جامعة غليزان
RELIZANE UNIVERSITY

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جـــامعة غليزان

كلية العلوم الاقتصادية، التسيير والعلوم التجارية

مطبوعة بيداغوجية بعنوان

الإحصـــــاء الرياضـــــي

Mathematical Statistics

وفق المقرر الدراسي لمقياس الإحصاء 3 + الإحصاء 4

موجه لطلبة السنة الثانية كلية العلوم الاقتصادية التسيير والعلوم التجارية

من اعداد:

الدكتور قـــــارة ابـراهيـــم

أستاذ محاضـــر قسم أ

السنة الجامعية 2024 – 2025

	المحتوى	الصفحة
1	**المحور الأول: نظرية الاحتمالات والتوزيعات الاحتمالية**	
1-1	نظرية الاحتمال	
2-1	المتغيرات العشوائية المتقطعة والمستمرة	
3-1	التوزيعات الاحتمالية المتقطعة والمستمرة	
4-1	التوزيعات الاحتمالية المشتركة المتقطعة والمستمرة	
2	**المحور الثـاني : نظرية العينـــــــــات**	
1 -2	مفاهيم حول العينات العشوائية	
2 -2	توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي	
3 -2	توزيع المعاينة للفرق بين وسطين حسابيين	
4 -2	توزيع المعاينة للنسبة في العينات	
5 -2	توزيع المعاينة للفرق بين نسبتين	
6 -2	توزيع المعاينة للتباين في العينات في مجتمع طبيعي	
7 -2	توزيع المعاينة لنسبة تباينين في مجتمعين طبيعيين	
3	**المحور الثالث : نظرية التقديـــــــــر**	
1-3	مفاهيم حول نظرية التقدير	
2-3	طرق التقدير النقطي (الإمكان الأعظم، العزوم)	
3-3	خصائص المقدر (عدم التحيز، التقارب، الفعالية)	
4-3	التقدير بمجال الثقة	
5-3	تقدير الوسط الحسابي بمجال الثقة	
6-3	تقدير الفرق بين وسطين حسابيين بمجال الثقة	
7-3	الخطا من النوع الثاني β و منحنى توصيف العمليات	
8-3	تقدير النسبة بمجال الثقة	

9-3	تقدير الفرق بين نسبتين بمجال الثقة	
10-3	تقدير تباين مجتمع طبيعي بمجال الثقة	
11-3	تقدير نسبة تباينين لمجتمعين طبيعيين بمجال الثقة	
4	**المحور الرابع : اختبار الفرضيـــات**	
1- 4	مفاهيم حول اختبار الفرضيات	
2- 4	اختبار فرضيات المتوسط الحسابي في المجتمع	
3- 4	اختبار فرضيات الفرق بين وسطين حسابيين (عينات مستقلة)	
4- 4	اختبار فرضيات الفروق المزدوجة (عينتين غير مستقلتين)	
5- 4	اختبار فرضيات النسبة في المجتمع	
6- 4	اختبار فرضيات الفرق بين نسبتين	
7- 4	اختبار فرضيات التباين لمجتمع طبيعي	
8- 4	اختبار فرضيات نسبة تباينين لمجتمعين طبيعيين	

5	**المحور الخـامس: بعض الاختبارات الإحصائية اللامعلمية**	
1- 5	اختبار حسن المطابقة	
2- 5	اختبار الاستقلال	
3- 5	اختبار التجانس	
6	**المحور السادس: تحليل التباين**	
1- 6	تحليل التباين الأحادي	
2- 6	الاختبارات البعدية (المقارنات المتعددة) ***Bonferroni test***	
3- 6	تحليل التباين الثنائي (بدون تفاعل)	
4- 6	تحليل التباين الثنائي (مع وجود تفاعل)	

نظرية الاحتمـــــــال

تعتبر نظرية الاحتمال أحد أهم فروع الرياضيات المعاصرة، وتهتم نظرية الاحتمال ببناء القوانين في مجال الظواهر العرضية ويقصد بالظواهر العرضية تلك التي تحدث أكثر أو أقل اختلافا عند تكرارها عدة مرات، كانت نظرية الاحتمال نتيجة لمرحلة طويلة ن البحث وساهمت بشكل كبير في تطوير علم الإحصاء الحديث خاصة الجانب الاستدلالي منه.

2 – الاحتمال

2 -1 / تعريف الاحتمال : الاحتمال هو عبارة عن تطبيق يمثل عدد حقيقي قيمته محصورة بين 0 و 1 يرمز له بـــ P

2 -1 / حساب الاحتمال

نقوم بتجربة عشوائية بفضاء عينة Ω و نعتبر A حادث من هذا الفضاء، في هذه الحالة يتم حساب احتمال وقوع الحادث A عند القيام بالتجربة العشوائية على النحو التالي :

$$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات المواتية}}{\text{عدد الحالات الكية}}$$

عدد الحالات الكلية : عبارة عن كل النتائج المتوقعة للتجربة العشوائية (Ω)

عدد الحالات المواتية : عبارة عن كل الحالات التي تسمح بوقوع الحادثA

مثال 1 : نرمي زهرة نرد متجانسة بالصدفة في الهواء و نعتبر الحادث A الحصول على عدد فردي

A " الحصول على عدد فردي "

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{1, 3, 5, \}$$

$$P(A) = \frac{3}{6}$$

مثال 2 : صندوق يحتوى على (10) كرات بيضاء و (06) كرات سوداء، نسحب عشوائيا كرة واحدة و نعتبر الحادث B الحصول على كرة سوداء

$\Omega = \{ b_1, b_2, b_3 \dots\dots b_{10}, n_1, n_2 \dots\dots\dots n_5 \}$ = 16 cas

$B = \{ n_1, n_2 \dots\dots\dots n_5 \}$ = 5 cas

$$P(B) = \frac{5}{16}$$

2 -1 / خصائص الاحتمال

2 -1- 1 / الاحتمال P عدد حقيقي حيث $0 \leq p \leq 1$

ليكن لدينا فضاء احتمالي Ω عدد عناصره N و A حادث عشوائي من هذا الفضاء عدد عناصره n و بالتالي يمكننا كتابة ما يلي :

$$0 \leq n \leq N$$

d'où $P = \frac{n}{N} \Rightarrow \frac{0}{N} \leq \frac{n}{N} \leq \frac{N}{N}$

on obtient $\Rightarrow 0 \leq \frac{n}{N} \leq 1$

donc

$$0 \leq P \leq 1$$

2 -1- 1 / احتمال الحادث العكسي $\bar{A}$

ليكن لدينا فضاء احتمالي Ω عدد عناصره N و A حادث عشوائي من هذا الفضاء عدد عناصره n و نعتبر الحادث $\bar{A}$ الحادث العكسي لـــ A و بالتالي يمكن كتابة ما يلي

$n_A = n \ , \ P(A) = \frac{n_A}{N}$

$$n_{\bar{A}} = N - n$$

d'où $P(\bar{A}) = \frac{n_{\bar{A}}}{N} = \frac{N-n}{N} = \frac{N}{N} - \frac{n}{N} = 1 - P(A)$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$N = n_{\bar{A}} + n_A$$

$$\Rightarrow \frac{N}{N} = \frac{n_{\bar{A}}}{N} + \frac{n_A}{N} \Rightarrow 1 = P(\bar{A}) + P(A)$$

$$\boxed{1 = P(\bar{A}) + P(A)}$$

1 - المتغير العشوائي

1 –1 / تعريف المتغير العشوائي : المتغير العشوائي هو كل تطبيق على فضاء عينة **Ω** بحيث قيمه تمثل نقطة او مجموعة من النقاط من فضاء عينة **Ω** ، و تجدر الإشارة ان المتغير العشوائي قيمه تتغير عشوائيا وفقا لنتائج التجربة العشوائية

نرمي قطعة نقود متجانسة في الهواء ثلاث مرات متوالية و نعرف المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد مرات الحصول على P

X " عدد مرات الحصول على P "

Ω= $\{PPP, PFP, FPP, PPF, FFP, FPF, PFF, FFF\}$ = 8 cas

$$X \in \{0, 1, 2, 3\}$$

X= 0 $\{FFF\} \Rightarrow P(X = 0) = \frac{1}{8}$

X=1 $\{FFP, FPF, PFF\} \Rightarrow P(X = 1) = \frac{3}{8}$

X=2 $\{PFP, FPP, PPF\} \Rightarrow P(X = 2) = \frac{3}{8}$

X=3 $\{PPP\} \Rightarrow P(X = 3) = \frac{1}{8}$

1 –2 / أنواع المتغيرات العشوائية

تنقسم المتغيرات العشوائية بصفة عامة الى نوعين : متغير عشوائي متقطع و متغير عشوائي مستمر

