

Proposition 3.2

Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée, supposons qu'il existe un entier $p \geq 1$ et un vecteur $u_0 \neq (0, 0)$ tels que :

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)^p u_0 + (t - t_0)^p \varepsilon(t) \quad \text{avec} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t) = (0, 0).$$

alors γ a une tangente dirigée par le vecteur u_0 en t_0 .

Démonstration

Revenir à la définition 3.1.1 d'une tangente en posant $\lambda(t) = (t - t_0)^p$. ■

Exemple 3.3

La courbe paramétrée

$$\begin{aligned}\gamma : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \gamma(t) = (t^3, -t^3 + t^5)\end{aligned}$$

admet une tangente en $t = 0$ dirigée par le vecteur $u_0 = (1, -1)$.

En effet : on a, $\gamma(t) = (0, 0) + t^3(1, -1) + t^3(0, t^2)$ et $(0, t^2) \xrightarrow{t \rightarrow 0} (0, 0)$.

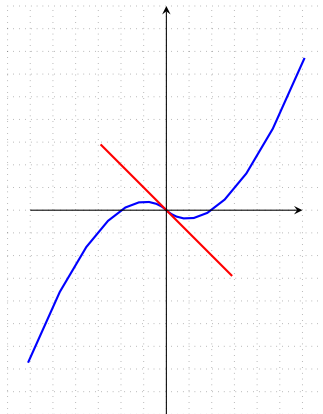


FIGURE 3.3 – Courbe paramétrée $\gamma(t) = (t^3, -t^3 + t^5)$.

Corollaire 3.1

Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée et si les dérivées $\gamma^{(n)}(t_0)$, $n \in \mathbb{N}^*$ ne sont pas toutes nulles, alors, γ admet une tangente en t_0 .

Démonstration

Soit $p \geq 1$ le plus petit entier tel que $\gamma^{(p)}(t_0) \neq (0, 0)$. D'après la formule de Taylor-Young

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \frac{(t - t_0)^p}{p!} \gamma^{(p)}(t_0) + (t - t_0)^p \varepsilon(t) \text{ avec } \lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t) = (0, 0).$$

En appliquant la Proposition 3.2, avec $u_0 = \frac{\gamma^{(p)}(t_0)}{p!}$. ■

3.1.2 Allure de la courbe

Définition 3.2

Soient $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée et D une droite qui passe par $\gamma(t_0)$ en $t_0 \in I$.

La courbe

1. bute sur la droite D en t_0 , si pour $t \neq t_0$ suffisamment proche de t_0 , les points $\gamma(t)$ sont tous du même côté de D .
2. traverse la droite D en t_0 ,
 - (i) si pour $t > t_0$ suffisamment proche de t_0 , les points $\gamma(t)$ se situent tous du même côté de D .
 - (ii) si pour $t < t_0$ suffisamment proche de t_0 , les points $\gamma(t)$ se situent tous de l'autre côté de D .

Définition 3.3

Soient $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée ayant une tangente D en $t_0 \in I$. La courbe paramétrée a

1. un point ordinaire en t_0 si en t_0 , la courbe bute sur la tangente et traverse toutes les autres droites qui passent par $\gamma(t_0)$.
2. un point d'inflexion en t_0 si en t_0 , la courbe traverse toutes les droites qui passent par $\gamma(t_0)$, (y compris la tangente).
3. un point de rebroussement de première espèce en t_0 si en t_0 , la courbe traverse la tangente et bute sur toutes les autres droites qui passent par $\gamma(t_0)$.
4. un point de rebroussement de seconde espèce en t_0 si en t_0 , la courbe bute sur toutes les droites qui passent par $\gamma(t_0)$ (y compris la tangente).

Théorème 3.1

Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée, supposons qu'il existe deux entiers $2 \leq p < q$ et deux vecteurs non colinéaires u_p et u_q tels que

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)^p u_p + (t - t_0)^q u_q + (t - t_0)^q \varepsilon(t)$$

avec $\lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t) = (0, 0)$. (3.1)

1. Si p est impair et q est pair, la courbe γ a un point ordinaire en t_0 .
2. Si p est impair et q est impair, la courbe γ a un point d'inflexion en t_0 .
3. Si p est pair et q est impair, la courbe γ a un point de rebroussement de première espèce en t_0 .
4. Si p est pair et q est pair, la courbe γ a un point de rebroussement de seconde espèce en t_0 .

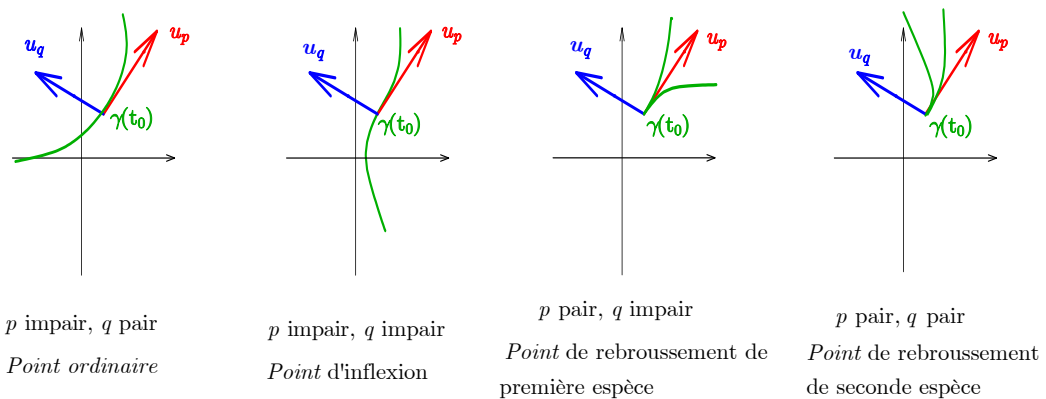


FIGURE 3.4 – Quatre cas possibles pour l'allure d'un point stationnaire.

Démonstration

En utilisant la formule (3.1) nous avons

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)^p u_p + (t - t_0)^p \varepsilon_1(t) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon_1(t) = (0, 0).$$

D'après la proposition 3.2, la courbe admet une tangente D dirigée par le vecteur u_p en t_0 .

Soit $D' \neq D$ une droite passant par $\gamma(t_0)$. Le vecteur u_p ne dirige pas la droite D' .

(i) Si p est pair, $(t - t_0)^p$ est positif pour $t \neq t_0$ suffisamment proche de t_0 , le point $\gamma(t)$ est du même côté de la droite D' que le point $\gamma(t_0) + u_p$. Donc, la courbe bute sur la droite D' .

(ii) Si p est impair, $(t - t_0)^p$ change de signe avec $t - t_0$. Pour $t > t_0$, le point $\gamma(t)$ est du même côté de D' que le point $\gamma(t_0) + u_p$ et pour $t < t_0$, le point $\gamma(t)$ est de l'autre côté de la droite D' . La courbe traverse donc la droite D' . Ensuite,

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + u(t) + v(t),$$

où $u(t) = (t - t_0)^p u_p$ et $v(t) = (t - t_0)^q (u_q + \varepsilon(t))$ avec $\lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t) = (0, 0)$.

Le vecteur $u(t)$ est colinéaire à u_p . Le point $\gamma(t_0) + u(t)$ appartient à la tangente D .

(iii) Si q est pair, $(t - t_0)^q$ est positif et pour $t \neq t_0$ suffisamment proche de t_0 , le point $\gamma(t)$ est du même côté de D que le point $\gamma(t_0) + u_q$. La courbe bute donc sur sa tangente.

(iv) Si q est impair, $(t - t_0)^q$ change de signe avec $t - t_0$. Pour $t > t_0$, le point $\gamma(t)$ est du même côté de D que le point $\gamma(t_0) + u_q$ et pour $t < t_0$, le point $\gamma(t)$ est de l'autre côté de D . La courbe traverse donc sa tangente. ■

Corollaire 3.2

Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée, alors tout point birégulier de γ est ordinaire.

Démonstration

D'après la formule de Taylor-Young, on a

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)\gamma'(t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2}\gamma''(t_0) + (t - t_0)^2\varepsilon(t),$$

avec $\lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t) = (0, 0)$.

En appliquant le Théorème 3.1, avec $p = 1$, $q = 2$, $u_p = \gamma'(t_0)$ et $u_q = \frac{\gamma''(t_0)}{2}$. ■

Exemple 3.4

On considère la courbe paramétrée γ définie sur \mathbb{R} par

$$\gamma(t) = (-t^3 + t^4, t^3).$$

En $t = 0$, nous avons $\gamma(t) = \gamma(0) + t^3(-1, 1) + t^4(1, 0) + t^4\varepsilon(t)$,

donc il y a un point ordinaire.

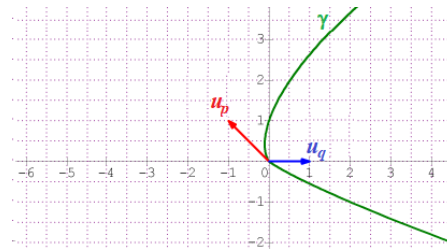


FIGURE 3.5 – Point ordinaire.

Exemple 3.5

On considère la courbe paramétrée γ définie sur \mathbb{R} par

$$\gamma(t) = (12(\sin t - t), t^3 + t^5).$$

En $t = 0$, nous avons $\gamma(t) = \gamma(0) + t^3(-2, 1) + t^5(\frac{1}{10}, 1) + t^5\varepsilon(t)$,
donc il y a un point d'inflexion.

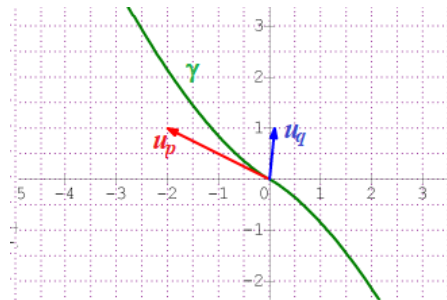


FIGURE 3.6 – Point d'inflexion.

Exemple 3.6

On considère la courbe paramétrée γ définie sur \mathbb{R} par

$$\gamma(t) = (t^2, t^2 + t^3).$$

En $t = 0$, nous avons $\gamma(t) = \gamma(0) + t^2(1, 1) + t^3(0, 1) + t^3\varepsilon(t)$,
donc il y a un point de rebroussement de première espèce.

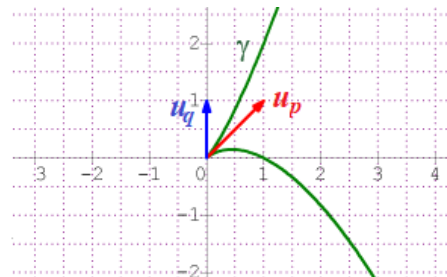


FIGURE 3.7 – Point de rebroussement de première espèce.

Exemple 3.7

On considère la courbe paramétrée γ définie sur \mathbb{R} par

$$\gamma(t) = (4(\cos t - 1), t^2 + t^4 + t^5).$$

En $t = 0$, nous avons $\gamma(t) = \gamma(0) + t^2(-2, 1) + t^4(\frac{1}{6}, 1) + t^4\varepsilon(t)$,
donc il y a un point de rebroussement de deuxième espèce.

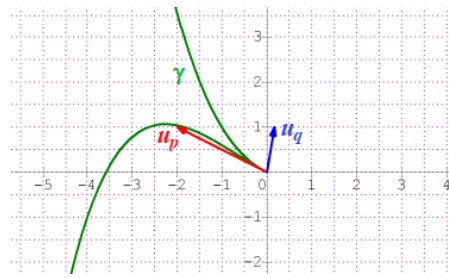


FIGURE 3.8 – Point de rebroussement de deuxième espèce.

Corollaire 3.3

Soient $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée et $2 \leq p < q$ les deux plus petits entiers tel que $\gamma^{(p)}(t_0)$ et $\gamma^{(q)}(t_0)$ ne soient pas colinéaires, alors

1. Si p est impair et q est pair, la courbe γ a un point ordinaire en t_0 .
2. Si p est impair et q est impair, la courbe γ a un point d'inflexion en t_0 .
3. Si p est pair et q est impair, la courbe γ a un point de rebroussement de première espèce en t_0 .
4. Si p est pair et q est pair, la courbe γ a un point de rebroussement de seconde espèce en t_0 .

Démonstration

En utilisant la formule Taylor-Young, on a

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)^p \gamma^{(p)}(t_0) + (t - t_0)^q \gamma^{(q)}(t_0) + (t - t_0)^q \varepsilon(t) \text{ et } \lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t) = (0, 0).$$

D'après le Théorème 3.1 on a le résultat. ■

3.1.3 Branches infinies

Définition 3.4

Soient $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée telle que pour tout $t \in I$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ et $t_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ est une borne de l'intervalle I , (il se peut que I soit ouvert en t_0).

1. On dit que la courbe paramétrée γ admet $\gamma_0 \in \mathbb{R}^2$ comme point d'arrêt en t_0 si

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \gamma(t) = \gamma_0.$$

2. On dit que la courbe paramétrée γ admet une branche infinie en t_0 si $\lim_{t \rightarrow t_0} \|\gamma(t)\| = +\infty$.

3. La droite D d'équation $ax + by + c = 0$ est asymptote à γ si $\lim_{t \rightarrow t_0} d(\gamma(t), D) = 0$, i.e.

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (ax(t) + by(t) + c) = 0.$$

Remarques 3.1

Voici comment mener l'étude des branches infinies

1. Si $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = l \in \mathbb{R}$ la droite d'équation $y = l$ est asymptote horizontale à la courbe en t_0 .
2. Si $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = l \in \mathbb{R}$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm\infty$ la droite d'équation $x = l$ est asymptote verticale à la courbe en t_0 .
3. Si $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm\infty$ on étudie $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)}$.
 - Si $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$ on dit que la courbe admet une branche parabolique de direction asymptotique $x = 0$ en t_0 .
 - Si $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$ on dit que la courbe admet une branche parabolique de direction asymptotique $y = 0$ en t_0 .
 - Si $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = a \in \mathbb{R}^*$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) - ax(t) = \pm\infty$ on dit que la courbe admet une branche parabolique de direction asymptotique $y = ax$ en t_0 .
 - Si $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = a \in \mathbb{R}^*$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) - ax(t) = b$ on dit que la courbe admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ en t_0 .

Exemple 3.8

On considère la courbe paramétrée γ définie sur $[-1, +\infty[$ par

$$\gamma(t) = (\sqrt{t+1}, (t-1)\sqrt{t+1}).$$

- Admet $(0, 0)$ comme point d'arrêt en $t = -1$.
- Admet une branche parabolique de direction asymptotique $x = 0$ en $t \rightarrow +\infty$.

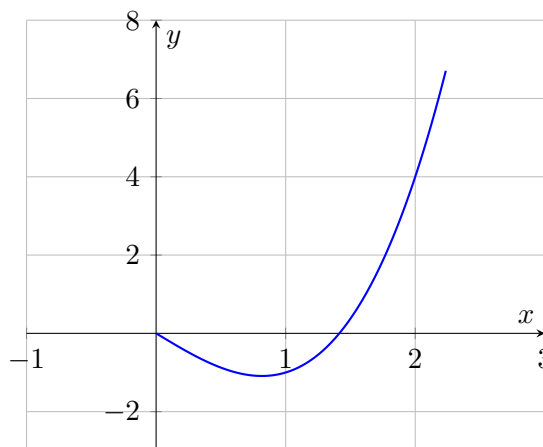


FIGURE 3.9 – Courbe paramétrée $\gamma(t) = (\sqrt{t+1}, (t-1)\sqrt{t+1})$.

Exemple 3.9

On considère la courbe paramétrée γ définie sur \mathbb{R}^* par

$$\gamma(t) = \left(t^2 + \frac{1}{t}, t + \frac{2}{t}\right).$$

- Admet une asymptote oblique d'équation $y = 2x$ en $t \rightarrow 0$.

- Admet une branche parabolique de direction asymptotique $y = 0$ en $t \rightarrow +\infty$.

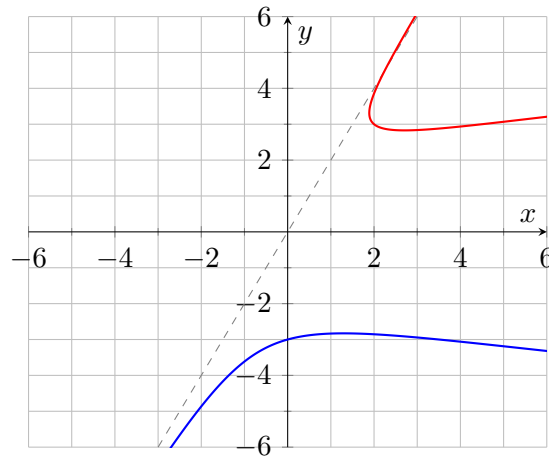


FIGURE 3.10 – Courbe paramétrée $\gamma(t) = (t^2 + \frac{1}{t}, t + \frac{2}{t})$.

3.2 Courbes planes en coordonnées polaires

Définition 3.5

Un point M du plan affine est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y) . Dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , il peut également être repéré par des couples (ρ, θ) tels que

$$x = \rho \cos \theta \text{ et } y = \rho \sin \theta.$$

Nous dirons alors que ρ et θ sont des coordonnées polaires du point M .

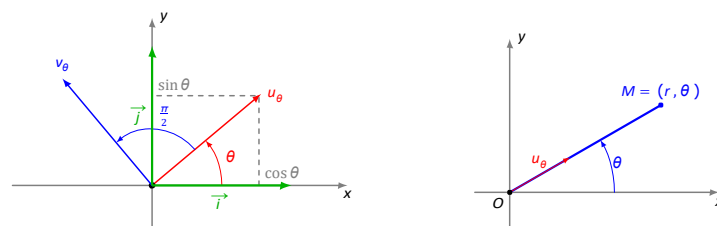


FIGURE 3.11 – Coordonnées polaires.

Remarques 3.2

1. Si ρ est positif, le point M est situé sur le rayon vecteur d'angle θ , à distance ρ de l'origine.
2. Si ρ est négatif, M est situé sur le rayon vecteur d'angle $\theta + \pi$, à distance $-\rho$ de l'origine.

Dans tous les cas $|\rho| = \|\vec{OM}\|$.

3. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on définit les vecteurs $u_\theta = (\cos \theta, \sin \theta)$ et $v_\theta = (\sin \theta, -\cos \theta)$. Le repère orthonormé (O, u_θ, v_θ) est dit repère mobile.
4. Si le point M a des coordonnées polaires (ρ, θ) alors $M = O + \rho(\theta)u_\theta$.

Définition 3.6

Une courbe paramétrée $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ est définie en coordonnées polaires par

$$\gamma(\theta) = O + \rho(\theta)u_\theta = (\rho(\theta) \cos \theta, \rho(\theta) \sin \theta).$$

pour tout $\theta \in I$, où $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe $C^{+\infty}$. L'équation $\rho = \rho(\theta)$ est l'équation polaire de la courbe.

Exemple 3.10

L'équation polaire d'un cercle de centre O et de rayon R est $\rho = R$.

Exemple 3.11

L'équation polaire d'une droite d'équation Cartésienne $y = ax + b$ (où $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$) est

$$\rho = \frac{b}{\sin \theta - a \cos \theta}.$$

Proposition 3.3

Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée définie par l'équation polaire $\rho = \rho(\theta)$, alors

1. Tout point de γ distinct de l'origine O est un point régulier et la tangente en $\gamma(\theta)$ est dirigée par le vecteur

$$\gamma'(\theta) = \rho'(\theta)u_\theta + \rho(\theta)v_\theta.$$

2. Si $\rho'(\theta) \neq 0$, l'angle orienté φ entre le vecteur u_θ et la tangente vérifie

$$\tan \varphi = \frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)}.$$

3. Si $\rho'(\theta) = 0$, $\varphi \equiv \frac{\pi}{2} [\text{mod } \pi]$, i.e. la tangente est dirigée par le vecteur v_θ .