1 –2 - 1 / المتغير العشوائي المتقطع و توزيعه الاحتمالي

أ- تعريف المتغير العشوائي المتقطع

نقول عن متغير عشوائي انه متقطع اذا كانت قيم عبارة عن وحدات صحيحة غير قابلة للتحزئة حيث أنه من غير الممكن أن يؤخذ المتغير العشوائي قيما بين كل وحدتين متتاليتين x_1 و x_2 الى غاية x_{n-1} و x_n و هناك أمثلة كثيرة عن المتغيرات العشوائية المتقطعة مثل : عدد الأطفال في العائلة ، عدد مرات اعطاب الة خلا أسبوع ، عدد غيابات الطالب في فوج خلال شهر ، عدد الإجابات الصحيحة لطالب في الامتحان ..... الخ

التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متقطع

اذا كان لدينا X متغير عشوائي متقطع فانه توزيع الاحتمالي يعطي على شكل جدول يسمى بجدول التوزيع الاحتمالي الذي يضم كل القيم الممكنة للمتغير العشوائي X و الاحتمالات المتعلقة بكل قيمة و يتمين جدول التوزيع الاحتمال بالخصائص التالية

$$\forall \ x_i \in n , \quad 0 \leq P (X = x_i) \leq 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} P (X = x_i) = 1$$

مثال1 : ناخذ معطيات المثال الأول الخاص بتجربة رمي زهرة نرد و نعرف المتغير العشوائي X الذي يمثل مجموع الرقمين المحصل عليهما

X " مجموع الرقمين المحصل عليهما " **(المتغير العشوائي)**

$$X \in \{2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 , 11 , 12 \}$$

يمكن استنتاج جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X على النحو التالي :

$(X=x_i)$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

دالة التوزيع المتجمع للمتغير العشوائي المتقطع

$$F(x) = P (X \leq x_i)$$

ويمكن تلخيص اهم خصائص دالة التوزيع المتجمع لمتغير عشوائي متقطع على النحو التالي:

$$\forall x \in R \ , \quad 0 \leq F(x) \leq 1$$

خاصية النهايات

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

دالة التوزيع المتجمع متزايدة

$$soit \ x, y \in R, avec \ x < y \Rightarrow \quad F(x) < F(y)$$

دالة التوزيع المتجمع دالة مستمرة على اليمين

$$\forall a \in R \quad \lim_{x \to a^+} F(x) = F(a)$$

توقع و تباين المتغير العشوائي المتقطع

التوقع الرياضي E(X)

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, P(X = x_i)$$

التباين V(X)

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \, P(X = x_i) - (E(X))^2$$

الانحراف المعياري σ

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \, P(X = x_i) - (E(X))^2}$$

المتغير العشوائي المستمر و توزيعه الاحتمالي

تعريف المتغير العشوائي المستمر

يكون المتغير العشوائي X متغير مستمر اذا كانت مجموعة القيم الممكنة لـــ X هي مجموعة غير منتهية و غير قابلة للعد، أي انها عبارة عن او اتحاد مجالات من القيم تنتمي على مجموعة الاعداد الحقيقية R ، و من أمثلة المتغيرات العشوائية المستمرة : الطول ، المسافة المقطوعة ، مدة استغال الأجهزة الإلكترونية ، نسبة السكر في الدم ..... الخ، يعرف المتغير العشوائي المستمر **بدالة تسمى بدالة كثافة الاحتمال**

تعريف دالة كثافة الاحتمال: هي دالة معرفة على مجموعة الاعداد الحقيقية R ويجب ان تحقق هذه الدالة الشروط التالية:

1) $\forall x \in R , f(x) \geq 0$

2) $\forall x \in R , \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$

3) $p\,(a < x < b) = \int_a^b f(x)\, dx$

$$\boldsymbol{avec , p\,(a < x < b) = p\,(a \leq x < b) = p\,(a < x \leq b) = p\,(a \leq x \leq b)}$$

دالة التوزيع المتجمع لمتغير عشوائي مستمر

اذا كانت لدينا دالة كثافة احتمالية لمتغير عشوائي مستمر f (x) فيمكن الحصول على دالة التوزيع المتجمع F(x) على النمو التالي :

$$F(x) = P\,(X \leq x_i) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

Avec $-\infty \leq x \leq +\infty$

وتتميز دالة التوزيع المتجمع $F(x)$ بالخصائص التالية

$$\boldsymbol{p\,(a \leq x \leq b) = F\,(b) - F\,(a)}$$

اذا كانت الدالة $F(x)$ فيمكن الحصول على دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X و التي هي عبارة عن المشتقة الأولى لدالة التوزيع المتجمع على النحو التالي:

$$f(x) = \frac{d\,F\,(x)}{dx} = F'(x)$$

التوقع ، التباين و الانحراف المعياري لمتغير عشوائي مستمر

التوقع الرياضي

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f\,(x)\, dx$$

التباين V(X)

$$v(x) = E(x^2) - \left(E(x)\right)^2$$

$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f\,(x)\, dx$$

$$v(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f\,(x)\, dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f\,(x)\, dx\right)^2$$

الانـ

$$\sigma_x = \sqrt{v(x)} = \sqrt{E(x^2) - \left(E(x)\right)^2}$$

$$\sigma_x = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx\right)^2}$$

أولا : التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

1- توزيع برنولي Loi de bernoulli

تعريف

نقول عن متغير عشوائي X أنه يخضع لتوزيع برنولي باحتمال p و نرمز له بـــ $X \sim ber(P)$ اذا كان توزيع الاحتمال يكتب على النحو التالي :

$$\boldsymbol{P(X = x_i) = P^x * q^{1-x} \quad ; x = 0, 1}$$

التوقع الرياضي

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{P(X = x_i)} = \sum_{x=0}^{x=1} \boldsymbol{x_i\, P^x * q^{1-x}}$$

$$\Rightarrow E(X) = (0) * P^0 q^1 + (1) * P^1 q^0 = 0 + P = P$$

$$\boldsymbol{E(X) = P}$$

التباين $V(X)$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X)^2) = \sum_{i=1}^{n} x^2 \boldsymbol{P(X = x_i)} - \boldsymbol{P^2}$$

$$V(X) = [(0)^2 * P^0 q^1 + (1)^2 * P^1 q^0] - \boldsymbol{P^2}$$

$$V(X) = P - P^2 = P(1 - P) = Pq$$

$$E(X) = Pq$$

الانحراف المعياري σ

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{Pq}$$

$$\sigma = \sqrt{Pq}$$

2- التوزيع البواسوني Loi de poisson

تعريف يعتبر التوزيع البواسوني من بين التوزيعات الاحتمالية المتقطعة Variable **aléatoire discrète** ، ويرتكز توزيع بواسون على المبادئ التالية:

1. تكرارات الحادث تكون خلال فترة زمنية معينية او خلال حجم معين
2. عدد تكرارات الحادث يتناسب مع طول الفترة الزمنية او الحجم المعين
3. احتمال تكرار الحادث خلال مدة زمنية او حجم صغير جدا يؤول الى الصفر
4. نعرف المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد تكرارات الحادث خلال المدة الزمنية المعينة او الحجم المعين،

وفي هذه الحالة نقول المتغير العشوائي X يخضع **لتوزيع بواسون**

برهان مجموع الاحتمالات = 1

$$\sum_{i=0}^{+\infty} P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$$

باستخدام متسلسلة تايلور يمكننا كتابة ما يلي

$$\text{On sait que } e^b = \frac{b^0}{0!} + \frac{b^1}{1!} + \frac{b^2}{2!} + \cdots \ldots \ldots \ldots = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{b^x}{x!}$$

وبالتالي يمكن استنتاج

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{\lambda}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{+\infty} P(X = x_i) = e^{-\lambda} * e^{\lambda} = e^{0} = 1$$

$$(X) = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \, P(X = x_i) = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \, e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{+\infty} x \; e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x(x-1)!}$$

On pose $x' = x - 1$, on obtient

$$E(X) = e^{-\lambda} \sum_{x\prime=0}^{+\infty} \frac{\lambda^x}{x'!} = e^{-\lambda} \sum_{x\prime=0}^{+\infty} \lambda \frac{\lambda^{x\prime}}{x'!} = e^{-\lambda} \boldsymbol{\lambda} \sum_{x\prime=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{x\prime}}{x'!}$$

$$\sum_{x\prime=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{x\prime}}{x'!} = \boldsymbol{e^{\lambda}} \Rightarrow \boldsymbol{E(X)} = e^{-\lambda} \boldsymbol{\lambda e^{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda e^{0}} = \boldsymbol{\lambda}$$

$$\boxed{E(X) = \boldsymbol{\lambda}}$$

التباين $\mathbf{V(X)}$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$E[X(X-1)] = a \;\Rightarrow\; E(X^2 - X) = a$$

$$\Rightarrow E(X^2) - E(X) = a$$

$$\Rightarrow E(X^2) = a + E(X)$$

$$\Rightarrow E(X^2) = a + \boldsymbol{\lambda}$$

$$a = E[X(X-1)] = \sum_{x=0}^{+\infty} x(x-1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$$

$$a = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{+\infty} x(x-1)\frac{\lambda^x}{x(x-1)(x-2)!}$$

$on\ pose\ x' = x-2$

$$a = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{x'+2}}{x'!} = e^{-\lambda}\lambda^2 e^{-\lambda} = \lambda^2$$

$$\Rightarrow E(X^2) = a + \boldsymbol{\lambda} = \lambda^2 + \boldsymbol{\lambda}$$

$$\Rightarrow V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \Rightarrow V(X) = \lambda^2 + \boldsymbol{\lambda} - \lambda^2 = \boldsymbol{\lambda}$$

$$\boldsymbol{V(X) = \lambda}$$

$$\boldsymbol{\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\lambda}}$$

3 – التوزيع ذي الحدين La loi binomiale

نعتر تجربة عشوائية لبرنولي حيث احتمال نجاح التجربة هو P و احتمال الفشل هو q=1- P ، نقوم بتكرار نفس التجربة n مرة في نفس الظروف حتى نضمن استقلالية التجارب، ثم نهتم بعدد النجاحات عند تكرار التجربة n مرة ، اذا اعتبرنا ان X هو عدد النجاحات فان احتمال تحقق x مرة نجاح هو P^x و احتمال الفشل هو q^{n-x} اذا احتمال تحقيق x نجاح هو جداء الاحتمالين $P^{x*}\ q^{n-x}$بالإضافة الى ذلك هناك عدة طرق لتحقيق x نجاح من بين n تجربة و عددها C_n^x حيث $C_n^x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$، فنقول في هذه الحالة أن المتغير العشوائي X يخضع لتوزيع **ذي الحدين** قانون توزيعه الاحتمالي يكتب على النحو التالي :

$$X \sim B(n, P)$$

$$P(X = x_i) = C_n^x P^x q^{n-x} \quad , x \in \{0,1,2, \ldots . n\}$$

خواص توزيع ذي الحدين loi binomiale

مجموع الاحتمالات =1 (البرهان)

$$\sum_{i=0}^{n} P(X = x_i) = \sum_{i=0}^{n} C_n^x P^x q^{n-x} = [p+q]^n = 1$$

التوقع الرياضي للتوزيع ذي الحدين $\mathbf{E(X)}$

$$E(X) = x_i \sum_{i=0}^{n} P(X = x_i)$$

$$= x_i \sum_{i=0}^{n} C_n^x P^x q^{n-x} = \sum_{i=0}^{n} x_i \frac{n!}{x!\,(n-x)!} P^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(x-1)!\,(n-x)!} P^x q^{n-x}$$

$$= np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!\,(n-x)!} P^{x-1} q^{n-x}$$

$$= np \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^j P^j q^{n-1-j} = np[p+q]^{n-1} = np$$

$$\boxed{\boldsymbol{E(X) = np}}$$

تباين توزيع ذي الحدين $\mathbf{V(X)}$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X)^2)$$

لحساب المقدار $E(X^2)$ نستخدم علاقة العزم العاملي كما يلي :

$$E[X(X-1)] = E(X^2) - E(X)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} x(x-1)\frac{n!}{x!\,(n-x)!}P^x q^{n-x}$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{i=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(x-2)!\,(n-x)!}P^{x-2}q^{n-x}$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{i=2}^{n} C_{n-2}^{j} P^j q^{n-2-j} = n(n-1)p^2[p+q]^{n-2}$$

$$= n(n-1)p^2$$

$$\Rightarrow E[X(X-1)] = n(n-1)p^2$$

$$E(X^2) = E[X(X-1)] + E(X) = n(n-1)p^2 + np$$

$$\boldsymbol{V(X)} = E(X^2) - (E(X)^2) = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2$$
$$= np(1-p) = npq$$

$$\boxed{\boldsymbol{V(X) = npq}}$$

$$\boldsymbol{\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{npq}}$$

4 – التوزيع الهندسي La loi géométrique

نعتبر تجربة برنولي حيث أن احتمال نجاح التجربة هو P و احتمال الفشل هو $q = 1 - P$ ، نقوم بتكرار نفس التجربة في نفس الظروف (تجارب مستقلة) الى غاية الحصول على النجاح الأول، نعرف المتغير العشوائي X الذي يعبر عن عدد التجارب اللازمة لتحقيق النجاح الأول، في هذه الحالة نقول أن المتغير العشوائي X يخضع لتوزيع هندسي و نكتب

$$P(X = x_i) = \quad q^{x-1}P \quad , \quad x \in \{1,2,3 \dots \dots \infty\}$$

التوقع الرياضي $\mathbf{E(X)}$

$$\boldsymbol{E(X)} = \sum_{\boldsymbol{x=0}}^{\infty} \boldsymbol{x}q^{x-1}P = \frac{P}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$$

$$\boldsymbol{E(X)} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{P}}$$

التباين $\mathbf{V(X)}$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X)^2)$$

لحساب المقدار $E(X^2)$ نستخدم علاقة العزم العاملي كما يلي :

$$E[X(X-1)] = E(X^2) - E(X)$$

$$E[X(X-1)] = \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1)q^{x-1}P = pq\sum_{x=2}^{\infty} x(x-1)q^{x-2}P$$

$$= \frac{2pq}{(1-q)^3} = \frac{2q}{P^2}$$

$$V(X) = E[X(X-1)] + E(X) - (E(X)^2) = \frac{q}{p^2}$$

$$\boldsymbol{V(X)} = \frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{p^2}}$$

الانحراف المعياري $\boldsymbol{\sigma}$

$$\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\boldsymbol{V(X)}} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{p^2}}} = \frac{\sqrt{\boldsymbol{q}}}{\boldsymbol{p}}$$

$$\boldsymbol{V(X)} = \frac{\sqrt{\boldsymbol{q}}}{\boldsymbol{p}}$$

– التوزيع فوق الهندسي loi Hypergéométrique

ليكن لدينا صندوق يحتوي على N كرة، نسبة الكريات البيضاء فيها هي P، نسحب عشوائيا و في ان واحد n كرة، نعرف المتغير العشوائي X الذي يعبر عن عدد الكريات البيضاء المسحوبة، في هذه الحالة نقول أن X متغير عشوائي يخضع لتوزيع فوق الهندسي و حيث أن معلمات هذا التوزيع هي N ، n ، p على الترتيب و نكتب

$$X \sim H\ (N, n, P)$$

اذا كان X متغير عشوائي يخضع لتوزيع فوق الهندسي فانه قانون توزيعه الاحتمالي يكتب على النحو التالي :

$$P(X = k) = \begin{cases} \dfrac{C_{Np}^{k} * C_{qN}^{n-k}}{C_{N}^{n}}, \text{si } \max(0, n - Nq) \leq k \leq \min(n, Np) \\ 0, \text{sinon} \end{cases}$$

حيث أن $q = 1 - p$

التوقع الرياضي وتباين التوزيع فوق الهندسي

اذا كان X متغير عشوائي يخضع لتوزيع فوق الهندسي أي أن

$$X \sim H\ (N, n, P)$$

فان توقع الرياضي يحسب على النحو التالي

$$E(X) = \sum xi\, p(X = k) = np$$

$$V(X) = \frac{N - n}{N - 1} np(1 - P)$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{N - n}{N - 1} np(1 - P)}$$

ثانيا : التوزيعات الاحتمالية المستمرة

1 – التوزيع الأسي السالب

يستخدم التوزيع الأسي السالب غالبا في المسائل المتعلقة بمدة حياة ظاهرة معينة أي انه يتعلق عادة بالزمن كمدة اشتغال أجهزة، مدة مكالمة هاتفية، مدة انتظار زبون للحصول على خدمة معينة