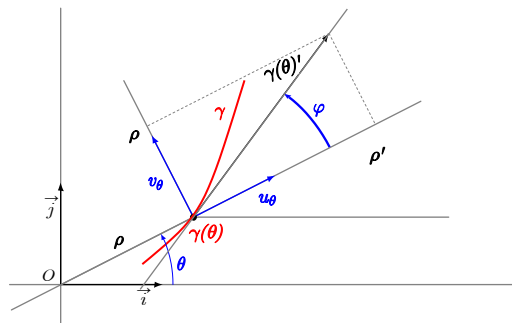


FIGURE 3.12 – Tangent en coordonnées polaires.

Démonstration

1. En dérivant $\gamma(\theta) = O + \rho(\theta)u_\theta = (\rho(\theta) \cos \theta, \rho(\theta) \sin \theta)$ par rapport à θ , on obtient :

$$\gamma'(\theta) = \rho'(\theta)u_\theta + \rho(\theta)v_\theta.$$

Puisque les vecteurs u_θ et v_θ ne sont pas colinéaires alors

$$\gamma'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \rho(\theta) = \rho'(\theta) = 0.$$

Maintenant, comme $\rho(\theta) = 0 \Leftrightarrow \gamma(\theta) = O$ on en déduit que tout point distinct de l'origine est un point régulier.

2. Puisque $\rho \neq 0$ on obtient que $\frac{1}{\tan \varphi} = \frac{\rho'(\theta)}{\rho(\theta)}$, si $\rho'(\theta) \neq 0$ alors

$$\tan \varphi = \frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)}.$$

3. Si $\rho'(\theta) = 0$ alors $\frac{1}{\tan \varphi} = 0$ et $\varphi \equiv \frac{\pi}{2} [\text{mod } \pi]$, la tangente est dirigée par le vecteur v_θ . ■

Exercice 3.1

Soit γ courbe paramétrée définie par l'équation polaire $\rho = 1 - 2 \cos \theta$.

Déterminer la tangente T à la courbe paramétrée γ en $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Solution

On va déterminer la tangente T à la courbe paramétrée γ en $\theta = \frac{\pi}{2}$.

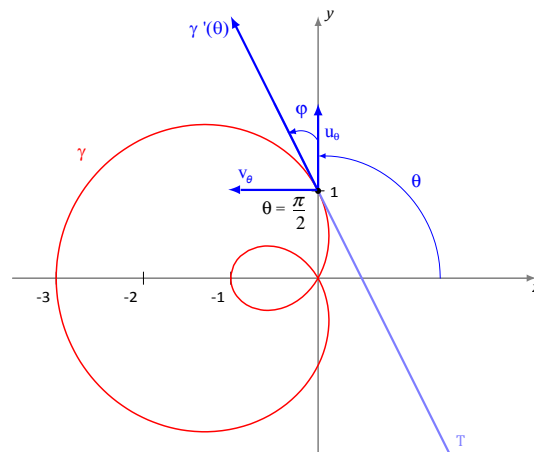


FIGURE 3.13 – Tangent à la courbe d'équation polaire $\rho = 1 - 2 \cos \theta$.

L'angle orienté φ entre le vecteur u_θ et la tangente T vérifie

$$\tan \varphi = \frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)} = \frac{1 - 2 \cos \theta}{2 \sin \theta}.$$

En $\theta = \frac{\pi}{2}$ on a $\tan \varphi = \frac{1}{2}$ alors $\varphi = \arctan \frac{1}{2}$, la tangente T à la courbe paramétrée γ au point de coordonnées polaires $(1, \frac{\pi}{2})$ et d'angle orienté $\varphi = \arctan \frac{1}{2}$.

Définition 3.7

Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée définie par l'équation polaire $\rho = \rho(\theta)$.

Si $\theta_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ est une borne de l'intervalle I . On dit que la courbe paramétrée γ admet une branche infinie en θ_0 si $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} |\rho(\theta)| = +\infty$.

Exercice 3.2

Soit γ courbe paramétrée définie par l'équation polaire $\rho = \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta}$.

Étudier les branches infinies.

Solution

La fonction ρ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

On va étudier la branche infinie en $\theta = \frac{\pi}{4}$, on a

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \left| \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta} \right| = +\infty \text{ car } \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \text{ et } \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \sin \theta - \cos \theta = 0^+$$

donc $x(\theta) = \rho(\theta) \cos \theta$ et $y(\theta) = \rho(\theta) \sin \theta$ tendent vers $+\infty$. On a donc une branche infinie.

On regarde alors $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \frac{y(\theta)}{x(\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \tan \theta = 1$ et $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} y(\theta) - x(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}$.

De même $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \left| \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta} \right| = +\infty$, $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{y(\theta)}{x(\theta)} = 1$ et $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} y(\theta) - x(\theta) = \frac{1}{2}$,

on a donc une asymptote d'équation $y = x + \frac{1}{2}$.

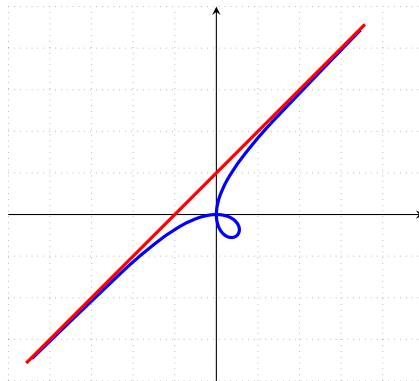
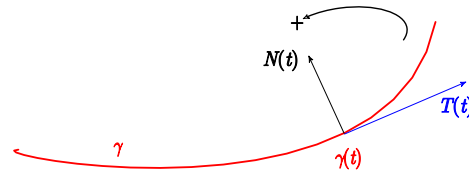


FIGURE 3.14 – Asymptote d'une courbe en coordonnées polaires.

3.3 Courbure**Définition 3.8**

Soient $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée régulière et $T(t)$ (resp. $N(t)$) le vecteur tangent unitaire (resp. normal unitaire) à γ .

Le repère $(\gamma(t), T(t), N(t))$ est de Serret-Frenet de γ en $t \in I$ si $(T(t), N(t))$ est une base orthonormée directe de \mathbb{R}^2 .

FIGURE 3.15 – Repère de Serret-Frenet dans \mathbb{R}^2 .**Proposition-Définition 3.1**

Soient $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe par sa longueur et $(\gamma(s), T(s), N(s))$ le repère de Serret-Frenet en $s \in I$, alors il existe une fonction $k : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^{+\infty}$ telle que

$$\forall s \in I, \quad T'(s) = k(s)N(s). \quad (3.2)$$

1. Le nombre $k(s)$ est appelé la courbure algébrique de γ .
2. Le nombre $K(s) = |k(s)|$ est appelé la courbure de γ .
3. Le nombre $R(s) = \frac{1}{K(s)}$ est appelé le rayon de la courbure de γ .

Démonstration

On a pour tout $s \in I$ $\|\gamma'(s)\| = 1$ et $T(s) = \gamma'(s)$.

En dérivant $\langle T(s), T(s) \rangle = 1$ on obtient $2\langle T'(s), T(s) \rangle = 0$, i.e. $T'(s)$ et $T(s)$ sont orthogonaux, alors $T'(s)$ et $N(s)$ sont colinéaires c'est-à-dire il existe une fonction

$k : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^{+\infty}$ telle que pour tout $s \in I$

$$T'(s) = k(s)N(s).$$

■

Remarque 3.3

Pour tout $s \in I$, $K(s) = \|T'(s)\| = \|\gamma''(s)\|$.

Exemple 3.12

On considère la courbe paramétrée γ définie sur \mathbb{R} par

$$\gamma(s) = \left(r \cos\left(\frac{s}{r}\right), r \sin\left(\frac{s}{r}\right) \right), \quad r > 0.$$

γ est paramétrée par sa longueur car $\gamma'(s) = \left(-\sin\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right) \right)$, $\|\gamma'(s)\| = 1$

$\gamma''(s) = \left(\frac{-1}{r} \sin\left(\frac{s}{r}\right), \frac{-1}{r} \cos\left(\frac{s}{r}\right) \right)$ et $K(s) = \|T'(s)\| = \|\gamma''(s)\| = \frac{1}{r}$.

Proposition 3.4. (Formules de Serret-Frenet)

Soient $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée par sa longueur et $(\gamma(s), T(s), N(s))$ le repère de Serret-Frenet en $s \in I$ si $K(s)$ la courbure de γ , alors

$$\begin{cases} T'(s) &= k(s)N(s) \\ N'(s) &= -k(s)T(s) \end{cases}$$

Démonstration

1) La première formule a été déjà montrée voir (3.2).

2) En dérivant $\langle N(s), N(s) \rangle = 1$ nous obtenons $\langle N'(s), N(s) \rangle = 0$ alors $N'(s)$ et $N(s)$ sont orthogonaux, ainsi il existe $a \in \mathbb{R}$, tel que $N'(s) = aT(s)$.

En dérivant $\langle T(s), N(s) \rangle = 1$ nous obtenons

$$\langle T'(s), N(s) \rangle + \langle T(s), N'(s) \rangle = 0,$$

d'où

$$\begin{aligned} \langle k(s)N(s), N(s) \rangle + \langle T(s), aT(s) \rangle &= 0 \Leftrightarrow k(s) + a = 0 \\ &\Leftrightarrow a = -k(s). \end{aligned}$$

■

Définition 3.9

Soient $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée régulière et $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe par sa longueur telles que γ et α sont équivalentes, (i.e. il existe $\phi : I \rightarrow J$, $C^{+\infty}$ difféomorphisme tel que $\gamma(t) = \alpha(\phi(t)) = \alpha(s)$).

La courbure $K_\gamma(t)$ de γ est définie par $K_\gamma(t) = K_\alpha(s) = K_\alpha(\phi(t))$, où $K_\alpha(s)$ est la courbure de α .

Proposition 3.5

Soient $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée régulière et $(\gamma(t), T(t), N(t))$ le repère de Serret-Frenet en $t \in I$, si $K(t)$ la courbure de γ , alors

$$K(t) = \frac{|\det(\gamma'(t), \gamma''(t))|}{\|\gamma'(t)\|^3}.$$

Démonstration

Soit $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe par sa longueur telle que γ et α sont équivalentes, (i.e. il existe $\phi : I \rightarrow J$, $C^{+\infty}$ difféomorphisme tel que $\gamma(t) = \alpha(\phi(t)) = \alpha(s)$), $t \in I$ et $s \in J$, $\phi'(t) = \|\gamma'(t)\|$.

Notons $v(t) = \|\gamma'(t)\|$, on a $T_\gamma(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ donc $\gamma'(t) = v(t)T_\gamma(t)$,

en dérivant $\gamma'(t) = v(t)T_\gamma(t)$ on obtient, $\gamma''(t) = v'(t)T_\gamma(t) + v(t)T'_\gamma(t)$,

en utilisant la Proposition 2.3, on a,

$$T'_\gamma(t) = \|\gamma'(t)\|T'_\alpha(s) = v(t)K_\alpha(s)N_\alpha(s) = v(t)K_\gamma(t)N_\gamma(t)$$

et donc $\gamma''(t) = v'(t)T_\gamma(t) + v(t)^2K_\gamma(t)N_\gamma(t)$ et

$$|\det(\gamma'(t), \gamma''(t))| = v(t)^3K_\gamma(t)|\det(T_\gamma(t), N_\gamma(t))| = \|\gamma'(t)\|^3K_\gamma(t), \text{ car } \det(T_\gamma(t), N_\gamma(t)) = 1. \text{ Ce qui complète la preuve.}$$

Exercice 3.3

On considère la courbe paramétrée γ définie sur \mathbb{R} par

$$\gamma(t) = (R \cos^3 t, R \sin^3 t), \quad R \in \mathbb{R}_+^*.$$

- Déterminer les points où la courbe γ est régulière.
- Déterminer la courbure.

Solution

- On a $\gamma'(t) = (-3R \sin t \cos^2 t, 3R \cos t \sin^2 t)$ et $\|\gamma'(t)\| = 3R|\sin t \cos t|$, alors

$$\|\gamma'(t)\| = 0 \Leftrightarrow t = k\pi \text{ ou } t = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi la courbe est régulière sauf les points $t = k\pi$ ou $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

- On a $\gamma''(t) = (-3R(\cos^3 t - 2 \sin^2 t \cos t), 3R(-\sin^3 t + 2 \cos^2 t \sin t))$ et

$$|\det(\gamma'(t), \gamma''(t))| = 9R^2 \sin^2 t \cos^2 t \text{ d'où}$$

$$K(t) = \frac{1}{3R|\sin t \cos t|}.$$

Définition 3.10

Soient $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée régulière et $(\gamma(t), T(t), N(t))$ le repère de Serret-Frenet en $t \in I$, si $K(t)$ la courbure de γ . Le cercle de centre $c(t) = \gamma(t) + R(t)N(t)$ et de rayon $R(t) = \frac{1}{K(t)}$ est appelé le cercle osculateur.

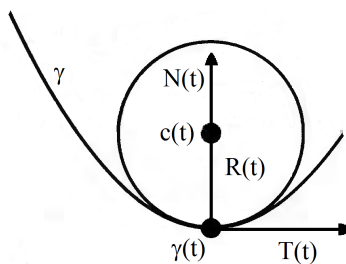


FIGURE 3.16 – Cercle osculateur.

Exemple 3.13

On considère la courbe paramétrée γ définie sur $] -1, 1[$ par

$$\gamma : (t) = (t, \sqrt{1-t^2}),$$

La courbure de γ est

$$K(t) = \frac{|\det(\gamma'(t), \gamma''(t))|}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{1}{\frac{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}}{1}} = 1,$$

et rayon de la courbure est $R(t) = 1$.

De plus $T(t) = (\sqrt{1-t^2}, -t)$ et $N(t) = (-t, -\sqrt{1-t^2})$,

alors $c(t) = \gamma(t) + R(t)N(t) = 0$.

Le cercle osculateur est le cercle de centre 0 et de rayon 1.

3.4 Tracé des courbes paramétrées planes

3.4.1 En coordonnées cartésiennes

Le plan d'étude d'une courbe paramétrée plane γ définie par $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ est donné par les étapes essentielle suivantes.

1. Commencer par rechercher l'ensemble de définition commun aux fonctions x et y .
2. Essayer de réduire l'ensemble d'étude en utilisant les périodicités de x et de y , ainsi que leurs parités ou leurs symétries.
3. Dresser le tableau de variation des fonctions x et y .
4. Rechercher les points stationnaires et étudier l'allure de la courbe au voisinage de ces points.
5. Rechercher et étudier les points d'arrêt et les branches infinies.
6. Tracer la courbe.

Exercice 3.4

Tracer le support Γ de la courbe paramétrée plane γ définie sur \mathbb{R} par

$$\gamma(t) = (\sin(2t), \sin(3t)).$$

Solution

Les fonctions $x : t \mapsto \sin(2t)$ et $y : t \mapsto \sin(3t)$ sont définies et continues sur \mathbb{R} . La fonction x est périodique de période π et la fonction y est périodique de période $\frac{2\pi}{3}$. La plus petite période commune est 2π . Il nous suffit donc de tracer Γ sur un intervalle de longueur 2π .

Les fonctions x et y sont impaires, on en déduit que le point (x, y) est de Γ si, et seulement si, le point $(-x, -y)$ est de Γ . Nous pouvons donc restreindre l'ensemble d'étude à l'intervalle $[0, \pi]$. Nous tracerons Γ sur l'intervalle $[0, \pi]$, le reste du Γ s'obtenant par la symétrie centrale par rapport à $(0, 0)$.

Notons enfin que $x(\pi - t) = -x(t)$ et $y(\pi - t) = y(t)$. Par conséquent, il nous suffit d'étudier Γ sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$. la portion de Γ sur l'intervalle $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ s'obtient alors par la symétrie par rapport à l'axe Oy .

Dressons maintenant le tableau de variations des fonctions x et y sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$			
x'	2	+	1	+	0	-	-2
x	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0			
y'	3	+	0	-	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	-	0
y	0	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1			

On trace Γ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, puis son symétrique par rapport à l'axe Oy , puis son symétrique par rapport à $(0, 0)$.

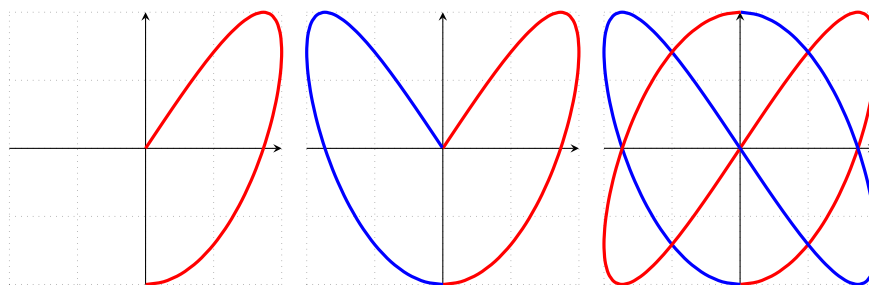


FIGURE 3.17 – La courbe paramétrée $\gamma(t) = (\sin(2t), \sin(3t))$.

3.4.2 En coordonnées polaires

le plan d'étude d'une courbe paramétrée plane γ définie par l'équation polaire $\rho = \rho(\theta)$ en coordonnées polaires, est donné par les étapes essentielle suivantes.

1. Ensemble de définition, période, symétries, ensemble d'étude.
2. Tableau de variations , θ , $\rho(\theta)$, signe de ρ et ρ' .
3. Branches infinies.
4. Points essentiels et leurs tangentes.
5. Tracé de la courbe

Exercice 3.5

Construire la courbe paramétrée plane d'équation polaire $\rho(\theta) = 1 - \cos \theta$.

Solution

On va étudier la courbe d'équation $\rho(\theta) = 1 - \cos \theta$ en coordonnées polaires.

$\rho(\theta)$ est définie sur \mathbb{R} , 2π périodique et paire. On va donc étudier la fonction sur $[0, \pi]$ et il faudra compléter la courbe par une symétrie par rapport à Ox .

On a $\rho'(\theta) = \sin \theta$ qui permet d'avoir le tableau de variation

θ	0	π
ρ'	0	0
ρ	0	2

$$\tan \varphi = \frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right), \text{ i.e. } \varphi = \frac{\theta}{2}.$$

En $\theta = 0$, $\rho = 0$ et $\varphi = 0$, i.e. la tangente en $\theta = 0$ est horizontale.

En $\theta = \pi$, $\rho = 2$ et $\varphi = \frac{\pi}{2}$, i.e. la tangente en $\theta = \pi$ est verticale.

Comme $0 \leq \rho \leq 2$ alors la courbe est bornée, incluse dans le disque de rayon 2, centré à l'origine. Il n'y a pas de branches infinies.

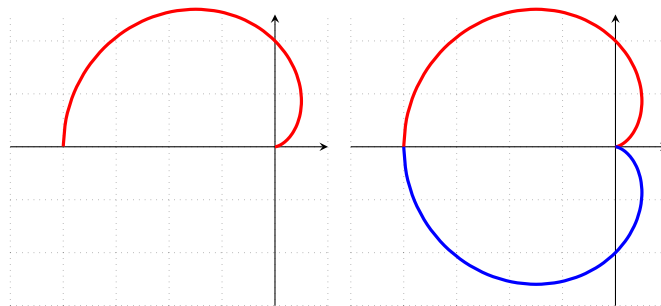


FIGURE 3.18 – La courbe d'équation polaire $\rho(\theta) = 1 - \cos \theta$.

Exercices

Exercice 3.6

Déterminer l'allure des courbes paramétrées suivantes au voisinage de 0.

- $\gamma(t) = (t^4 + t^3, t^6)$, $t \in \mathbb{R}$.
- $\gamma(t) = \left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t}\right)$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- $\gamma(t) = (t^2 \ln(t+1), t^2(e^{t^2} - 1))$, $t \in]-1, +\infty[$.

Exercice 3.7

On considère la courbe paramétrée γ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ par :

$$\gamma(t) = \left(\frac{t}{t-1}, \frac{3t}{t^2-1}\right).$$

- Étudier les asymptotes de la courbe paramétrée γ .
- Déterminer la position de la courbe paramétrée γ par rapport à ses asymptotes.

Exercice 3.8

Étudier et tracer les courbes paramétrées suivantes

- $\gamma(t) = \left(\frac{t^2}{t-1}, \frac{(t-2)^2}{t^2-1}\right)$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
- $\gamma(t) = \left(\sin t, \frac{\cos^2 t}{2 - \cos t}\right)$, $t \in \mathbb{R}$.

3. $\gamma(t) = (\tan \frac{t}{3}, \sin t), t \in \mathbb{R}.$

 **Exercice 3.9**

Tracer les courbes définies en coordonnées polaires par

1. $\rho(\theta) = 1 + \cos \theta, \theta \in \mathbb{R}.$

2. $\rho(\theta) = \sqrt{\cos 2\theta}, \theta \in \mathbb{R}.$

3. $\rho(\theta) = \frac{1 + 2 \sin \theta}{1 + 2 \cos \theta}, \theta \in \mathbb{R}.$

 **Exercice 3.10**

On considère la courbe paramétrée (Tractrice)

$$\begin{aligned} \gamma: \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t - \tanh t, \frac{1}{\cosh t}). \end{aligned}$$

1. Déterminer la courbure de γ .
2. Déterminer le cercle osculateur de γ .

 **Exercice 3.11**

On considère la courbe paramétrée (Cardioïde)

$$\begin{aligned} \gamma: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto ((1 - \cos t) \cos t, (1 - \cos t) \sin t). \end{aligned}$$

1. Déterminer les points où la courbe γ est régulière.
2. Déterminer la courbure.

 **Exercice 3.12**

On considère la courbe paramétrée :

$$\begin{aligned} \gamma: [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (e^t \cos t, e^t \sin t). \end{aligned}$$

1. Déterminer le repère de Serret-Frenet de γ .
2. Déterminer la courbure de γ .
3. Déterminer la longueur de γ .
4. Déterminer le cercle osculateur de γ .

CHAPITRE 4

COURBES GAUCHES

Sommaire

4.1	Étude locale des courbes gauches	65
4.1.1	Tangente, plan osculateur	65
4.1.2	Plan normal	67
4.2	Étude métrique des courbes gauches	69
4.2.1	Repère de Serret-Serret-Frenet	69
4.2.2	Courbure, torsion	70
Exercices		73

4.1 Étude locale des courbes gauches

L'espace affine \mathbb{R}^3 est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

4.1.1 Tangente, plan osculateur

Définition 4.1.

Soient $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée, $t_0 \in I$ et $u_0 \in \mathbb{R}^3$.

La droite $D = \gamma(t_0) + \text{vect}(u_0)$ est tangente à γ en t_0 si $\gamma(t) = \gamma(t_0) + \lambda(t)u_0 + \lambda(t)\varepsilon(t)$ où λ une fonction définie sur I , ε une fonction vectorielle définie sur I et $\lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t) = (0, 0, 0)$.

Définition 4.2.

Soient $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée, $t_0 \in I$ et $u_0, v_0 \in \mathbb{R}^3$.

Le plan $P = \gamma(t_0) + \text{vect}(u_0, v_0)$ est osculateur à γ en t_0 si

1. γ admet une tangente dirigée par u_0 en t_0 ,
2. $\gamma(t) = \gamma(t_0) + \lambda_1(t)u_0 + \lambda_2(t)v_0 + \lambda_2(t)\varepsilon(t)$, où λ_1, λ_2 sont des fonctions définies sur I , ε une fonction vectorielle définie sur I et $\lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t) = (0, 0, 0)$.

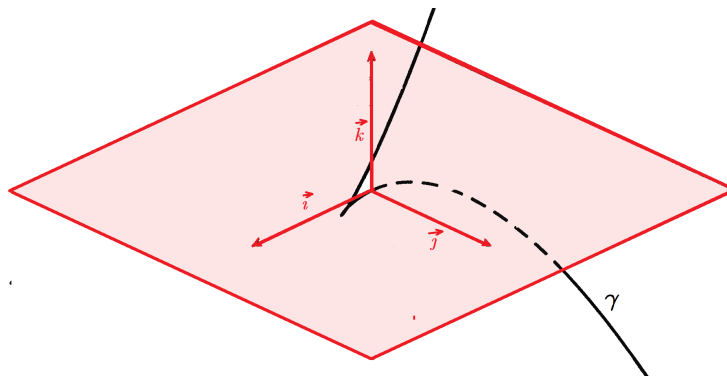


FIGURE 4.1 – Plan osculateur.

Exemple 4.1

La courbe paramétrée

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \gamma(t) = (t, t^2, t^3) \end{aligned}$$

1) On a, $\gamma(t) = \gamma(0) + t\vec{i} + t(t\vec{j} + t^2\vec{k})$ et $(t\vec{j} + t^2\vec{k}) \xrightarrow{t \rightarrow 0} (0, 0, 0)$.

Donc γ admet une tangente horizontale en $t = 0$ dirigée par le vecteur $u_0 = \vec{i}$.

2) D'une autre part $\gamma(t) = \gamma(0) + t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^2(t\vec{k})$ et $(t\vec{k}) \xrightarrow{t \rightarrow 0} (0, 0, 0)$.

Donc γ admet un osculateur en $t = 0$ engendrée par les vecteurs \vec{i}, \vec{j} , i.e. le plan xOy .

Proposition 4.1

Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée, Supposons qu'il existe deux entiers $q > p \geq 2$ et deux vecteurs non colinéaires u_p et v_q tels que

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)^p u_p + (t - t_0)^q v_q + (t - t_0)^q \varepsilon_1(t) \text{ et } \lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon_1(t) = (0, 0, 0),$$

alors

1. La droite $D = \gamma(t_0) + \text{vect}(u_p)$ est tangente à γ en t_0 .
2. Le plan $P = \gamma(t_0) + \text{vect}(u_p, v_q)$ est osculateur à γ en t_0 .

Démonstration

1. Revenir à la définition 4.1.1 d'une tangente, en posant

$$u_0 = u_p \text{ et } \lambda(t) = (t - t_0)^p \text{ et } \varepsilon(t) = (t - t_0)^p [(t - t_0)^{q-p} v_q + (t - t_0)^q \varepsilon_1(t)].$$

2. Revenir à la définition 4.1.1 d'un osculateur, en posant

$$\lambda_1(t) = (t - t_0)^p, \lambda_2(t) = (t - t_0)^q, u_0 = u_p, v_0 = v_q \text{ et } \varepsilon(t) = \varepsilon_1(t).$$

■

Proposition 4.2

Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée régulière, alors

1. γ admet une tangente D dirigée par le vecteur $\gamma'(t_0)$ en tout $t_0 \in I$.
2. Si $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ et $\gamma'(t_0) = (x'_0, y'_0, z'_0)$, alors D est donnée par les équations

$$y'_0(x - x_0) = x'_0(y - y_0) \quad , \quad z'_0(x - x_0) = x'_0(z - z_0).$$

Démonstration

1. Puisque γ est dérivable en tout $t_0 \in I$, alors

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)\gamma'(t_0) + (t - t_0)\varepsilon(t) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t) = (0, 0, 0).$$

Revenir à la définition 4.1.1 d'une tangente en posant $u_0 = \gamma'(t_0)$ et $\lambda(t) = (t - t_0)$.

2. Si $\gamma(t) = (x, y, z)$ alors les vecteurs $\overrightarrow{\gamma(t_0)\gamma(t)}$ et $\gamma'(t_0)$ sont colinéaires, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\gamma(t_0)\gamma(t)} = \lambda \gamma'(t_0)$, i.e.

$$\begin{cases} x - x_0 = \lambda x'_0 \\ y - y_0 = \lambda y'_0 \\ z - z_0 = \lambda z'_0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \frac{x - x_0}{x'_0} = \frac{y - y_0}{y'_0} = \frac{z - z_0}{z'_0},$$

d'où les équations $y'_0(x - x_0) = x'_0(y - y_0)$ et $z'_0(x - x_0) = x'_0(z - z_0)$.

■

Proposition 4.3

Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée. Si γ a un point birégulier en $t_0 \in I$, alors

1. γ admet un osculateur $P = \gamma(t_0) + \text{vect}(\gamma'(t_0), \gamma''(t_0))$ en t_0 .

2. Si $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$, $\gamma'(t_0) = (x'_0, y'_0, z'_0)$ et $\gamma''(t_0) = (x''_0, y''_0, z''_0)$, alors P est donnée par l'équation

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & x'_0 & x''_0 \\ y - y_0 & y'_0 & y''_0 \\ z - z_0 & z'_0 & z''_0 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.1)$$

Démonstration

1. D'après la formule de Taylor-Young en $t_0 \in I$ alors

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)\gamma'(t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2}\gamma''(t_0) + (t - t_0)^2\varepsilon(t)$$

avec $\lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t) = (0, 0, 0)$.

Revenir à la définition 4.1.1 d'un osculateur en posant $u_0 = \gamma'(t_0)$, $v_0 = \gamma''(t_0)$, $\lambda_1(t) = (t - t_0)$ et $\lambda_2(t) = (t - t_0)^2$.

2. Si $\gamma(t) = (x, y, z)$ alors les vecteurs $\overrightarrow{\gamma(t_0)\gamma(t)}$, $\gamma'(t_0)$ et $\gamma''(t_0)$ sont colinéaires, alors $\det(\overrightarrow{\gamma(t_0)\gamma(t)}, \gamma'(t_0), \gamma''(t_0)) = 0$ d'où

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & x'_0 & x''_0 \\ y - y_0 & y'_0 & y''_0 \\ z - z_0 & z'_0 & z''_0 \end{vmatrix} = 0.$$

■

4.1.2 Plan normal

Définition 4.3

Soient $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée et $D = \gamma(t_0) + \text{vect}(u_0)$ la tangente à γ en $t_0 \in I$. Le plan orthogonal à la tangente D est appelé plan normal à γ en t_0 .

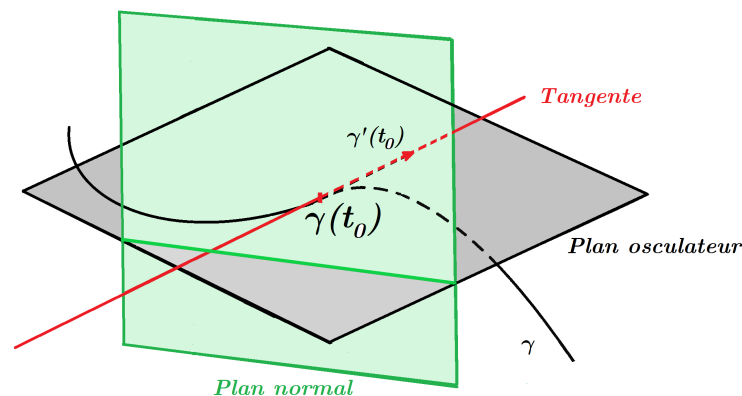


FIGURE 4.2 – Plan normal, osculateur et la tangente.

Proposition 4.4

Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée régulière et $t_0 \in I$, alors

1. Le plan normal à γ en t_0 est orthogonal à $\gamma'(t_0)$.
2. Si $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ et $\gamma'(t_0) = (x'_0, y'_0, z'_0)$, alors le plan normal à γ en t_0 est donnée par l'équation

$$x'_0(x - x_0) + y'_0(y - y_0) + z'_0(z - z_0) = 0.$$

Démonstration

1. D'après la Proposition 4.2 la tangente à γ est dirigé par $\gamma'(t_0)$, alors le plan normal à γ en t_0 est orthogonal à $\gamma'(t_0)$.

2. Si $\gamma(t) = (x, y, z)$ alors les vecteurs $\overrightarrow{\gamma(t_0)\gamma(t)}$ et $\gamma'(t_0)$ sont orthogonaux, d'où

$$\langle \overrightarrow{\gamma(t_0)\gamma(t)}, \gamma'(t_0) \rangle = 0 \Leftrightarrow x'_0(x - x_0) + y'_0(y - y_0) + z'_0(z - z_0) = 0.$$
Exercice 4.1

Soit la courbe paramétrée

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \gamma(t) = (t^3, t^2, t + 1). \end{aligned}$$

Déterminer les équations de la tangente, du plan osculateur et du plan normal en $t_0 = 1$.

Solution

On va déterminer la tangente, le plan osculateur et le plan normal en $t_0 = 1$, on a

$$\gamma'(t) = (3t^2, 2t, 1) \text{ et } \gamma''(t) = (6t, 2, 0),$$

alors

$$\gamma(1) = (1, 1, 2) \text{ , } \gamma'(1) = (3, 2, 1) \text{ et } \gamma''(1) = (6, 2, 0).$$

1. Les équations de la tangente D sont

$$2(x - 1) = 3(y - 1), x - 1 = 3(z - 2) \Leftrightarrow x - 1 = \frac{3}{2}(y - 1) = 3(z - 2).$$

2. L'équation du plan osculateur P_1 est

$$\begin{vmatrix} x - 1 & 3 & 6 \\ y - 1 & 2 & 2 \\ z - 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - 3y + 3z - 4 = 0.$$

3. L'équation du plan normal P_2 est

$$3(x - 1) + 2(y - 1) + 1(z - 2) = 0 \Leftrightarrow 3x + 2y + z - 6 = 0.$$

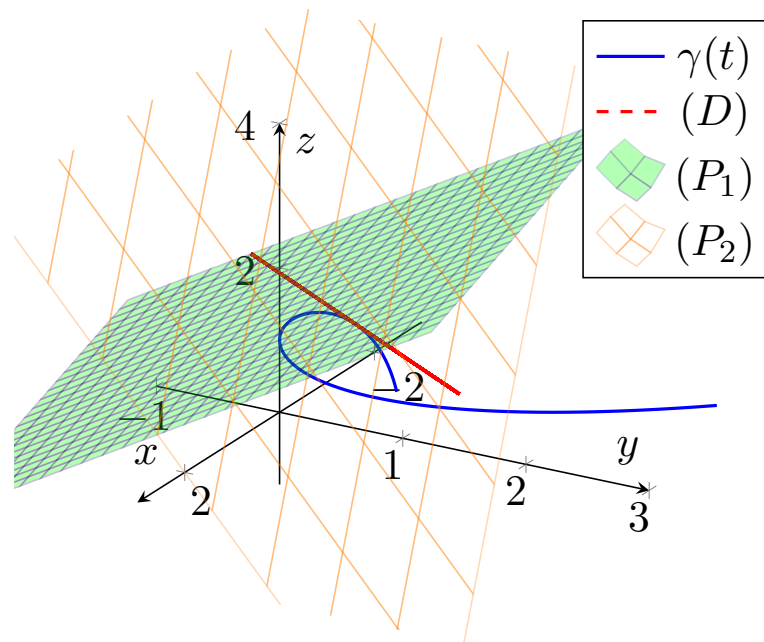


FIGURE 4.3 – Courbe paramétrée, tangente, plan osculateur et plan normal.

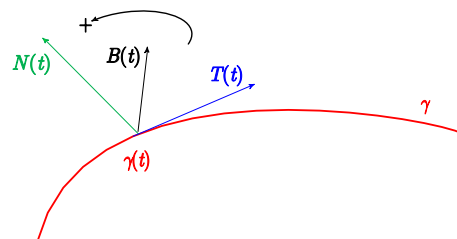
4.2 Étude métrique des courbes gauches

4.2.1 Repère de Serret-Serret-Frenet

Définitions 4.1

Soient $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée régulière et $T(t)$ (resp. $N(t)$) le vecteur tangent unitaire (resp. normal unitaire) à γ .

1. Le repère $(\gamma(t), T(t), N(t), B(t))$ est de Serret-Frenet de γ en $t \in I$ si $(T(t), N(t), B(t))$ est une base orthonormée directe de \mathbb{R}^3 , où $B(t) = T(t) \wedge N(t)$.
2. $(T(t), N(t), B(t))$ est appelée trièdre de Serret-Frenet.
3. Le vecteur $N(t)$ est appelé le vecteur normal principale à la courbe γ .
4. Le vecteur $B(t)$ est appelé le vecteur binormal à la courbe γ .

FIGURE 4.4 – Repère de Serret-Frenet dans \mathbb{R}^3 .

Remarques 4.1

Si $(\gamma(t), T(t), N(t), B(t))$ est repère de Serret-Frenet en $t \in I$, alors.

1. La droite $\gamma(t) + \text{vect}(T(t))$ est la droite tangente à γ en t .
2. Le plan $\gamma(t) + \text{vect}(T(t), N(t))$ est le plan osculateur à γ en t .
3. Le plan $\gamma(t) + \text{vect}(N(t), B(t))$ est le plan normal à γ en t .

4.2.2 Courbure, torsion**Définition 4.4**

Soient $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe par sa longueur et $(\gamma(s), T(s), N(s), B(s))$ le repère de Serret-Frenet en $s \in I$, alors.

1. Le nombre $K(s) = \|T'(s)\| = \|\gamma''(s)\|$ est appelé la courbure de γ .
2. Le nombre $R(s) = \frac{1}{K(s)}$ est appelé le rayon de courbure.
1. Le point $\gamma(s) + R(s)N(s)$ est appelé le centre de courbure.

Proposition-Définition 4.1

Soient $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe par sa longueur et $(\gamma(s), T(s), N(s), B(s))$ le repère de Serret-Frenet en $s \in I$, alors il existe une fonction de classe $C^{+\infty}$ $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $s \in I$

$$B'(s) = \tau(s)N(s).$$

Le nombre $\tau(s)$ est appelé la torsion de γ .

Démonstration

En dérivant $B(s) = T(s) \wedge N(s)$ nous obtenons,

$B'(s) = T'(s) \wedge N(s) + T(s) \wedge N'(s) = T(s) \wedge N'(s)$ car $T'(s)$ et $N(s)$ sont colinéaires, alors $B'(s)$ et $T(s)$ sont orthogonaux.

En dérivant $\langle B(t), B(t) \rangle = 1$, nous obtenons, $2\langle B'(t), B(t) \rangle = 0$ par conséquent $B'(s)$ et $B(s)$ sont orthogonaux.

Alors $B'(s)$ est orthogonal à la fois à $T(s)$ et à $B(s)$ donc $B'(s)$ est orthogonal à $N(s)$ ($N(s) = B(s) \wedge T(s)$) c'est-à-dire, il existe une fonction $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $s \in I$

$$B'(s) = \tau(s)N(s).$$

■

Proposition 4.5. (Formules de Serret-Frenet)

Soient $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe par sa longueur et $(\gamma(s), T(s), N(s), B(s))$ le repère de

Serret-Frenet en $s \in I$, si $K(s)$, $\tau(s)$ la courbure, la torsion de γ respectivement, alors

$$\begin{cases} T'(s) &= K(s)N(s) \\ N'(s) &= -K(s)T(s) - \tau(s)B(s) \\ B'(s) &= \tau(s)N(s) \end{cases}$$

Démonstration

1. Puis que $N(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|}$ et $K(s) = \|T'(s)\|$ alors $T'(s) = \gamma''(s) = K(s)N(s)$.
2. En dérivant $N(s) = B(s) \wedge T(s)$ nous obtenons,

$$\begin{aligned} N'(s) &= B'(s) \wedge T(s) + B(s) \wedge T'(s) \\ &= \tau(s)N(s) \wedge T(s) + B(s) \wedge K(s)N(s) \\ &= -\tau(s)B(s) - K(s)T(s). \end{aligned}$$

Exercice 4.2

Soit la courbe paramétrée

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \gamma(t) = (a \cos s, a \sin s, bs), \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ et } a^2 + b^2 = 1. \end{aligned}$$

Déterminer la courbure et la torsion de γ .