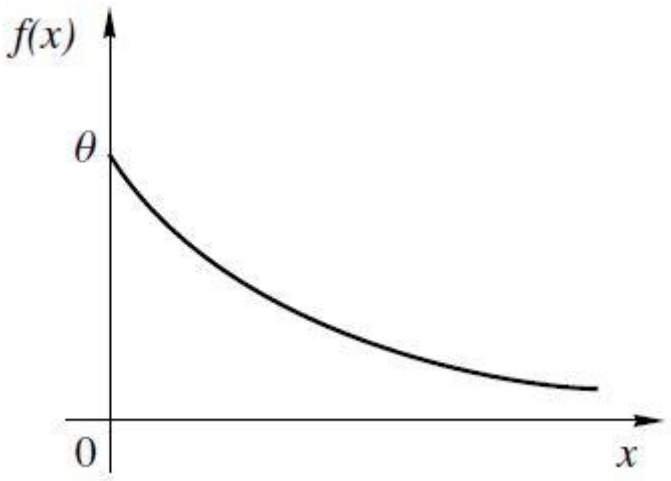
نقول عن متغير عشوائي X انه يخضع الى توزيع أسي معلمته θ حيث أن $\theta \geq 0$ أذا كانت دالة كثافته الاحتمالية تكتب على النحو التالي :

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & x < 0 \\ \theta\, e^{-\theta x}\,, & x \geq 0 \end{cases}$$

ويرمز للتوزيع الاسي السالب على النحو التالي:

$$X \sim \varepsilon\,(\,\boldsymbol{\theta}\,)$$

شكل التوزيع الأسي السالب

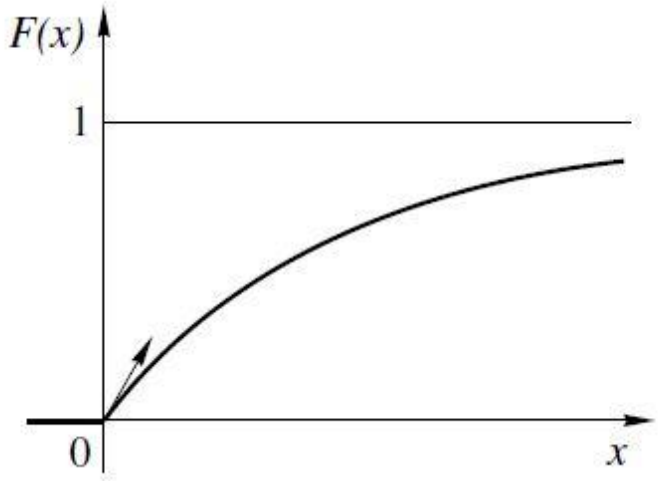


يمكن استنتاج دالة التوزيع المتجمع للمتغير العشوائي X الذي يخضع لتوزيع أسي سالب كما يلي :

$$F(X) = P(\,X \leq xi) = \int_0^x f(t)dt \;= \left[-e^{-\theta t}\right]_0^x = 1 - e^{-\theta x}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\theta x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

شكل دالة التوزيع المتجمع $F(x)$



$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{+\infty} x\theta\, e^{-\theta x}\, dx$$

$$\Rightarrow E(X) = \boldsymbol{\theta} \int_{0}^{+\infty} xe^{-\theta x}\, dx$$

On pose $\int_{0}^{+\infty} xe^{-\theta x}\, dx = a \Rightarrow E(X) = \boldsymbol{\theta a}$

نستخدم علاقة التكامل بالتجزئة حيث :

$$\int u\, dv = [uv] - \int v\, du$$

$$u = x \quad , \quad du = 1 \quad , \quad dv = e^{-\theta x} \quad , v = -\frac{1}{\theta} e^{-\theta x}$$

$$\int_{0}^{+\infty} xe^{-\theta x}\, dx = \left[-\frac{x}{\theta} e^{-\theta x}\right]_{0}^{+\infty} - \int_{0}^{+\infty} -\frac{1}{\theta} e^{-\theta x}\, dx$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} xe^{-\theta x}\,dx = 0 + \frac{1}{\theta}\int_0^{+\infty} e^{-\theta x}\,dx = \frac{1}{\theta}\left[-\frac{1}{\theta}e^{-\theta x}\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{\theta^2}$$

$$\Rightarrow E(X) = \boldsymbol{\theta}\int_0^{+\infty} xe^{-\theta x}\,dx = \theta a = \theta\frac{1}{\theta^2} = \frac{\theta}{\theta^2} = \boldsymbol{\frac{1}{\theta}}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\theta}}}$$

حساب التباين $\mathbf{V(X)}$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

حساب $\boldsymbol{E(X^2)}$

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{+\infty} x^2 f(x)dx =$$

$$\int_0^{+\infty} x^2\theta e^{-\theta x}\,dx = \theta\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\theta x}\,dx$$

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\theta x}\,dx = ?$$

On pose $u = x^2$, $du = 2x$, $dv = e^{-\theta x}$, $v = -\frac{1}{\theta}e^{-\theta x}$

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\theta x}\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{\theta}x^2 e^{-\theta x}\right]_0^{+\infty} + \frac{2}{\theta}\int_0^{+\infty} xe^{-\theta x} = \frac{2}{\theta}\frac{1}{\theta^2} = \frac{2}{\theta^3}$$

$$\Rightarrow E(X^2) = \theta\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\theta x}\,dx = \theta\frac{2}{\theta^3} = \frac{2}{\theta^2}$$

$$\Rightarrow V(X) = \left(\frac{2}{\theta^2}\right) - \left(\frac{1}{\theta}\right)^2 = \left(\frac{2}{\theta^2}\right) - \left(\frac{1}{\theta^2}\right) = \frac{1}{\theta^2}$$

$$\boxed{\boldsymbol{V(X) = \frac{1}{\theta^2}}}$$

2 – التوزيع الطبيعي La loi normale

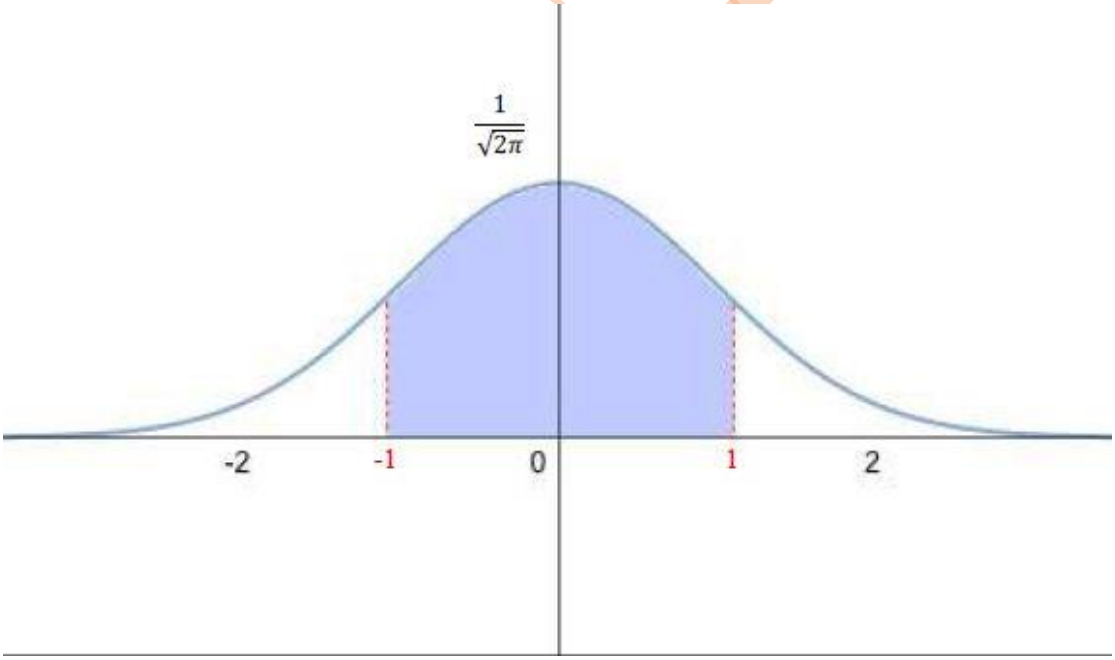
يعتبر التوزيع الطبيعي احد أهم التوزيعات الاحتمالية المستمرة استخداما في الإحصاء نتيجة لنظرية النهاية المركزية ، و يعتبر التوزيع الطبيعي أساسا لنمذجة عدة ظواهر اقتصادية و اجتماعية، اذا كان X متغير عشوائي يخضع لتوزيع طبيعي فان دالة كثافته الاحتمالية تكتب على النحو التالي :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp - \frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2$$

و نكتب في هذه الحالة أن

$$X \sim N(\mu, \sigma) \qquad avec, \sigma > 0$$

μ : عبار عن الوسط الحسابي للتوزيع و σ الانحراف المعياري للتوزيع



حساب $E(X)$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp - \frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2$$

$$\Rightarrow E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x.\exp - \frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2$$