Solution

On a $\gamma'(s) = (-a \sin s, a \cos s, b)$ et $\|\gamma'(s)\| = 1$ d'où γ est paramétrée par sa longueur.

$T(s) = \gamma'(s) = (-a \sin s, a \cos s, b)$ et $T'(s) = (-a \cos s, -a \sin s, 0)$, alors

$$K(s) = \|T'(s)\| = a,$$

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|} = (-\cos s, -\sin s, 0),$$

$$B(s) = T(s) \wedge N(s) = (b \sin s, -b \cos s, a)$$

$$\text{et } B'(s) = (b \cos s, b \sin s, 0) = -bN(s)$$

d'où $\tau(s) = -b$.

Définition 4.5

Soient $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée régulière et $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe par sa longueur telles que γ et α sont équivalentes (il existe $\phi : I \rightarrow J$ $C^{+\infty}$ difféomorphisme tel que $\gamma(t) = \alpha(\phi(t)) = \alpha(s)$).

La courbure $K_\gamma(t)$ et la torsion $\tau_\gamma(t)$ de γ sont définies par

$$K_\gamma(t) = K_\alpha(s) \text{ et } \tau_\gamma(t) = \tau_\alpha(s),$$

où $K_\alpha(s)$ et $\tau_\alpha(s)$ est la courbure et la torsion de α respectivement.

Proposition 4.6

Soient $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée régulière et $(\gamma(t), T(t), N(t), B(t))$ le repère de Serret-Frenet en $t \in I$, si $K(t), \tau(t)$ la courbure, la torsion de γ respectivement, alors

$$B(t) = \frac{\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}, \quad K(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} \quad \text{et} \quad \tau(t) = \frac{-\langle \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'''(t) \rangle}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2}.$$

Démonstration

Soit $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe par sa longueur telle que γ et α sont équivalentes (il existe $\phi : I \rightarrow J$ $C^{+\infty}$ difféomorphisme (l'abscisse curviligne) tel que $\gamma(t) = \alpha(\phi(t)) = \alpha(s)$ $t \in I$ et $s \in J$, $\phi'(t) = \|\gamma'(t)\|$).

Notons $v(t) = \|\gamma'(t)\|$, on a $T_\gamma(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ donc $\gamma'(t) = v(t)T_\gamma(t)$,
en dérivant une seconde fois on obtient, $\gamma''(t) = v'(t)T_\gamma(t) + v(t)T'_\gamma(t)$,

en utilisant la Proposition 2.3, on a

$$T'_\gamma(t) = \|\gamma'(t)\|T'_\alpha(s) = v(t)K_\alpha(s)N_\alpha(s) = v(t)K_\gamma(t)N_\gamma(t)$$

et donc $\gamma''(t) = v'(t)T_\gamma(t) + v(t)^2K_\gamma(t)N_\gamma(t)$ et

$$\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) = v(t)^3K_\gamma(t)T_\gamma(t) \wedge N_\gamma(t) = v(t)^3K_\gamma(t)B_\gamma(t).$$

Ce qui démontre la première et la deuxième égalité.

En dérivant une fois de plus, on obtient $\gamma'''(t) = a(t)T_\gamma(t) + b(t)N(t) - v(t)^3K_\gamma(t)\tau_\gamma(t)B_\gamma(t)$.
où $a(t)$ et $b(t)$ sont deux fonctions à valeurs réelles que nous n'avons pas besoin d'explicitier.

On en déduit que $\langle \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'''(t) \rangle = -v(t)^6K_\gamma(t)^2\tau_\gamma(t) = -\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2\tau_\gamma(t)$.

Ce qui démontre la troisième égalité. ■

Remarque 4.1

La courbure (resp. la torsion) mesure la variation de $T(t)$ (resp. $B(t)$) c'est -à-dire le courbement (resp. la tendance) de la courbe.

Exercice 4.3

Soit la courbe $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $\gamma(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$.

1. Vérifier que γ est régulière.
2. Calculer la courbure $K(t)$ et la torsion $\tau(t)$ de γ .

Solution

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\gamma'(t) = (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2})$ et $\|\gamma'(t)\| = 2 \cosh t \neq 0$.
2. $\gamma''(t) = (e^t, e^{-t}, 0)$, $\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) = (-\sqrt{2}e^{-t}, \sqrt{2}e^t, 2)$ et $\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\| = 2\sqrt{2} \cosh t$.

$$\text{Donc } K(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{2\sqrt{2} \cosh t}{8 \cosh^3 t} = \frac{1}{2\sqrt{2} \cosh^2 t}.$$

$$\gamma'''(t) = (e^t, -e^{-t}, 0) \text{ et } \langle \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'''(t) \rangle = -2\sqrt{2}.$$

$$\text{D'où } \tau(t) = \frac{-\langle \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'''(t) \rangle}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2} = \frac{2\sqrt{2}}{8 \cosh^2 t} = \frac{1}{2\sqrt{2} \cosh^2 t}.$$

Exercices

Exercice 4.4

On considère la courbe paramétrée γ définie par

$$\begin{aligned}\gamma: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \gamma(t) = (1+t, -t^3, 1+t^3).\end{aligned}$$

1. Montrer que cette représentation est régulière.
2. Donner un système d'équations cartésiennes de la droite affine de \mathbb{R}^3 tangente à la courbe γ au point $\gamma(1)$.
3. Donner une équation du plan affine de \mathbb{R}^3 normal à la courbe au point $\gamma(1)$.

Exercice 4.5

1. Déterminer la courbure et la torsion de la courbe $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$.
2. Déterminer le plan osculateur en $t = 0$ et en $t = 1$.

Exercice 4.6

Soient $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée régulière et $(\gamma(t), T(t), N(t), B(t))$ le repère de Serret-Frenet de γ en t . Si $K(t)$ est la courbure de γ et $\tau(t)$ est la torsion de γ .

Montrer que : la courbe γ est plane si et seulement si $\tau(t) = 0$.

Exercice 4.7

On considère la courbe paramétrée :

$$\begin{aligned}\gamma: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \gamma(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3).\end{aligned}$$

1. Montrer que γ est régulière.
2. Calculer la courbure $K(t)$ et la torsion $\tau(t)$ de γ .

Exercice 4.8

On considère la courbe paramétrée :

$$\begin{aligned}\gamma: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ et } a > 0.\end{aligned}$$

1. Montrer que la courbe γ est régulière.
2. Calculer la courbure $K(t)$ et la torsion $\tau(t)$ de γ .
3. γ est-elle plane ? si oui déterminer les valeurs de a et b .

Exercice 4.9

Calculer la courbure $K(t)$ et la torsion $\tau(t)$ de γ dans les cas suivantes.

1. $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \cosh t)$.
2. $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $\gamma(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$.

CHAPITRE 5

SURFACES PARAMÉTRÉES

Sommaire

5.1 Généralités sur les surfaces paramétrées	75
5.1.1 Définitions et exemples	75
5.1.2 Plan tangent à une surface paramétrée	78
5.2 Première forme fondamentale	82
5.2.1 Expression locale	82
5.2.2 Longueur d'une courbe paramétrée	83
5.2.3 Aire d'une surface paramétrée	86
Exercices	89

5.1 Généralités sur les surfaces paramétrées

5.1.1 Définitions et exemples

Définition 5.1

1. Une surface paramétrée de \mathbb{R}^3 est une application

$$\begin{aligned} \varphi : U \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto \varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

de classe $C^{+\infty}$, où U est un ouvert de \mathbb{R}^2 .

2. L'image de U par φ est appelé le support de la surface paramétrée φ (surface géométrique) noté $S = \varphi(U) = \{\varphi(u, v) \in \mathbb{R}^3, (u, v) \in U\}$.

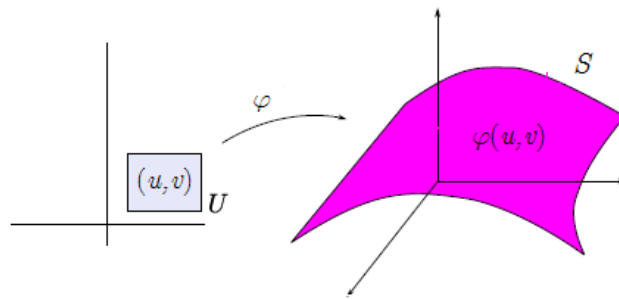


FIGURE 5.1 – Surface paramétrée.

Exemple 5.1 (Cylindre de révolution)

Le cylindre de révolution C de \mathbb{R}^3 est paramétrée par

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto \varphi(u, v) = (r \cos u, r \sin u, v). \end{aligned}$$

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 = r^2\}, \quad r > 0.$$

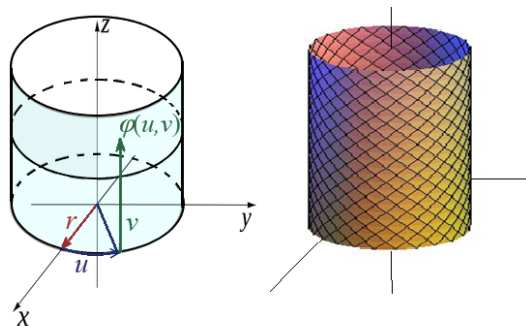


FIGURE 5.2 – Cylindre de révolution.

Exemple 5.2 (Sphère)

La sphère S^2 de \mathbb{R}^3 est paramétrée par

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 2\pi] \times [0, \pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\phi, \theta) &\mapsto \varphi(\phi, \theta) = (r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \theta). \\ S^2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}, \quad r > 0. \end{aligned}$$

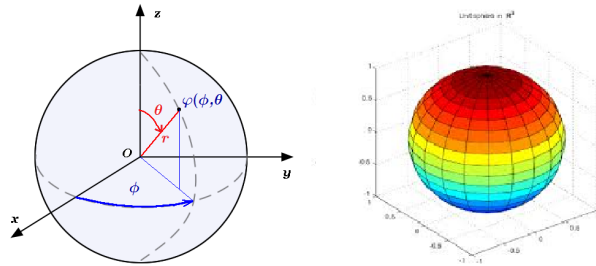


FIGURE 5.3 – Sphère S^2 .

Exemple 5.3 (Cylindre elliptique)

Cylindre elliptique \mathcal{C} est une surface paramétrée par

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto \varphi(u, v) = (a \cos u, b \sin u, v). \\ \mathcal{C} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}, \quad a, b \in \mathbb{R}^*. \end{aligned}$$

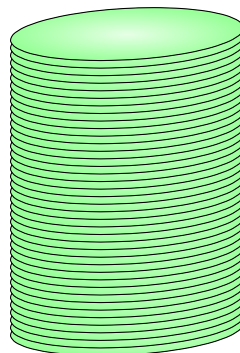


FIGURE 5.4 – Cylindre elliptique.

Exemple 5.4 (Paraboloïde hyperbolique)

Paraboloïde hyperbolique \mathcal{P}_H est une surface paramétrée par

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto \varphi(u, v) = (au, bv, h(u^2 - v^2)). \end{aligned}$$

$$\mathcal{P}_H = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right\}, \quad a, b, h \in \mathbb{R}^*.$$

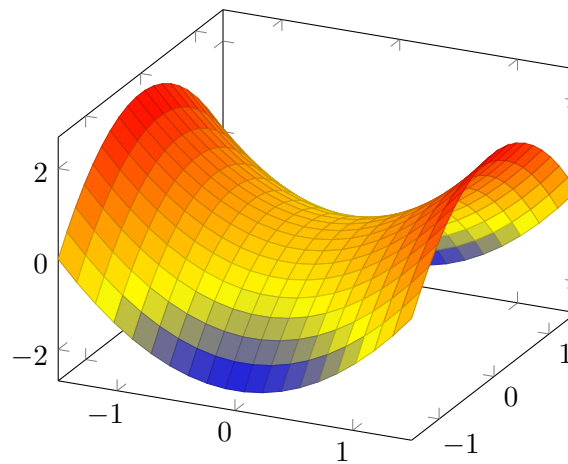


FIGURE 5.5 – Paraboloïde hyperbolique.

Exemple 5.5 (Paraboloïde elliptique)

Paraboloïde elliptique \mathcal{P}_E est une surface paramétrée par

$$\varphi : \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \mapsto \varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2).$$

$$\mathcal{P}_E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = x^2 + y^2\}.$$

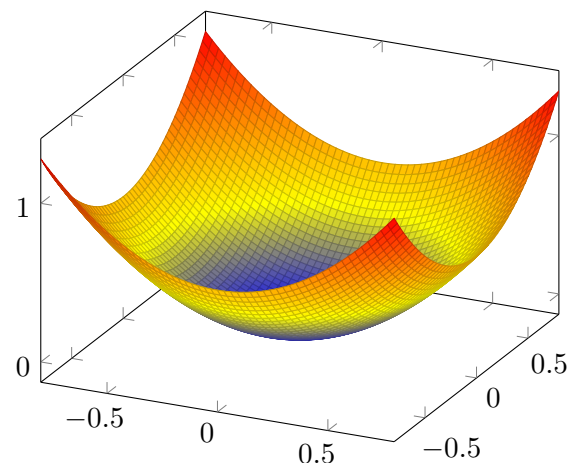


FIGURE 5.6 – Paraboloïde elliptique.

Exemple 5.6 (Ellipsoïde)

Ellipsoïde \mathcal{E} est une surface paramétrée par

$$\varphi : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \mapsto \varphi(u, v) = (a \cos u \cos v, b \cos u \sin v, c \sin u).$$

$$\mathcal{E} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}^*.$$

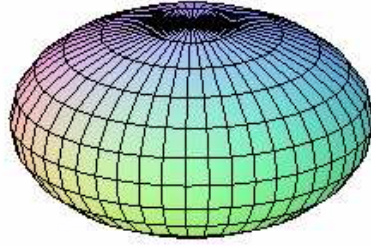


FIGURE 5.7 – Ellipsoïde.

Définition 5.2

Une surface paramétrée $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ est dite régulière si pour tout $(u, v) \in U$, $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v)$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)$ sont libres.

Remarque 5.1

1. Par la suite, on considère pour tout $(u, v) \in U$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) = \varphi_u(u, v) \text{ et } \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = \varphi_v(u, v).$$

2. $\varphi_u(u, v)$ et $\varphi_v(u, v)$ sont libres $\Leftrightarrow \varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v) \neq 0$.

3. φ est régulière $\Leftrightarrow \varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v) \neq 0$.

Exemple 5.7

La surface paramétrée

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (u + v, u - v, u^2 + v^2), \end{aligned}$$

est régulière car, $\varphi_u(u, v) = (1, 1, 2u)$ et $\varphi_v(u, v) = (1, -1, 2v)$ sont libres.

5.1.2 Plan tangent à une surface paramétrée**Définition 5.3**

Soit $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière de support S .

Le plan tangent à la surface paramétrée φ au point $p = \varphi(u, v)$, est le plan affine passant par p et engendré par les vecteurs $\varphi_u(u, v)$ et $\varphi_v(u, v)$, noté $T_p S$, *i.e.*

$$T_p S = p + \text{vect}(\varphi_u(u, v), \varphi_v(u, v)).$$

Le vecteur normal unitaire à ce plan tangent $T_p S$ est le vecteur

$$n(u, v) = n(p) = \frac{\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)}{\|\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)\|}.$$

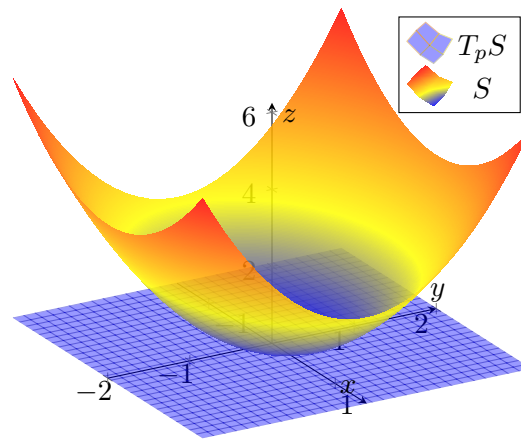


FIGURE 5.8 – Plan tangent à une surface paramétrée.

Remarque 5.2

L'ensemble $\{\varphi_u(u, v), \varphi_v(u, v)\}$ est une base de $T_p S$.

Exercice 5.1

Soit surface paramétrée

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (u - v, u^2 + v^2, u^2 - v^2). \end{aligned}$$

- Déterminer les points réguliers de φ .
- Déterminer l'équation cartésienne du plan tangent à φ au point $p = \varphi(2, 1)$.

Solution

- On va déterminer les points réguliers de la surface paramétrée φ .

$$\varphi_u(u, v) = (1, 2u, 2u), \quad \varphi_v(u, v) = (-1, 2v, -2v).$$

On pose $(\varphi_u \wedge \varphi_v)(u, v) = (b_1, b_2, b_3)$, alors

$$b_1 = \begin{vmatrix} 2u & 2u \\ 2v & -2v \end{vmatrix} = -8uv, \quad b_2 = - \begin{vmatrix} 1 & 2u \\ -1 & -2v \end{vmatrix} = 2(v - u),$$

$$b_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2u \\ -1 & 2v \end{vmatrix} = 2(v + u).$$

$$\|(\varphi_u \wedge \varphi_v)(u, v)\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{8(8u^2v^2 + u^2 + v^2)} = 0 \Leftrightarrow u = v = 0.$$

φ est régulière sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

- On va déterminer l'équation cartésienne du plan tangent à φ au point $p = \varphi(2, 1)$.

$$T_p S = \varphi(2, 1) + \text{vect}(\varphi_u(2, 1), \varphi_v(2, 1)), \quad \varphi(2, 1) = (1, 5, 3),$$

$$(\varphi_u \wedge \varphi_v)(2, 1) = (-16, -2, 6) \text{ alors}$$

$M(x, y, z) \in T_p S \Leftrightarrow \overrightarrow{pM} \perp (\varphi_u \wedge \varphi_v)(2, 1) \Leftrightarrow -16(x-1) - 2(y-5) + 6(z-3) = 0$
d'où l'équation cartésienne est $8x + y - 3z - 4 = 0$.

Définition 5.4

Une application $h : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe $C^{+\infty}$ est dite immersion sur U , si pour tout $(u, v) \in U$, $Jac_h(u, v)$ est de rang égal à 2, où $Jac_h(u, v)$ est la matrice Jacobienne de h au point (u, v) .

Remarques 5.1

1. $Jac_h(u, v)$ est de rang égal à 2 $\Leftrightarrow h_u(u, v)$ et $h_v(u, v)$ sont libres.
2. Toute immersion sur U est une surface paramétrée régulière.

Définition 5.5

Soit W un ouvert de \mathbb{R}^3 . Une application $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^{+\infty}$ est dite submersion sur W , si pour tout $(x, y, z) \in W$, $Jac_f(x, y, z)$ est de rang égal à 1.

Remarques 5.2

1. $Jac_f(x, y, z)$ est de rang égal à 1 $\Leftrightarrow (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)) \neq (0, 0, 0)$.
2. Le vecteur $(f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z))$ est appelé gradient f noté $grad f(x, y, z)$ ou $\nabla f(x, y, z)$.