On pose $y = \frac{x-\mu}{\sigma}$ avec $-\infty \leq y \leq +\infty$

$y = \mu + \sigma y \quad , \quad dx = \sigma dy$

$$E(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu + \sigma y).\exp -\frac{1}{2} y^2 \sigma \mathrm{dy}$$

$$= \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-1}{2}y^2} dy + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y\, e^{\frac{-1}{2}y^2} dy$$

$$= \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} y\, e^{\frac{-1}{2}y^2} dy + \int_{0}^{+\infty} y\, e^{\frac{-1}{2}y^2} dy = \mu$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{E(X) = \mu}$$

حساب $\mathbf{V(X)}$

On pose $u = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$$E(X^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2.\exp -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} dx$$

$$\Rightarrow E(X^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma^2 u^2 + 2\mu\sigma u + u^2) e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$$\Rightarrow E(X^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du + u^2 = \sigma^2 + \mu^2$$

$$E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2 \qquad \boldsymbol{V(x) = \sigma^2}$$

التوزيع الطبيعي المعياري Z و حساب الاحتمالات

اذا اعتبرنا ان X متغير عشوائي يخضع لتوزيع طبيعي وسطه الحسابي μ و انحرافه المعياري σ أي أن $X \sim N(\mu, \sigma)$ ، و ليكن Z متغير عشوائي حيث أن $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ ، ففي هذه الحالة نقول أن Z يخضع لتوزيع طبيعي معياري و نكتب

$$Z \sim N\,(0, 1)$$

ويمكن استنتاج دالة كثافة احتمال Z على النحو التالي:

$$F(z) = P(Z \le z)$$

$$= P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \le z\right) = P(X \le \sigma z + \mu)$$

$$= \int_{-\infty}^{\sigma z+\mu} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 dx$$

$$= \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \sigma\, e^{\frac{-1}{2}w^2} dw \qquad \text{avec} \quad w = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{f(z) = F'(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}z^2}}$$

استنتاج توقع وتباين المتغير العشوائي الطبيعي المعياري Z

اذا اعتبرنا ان X متغير عشوائي يخضع لتوزيع طبيعي وسطه الحسابي μ و انحرافه المعياري σ أي أن $X \sim N(\mu, \sigma)$

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma} \qquad \text{avec}$$

$$Z \sim N(0,1)$$

$$E(Z) = E\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}E(x-\mu) = \frac{1}{\sigma}(E(x)-\mu) = \frac{1}{\sigma}(\mu-\mu) = 0$$

$$V(Z) = V\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}V(x-\mu) = \frac{1}{\sigma^2}(V(x)-V(\mu))$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}(\sigma^2 - 0) \quad = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

حساب الاحتمالات (التوزيع الطبيعي

يتم استخدام دالة التوزيع المتجمع للتوزيع الطبيعي المعياري Z (حيث ان قيمها الاحتمالية موجودة في جدول الطبيعي Z) في حساب الاحتمالات المتعلقة بمتغير عشوائي x وسطه الحسابي μ و انحرافه المعياري $\boldsymbol{\sigma}$ على النحو التالي :

$$\boxed{F(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}z^2} = \boldsymbol{\phi}(z)}$$

$$F(z) = P(Z \leq z) = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{z})$$

كما يمكن استخدام الخواص التالية في حساب الاحتمالات

$$P(Z \geq z) = 1 - P(Z \leq z) = 1 - F(z) = 1 - \phi(z)$$

$$P(a \leq Z \leq b) = \phi(b) - \phi(a)$$

$$p(-a \leq Z \leq b) = \phi(b) - [1 - \phi(a)]$$

$$p(-a \leq Z \leq -b) = \phi(a) - \phi(b)$$

$$p(Z \leq -a) = p(Z \geq a) = 1 - \phi(a)$$

$$P(Z \geq -a) = p(Z \leq a) = \phi(a)$$

3 – توزيع كاي تربيع $\boldsymbol{\chi^2}$ او توزيع بيرسون

ليكن لدينا $X_1, X_2, \ldots \ldots X_n$ عبارة عن متغيرات عشوائية مستقلة تتبع نفس التوزيع الاحتمالي الطبيعي أي أنها من الشكل iid حيث $X \sim N(\mu, \sigma)$

نعرف المتغير العشوائي Z حيث $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ في هذه الحالة يكون لدينا ما يلي :

$$Z_i \sim N(0,1) \qquad avec\ i = 1,2, \quad n$$

$$Z_i^2 \sim \boldsymbol{\chi^2} \qquad a\ 1\ degre\ de\ liberté \quad ddl = 1$$

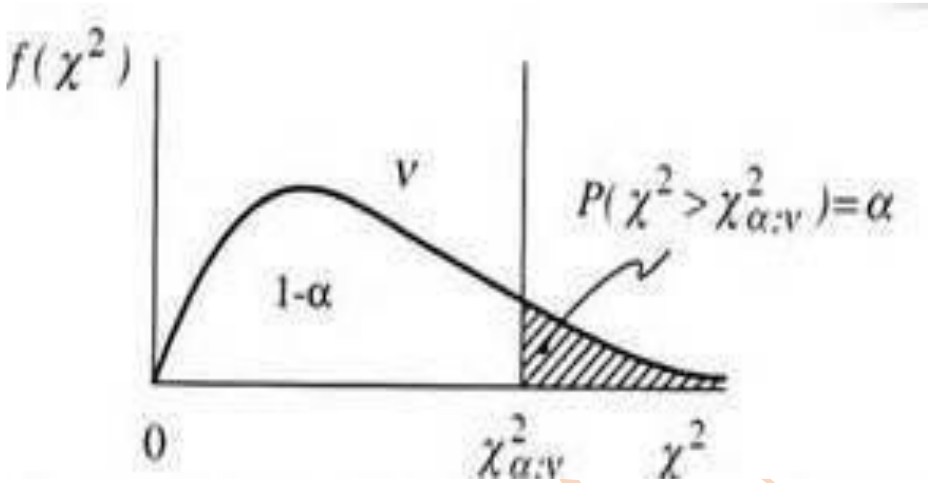
$$Z_1^2 + Z_2^2 \sim \boldsymbol{\chi^2} \qquad a \quad ddl = 2$$

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \sim \boldsymbol{\chi^2} \qquad \boldsymbol{a \ \ (n) \ \ ddl}$$

توزيع كاي تربيع $\boldsymbol{\chi^2}$ بدرجة حرية n دالة كثافته الاحتمالية من الشكل :

$$f(X) = \frac{1}{2^n \Gamma(n/2)} \exp(-\frac{x}{2}) x^{\frac{n}{2}-1}$$

وتأخذ دالة كثافة الاحتمال الشكل التالي



حيث أن:

$$E(\chi^2) = \frac{n/2}{1/2} = \mathbf{n}$$

$$V(\chi^2) = \frac{n/2}{1/4} = \mathbf{2n}$$

4 – توزيع Student ستيودنت

ليكن U متغير عشوائي يخضع لتوزيع طبيعي قياسي حيث أن $U \sim N(0,1)$ ، و نعتبر n متغير عشوائي مستقل بحيث $\sum_{i=1}^{n} U^2$ يخضع لتوزيع كاي تربيع χ^2 بدرجة حرية n أي أن

$$\sum_{i=1}^{n} U^2 \sim \chi^2 \quad \mathbf{n}\ \text{ddl}$$

اذا كان U و χ^2 n مستقلين و T متغير عشوائي حيث أن

$$T = \frac{U}{\sqrt{\frac{\chi^2_n}{n}}}$$

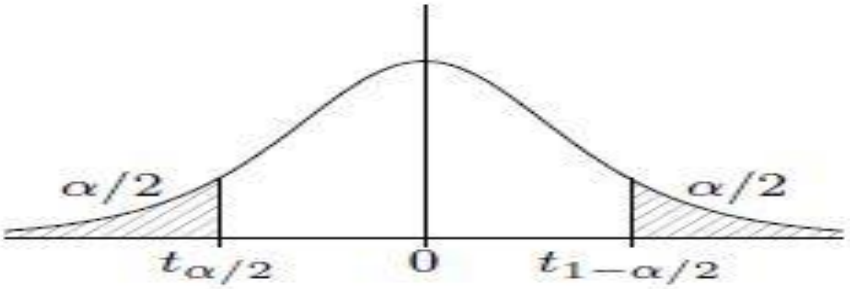
في هذه الحالة نقول أن المتغير العشوائي T يخضع لتوزيع **Student** ستيودنت بدرجة حرية n و يمكن التعبير عن ذلك كما يلي :

$$T \sim t_{n\ ddl}$$

حيث أن :

$$E(T) = 0\,, si\ n\ > 1 \quad , \quad V(T) = \frac{n}{n-2} \quad si\ n\ > 2$$

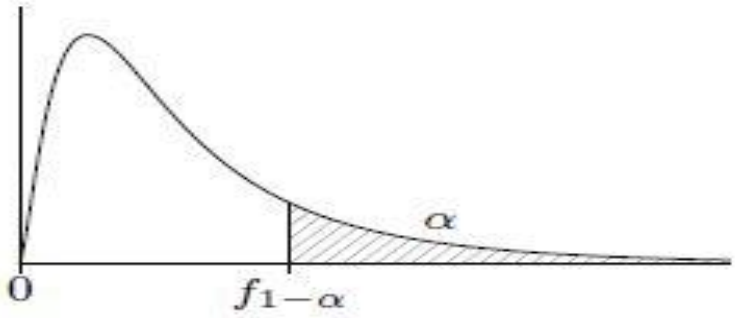
وتأخذ دالة كثافة الاحتمال الشكل التالي:



5 – توزيع Fisher – Snédécor

ليكن لدينا χ_n^2 و χ_m^2 متغيرين عشوائيين مستقلين يخضعان لتوزيع كاي تربيع χ^2 بدرجة حرية n و m على الترتيب ، في هذه الحالة فان $\frac{\chi_n^2/n}{\chi_m^2/m}$ يخضع لتوزيع Fisher – Snédécor بدرجة حرية n و m على الترتيب و يمكن التعبير عن ذلك كما يلي

$$\frac{\chi_n^2/n}{\chi_m^2/m} \sim F(n,m)\ ddl$$



التوزيعات الاحتمالية المشتركة

X2 / X1	1	2	3	4	5	6
1	0	-1	-2	-3	-4	-5
2	1	0	-1	-2	-3	-4
3	2	1	0	-1	-2	-3
4	3	2	1	0	-1	-2
5	4	3	2	1	0	-1
6	5	4	3	2	1	0

X / Y	-1	-2	-3	-4	-5	0	1	2	3	4	5	$\sum$
0						$\frac{6}{36}$						$\frac{6}{36}$
1	$\frac{5}{36}$						$\frac{5}{36}$					$\frac{10}{36}$
2		$\frac{4}{36}$						$\frac{4}{36}$				$\frac{8}{36}$
3			$\frac{3}{36}$						$\frac{3}{36}$			$\frac{6}{36}$
4				$\frac{2}{36}$						$\frac{2}{36}$		$\frac{4}{36}$
5					$\frac{1}{36}$						$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$
$\sum$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

$$P(X = X_i|Y = y_i) = \frac{P(X = X_i\ , Y = y_I\ )}{P(Y = y_i)}$$

التوزيع الاحتمالية الشرطية

$(X = X_i\|Y = 0)$	0
$P(X = X_i\|Y = 0)$	1

$$P(X = 0|Y = 0) = \frac{P(X = 0\ , Y = 0\ )}{P(Y = 0)} = \frac{\frac{6}{36}}{\frac{6}{36}} = 1$$

$(X = X_i\|Y = 1)$	-1	1
$P(X = X_i\|Y = 1)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$P(X = -1|Y = 1) = \frac{P(X = -1\ , Y = 1\ )}{P(Y = 1)}$$

$$\Rightarrow P(X = -1|Y = 1) = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{36}}} = \frac{5}{36} * \frac{36}{10} = \frac{180}{360} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P(X = 1|Y = 1) = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{36}}} = \frac{5}{36} * \frac{36}{10} = \frac{180}{360} = \frac{1}{2}$$

$(X = X_i\|Y = 2)$	-2	2
$P(X = X_i\|Y = 2)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$(X = X_i \mid Y = 3)$	-3	3
$P(X = X_i \mid Y = 3)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$(X = X_i \mid Y = 4)$	-4	4
$P(X = X_i \mid Y = 4)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$(X = X_i \mid Y = 5)$	-5	5
$P(X = X_i \mid Y = 5)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$E(X) = E[E(X|Y = y_i)]$$

مثـــــال 1

لتكن $f(x,y)$ كثافة احتمالية مشتركة معرفة على النحو التالي :

$$f(x,y)=\frac{1}{24} \quad si \;\; x \in [2,6], \qquad y \in [0,6]$$

المطلوب :

1. تأكد من أن $f(x,y)$ هي دالة كثافة احتمالية مشتركة ؟
2. أكتب دوال الكثافة الاحتمالية الهامشية لكل من $f(x)$ و $f(y)$ ؟
3. هل X و Y مستقلين ؟
4. أحسب E(X) , E(Y) , V(X) , V(Y) , COV (X , Y)

حال المثال 1

التأكد من أن $f(x,y)$ هي دالة كثافة احتمالية مشتركة

$$\int_2^6 \int_0^6 \frac{1}{24}\, dx\, dy = 1$$

$$\Rightarrow \int_2^6 \int_0^6 \frac{1}{24}\, dx\, dy = \int_0^6 \left(\int_2^6 \frac{1}{24} dx \right) dy$$

$$\Rightarrow = \int_0^6 \left[\frac{1}{24} x \right]_2^6 dy$$

$$= \int_0^6 \frac{6}{24} - \frac{2}{24} dy = \int_0^6 \frac{4}{24}\, dy = \int_0^6 \frac{1}{6}\, dy = \left[\frac{1}{6}\, y \right]_0^6 = \frac{6}{6} = 1$$

$$\Rightarrow \int_2^6 \int_0^6 \frac{1}{24}\, dx\, dy = 1$$

و منه $f(x,y)$ هي فعلا دالة كثافة احتمالية مشتركة

كتابة دوال كثافة الاحتمال الهامشية

بالنسبة لـــ $f(x)$

$$f(x) = \int_0^6 f(x,y)\, d\, y$$

$$\Rightarrow f(x) = \int_0^6 f(x,y)\,dy = \int_0^6 \frac{1}{24}\,dy = \left[\frac{1}{24}\,y\right]_0^6 = \frac{6}{24} - 0$$
$$= \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{f(X) = \frac{1}{4} \quad si\ X \in [2\ ,\quad 6\ ]}$$

و منه يمكن استنتاج ان X متغير عشوائي يخضع لتوزيع منتظم و بالتالي يمكن كتابة ما يلي :

$$\boldsymbol{X \sim U(\ 2\ ,\ \ 6\ )\ \ d'ou \quad a = 2\ , b = 6}$$

بالنسبة لـــ $f(y)$

$$f(y) = \int_2^6 f(x,y)\,dx$$

$$\Rightarrow f(y) = \int_2^6 f(x,y)\,dx = \int_2^6 \frac{1}{24}\,dx = \left[\frac{1}{24}\,x\right]_2^6$$
$$= \frac{6}{24} - \frac{2}{24} \Rightarrow f(y) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{f(Y) = \frac{1}{6}\ \ si\ \ y \in [0\ ,6\ ]}$$

و منه يمكن استنتاج ان X متغير عشوائي يخضع لتوزيع منتظم و بالتالي يمكن كتابة ما يلي :

$$\boldsymbol{Y \sim U(\ 0\ ,\ \ 6\ )\ \ d'ou \quad a = 0\ \ , b = 6}$$

استقالية المتغيرين العشوائيين X و Y

نعلم أنه اذا كان X و Y متغيرين عشوائيين مستقلين يجب أن يتحقق ما يلي :

$$f(x,y) = f(X) * f(Y)$$

لدينا :

$$f(x,y)\frac{1}{24} \quad si\ x \in [2,6], \qquad y \in [0,6]$$

من جانب أخر لدينا

$$\boldsymbol{f(X) = \frac{1}{4} \quad si\ X \in [2\ ,\quad 6\ ]}$$

$$\boldsymbol{f(Y) = \frac{1}{6}\ si\ y \in [0\ ,6\ ]}$$

و بالتالي يمكن استنتاج أن

$$f(X) * f(Y) = \boldsymbol{\frac{1}{4} * \frac{1}{6} = \frac{1}{24}}$$

$$\Rightarrow f(x,y) = f(X) * f(Y)$$

ومنه X و y فعلا مستقلين

حساب E(X) ، V(X)

بما أن X *متغير عشوائي يخضع لتوزيع منظم فيمكن استنتاج ما يلي :*

$$\boldsymbol{X \sim U(\ 2\ ,\ \ 6\ )\ d'ou \quad a = 2\ , b = 6}$$

$$\Rightarrow E(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{2+6}{2} = 4$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{E(X) = 4}$$

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{4^2}{12} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{V(X) = \frac{4}{3}}$$