Proposition 5.1

Soient W un ouvert de \mathbb{R}^3 et $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ une submersion, alors localement l'ensemble $S = \{(x, y, z) \in W, f(x, y, z) = 0\}$ peut être décrite par une surface paramétrée régulière, de plus le vecteur normal unitaire à S en (x, y, z) est

$$n(x, y, z) = \frac{grad f(x, y, z)}{\|grad f(x, y, z)\|}.$$

Démonstration

Soit $(x_0, y_0, z_0) \in S$, alors $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ et $grad f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, puis que f est une submersion, supposons que $f_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage ouvert U de (x_0, y_0) dans \mathbb{R}^2 et un voisinage ouvert I de z_0 dans \mathbb{R} et une application $h : U \rightarrow I$ de classe $C^{+\infty}$ tel que : pour tout $(x, y, z) \in U \times I$

$$f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow z = h(x, y)$$

de plus $h_x(x, y) = -\frac{f_x(x, y, z)}{f_z(x, y, z)}$ et $h_y(x, y) = -\frac{f_y(x, y, z)}{f_z(x, y, z)}$.

Alors l'application

$$\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \mapsto \varphi(u, v) = (u, v, h(u, v))$$

est une immersion sur U , car $Jac_\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ h_u(u, v) & h_v(u, v) \end{pmatrix}$ de rang égal à 2.

C'est à dire φ est une surface paramétrée régulière.

Si $(\varphi_x \wedge \varphi_y)(x, y) = (b_1, b_2, b_3)$, on a

$$b_1 = \begin{vmatrix} 0 & h_x(x, y) \\ 1 & h_y(x, y) \end{vmatrix} = -h_x(x, y) = \frac{f_x(x, y, z)}{f_z(x, y, z)},$$

$$b_2 = - \begin{vmatrix} 1 & h_x(x, y) \\ 0 & h_y(x, y) \end{vmatrix} = -h_y(x, y) = \frac{f_y(x, y, z)}{f_z(x, y, z)},$$

$$b_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$(\varphi_x \wedge \varphi_y)(x, y) = \left(\frac{f_x(x, y, z)}{f_z(x, y, z)}, \frac{f_y(x, y, z)}{f_z(x, y, z)}, 1 \right).$$

C'est à dire $f_z(x, y, z)(\varphi_x \wedge \varphi_y)(x, y) = \text{grad } f(x, y, z)$, **i.e.** $(\varphi_x \wedge \varphi_y)(x, y)$ est colinéaire à $\text{grad } f(x, y, z)$ d'où

$$n(x, y, z) = \frac{\text{grad } f(x, y, z)}{\|\text{grad } f(x, y, z)\|},$$

est le vecteur normal unitaire à S en (x, y, z) . ■

Exercice 5.2

Soit S une partie de \mathbb{R}^3 , telle que

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + 2y^2 - z^2 = 2\}.$$

1. Vérifier que S est une surface géométrique.
2. Déterminer l'équation Cartésienne du plan tangent à S au point $p = (3, 3, 5)$.

Solution

1. L'application

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z^2 - 2$$

est une submersion car pour tout $(x, y, z) \in S$, car

$$\text{grad } f(x, y, z) = (2x, 4y, -2z) \neq (0, 0, 0),$$

d'où S est une surface géométrique.

2. On a $p = (3, 3, 5) \in S$ et $\text{grad } f(p) = (6, 12, -10)$.

$$M(x, y, z) \in T_p S \Leftrightarrow \overrightarrow{pM} \perp \text{grad } f(p) \Leftrightarrow -6(x-3) + 12(y-3) - 10(z-5) = 0,$$

d'où l'équation cartésienne est $3x + 6y - 5z - 2 = 0$.

5.2 Première forme fondamentale

5.2.1 Expression locale

Définition 5.6

Soient $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière de support S et $T_p S$ le plan tangent à S en $p \in S$. On appelle première forme fondamentale en p de S notée \mathbb{I} , la forme quadratique associée à la restriction du produit scalaire usuel de \mathbb{R}^3 au $T_p S$.

Si $w \in T_p S$, $w = \alpha\varphi_u + \beta\varphi_v$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\mathbb{I}(w) &= \langle \varphi_u\alpha + \varphi_v\beta, \varphi_u\alpha + \varphi_v\beta \rangle \\ &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle \alpha^2 + 2\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle \alpha\beta + \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle \beta^2 \\ &= E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2.\end{aligned}\tag{5.1}$$

Où $E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle$, $F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle$ et $G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$ sont appelés les coefficients de la première forme fondamentale \mathbb{I} dans la base (φ_u, φ_v) .

De l'équation (5.1), on a

$$\mathbb{I}(w) = (\alpha, \beta) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Alors la première forme fondamentale \mathbb{I} dans la base (φ_u, φ_v) est représentée par la matrice symétrique

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

Exemple 5.8

Soit surface paramétrée

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (uv, u - v, u + v).\end{aligned}$$

On a $\varphi_u = (v, 1, 1)$ et $\varphi_v = (u, -1, 1)$ alors les coefficients de la première forme fondamentale sont

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = v^2 + 2, \quad F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = uv, \quad G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = u^2.$$

Théorème 5.1

Soient $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière de support S et $T_p S$ le plan tangent à S en $p \in S$. Alors, la première forme fondamentale \mathbb{I} est une forme quadratique définie positive sur $T_p S$.

Démonstration

En utilisant l'expression locale de la première forme fondamentale (voir (5.1)), on a :

$$\mathbb{I}(w) = E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2.$$

pour tout vecteur $w \in T_p S$, $w = \alpha \varphi_u + \beta \varphi_v$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Pour que \mathbb{I} soit définie positive, il faut que $\mathbb{I}(w) > 0$ pour tout $w \in T_p S \setminus \{0\}$.

Puisque $E > 0$ et $G > 0$, la condition de positivité est équivalente à la négativité stricte du discriminant de la forme quadratique :

$$\Delta = 4(F^2 - EG).$$

Autrement dit, pour tout choix de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{I}(w) > 0 \iff F^2 - EG < 0.$$

Or, par définition,

$$F^2 - EG = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle^2 - \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle.$$

En appliquant l'identité de Lagrange (voir la Proposition 1.12), on obtient :

$$F^2 - EG = -\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|^2 < 0.$$

Ainsi, la forme quadratique \mathbb{I} est bien définie positive sur $T_p S$. ■

5.2.2 Longueur d'une courbe paramétrée**Définition 5.7**

Soient $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée régulière et $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière de support S .

γ est dite tracée sur S si pour tout $t \in I$, $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$, *i.e.* elle existe

$$\alpha : I \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$$

une courbe paramétrée régulière telle que $\gamma = \varphi \circ \alpha$.

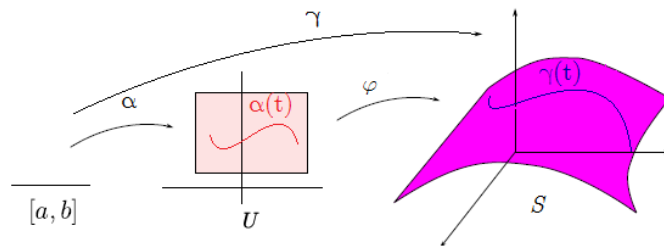


FIGURE 5.9 – Courbe tracée sur une surface paramétrée.

Proposition 5.2

Soient $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée régulière tracée sur une surface paramétrée régulière $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ de support S , si $[a, b] \subset I$. Alors la longueur de l'arc $\gamma|_{[a,b]}$ de γ est donnée par

$$l_{\gamma|_{[a,b]}} = \int_a^b \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2} dt.$$

Démonstration

Nous avons $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ et $\gamma'(t) = \varphi_u u' + \varphi_v v'$.

La longueur de la courbe paramétrée γ est donnée par

$$l_{\gamma|_{[a,b]}} = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Nous calculons :

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\| &= \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle} \\ &= \sqrt{\langle \varphi_u u' + \varphi_v v', \varphi_u u' + \varphi_v v' \rangle} \\ &= \sqrt{\langle \varphi_u, \varphi_u \rangle (u')^2 + 2\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle u'v' + \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle (v')^2} \\ &= \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2}. \end{aligned}$$

Ceci complète la démonstration. ■

Remarques 5.3

1. En utilisant (5.1), on trouve :

$$\mathbb{I}(\gamma'(t)) = \|\gamma'(t)\|^2 = E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2. \quad (5.2)$$

Pour avoir une formule plus courte et donc plus facile à retenir, en utilisant l'abscisse curviligne d'origine $\gamma(a)$,

$$s = \phi(t) = \int_a^t \|\gamma'(t)\| dt,$$

En utilisant (2.1) et (5.2), on trouve $ds = \|\gamma'(t)\| dt$, alors

$$\begin{aligned} ds^2 &= \|\gamma'(t)\|^2 dt^2 \\ &= (E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2) dt^2 \\ &= E(u' dt)^2 + 2Fu' dt v' dt + G(v' dt)^2 \\ &= Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2. \end{aligned} \quad (5.3)$$

2. D'une autre part on a : $d\varphi = \varphi_u du + \varphi_v dv$,

$$\begin{aligned} d\varphi^2 &= \langle d\varphi, d\varphi \rangle \\ &= \langle \varphi_u du + \varphi_v dv, \varphi_u du + \varphi_v dv \rangle \\ &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle du^2 + 2\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle dudv + \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle dv^2 \\ &= Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2. \end{aligned} \quad (5.4)$$

En utilisant les équations (5.1), (5.3) et (5.4), nous écrivons la première forme fondamentale \mathbb{I} sous la forme suivante :

$$\mathbb{I} = Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2. \quad (5.5)$$

Exercice 5.3

Considérons la sphère unité paramétrée par

$$\varphi(u, v) = (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v),$$

où $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ et la courbe $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ telle que

$$u(t) = \ln\left(\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right)\right), \quad v(t) = \frac{\pi}{2} - t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Déterminer la longueur de l'arc $\gamma|_{[0, \frac{\pi}{2}]}$ de γ .

Solution

Cette courbe commence à l'équateur et s'enroule en spirale vers le pôle Nord.

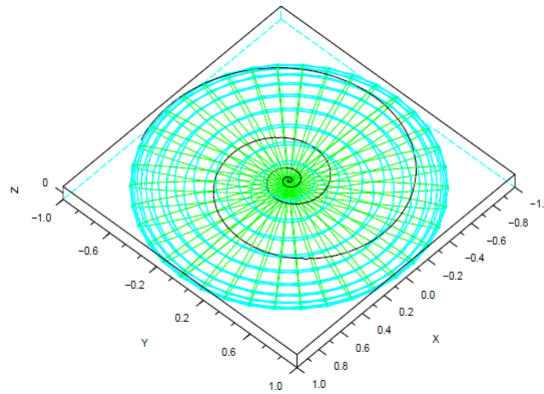


FIGURE 5.10 – Courbe tracée sur la sphère unité.

D'après un calcul simple, on constate que

$$\varphi_u = (-\sin u \sin v, \cos u \sin v, 0),$$

$$\varphi_v = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, -\sin v),$$

ainsi

$$E = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - t\right), \quad F = 0, \quad G = 1,$$

et

$$u' = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}, \quad v' = -1,$$

ce qui donne

$$E(u')^2 + 2F(u'v') + G(v')^2 = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - t\right)} + 1 = 2.$$

Finalement longueur de l'arc $\gamma|_{[0, \frac{\pi}{2}]}$ de γ sera

$$\begin{aligned} l_{\gamma|_{[0, \frac{\pi}{2}]}} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2} dt = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Corollaire 5.1

Soient $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière. Si θ est l'angle entre φ_u et φ_v , alors

$$\cos \theta = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Démonstration

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle}{\|\varphi_u\| \|\varphi_v\|} \\ &= \frac{\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle}{\sqrt{\langle \varphi_u, \varphi_u \rangle} \sqrt{\langle \varphi_v, \varphi_v \rangle}} = \frac{F}{\sqrt{EG}}. \end{aligned}$$

Corollaire 5.2

Soient $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière. Alors les vecteurs φ_u et φ_v sont orthogonaux si et seulement si $F = 0$.

5.2.3 Aire d'une surface paramétrée

Définition 5.8

Soient $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière de support S et $D \subset S$ un domaine compact, on définit l'aire \mathcal{A} de D par

$$\mathcal{A} = \iint_{\varphi^{-1}(D)} \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| du dv. \quad (5.6)$$

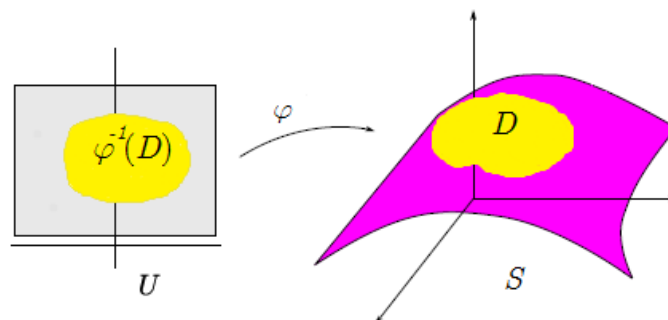


FIGURE 5.11 – L'aire d'une partie de surface paramétrée.

Proposition 5.3

Soient $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière de support S et $D \subset S$ un domaine compact, alors l'aire de D est donnée par

$$\mathcal{A} = \iint_{\varphi^{-1}(D)} \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv.$$

Démonstration

En utilisant l'identité de Lagrange voir (la Proposition 1.12), on obtient

$$\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|^2 = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle - \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle^2 = EG - F^2 > 0. \quad (5.7)$$

En le substituant dans la formule (5.6) on, trouve

$$\mathcal{A} = \iint_{\varphi^{-1}(D)} \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| \, du \, dv = \mathcal{A} = \iint_{\varphi^{-1}(D)} \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv.$$

Ceci complète la démonstration. ■

Exercice 5.4

Soit surface S paramétrée

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 2\pi] \times [0, 2] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto \varphi(u, v) = (e^v \cos u, e^v \sin u, e^v). \end{aligned}$$

1. Vérifiez que les vecteurs φ_u et φ_v sont orthogonaux.
2. déterminez l'aire de S .

Solution

1. Nous allons vérifier que φ_u et φ_v sont orthogonaux, on a $\varphi_u = (-e^v \sin u, e^v \cos u, 0)$ et $\varphi_v = (e^v \cos u, e^v \sin u, e^v)$ alors les coefficients de la première forme fondamentale \mathbb{I} sont $E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = e^{2v}$, $F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0$ et $G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = 2e^{2v}$.
Puis que $F = 0$, alors es vecteurs φ_u et φ_v sont orthogonaux.

2. Nous allons déterminer l'aire de S ,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \iint_{\varphi^{-1}(S)} \sqrt{EG - F} \, du \, dv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{2e^{4v}} \, du \, dv \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} du \int_0^2 e^{2v} \, dv \\ &= \pi\sqrt{2}(e^4 - 1). \end{aligned}$$

Exercice 5.5

Le tore est la surface engendrée par la révolution d'un cercle C autour d'une droite D de son plan.

1. Déterminer une paramétrisation du tore.
2. Calculer l'aire de la surface du tore.

Solution

1. Supposons que le centre du cercle C se trouve initialement dans le plan xOy sur l'axe Ox à distance b de l'origine O et son rayon est égal à a , $a < b$. Après avoir tourné d'un angle θ autour de l'axe Oz alors,

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{b+r} \\ \sin \theta = \frac{y}{b+r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = (b+r) \cos \theta \\ y = (b+r) \sin \theta \end{cases} \quad (5.8)$$

le vecteur rayon après avoir tourné d'un angle ϕ autour d'axe Oz alors,

$$\begin{cases} \cos \phi = \frac{z}{a} \\ \sin \phi = \frac{r}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = a \cos \phi \\ r = a \sin \phi \end{cases} \quad (5.9)$$

de les équations (5.8) et (5.9), on trouve

$$\begin{cases} x = (b + a \sin \phi) \cos \theta \\ y = (b + a \sin \phi) \sin \theta \\ z = a \cos \phi \end{cases}$$

D'où le tore est représenté par la surface paramétrée

$$\varphi(\theta, \phi) = ((b + a \sin \phi) \cos \theta, (b + a \sin \phi) \sin \theta, a \cos \phi), \quad (\theta, \phi) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi].$$

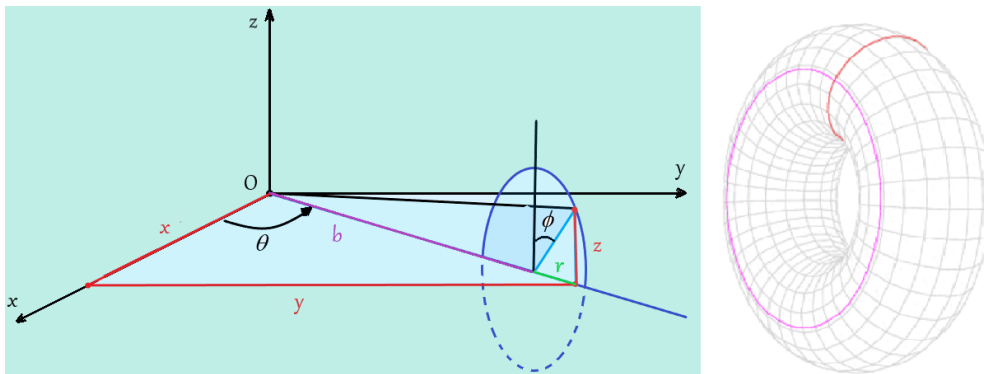


FIGURE 5.12 – L'aire du tore.

2. On va calculer l'aire de la surface du tore, on a

$\varphi_\theta = (-(b+a \sin \phi) \sin \theta, (b+a \sin \phi) \cos \theta, 0)$ et $\varphi_\phi = (a \cos \phi \cos \theta, a \cos \phi \sin \theta, -a \sin \phi)$ alors les coefficients de la première forme fondamentale \mathbb{I} sont

$$E = \langle \varphi_\theta, \varphi_\theta \rangle = (b + a \sin \phi)^2, \quad F = \langle \varphi_\theta, \varphi_\phi \rangle = 0 \quad \text{et} \quad G = \langle \varphi_\phi, \varphi_\phi \rangle = a^2.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \iint_{\varphi^{-1}(S)} \sqrt{EG - F^2} du dv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a(b + a \sin \phi) d\theta d\phi \\ &= 2\pi a [b\phi + a \cos \phi]_0^{2\pi} = 4\pi^2 ab. \end{aligned}$$

Exercices

Exercice 5.6

Soit la surface S de \mathbb{R}^3 paramétrée par : $\varphi(u, v) = (4 \cos u \cdot \sin v, 4 \sin u \cdot \sin v, 4 \cos v)$
où $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$.

1. Déterminer le plan tangent à S au point $A = \varphi\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.
2. Déterminer la première fondamentale.
3. Calculer l'aire S .

Exercice 5.7

Pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$\varphi(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right).$$

On pourra admettre que si W est un voisinage ouvert suffisamment petit de $(0, 0)$ dans \mathbb{R}^2 , la restriction de φ à W est un plongement. On pose alors $S = \varphi(W)$.

1. Déterminer la première forme fondamentale de S .
2. Soit D un disque fermé centré en $(0, 0)$, de rayon δ , contenu dans W . Calculer l'aire de $P(D)$.

Exercice 5.8

Soit $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée dont les coefficients de la première forme fondamentale sont écrits

$$E = 1, \quad F = 2 \cos \theta, \quad G = 1,$$

avec $\theta : U \rightarrow]0, \pi[$ de classe $C^{+\infty}$. Cette surface paramétrée est appelée surface de Tchebychev.

1. Montrer que φ est régulière.
2. Montrer que pour tout $(u, v) \in U$, φ_{uv} est un vecteur normal à la surface.

Exercice 5.9

Déterminer le plan tangent à la surface S au point p dans les cas suivantes :

1. S paramétrée par : $\varphi(u, v) = (u + v, u \cdot v, u^2 + v^2)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $p = (1, 0, 1)$.
2. S d'équation : $z^3 = x \cdot y$, $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, $p = (1, -1, -1)$.

Exercice 5.10

Soit $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 - 2z = 0\}$.

1. Montrer que S est un support d'une surface paramétrée.
2. Déterminer le plan tangent à S au point $A = (1, -1, 1)$.
3. Déterminer une paramétrisation φ de S .
4. Déterminer l'angle entre φ_u et φ_v .

Exercice 5.11

Soit la surface S paramétrée par : $\varphi(u, v) = (e^{-v} \cos u, e^{-v} \sin u, e^{-v})$, $(u, v) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}^+$.

1. Montrer que S est régulière.
2. Déterminer la première forme fondamentale de S .
3. Calculer l'aire de S .

Exercice 5.12

Soit la surface S de \mathbb{R}^3 paramétrée par : $\varphi(u, v) = (u \sin v, u \cos v, \sqrt{3}u)$,
où $(u, v) \in [1, \sqrt{3}] \times [0, 2\pi]$.

1. Déterminer la première fondamentale.
2. Vérifiez que les vecteurs φ_u et φ_v sont orthogonaux.
3. Calculer l'aire de S .
4. Déterminer une équation cartésienne de S .

Exercice 5.13

Soit la surface S de \mathbb{R}^3 paramétrée par : $\varphi(u, v) = (uv, u - v, u + v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

1. Montrer que S est régulière.
2. Déterminer la première fondamentale.
3. Déterminer les valeurs de u et v telles que les vecteurs φ_u et φ_v soient orthogonaux.
4. Déterminer une équation cartésienne de S .

Exercice 5.14

Considérons la surface S de \mathbb{R}^3 paramétrée par

$$\varphi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, v), \quad (u, v) \in [0, \pi] \times]0, +\infty[$$

et la courbe paramétrée

$$\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t)), \quad u(t) = t, \quad v(t) = e^t, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

1. Montrer que S est régulière.
2. Déterminer la première fondamentale.
3. Déterminer une équation cartésienne de S .
4. Déterminer la longueur de l'arc $\gamma|_{[0, \pi]}$ de γ .

CHAPITRE 6

SECONDE FORME FONDAMENTALE

Sommaire

6.1	Seconde forme fondamentale	92
6.1.1	Orientation	92
6.1.2	Application de Gauss	93
6.1.3	Seconde forme fondamentale	94
6.2	Courbures	97
6.2.1	Courbure normale	97
6.2.2	Courbures et directions principales	100
	Exercices	112

6.1 Seconde forme fondamentale

6.1.1 Orientation

Définition 6.1

Soient $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière de support S . On dit que S est orienté (orientable) si pour tout $p \in S$, le plan tangent $T_p S$ est orienté.

Le plan tangent à la surface paramétrée φ au point $p = \varphi(u, v)$, est engendré par les vecteurs $\varphi_u(u, v)$ et $\varphi_v(u, v)$, le vecteur normal unitaire au plan tangent $T_p S$ est le vecteur

$$n(p) = \frac{\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)}{\|\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)\|},$$

alors d'après la définition 1.2.4, si la base $\{\varphi_u(u, v), \varphi_v(u, v), n(p)\}$ de \mathbb{R}^3 est directe, alors elle est l'une des deux orientations du plan tangent $T_p S$ qui est appelée orientation normale de $T_p S$ associée au vecteur $n(p)$.

Si la surface S est définie par une équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$, alors l'orientation normale de S est définie par le gradient de f .

Remarque 6.1

Sur une surface orientable le vecteur normal unitaire peut varier continûment sans changer de sens. La direction de n s'appelle la direction extérieur à la surface. Si une surface n'est pas orientable, elle n'a pas de « direction extérieur » et de « direction intérieur ».

Exemple 6.1

On considère le cylindre de révolution C de \mathbb{R}^3 paramétrée par

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 2]\pi \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto \varphi(u, v) = (r \cos u, r \sin u, v). \end{aligned}$$

D'après un calcul simple, nous trouvons $\varphi_u(u, v) = (-r \sin u, r \cos u, 0)$, $\varphi_v(u, v) = (0, 0, 1)$, $(\varphi_u \wedge \varphi_v)(u, v) = (r \cos u, r \sin u, 0)$ et $n(u, v) = (\cos u, \sin u, 0)$, puis que $\det(\varphi_u(u, v), \varphi_v(u, v), n(u, v)) = r \sin^2 u > 0$, alors C est orientable.

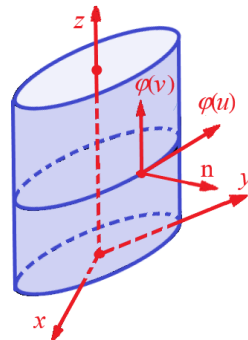


FIGURE 6.1 – Orientation du cylindre de révolution.

Exemple 6.2

Le ruban de Möbius (aussi appelé bande de Möbius) est une surface compacte dont le bord est homéomorphe à un cercle. La surface a la particularité d'être réglée et **non orientable**. Elle a été décrite indépendamment en 1858 par les mathématiciens August Ferdinand Möbius (1790-1868) et Johann Benedict Listing (1808-1882).

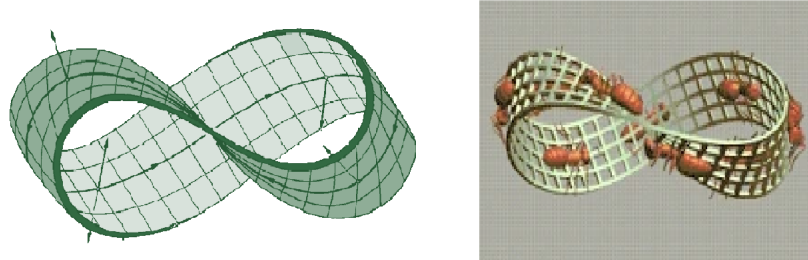


FIGURE 6.2 – Le ruban de Möbius.

Exemple 6.3

La bouteille de Klein est une surface fermée, sans bord et **non orientable**. Elle a été décrite pour la première fois en 1882 par le mathématicien allemand Felix Christian Klein (1849-1925).

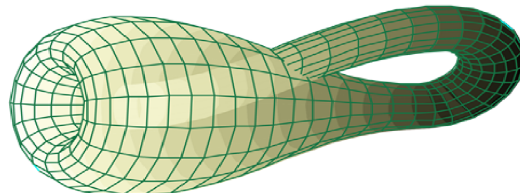


FIGURE 6.3 – La bouteille de Klein.

6.1.2 Application de Gauss

Définition 6.2

Soient $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière de support S , le vecteur unitaire normal de S est définie en chaque point $p = \varphi(u, v)$ de S par

$$n(p) = \frac{\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)}{\|\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)\|}.$$

L'application $n : S \rightarrow \mathbb{S}^2$, $p \mapsto n(p)$ est appelée application de Gauss.

Remarque 6.2

Comme la surface S est régulière, l'application de Gauss en chaque point $p \in S$ est différentiable et sa différentielle, $d_p n : T_p S \rightarrow T_{n(p)} \mathbb{S}^2$, est une application linéaire. Puisque le plan

tangent $T_p S$ est le plan orthogonal à $n(p)$ et s'identifie donc au plan tangent à S^2 , on peut donc voir la différentielle de $n(p)$ comme un endomorphisme linéaire de $T_p S$,

i.e. $d_p n : T_p S \rightarrow T_p S$.

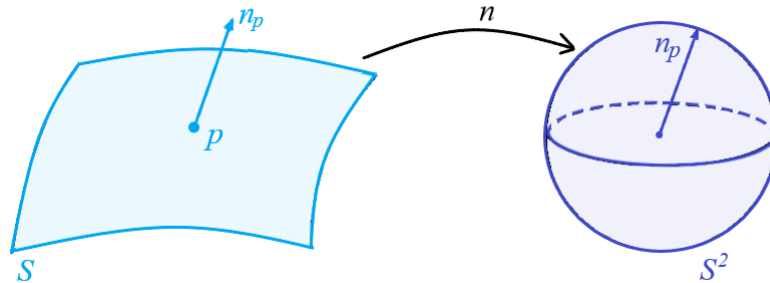


FIGURE 6.4 – Application de Gauss

Exemple 6.4

Si la surface S est le plan donné par l'équation Cartésienne $ax + by + cz + d = 0$, elle coïncide avec son plan tangent en tout point p , alors le vecteur normal unitaire.

$$n(p) = \frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

est constant et donc $d_p n = 0$. d'où l'application de Gauss est donc constante.

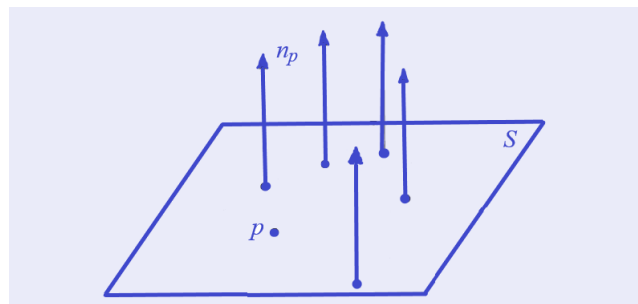


FIGURE 6.5 – Application de Gauss d'un plan.

6.1.3 Seconde forme fondamentale

Proposition 6.1

Soit $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière de support S , en chaque point p de S , l'application $d_p n$ est symétrique (auto-adjoint), i.e. pour tous $w_1, w_2 \in T_p S$

$$\langle d_p n(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, d_p n(w_2) \rangle. \quad (6.1)$$

Démonstration

On pose $w_1 = a_1 \varphi_u + b_1 \varphi_v$ et $w_2 = a_2 \varphi_u + b_2 \varphi_v$, où $a_i, b_i \in \mathbb{R}$.

Ensuite on a $d_p n(w_1) = a_1 n_u + b_1 n_v$ et $d_p n(w_2) = a_2 n_u + b_2 n_v$, alors

$$\begin{aligned} \langle d_p n(w_1), w_2 \rangle &= \langle a_1 n_u + b_1 n_v, a_2 \varphi_u + b_2 \varphi_v \rangle \\ &= a_1 a_2 \langle n_u, \varphi_u \rangle + a_1 b_2 \langle n_u, \varphi_v \rangle + a_2 b_1 \langle n_v, \varphi_u \rangle \\ &\quad + b_1 b_2 \langle n_v, \varphi_v \rangle, \end{aligned} \quad (6.2)$$

de même on trouve

$$\begin{aligned} \langle w_1, d_p n(w_2) \rangle &= a_1 a_2 \langle \varphi_u, n_u \rangle + a_1 b_2 \langle \varphi_u, n_v \rangle + a_2 b_1 \langle \varphi_v, n_u \rangle \\ &\quad + b_1 b_2 \langle \varphi_v, n_v \rangle. \end{aligned} \quad (6.3)$$

D'une autre part, puisque $n \perp \varphi_u$ et $n \perp \varphi_v$, alors $\langle n, \varphi_u \rangle = \langle n, \varphi_v \rangle = 0$.

En dérivant $\langle n, \varphi_u \rangle = 0$ par rapport à v , on obtient $\langle n_v, \varphi_u \rangle + \langle n, \varphi_{uv} \rangle = 0$,

i.e. $\langle n_v, \varphi_u \rangle = -\langle n, \varphi_{uv} \rangle$.

En dérivant $\langle n, \varphi_v \rangle = 0$ par rapport à u , on obtient $\langle n_u, \varphi_v \rangle + \langle n, \varphi_{vu} \rangle = 0$,

i.e. $\langle n_u, \varphi_v \rangle = -\langle n, \varphi_{vu} \rangle$.

D'où

$$\langle n_u, \varphi_v \rangle = \langle n_v, \varphi_u \rangle. \quad (6.4)$$

En utilisant (6.2), (6.2) et (6.4), on trouve $\langle d_p n(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, d_p n(w_2) \rangle$. ■

En utilisant la Proposition 1.9, nous pouvons définir une forme quadratique par pour tout $w \in T_p S$
 $Q(w) = \langle d_p n(w), w \rangle$, d'où la définition suivante.

Définition 6.3

Soit $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière de support S , en chaque point p de S on définit une forme quadratique sur $T_p S$, noté III par pour tout $w \in T_p S$

$$\text{III}(w) = -\langle d_p n(w), w \rangle,$$

s'appelle seconde forme fondamentale de S en p .

Si $w \in T_p S$, $w = \alpha \varphi_u + \beta \varphi_v$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $d_p n(w) = \alpha n_u + \beta n_v$.

$$\begin{aligned} \text{III}(w) &= -\langle d_p n(w), w \rangle \\ &= -\langle \alpha n_u + \beta n_v, \alpha \varphi_u + \beta \varphi_v \rangle \\ &= -\langle n_u, \varphi_u \rangle \alpha^2 - (\langle n_u, \varphi_v \rangle + \langle n_v, \varphi_u \rangle) \alpha \beta - \langle n_v, \varphi_v \rangle \beta^2. \end{aligned}$$

En dérivant $\langle n, \varphi_u \rangle = 0$ et $\langle n, \varphi_v \rangle = 0$ par rapport à u respectivement à v , on obtient

$$\begin{cases} \langle n_u, \varphi_u \rangle + \langle n, \varphi_{uu} \rangle = 0, \\ \langle n_u, \varphi_v \rangle + \langle n, \varphi_{vu} \rangle = 0, \\ \langle n_v, \varphi_u \rangle + \langle n, \varphi_{uv} \rangle = 0, \\ \langle n_v, \varphi_v \rangle + \langle n, \varphi_{vv} \rangle = 0, \end{cases} \quad (6.5)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\text{III}(w) &= \langle n_u, \varphi_{uu} \rangle \alpha^2 + 2\langle n, \varphi_{uv} \rangle \alpha\beta + \langle n, \varphi_{vv} \rangle \beta^2 \\ &= L\alpha^2 + 2M\alpha\beta + N\beta^2\end{aligned}\quad (6.6)$$

Où $L = \langle n_u, \varphi_{uu} \rangle$, $M = \langle n, \varphi_{uv} \rangle$ et $N = \langle n, \varphi_{vv} \rangle$ sont appelés les coefficients de la seconde forme fondamentale III.

De l'équation (6.6), on a

$$\text{III}(w) = (\alpha, \beta) \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Alors la seconde forme fondamentale III dans la base (φ_u, φ_v) est représentée par la matrice symétrique

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

Exemple 6.5

Soit la surface paramétrée

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (uv, u - v, u + v).\end{aligned}$$

On a

$$\varphi_u = (v, 1, 1), \varphi_v = (u, -1, 1), \varphi_{uu} = (0, 0, 0), \varphi_{uv} = (1, 0, 0), \varphi_{vv} = (0, 0, 0)$$

et

$$n(u, v) = \left(\frac{2}{\sqrt{4 + 2u^2 + 2v^2}}, \frac{u - v}{\sqrt{4 + 2u^2 + 2v^2}}, \frac{-u - v}{\sqrt{4 + 2u^2 + 2v^2}} \right).$$

alors les coefficients de la seconde forme fondamentale sont

$$L = \langle n, \varphi_{uu} \rangle = 0, \quad M = \langle n, \varphi_{uv} \rangle = \frac{2}{\sqrt{4 + 2u^2 + 2v^2}}, \quad N = \langle n, \varphi_{vv} \rangle = 0.$$

Remarques 6.1

1. Si γ une courbe paramétrée régulière tracée sur S , alors nous avons $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ et $\gamma'(t) = \varphi_u u' + \varphi_v v'$. En utilisant (6.6), on trouve

$$\text{III}(\gamma'(t)) = L(u')^2 + 2Mu'v' + N(v')^2. \quad (6.7)$$

2. Considérons maintenant la quantité

$$\begin{aligned}-\langle dn, d\varphi \rangle &= -\langle n_u du + n_v dv, \varphi_u du + \varphi_v dv \rangle \\ &= -\langle n_u, \varphi_u \rangle du^2 - (\langle n_u, \varphi_v \rangle + \langle n_v, \varphi_u \rangle) du dv \\ &\quad - \langle n_v, \varphi_v \rangle dv^2.\end{aligned}$$

En utilisant les équations (6.5), on obtient

$$\begin{aligned}-\langle dn, d\varphi \rangle &= \langle n, \varphi_{uu} \rangle du^2 + 2\langle n, \varphi_{uv} \rangle du dv + \langle n, \varphi_{vv} \rangle dv^2 \\ &= Ldu^2 + 2Mdu dv + Ndv^2.\end{aligned}\quad (6.8)$$

3. D'une autre part, nous avons

$$\begin{aligned}\langle n, d^2\varphi \rangle &= \langle n, \varphi_{uu}du^2 + 2\varphi_{uv}du\,dv + \varphi_{vv}dv^2 \rangle \\ &= \langle n, \varphi_{uu} \rangle du^2 + 2\langle n, \varphi_{uv} \rangle du\,dv + \langle n, \varphi_{vv} \rangle dv^2 \\ &= Ldu^2 + 2Mdu\,dv + Ndv^2.\end{aligned}\quad (6.9)$$

En utilisant les équations (6.6), (6.8) et (6.9), nous écrivons la seconde forme fondamentale III sous la forme suivante :

$$\text{III} = Ldu^2 + 2Mdu\,dv + Ndv^2. \quad (6.10)$$

6.2 Courbures

6.2.1 Courbure normale

Définition 6.4

Soient $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière de support S , n le vecteur unitaire normal de S au point p de S et $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée sa longueur tracée sur S , passant par p . On appelle courbure normale de α dans S au point p , le scalaire

$$K_n = \langle \alpha''(s), n \rangle \quad (6.11)$$

pour tout $s \in I$.

Remarque 6.3

Si $N(s)$ le vecteur normal principal de α au point p et $K(s)$ est la courbure de α , alors

$$K_n = \langle \alpha''(s), n \rangle = \langle K(s)N(s), n \rangle = K(s)\langle N(s), n \rangle = K(s)\cos\theta.$$

où θ est l'angle entre $N(s)$ et n .

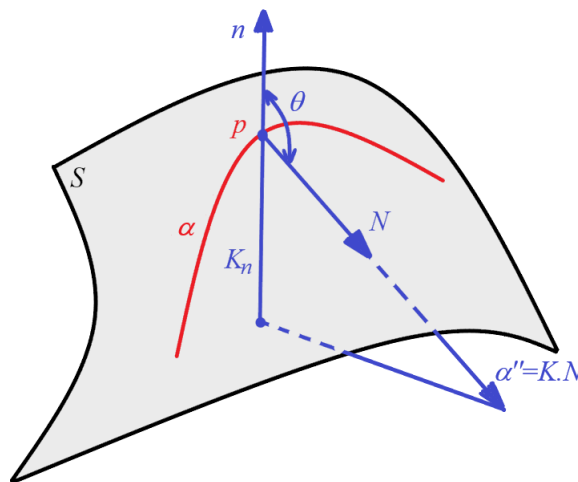


FIGURE 6.6 – Courbure normale d'une courbe.

Corollaire 6.1

La courbure normale K_n représente la longueur de la projection du vecteur KN sur la normale à la surface en p , le signe étant déterminé par vecteur normale n de S en p .