حساب E(Y) ، V(Y)

$$\boldsymbol{Y \sim U(\ 0\ ,\ \ 6\ )\ d'ou \quad a = 0\ \ , b = 6}$$

$$E(Y) = \frac{a+b}{2} = \frac{0+6}{2} = 3$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{E(Y) = 3}$$

$$V(Y) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{6^2}{12} = \frac{36}{12} = 3$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{V(Y) = 3}$$

حساب E(X , Y)

$$E(X,Y) = \iint xy\, f(x,y)\, dx\, dy$$

$$\Rightarrow E(X,Y) = \int_2^6 \int_0^6 x\, y\, \frac{1}{24}\, dx\, dy$$

$$\Rightarrow E(X,Y) = \int_2^6 \left(\int_0^6 x\, y\, \frac{1}{24}\, dy\right)\, dx$$

$$\Rightarrow E(X,Y) = \int_2^6 \left[\frac{1}{24} X\, \frac{y^2}{2}\right]_0^6\, dx$$

$$\Rightarrow E(X,Y) = \int_2^6 \left(\frac{1}{24} x\, \frac{36}{2}\right) dx = \int_2^6 \frac{36}{48}\, x\, dx = \frac{3}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^6$$

$$\Rightarrow E(X,Y) = \frac{3}{4}(18-2) = 12$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{E(X,Y) = 12}$$

حساب **COV (X , Y)**

$$COV(X,Y) = E(X,Y) - E(X) * E(Y)$$

$$COV(X,Y) = 12 - (4) * (3)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{COV(X,Y) = 0}$$

$$f(x,y) = K\, e^{-3x-2y} \quad si \quad x \geq 0, y \geq 0$$

إيجاد قيمة العنصر الثابت K

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} K\, e^{-3x-2y} = 1$$

$$\Rightarrow K\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-3x-2y} = 1$$

$$\Rightarrow k\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} e^{-3x-2y}\, dy\right) dx$$

$$= k\int_0^{+\infty} e^{-3x}\left(\int_0^{+\infty} e^{-2y}\, dy\right) dx = 1$$

$$= k\int_0^{+\infty} e^{-3x}\left[-\frac{1}{2}e^{-2y}\right]_0^{+\infty} dx$$

$$= k\int_0^{+\infty} e^{-3x}\left(0+\frac{1}{2}\right) dx = 1$$

$$\Rightarrow \frac{k}{2}\int_0^{+\infty} e^{-3x}\, dx = 1 \Rightarrow \frac{k}{2}\left[-\frac{1}{3}e^{-3x}\right]_0^{+\infty} = 1 \Rightarrow \frac{k}{2}\left(\frac{1}{3}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{k = 6}$$

و يمكن إعادة صياغة دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة على النحو التالي :

$$\mathbf{f(x,y)} = \begin{cases} \mathbf{0}\ \boldsymbol{si}, & \mathbf{x<0}\ ,\mathbf{y<0} \\ 6\,e^{-3x-2y} & si\ \ x \geq 0\ , y \geq 0 \end{cases}$$

كتابة دوال الكثافة الاحتمالية الهامشية لكل من المتغيرين X و Y

بالنسبة للمتغير العشوائي X

$$f(X) = \int_0^{+\infty} f(x,y)dy = \int_0^{+\infty} 6\,e^{-3x-2y}\,dy$$

$$= 6e^{-3x}\int_0^{+\infty} e^{-2y}\,dy$$

$$= 6e^{-3x}\left[-\frac{1}{2}e^{-2y}\right]_0^{+\infty} = 6e^{-3x}\left(0+\frac{1}{2}\right) = 3e^{-3x}$$

$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{0}, & \boldsymbol{x<0} \\ \mathbf{3}\boldsymbol{e}^{-3x}, & \boldsymbol{x \geq 0} \end{cases}$$

و منه نستنتج أن المتغير العشوائي X يخضع لتوزيع أسي معلمته $\boldsymbol{\lambda = 3}$

$$\boldsymbol{X \sim EXP\,(3)}$$

بالنسبة للمتغير العشوائي Y

$$f(y) = \int_0^{+\infty} f(x,y)dx = \int_0^{+\infty} 6\,e^{-3x-2y}\,dx$$

$$= 6e^{-2y}\int_0^{+\infty} e^{-3x}\,dx$$

$$= 6e^{-2y}\left[-\frac{1}{3}e^{-3x}\right]_0^{+\infty} = 6e^{-2y}\left(0+\frac{1}{3}\right) = 2e^{-2y}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2e^{-2y}, & x \geq 0 \end{cases}$$

و منه نستنتج أن المتغير العشوائي Y يخضع لتوزيع أسي معلمته $\lambda = 2$

$$Y \sim EXP(2)$$

استقلالية المتغيرين X و Y

اذا كان X و Y متغيرين مستقلين فيجب تحقق ما يلي :

$$\Rightarrow f(x,y) = f(X) * f(Y)$$

ليدنا

$$f(X) * f(Y) = 3e^{-3x} * 2e^{-2y} = 6e^{-3x-2y}$$

ومنه يمكن استنتاج أن

$$f(x,y) = f(X) * f(Y)$$

و بالتالي فان X و Y فعلا مستقلين

حساب الاحتمال التالي :

$$P(A) = P((2 \leq X \leq 4), \quad P(Y \leq 5))$$

$$P(A) = \int_2^4 \int_0^5 6e^{-3x-2y}\, dx\, dy$$

$$\Rightarrow P(A) = 6\int_2^4 \left(\int_0^5 e^{-3x-2y}\, dy\right) dx$$

$$= 6\int_2^4 e^{-3x}\left(\int_0^5 e^{-2y}\, dy\right) dx$$

$$= 6\int_2^4 e^{-3x}\left[-\frac{1}{2}e^{-2y}\right]_0^5 dx = 6\int_2^4 e^{-3x}\left(1-\frac{1}{2}e^{-10}\right) dx$$

$$= 6\int_2^4 e^{-3x} - \frac{1}{2}e^{-3x-10}\,dx$$

$$= 6\left(\int_2^4 e^{-3x}\,dx - \frac{1}{2}e^{-10}\int_2^4 e^{-3x}\,dx\right)$$

$$d'ou \int_2^4 e^{-3x}\,dx = \left[-\frac{1}{3}e^{-3x}\right]_2^4 = \mathbf{\frac{1}{3}e^{-6} - \frac{1}{3}e^{-12}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{P(A) = 6\left(\frac{1}{3}e^{-6} - \frac{1}{3}e^{-12}\right) - 3\,e^{-10}\left(\frac{1}{3}e^{-6} - \frac{1}{3}e^{-12}\right)}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{P(A) = 2e^{-6} - 2e^{-12} - e^{-16} + e^{-22}}$$

حساب E(X , Y)

$$E(X,Y) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} x\,y\,6\,e^{-3x-2y}\;d\,x\;dy$$

$$\Rightarrow E(X,Y) = 6\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} x\,y\;e^{-3x-2y}\;dx\,dy$$

$$= 6\int_0^{+\infty} x\,e^{-3x}\left(\int_0^{+\infty} ye^{-2y}\;dy\right)dx \ldots\ldots\ldots(1)$$

أول خطوة حساب التكامل بالتجزئة التالي :

$$\int_0^{+\infty} ye^{-2y}\;dy$$

$$u = y \quad , \quad du = 1\,,\; dv = e^{-2y} \quad , v = -\frac{1}{2}e^{-2y}$$

$$\int \boldsymbol{u\,dv} = [\boldsymbol{u\,v}] - \int \boldsymbol{v\,du}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} ye^{-2y}\ dy = \left[-\frac{1}{2}ye^{-2y}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\frac{1}{2}e^{-2y}dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-2y}dy = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-2y}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

بالتعويض في العلاقة 1 نحصل على ما يلي

$$E(X,Y) = 6\int_0^{+\infty} x\,e^{-3x}\left(\frac{1}{4}\right)dx = \frac{3}{2}\int_0^{+\infty} xe^{-3x}\,dx$$

$$u = x \quad ,du = 1 \quad ,dv = e^{-3x} \quad ,v = -\frac{1}{3}e^{-3y}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} xe^{-3x}\ dx = \left[-\frac{1}{3}xe^{-3x}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\frac{1}{3}e^{-3x}dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} e^{-3x}dx = \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{3}e^{-3x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{3}\left(0+\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}$$

$$E(X,Y) = \frac{3}{2} * \frac{1}{9} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{E(X,Y) = \frac{1}{6}}$$

حساب COV (X, Y)

$$\boldsymbol{COV(X,Y) = E(X,Y) - E(X) * E(Y)}$$

حساب E(X) ، و E(Y)