Remarque 6.4

Puisque $\alpha'(s) \in T_pS$, alors $\langle \alpha'(s), n \rangle = 0$, ceci implique que

$$\langle \alpha''(s), n \rangle = \langle \alpha'(s), \frac{dn}{ds} \rangle.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \text{III}(\alpha'(s)) &= -\langle d_p n(\alpha'(s)), \alpha'(s) \rangle \\ &= -\left\langle \frac{dn}{ds}, \alpha'(s) \right\rangle \\ &= \langle \alpha''(s), n \rangle \\ &= K_n. \end{aligned}$$

Corollaire 6.2

La valeur de la seconde forme fondamentale III_p pour un vecteur unitaire $v \in T_pS$ est égale à la courbure normale d'une courbe paramétrée sa longueur passant par le point p et tangente à v .

Remarque 6.5

Si γ une courbe paramétrée régulière équivalente à α . En utilisant la Remarque précédente, nous obtenons

$$\begin{aligned} K_n &= -\left\langle \frac{dn}{ds}, \alpha'(s) \right\rangle \\ &= -\left\langle \frac{dn}{dt} \frac{dt}{ds}, \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \right\rangle \\ &= -\frac{\left\langle \frac{dn}{dt}, \gamma'(t) \right\rangle}{\frac{ds}{dt} \|\gamma'(t)\|}. \end{aligned}$$

En appliquant (2.1) et (5.2), on trouve

$$K_n = -\frac{\langle d_p n(\gamma'(t)), \gamma'(t) \rangle}{\|\gamma'(t)\|^2} = \frac{\text{III}(\gamma'(t))}{\text{I}(\gamma'(t))}. \quad (6.12)$$

D'après (5.2) et (6.7), on obtient

$$K_n = \frac{L(u')^2 + 2Mu'v' + N(v')^2}{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2}. \quad (6.13)$$

Puisque que $du = u'dt$ et $dv = v'dt$, en utilisant (5.5), (6.10) et (6.13), on trouve

$$K_n = \frac{\text{III}}{\text{I}}. \quad (6.14)$$

Proposition 6.2

Toutes les courbes tracées sur une surface S et ayant en un point $p \in S$ la même droite tangente possèdent, en ce point, la même courbure normale.

Exercice 6.1

Considérons la sphère \mathbb{S}^2 paramétrée par

$$\begin{aligned}\varphi : [0, 2\pi] \times [0, \pi] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (r \cos u \sin v, r \sin u \sin v, r \cos v), \quad r > 0.\end{aligned}$$

Calculer K_n .

Solution

En utilisant des calculs directs, nous trouvons

$$\begin{aligned}\varphi_u &= (-r \sin u \sin v, r \cos u \sin v, 0), \quad \varphi_v = (r \cos u \cos v, r \sin u \cos v, -r \sin v), \\ E &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = r^2 \sin^2 v, \quad F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0, \quad G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = r^2.\end{aligned}$$

La première forme fondamentale est

$$\text{II} = r^2 \sin^2 du^2 + r^2 dv^2.$$

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = (-r^2 \cos u \sin^2 v, -r^2 \sin u \sin^2 v, -r^2 \cos u \sin v), \quad \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| = r^2 \sin u,$$

$$n = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} = (-r \cos u \sin v, \sin u \sin v, -\cos v),$$

$$\varphi_{uu} = (-r \cos u \sin v, r \sin u \sin v, 0), \quad \varphi_{uv} = (-r \sin u \cos v, r \cos u \sin v, 0),$$

$$\varphi_{vv} = (-r \cos u \sin v, -r \sin u \sin v, -r \cos v),$$

$$L = \langle n, \varphi_{uu} \rangle = r \sin^2 v, \quad M = \langle n, \varphi_{uv} \rangle = 0, \quad N = \langle n, \varphi_{vv} \rangle = r.$$

La seconde forme fondamentale est

$$\text{III} = r \sin^2 du^2 + r dv^2,$$

d'où la courbure normale

$$K_n = \frac{\text{III}}{\text{II}} = \frac{r \sin^2 du^2 + r dv^2}{r^2 \sin^2 du^2 + r^2 dv^2} = \frac{1}{r} > 0.$$

Exercice 6.2

Considérons le cylindre C paramétrée par

$$\begin{aligned}\varphi : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (\cos u, \sin u, v).\end{aligned}$$

Calculer K_n .

Solution

En utilisant des calculs directs, nous trouvons

$$\varphi_u = (-\sin u, \cos u, 0), \quad \varphi_v = (0, 0, 1),$$

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = 1, \quad F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0, \quad G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = 1.$$

La première forme fondamentale est

$$\text{II} = du^2 + dv^2.$$

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = (\cos u, \sin u, 0), \quad \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| = 1,$$

$$n = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} = (\cos u, \sin u, 0),$$

$$\varphi_{uu} = (-\cos u, -\sin u, 0), \quad \varphi_{uv} = \varphi_{vv} = (0, 0, 0),$$

$$L = \langle n, \varphi_{uu} \rangle = -1, \quad M = \langle n, \varphi_{uv} \rangle = 0, \quad N = \langle n, \varphi_{vv} \rangle = 0.$$

La seconde forme fondamentale est

$$\text{III} = -du^2,$$

la courbure normale

$$K_n = \frac{\text{III}}{\text{II}} = \frac{-du^2}{du^2 + dv^2}.$$

On peut choisir $du^2 + dv^2 = r^2 > 0$, $du = r \cos \theta$ et $dv = r \sin \theta$, où $\theta \in]0, 2\pi[$, alors

$$K_n = \frac{-du^2}{du^2 + dv^2} = \frac{-r^2 \cos^2 \theta}{r^2} = -\cos^2 \theta < 0.$$

Définition 6.5

Soient $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière de support S . Un point p de S est appelé point ombilical si la courbure normale en p est constante.

Exemple 6.6

Tous les points d'une sphère et d'un plan sont des points ombilicaux.

6.2.2 Courbures et directions principales

Théorème 6.1

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2, et soit $f : E \rightarrow E$ un endomorphisme. Alors, il existe une base orthonormale $\{e_1, e_2\}$ de E dans laquelle f est diagonalisable. De plus, f admet deux valeurs propres réelles λ_1 et λ_2 , avec $\lambda_1 \geq \lambda_2$, qui sont respectivement le maximum et le minimum de la forme quadratique

$$Q(w) = \langle f(w), w \rangle, \quad \text{où } w \in E \text{ et } \|w\| = 1.$$

Démonstration

Soit $C = \{w \in E : \|w\| = 1\}$ le cercle unité de E , c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs unitaires de E .

On pose $\lambda_1 = \max_{w \in C} Q(w)$, et on choisit $e_1 \in C$ tel que $Q(e_1) = \lambda_1$. Soit ensuite e_2

un vecteur tel que $e_2 \perp e_1$, et on définit $\lambda_2 = Q(e_2)$.

Pour tout $w \in E \setminus \{0\}$, on a $\frac{w}{\|w\|} \in C$, d'où

$$Q\left(\frac{w}{\|w\|}\right) = \left\langle f\left(\frac{w}{\|w\|}\right), \frac{w}{\|w\|} \right\rangle = \frac{1}{\|w\|^2} \langle f(w), w \rangle = \frac{1}{\|w\|^2} Q(w).$$

Ainsi, $Q\left(\frac{w}{\|w\|}\right) \leq \lambda_1$, ce qui implique

$$Q(w) \leq \lambda_1 \|w\|^2.$$

Écrivons $w = x_1 e_1 + x_2 e_2$ avec $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. On a alors

$$\begin{aligned} Q(w) &= Q(x_1 e_1 + x_2 e_2) \\ &= \langle f(x_1 e_1 + x_2 e_2), x_1 e_1 + x_2 e_2 \rangle \\ &= \langle x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2), x_1 e_1 + x_2 e_2 \rangle \\ &= x_1^2 \langle f(e_1), e_1 \rangle + x_2^2 \langle f(e_2), e_2 \rangle + x_1 x_2 (\langle f(e_1), e_2 \rangle + \langle f(e_2), e_1 \rangle). \end{aligned}$$

Or, puisque

$$\begin{cases} Q(e_1) = \lambda_1, \\ Q(e_2) = \lambda_2, \end{cases} \iff \begin{cases} \langle f(e_1), e_1 \rangle = \lambda_1, \\ \langle f(e_2), e_2 \rangle = \lambda_2, \end{cases} \iff \begin{cases} f(e_1) = \lambda_1 e_1, \\ f(e_2) = \lambda_2 e_2. \end{cases}$$

Nous en déduisons que λ_1 et λ_2 sont des valeurs propres de f , et que f est donc diagonalisable. De plus,

$$Q(w) = x_1^2 \lambda_1 + x_2^2 \lambda_2,$$

et, sous forme matricielle,

$$Q(w) = \langle f(w), w \rangle = {}^t w \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} w.$$

Pour $w = x_1 e_1 + x_2 e_2 \in C$, on a $\|w\|^2 = x_1^2 + x_2^2 = 1$ et $x_1, x_2 \in [-1, 1]$. Ainsi,

$$Q(w) = x_1^2 \lambda_1 + (1 - x_1^2) \lambda_2 = (\lambda_1 - \lambda_2) x_1^2 + \lambda_2.$$

Posons $g(x) = (\lambda_1 - \lambda_2) x^2 + \lambda_2$ avec $x = x_1$, alors

$$g'(x) = 2(\lambda_1 - \lambda_2)x.$$

L'étude du tableau de variations de la fonction g sur $[-1, 1]$

x	-1	0	1
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	λ_1	λ_2	λ_1

montre que : $\lambda_2 = \min_{x \in [-1, 1]} g(x) = \min_{w \in C} Q(w)$. ■

Remarque 6.6

Si γ une courbe paramétrée régulière tracée sur S , passant par $p \in S$, alors

$$\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t)), \quad \gamma'(t) = u'\varphi_u + v'\varphi_v \text{ et } d_p n(\gamma'(t)) = u'n_u + v'n_v.$$

Puis que $n_u, n_v \in T_p S$ et $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ est une base de $T_p S$, alors il existe

$w_{11}, w_{12}, w_{21}, w_{22} \in \mathbb{R}$ telles que

$$\begin{cases} n_u = w_{11}\varphi_u + w_{21}\varphi_v, \\ n_v = w_{12}\varphi_u + w_{22}\varphi_v, \end{cases} \quad (6.15)$$

et par conséquent

$$d_p n(\gamma'(t)) = (w_{11}u' + w_{12}v')\varphi_u + (w_{21}u' + w_{22}v')\varphi_v$$

et, sous forme matricielle

$$d_p n \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Définition 6.6

Soient $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière de support S et $p \in S$. La matrice $W = (w_{ij})$ de l'application $d_p n$ dans la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ de $T_p S$, s'appelle la matrice de Weingarten.

Remarque 6.7

D'après le Théorème 6.1, il existe une base orthonormée $\{e_1, e_2\}$ de $T_p S$ dans laquelle l'application différentielle $d_p n$ est diagonalisable. Dans cette base, on a

$$d_p n(e_1) = -k_1 e_1, \quad d_p n(e_2) = -k_2 e_2,$$

où $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ et $k_1 \geq k_2$ sont respectivement le maximum et le minimum de la seconde forme fondamentale III restreinte au cercle unité de $T_p S$, i.e.

$$k_1 = \max_{\|w\|=1} \text{III}(w), \quad k_2 = \min_{\|w\|=1} \text{III}(w),$$

qui correspondent aux valeurs extrêmes de la courbure normale en p .

De plus, pour tout $w = x_1 e_1 + x_2 e_2$, on a :

$$\begin{aligned} \text{III}(w) &= -\langle d_p n(w), w \rangle = -x_1^2 k_1 - x_2^2 k_2 \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Définitions 6.1

Soient $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière de support S et $p \in S$.

1. Les valeurs extrêmes k_1 et k_2 de la courbure normale au point p , sont appelées courbures principales en p .

2. Les directions correspondantes, c'est-à-dire celles données par les vecteurs propres e_1, e_2 , sont appelées directions principales en p .
3. Le nombre $K = k_1.k_2$ s'appelle la courbure de Gauss de S en p .
4. Le nombre $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ s'appelle la courbure moyenne de S en p .

Remarques 6.2

1. La courbure de Gauss est le déterminant de la matrice de Weingarten.
2. La courbure moyenne est moins la moitié de la trace de la matrice de Weingarten.

Proposition 6.3

Soient $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière de support S et $p \in S$. Alors p est un point ombilical si et seulement si les courbures principales en p sont égales.

Démonstration

Puis que les courbures principales k_1 et k_2 en p sont les valeurs extrêmes de la courbure normale k_n au point p , alors K_n est constante équivalente à $k_1 = k_2$. ■

Proposition 6.4

1. Les coefficients w_{ij} de la matrice de Weingarten dans la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ sont données par.

$$w_{11} = \frac{MF - LG}{EG - F^2}, w_{12} = \frac{NF - MG}{EG - F^2}, w_{21} = \frac{LF - ME}{EG - F^2}, w_{22} = \frac{MF - NE}{EG - F^2}.$$

2. La courbure de Gauss et la courbure moyenne sont données par.

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, H = \frac{NE + LG - 2MF}{2(EG - F^2)}.$$

Démonstration

1. En utilisant les équations (6.5), on trouve

$$\begin{cases} L = \langle n, \varphi_{uu} \rangle = -\langle n_u, \varphi_u \rangle, \\ M = \langle n, \varphi_{uv} \rangle = -\langle n_u, \varphi_v \rangle = -\langle n_v, \varphi_u \rangle, \\ N = \langle n, \varphi_{vv} \rangle = -\langle n_v, \varphi_v \rangle, \end{cases}$$

D'après (6.15), on obtient

$$\begin{cases} L = -\langle w_{11}\varphi_u + w_{21}\varphi_v, \varphi_u \rangle = -(w_{11}E + w_{21}F), \\ M = -\langle w_{11}\varphi_u + w_{21}\varphi_v, \varphi_v \rangle = -(w_{11}F + w_{21}G) \\ M = -\langle w_{12}\varphi_u + w_{22}\varphi_v, \varphi_u \rangle = -(w_{12}E + w_{22}F), \\ N = -\langle w_{12}\varphi_u + w_{22}\varphi_v, \varphi_v \rangle = -(w_{12}F + w_{22}G), \end{cases}$$

d'où

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix},$$

alors

$$\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix},$$

mais

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} = \frac{-1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}. \quad (6.16)$$

De cette égalité, nous obtenons des expressions pour les coefficients w_{ij} de la matrice de Weingarten dans la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$.

2. En utilisant les expressions des coefficients w_{ij} de la matrice de Weingarten nous obtenons

$$\begin{aligned} K &= \det(W) = w_{11}w_{22} - w_{21}w_{12} \\ &= \frac{MF - LG}{EG - F^2} \frac{MF - NE}{EG - F^2} - \frac{LF - ME}{EG - F^2} \frac{NF - MG}{EG - F^2} \\ &= \frac{M^2(F^2 - EG) + LN(EG - F^2)}{(EG - F^2)^2} \\ &= \frac{LN - M^2}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{2} \text{Trace}(W) = -\frac{1}{2}(w_{11} + w_{22}) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{MF - LG}{EG - F^2} + \frac{MF - NE}{EG - F^2} \right) \\ &= \frac{NE + LG - 2MF}{2(EG - F^2)}. \end{aligned}$$



Remarque 6.8

On résout l'équation $\det(\text{III} - k\text{II}) = 0$, en considérant $k \in \mathbb{R}$. Nous trouvons ensuite

$$\begin{aligned} \det(\text{III} - k\text{II}) = 0 &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} L - kE & M - kF \\ M - kF & N - kG \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow (L - kE)(N - kG) - (M - kF)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (EG - F^2)k^2 - (NE + LG - 2MF)k + (LN - M^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow k^2 - \frac{NE + LG - 2MF}{EG - F^2}k + \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow k^2 - 2Hk + K = 0. \end{aligned}$$

Il s'agit d'une équation quadratique possédant deux solutions réelles, dont la somme est égale à $2H$ et le produit à K . Par conséquent, ces solutions sont précisément les courbures principales k_1 et k_2 . Ainsi, on obtient

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K}, \quad k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}. \quad (6.17)$$

Définitions 6.2

Soient $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière de support S .

1. S est dite *minimale*, si la courbure moyenne est nulle, *i.e.* $H = 0$.
2. S est dite *développable*, si la courbure de Gauss est nulle, *i.e.* $K = 0$.

Exercice 6.3

Considérons le cylindre C définie par :

$$\varphi(u, v) = (\cos u, \sin u, v), \quad (u, v) \in [0, 2]\pi \times \mathbb{R}.$$

Calculer la courbure de Gauss K , la courbure moyenne H et les courbures principales k_1 et k_2 .

Solution

En utilisant des calculs directs, nous trouvons

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1, \quad L = -1, \quad M = 0, \quad N = 1.$$

1. La courbure de Gauss K

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = 0,$$

alors C est développable.

2. La courbure moyenne H

$$H = \frac{NE + LG - 2MF}{2(EG - F^2)} = -\frac{1}{2},$$

3. Les courbures principales k_1 et k_2 ,

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K} = 0, \quad k_2 = H - \sqrt{H^2 - K} = -1.$$

Exercice 6.4

On considère la surface S (hélicoïde) définie par :

$$\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v), \quad (u, v) \in]0, 1[\times \mathbb{R}.$$

Calculer la courbure de Gauss K , la courbure moyenne H et les courbures principales k_1 et k_2 .

Solution

En utilisant des calculs directs, nous trouvons

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1 + u^2, \quad L = 0, \quad M = \frac{-1}{\sqrt{1 + u^2}}, \quad N = 0.$$

1. La courbure de Gauss K

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{-1}{(1 + u^2)^2},$$

2. La courbure moyenne H

$$H = \frac{NE + LG - 2MF}{2(EG - F^2)} = 0,$$

alors S est une surface minimale.

3. Les courbures principales k_1 et k_2 ,

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K} = \frac{-1}{1+u^2}, \quad k_2 = H - \sqrt{H^2 - K} = \frac{-1}{1+u^2}.$$

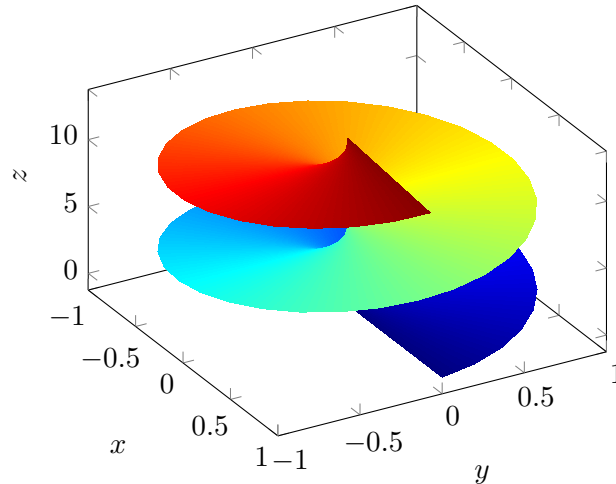


FIGURE 6.7 – Hélicoïde.

Remarque 6.9 (Nature locale d'une surface au voisinage d'un point)

Soit $p = \varphi(0, 0)$ un point d'une surface régulière S , et soit q un point situé dans un voisinage de p . La projection d du vecteur \overrightarrow{pq} sur le normal unitaire n_p en p est donnée par

$$d = \langle \overrightarrow{pq}, n_p \rangle = \langle \varphi(u, v) - \varphi(0, 0), n_p \rangle.$$

On remarque que d est positif ou négatif selon que le point q se trouve d'un côté ou de l'autre du plan tangent en p , et que $|d|$ représente la distance orthogonale de q au plan tangent $T_p S$.

Comme φ est une application de classe $C^{+\infty}$, on peut appliquer la formule de Taylor au second ordre :

$$\varphi(u, v) = \varphi(0, 0) + \varphi_u u + \varphi_v v + \frac{1}{2}(\varphi_{uu} u^2 + 2\varphi_{uv} uv + \varphi_{vv} v^2) + o(u^2 + v^2),$$

où les dérivées partielles sont évaluées en $(0, 0)$ et $\lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{o(u^2 + v^2)}{u^2 + v^2} = 0$.

On en déduit que

$$\begin{aligned} d &= \langle \varphi_u u + \varphi_v v + \frac{1}{2}(\varphi_{uu} u^2 + 2\varphi_{uv} uv + \varphi_{vv} v^2) + o(u^2 + v^2), n_p \rangle \\ &= \frac{1}{2}(\langle \varphi_{uu}, n_p \rangle u^2 + 2\langle \varphi_{uv}, n_p \rangle uv + \langle \varphi_{vv}, n_p \rangle v^2) + o(u^2 + v^2) \\ &= \frac{1}{2}(L u^2 + 2M uv + N v^2) + o(u^2 + v^2) \\ &= \frac{1}{2} \text{III}(w) + o(u^2 + v^2), \end{aligned}$$

où $w = \varphi_u u + \varphi_v v$.

Ainsi, III constitue la partie principale du double de la projection du vecteur \vec{pq} sur le normal n_p , et $|\text{III}|$ représente la partie principale du double de la distance orthogonale de q au plan tangent en p . La fonction

$$\delta = \frac{1}{2} \text{III} = \frac{1}{2} (L du^2 + 2M du dv + N dv^2)$$

est appelée *paraboloïde osculateur* en p .

La nature de ce paraboloïde décrit qualitativement la nature locale de la surface au voisinage de p . On distingue quatre cas selon le signe du discriminant $LN - M^2$.

1. Un point p de S est dit elliptique lorsque $LN - M^2 > 0$. Dans ce cas la fonction δ est un paraboloïde elliptique. On observe que δ garde un signe constant dans un voisinage du point p et l'ensemble de ces points est situé d'un côté du plan tangent $T_p S$.
2. Un point p de S est dit hyperbolique si en ce point $LN - M^2 < 0$. Dans ce cas la fonction δ est un paraboloïde hyperbolique, il existe deux lignes qui divisent le plan tangent $T_p S$ en quatre parties distinctes où δ est alternativement positif et négatif. Sur ces deux droites, $\delta = 0$. Au voisinage d'un point hyperbolique, la surface est située de part et d'autre du plan tangent.
3. Un point p de S est dit parabolique si en ce point $LN - M^2 = 0$ et que les coefficients L , M et N ne sont pas tous nuls ($L^2 + M^2 + N^2 \neq 0$). Dans ce cas la fonction δ est un cylindre parabolique. Il existe ici une seule droite dans le plan tangent $T_p S$ le long de laquelle $\delta = 0$; sinon, δ conserve le même signe. Il est à noter qu'au voisinage d'un point parabolique, la surface elle-même peut se trouver de part et d'autre du plan tangent.
4. Un point p de S est dit plainaire si en ce point $L = M = N = 0$, Dans ce cas la fonction δ est le plan tangent $T_p S$. Ici la fonction $\delta = 0$.

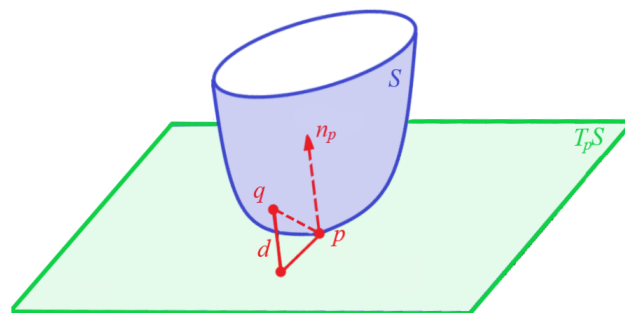


FIGURE 6.8 – Nature locale d'une surface au voisinage d'un point.

Remarques 6.3

Puis que La matrice de l'application $d_p n$ dans la base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ est la matrice de Weingarten, et que la courbure gaussienne est son déterminant, nous avons.

1. En un point elliptique, la courbure de Gauss est positive. Les deux courbures principales

ont le même signe ; par conséquent, toutes les courbes passant par ce point ont leurs vecteurs normaux pointant vers le même côté du plan tangent.

2. En un point hyperbolique, la courbure de Gauss est négative. Les courbures principales ont des signes opposés ; par conséquent, il existe des courbes passant par p dont les vecteurs normaux en p pointent vers l'un des côtés du plan tangent en p .
3. En un point parabolique, la courbure de Gauss est nulle, mais l'une des courbures principales n'est pas nulle.
4. En un point planaire, la courbure de Gauss est nulle et toutes les courbures principales sont nulles, ce qui signifie qu'il s'agit d'un point ombilical.

Exemple 6.7

Soit S la surface paramétrique (paraboloïde elliptique) définie par :

$$\varphi(u, v) = (u, v, u^2 + v^2), \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

Avec des calculs directs, nous trouvons

$$\begin{aligned} \varphi_u &= (1, 0, 2u), & \varphi_v &= (0, 1, 2v), \\ \varphi_{uu} &= (0, 0, 2), & \varphi_{uv} &= (0, 0, 0), & \varphi_{vv} &= (0, 0, 2), \\ n &= \left(\frac{-2u}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}}, \frac{-2v}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}} \right), \\ L &= \frac{2}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}}, & M &= 0, & N &= \frac{2}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}}, \end{aligned}$$

et pour tous $u, v \in \mathbb{R}$, $LN - M^2 = \frac{4}{1 + 4u^2 + 4v^2} > 0$, alors tout point de S est elliptique.

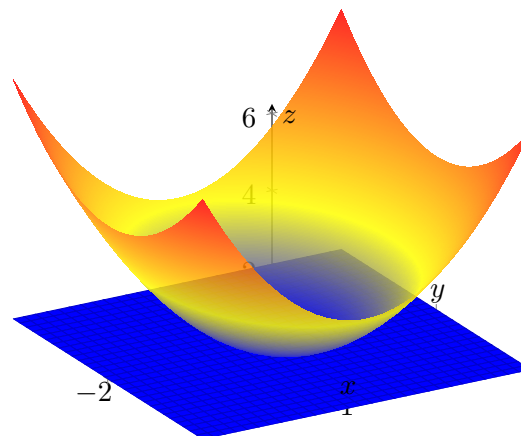


FIGURE 6.9 – Paraboloïde elliptique.

Exemple 6.8

Soit S la surface paramétrique (paraboloïde hyperbolique) définie par :

$$\varphi(u, v) = (u, v, u^2 - v^2), \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

Pour tous $u, v \in \mathbb{R}$, $LN - M^2 = \frac{-4}{1 + 4u^2 + 4v^2} < 0$, alors tout point de S est hyperbolique.

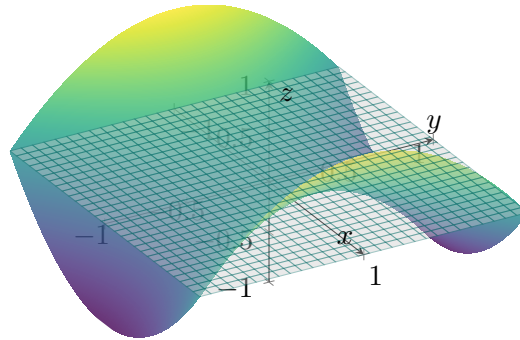


FIGURE 6.10 – Paraboloïde hyperbolique.

Exemple 6.9

Soit S la surface paramétrique (tore de révolution) définie par :

$$\varphi(u, v) = ((b + a \sin v) \cos u, (b + a \sin v) \sin u, a \cos v), \quad u, v \in [0, 2\pi], \quad a < b.$$

Avec des calculs directs, nous trouvons

$$\varphi_u = (-(b + a \sin v) \sin u, (b + a \sin v) \cos u, 0), \quad \varphi_v = (a \cos v \cos u, a \cos v \sin u, -a \sin v),$$

$$\varphi_{uu} = (-(b + a \sin v) \cos u, -(b + a \sin v) \sin u, 0), \quad \varphi_{uv} = (-a \cos v \sin u, a \cos v \cos u, 0),$$

$$\varphi_{vv} = (-a \sin v \cos u, -a \sin v \sin u, -a \cos v), \quad n = (-\sin v \cos u, -\sin v \sin u, -\cos v),$$

$$L = (b + a \sin v) \sin v, \quad M = 0, \quad N = a, \quad LN - M^2 = a(b + a \sin v) \sin v.$$

1. $LN - M^2 = 0$ pour $v = 0$ ou $v = \pi$, **i.e.** les points paraboliques sont tous les points de deux cercles supérieur et inférieur.
2. $LN - M^2 > 0$ pour $0 < v < \pi$, **i.e.** les points elliptiques sont tous les points de la face extérieure $\{\varphi(u, v) \mid (u, v) \in [0, 2\pi] \times]0, \pi[\}$.
3. $LN - M^2 < 0$ pour $\pi < v < 2\pi$, **i.e.** les points hyperboliques sont tous les points de la face intérieure $\{\varphi(u, v) \mid (u, v) \in [0, 2\pi] \times]\pi, 2\pi[\}$.

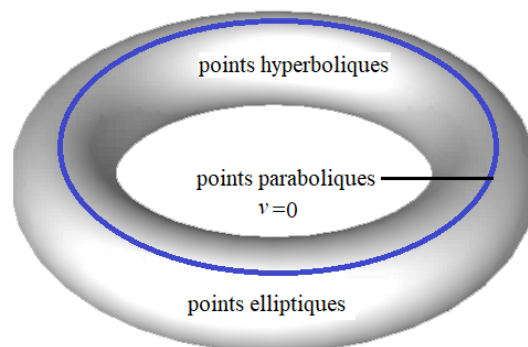


FIGURE 6.11 – Tore de révolution.

Exemple 6.10

Soit la surface paramétrée S définie par :

$$\varphi(u, v) = (u, v, u + v^3), \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

Avec des calculs directs, nous trouvons

$$\varphi_u = (1, 0, 1), \quad \varphi_v = (0, 1, 3v^2), \quad \varphi_{uu} = (0, 0, 0), \quad \varphi_{uv} = (0, 0, 0), \quad \varphi_{vv} = (0, 0, 6v),$$

$$n = \left(\frac{-1}{\sqrt{2+9v^4}}, \frac{-3v^2}{\sqrt{2+9v^4}}, \frac{1}{\sqrt{2+9v^4}} \right), \quad L = 0, \quad M = 0, \quad N = \frac{6v}{\sqrt{2+9v^4}}.$$

1. On a pour tous $u, v \in \mathbb{R}$, $LN - M^2 = 0$ et $L^2 + M^2 + N^2 = \frac{36v^2}{2+9v^4} \neq 0$ pour $v \neq 0$, d'où les points paraboliques sont $\{\varphi(u, v) \mid u, v \in \mathbb{R}, v \neq 0\} = S \setminus \{(u, 0, u) \mid u \in \mathbb{R}\}$.

2. $L = M = N = 0$ pour $v = 0$, d'où les points plans sont $\{(u, 0, u) \mid u \in \mathbb{R}\}$.

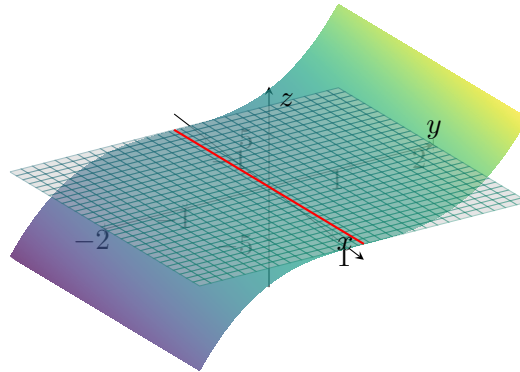


FIGURE 6.12 – Surface paramétrée $\varphi(u, v) = (u, v, u + v^3)$.

Proposition 6.5

Soit $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière de support S . Un point p dans S est

1. elliptique, si $\det d_p n > 0$.
2. hyperbolique, si $\det d_p n < 0$.
3. parabolique, si $\det d_p n = 0$ et $d_p n \neq 0$.
4. planaire, si $d_p n = 0$.

Démonstration

En utilisant la Proposition 6.4 alors, on a

$$\det d_p n = K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$

et puis que $EG - F^2 > 0$ (voir (5.7)), on trouve

1. Un point p dans S est elliptique, si $LN - M^2 > 0 \Leftrightarrow \det d_p n > 0$.
2. Un point p dans S est hyperbolique, si $LN - M^2 < 0 \Leftrightarrow \det d_p n < 0$.
3. Un point p dans S est parabolique, si $LN - M^2 = 0 \Leftrightarrow \det d_p n = 0$, en utilisant (6.16),
 L, M et N ne sont pas tous nuls $\Leftrightarrow (w_{ij})$ ne sont pas tous nuls $\Leftrightarrow d_p n \neq 0$.
4. Un point p dans S est planaire, si

$$L^2 + M^2 + N^2 = 0 \Leftrightarrow L = M = N = 0 \Leftrightarrow w_{ij} = 0 \Leftrightarrow d_p n = 0.$$

■

 **Exercice 6.5**

Soit la surface paramétrée S définie par :

$$\varphi(u, v) = (u, v, u^2 + v^3), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Montrer que S est elliptique si $v > 0$, hyperbolique si $v < 0$ et parabolique si $v = 0$.
2. Montrer que la surface S se situe de part et d'autre du plan tangent à chaque voisinage du point parabolique $p(0, 0)$.

Solution

1. En utilisant des calculs directs, nous trouvons

$$\begin{aligned} \varphi_u &= (1, 0, 2u), & \varphi_v &= (0, 1, 3v^2), \\ \varphi_{uu} &= (0, 0, 2), & \varphi_{uv} &= (0, 0, 0), & \varphi_{vv} &= (0, 0, 6v), \\ n &= \left(\frac{-2u}{\sqrt{1 + 4u^2 + 9v^4}}, \frac{-3v^2}{\sqrt{1 + 4u^2 + 9v^4}}, \frac{1}{\sqrt{1 + 4u^2 + 9v^4}} \right), \\ L &= \frac{2}{\sqrt{1 + 4u^2 + 9v^4}}, & M &= 0, & N &= \frac{6v}{\sqrt{1 + 4u^2 + 9v^4}}, \\ LN - M^2 &= \frac{12v}{1 + 4u^2 + 9v^4}. \end{aligned}$$

Puisque pour tous $u, v \in \mathbb{R}$, $1 + 4u^2 + 9v^4 > 0$, le signe $LN - M^2$ vient du signe $12v$ et donc S est elliptique si $v > 0$, hyperbolique si $v < 0$ et parabolique si $v = 0$.

2. Au point $(u, v) = (0, 0)$, nous avons $\varphi_u = (1, 0, 0)$ et $\varphi_v = (0, 1, 0)$. Par conséquent, le plan tangent à $p(0, 0)$ est le plan de coordonnées $z = 0$. La courbe v -paramètre ($u = 0$) est la cubique $\varphi(0, v) = (0, v, v^3)$ qui s'étend de part et d'autre du plan tangent dans un voisinage de $p(0, 0)$.

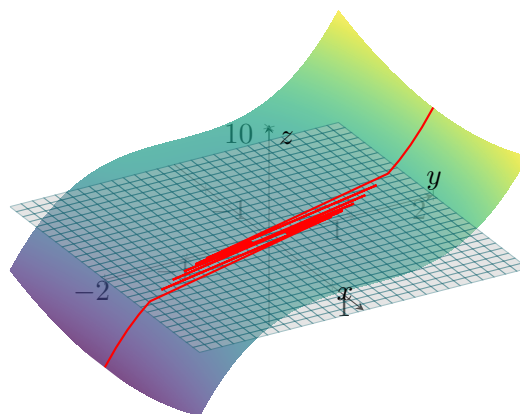


FIGURE 6.13 – Surface paramétrée $\varphi(u, v) = (u, v, u^2 + v^3)$.

Exercices

Exercice 6.6

Soit la surface S définie par la paramétrisation :

$$\varphi(u, v) = (u, v, u.v), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Déterminer la première et la seconde forme fondamentale de S .
2. Calculer la matrice de Weingarten S .
3. Calculer la courbure de Gauss et la courbure moyenne de S .
4. Calculer les courbures principales de S .

Exercice 6.7

On considère la surface S définie par le paramétrage :

$$\varphi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u), \quad (u, v) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}.$$

1. Déterminer la première et la seconde forme fondamentale de S .
2. Calculer la courbure normale de S .
3. Calculer la courbure de Gauss et la courbure moyenne de S .

Exercice 6.8

Soit la surface S définie par la paramétrisation :

$$\varphi(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Déterminer la première forme fondamentale de S .
2. Déterminer la première et la seconde forme fondamentale de S .
3. Calculer les courbures principales de S .

Exercice 6.9

On considère la surface S définie par l'équation :

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

1. Montrer que S peut être paramétrée par

$$\varphi(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, \sinh u), \quad (u, v) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi].$$

2. Déterminer les deux formes fondamentales.
3. Calculer la courbure de Gauss et vérifier qu'elle est négative.
3. Calculer la courbure moyenne et vérifier qu'elle est de signe constant.

Exercice 6.10

On considère la surface S définie par l'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a, b, c \in \mathbb{R}^*.$$

1. Montrer que S peut être paramétrée par

$$\varphi(u, v) = (a \cos u \cos v, b \cos u \sin v, c \sin u), \quad (u, v) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi].$$

2. Déterminer les points ombilicaux de l'ellipsoïde.

Exercice 6.11

Démontrer que la courbure moyenne est nulle en tout point de la surface de révolution

$$\varphi(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u), \quad (u, v) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi].$$

Exercice 6.12

On considère la surface M plongée dans \mathbb{R}^3 définie par le paramétrage :

$$\varphi(u, v) = \left(\frac{\cos v}{ch(u)}, \frac{\sin v}{ch(u)}, u - \frac{sh(u)}{ch(u)} \right), \quad (u, v) \in]0, +\infty[\times [0, 2\pi].$$

1. Déterminer la première et la deuxième forme quadratique fondamentale de M .
2. Calculer la courbure moyenne H et la courbure de Gauss K .
3. Calculer les courbures principales k_1, k_2 .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. Beldjilali, *Courbes et Surfaces*, Université Mustapha Stambouli de Mascara, 2020-2021 (version arabe).
- [2] J.P. Barani, *Espaces euclidiens, géométrie euclidienne*, 15 janvier 2004.
- [3] M.P. Do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, 1976.
- [4] D. Fredon, *Mathématiques Algèbre et Géométrie*, Dunod, Paris, 2009.
- [5] P. Manfredo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, 1976 by Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.
- [6] M.L. Martin, *Theory and Problems of Differential Geometry*, Schaum's Outline Series, Bridgeport, Conn. March 1969.
- [7] H. Ménévis, *Cours de Mathématiques Quatrième partie, géométrie*, PCSI2 2010/2011.
- [8] J.P. Ramis et A. Warusfel, *Mathématiques tout-en-un pour la licence*, Couverture Rachid Marai © Dunod, Paris, 2006 ISBN 2 10 049614 X.
- [9] J. Quinet, *Cours élémentaire de mathématiques supérieures tome I-Algèbre*, BORDAS, Paris 1976.
- [10] C.Thierry, *Courbes et Surfaces*, Université Paris XII Val-de-Marn, 4 décembre 2005.
- [11] A. Zagane, *Géométrie : Géométrie Affine et Euclidienne*, Université Ahmed Zabana de Relizane, 2019-2020.
<http://dspace.univ-relizane.dz/home/handle/123456789/626>
- [12] A. Zagane, *Algèbre 03 : Réduction des endomorphismes d'espaces vectoriels de dimension finie et applications*, Université Ahmed Zabana de Relizane, 2021-2022. <http://dspace.univ-relizane.dz/home/handle/123456789/625>