نعلم أن كل من المتغير العشوائي X و Y يخضعان ان توزيع أسي و بالتالي يمكن استنتاج ما يلي :

$$\boldsymbol{E(X) = \frac{1}{3} \quad , \quad E(Y) = \frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{COV(X,Y) = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3} * \frac{1}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{COV(X,Y) = 0}$$

نظريـــة العينات

توزيع المعاينة للاوساط الحسابية و الفروق

ليكن لدينا المجتمع E يتكون من ثلاثة عناصر على النحو التالي :

$$E = \{2 \; ; \; 3 \; ; \; 4\}$$

$$\mu = \sum_{i=1}^{N} \frac{X_i}{N} = \frac{2+4+3}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu)^2}{N} = \frac{2}{3} = 0{,}667$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0{,}667} = 0{,}816$$

X_i	μ	$(X_i - \mu)^2$
2	3	1
4	3	1
3	3	0
$\sum$		2

$$\Omega = \begin{pmatrix} (2\ 2) & (2\ 4) & (2\ 3) \\ (4\ 2) & (4\ 4) & (4\ 3) \\ (3\ 2) & (3\ 4) & (3\ 3) \end{pmatrix}$$

العينات	$\bar{x}$	μ	$(\bar{x}_i - \mu)^2$
(2 2)	2	3	1
(2 4)	3	3	0
(2 3)	2,5	3	0,25
(4 2)	3	3	0
(4 4)	4	3	1

(4 3)	3,5	3	0,25
(3 2)	2,5	3	0,25
(3 4)	3,5	3	0,25
(3 3)	3	3	0
$\sum$	3		3

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{=1}^{N}(\bar{x}_i - \mu)^2}{\Omega}} = \sqrt{\frac{3}{9}} = 0{,}57$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

$$E(\bar{x}) = \mu$$

البرهان

$$E(\bar{x}) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right) = E\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots \ldots x_{n-1} + x_n}{n}\right)$$

$$\Rightarrow E(\bar{x}) = \frac{1}{n} E(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots \ldots x_{n-1} + x_n)$$

$$\Rightarrow E(\bar{x}) = \frac{1}{n}(\mu + \mu + \mu + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \mu)$$

$$\Rightarrow E(\bar{x}) = \frac{1}{n}(\mu * n) = \frac{\mu * n}{n} = \mu$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{E(\bar{x}) = \mu}$$

بالنسبة للتباين

$$V(\bar{x}) = V\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right) = V\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots \ldots x_{n-1} + x_n}{n}\right)$$

$$\Rightarrow V(\bar{x}) = \frac{1}{n^2} V(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots \ldots x_{n-1} + x_n)$$

$$\Rightarrow V(\bar{x}) = \frac{1}{n^2}(\sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2 + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \sigma^2)$$

$$\Rightarrow V(\bar{x}) = \frac{1}{n^2}(n\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\boldsymbol{\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{V(\bar{x})} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

	السحب بالارجاع	السحب بدون ارجاع
N غير محدود أو $N < 0,05\ N$	$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$	$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
$n \geq 0,05\ N$	$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$	$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right)$

مثال

نعتبر مجتما احصائيا عدد عناصره N= 1000 وسطه الحسابي μ =12 و انحرافه المعياري= σ 4 ، نسحب عشوائيا عينة حجمها n

المطلوب : حدد التوزيع الاحتمالي لمتغير توزيع المعاينة حسب الحالات التالية :

1. حجم العينة (100) و السحب بدون ارجاع
2. حجم العينة (35) و السحب بالإرجاع
3. حجم العينة (160) و السحب بدون ارجاع

حل المثال

الحالة الأولى

n=100 , n > 30 , N=1000 سحب بدون ارجاع

$$\frac{n}{N} = \frac{100}{1000} = 0{,}1 \Rightarrow \frac{n}{N} > 0{,}05$$

و منه يمكن استنتاج ما يلي :

$$\bar{x} \sim N\left(\mu , \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right)$$

$$\Rightarrow \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{4}{\sqrt{100}}\sqrt{\frac{1000-100}{999}} = \frac{4}{10}(0{,}95) = 0{,}38$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\sigma_{\bar{x}} = 0{,}38}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\bar{x} \sim N\ (\ 12\ \ ;\ \ 0{,}38\ )}$$

الحالة الثانية

n=35 , n > 30 , N=1000 سحب بالإرجاع

و منه يمكن استنتاج ما يلي :

$$\bar{x} \sim N\left(\mu , \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\Rightarrow \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{35}} = \frac{4}{5{,}91} = 0{,}38$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\sigma_{\bar{x}} = 0{,}676}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\bar{x} \sim N\ (\ 12\ \ ;\ \ 0{,}676\ )}$$

الحالة الثالثة

n=160 , n > 30 , N=1000 سحب بدون ارجاع

$$\frac{n}{N} = \frac{160}{1000} = 0{,}16 \Rightarrow \frac{n}{N} > 0{,}05$$

و منه يمكن استنتاج ما يلي :

$$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right)$$

$$\Rightarrow \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{4}{\sqrt{160}}\sqrt{\frac{1000-160}{999}} = \frac{4}{12{,}64}(0{,}916) = 0{,}29$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\sigma_{\bar{x}} = 0{,}29}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\bar{x} \sim N\ (\ 12\ \ ;\ \ 0{,}29\ )}$$

تطبيق رقم 1

تتكون مؤسسة من 100 عامل تخضع أجورهم الى توزيع طبيعي وسطه الحسابي 42000 دج و انحرافه المعياري4000 دج ، نسحب عينة عشوائية من عمال المؤسسة حجمها n=25 (سحب بدون الارجاع)

المطلوب :

1. حدد التوزيع الاحتمالي لمتغير توزيع المعاينة ؟
2. ماهي نسبة العينات التي لا يزيد متوسط الأجور فيها عن 41500 دج ؟
3. ماهي نسبة العينات التي لا يقل متوسط الأجور فيها عن 43000 دج ؟

حل التطبيق رقم 1

تحديد التوزيع الاحتمالي لمتغير توزيع المعاينة

نعتبر المتغير العشوئي X الذي يمثل أجور عمال المؤسسة

$$\boldsymbol{x \sim N(\mu\ \ , \sigma)}$$

بما أن x يخضع لتوزيع طبيعي فان $\bar{x}$ كذلك يخضع لتوزيع طبيعي أي أن

$$\boldsymbol{\bar{x} \sim N(\mu\ \ , \sigma_{\bar{x}})}$$

n=25 , $n > 30$, N=100 سحب بدون ارجاع

$$\frac{n}{N} = \frac{25}{100} = 0{,}25 \Rightarrow \frac{n}{N} > 0{,}05$$

و منه يمكن استنتاج ما يلي :

$$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right)$$

$$\Rightarrow \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{4000}{\sqrt{25}}\sqrt{\frac{100-25}{99}} = 800(0{,}87) = 696$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\sigma_{\bar{x}} = 696}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\bar{x} \sim N\,(\,42000\;\;;\;\;696\,)}$$

نسبة العينات التي لا يزيد متوسط الأجور فيها عن 41500 دج

$$\boldsymbol{\bar{x} \sim N\,(\,42000\;\;;\;\;696\,)}$$

$$\boldsymbol{Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}} \quad , \quad Z \sim N\,(\,0\,,1\,)}$$

$$P(\,\bar{x} \leq 41500) = P\left(Z \leq \frac{41500 - 42000}{696}\right) = P(Z \leq -0{,}51)$$

$$\Rightarrow P(Z \leq -0{,}51) = 1 - (Z \leq 0{,}51) = 1 - 0{,}695 = 0{,}305$$

و منه نسبة العينات التي لا يزيد متوسط الأجور فيها عن 41500 دج هي **30,5 %**

$$\boldsymbol{\bar{x} \sim N\,(\,42000\;\;;\;\;696\,)}$$

$$\boldsymbol{Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}} \quad , \quad Z \sim N\,(\,0\,,1\,)}$$

$$P(\,\bar{x} \geq 43000) = P\left(Z \geq \frac{43000 - 42000}{696}\right) = P(Z \geq 1{,}43)$$

$$\Rightarrow P(Z \geq 1{,}43) = 1 - P(Z \leq 1{,}43) = 1 - 0{,}923 = 0{,}077$$

و منه نسبة العينات التي لا يقل متوسط الأجور فيها عن 43000 دج هي 7,7 %

تطبيق رقم 2

تخضع ارصدة الحسابات الجارية في بنك معين في توزيع طبيعي وسطه الحسابي 30000 دج و انحرافه المعياري 9000 دج ، نحب عينة عشوائية حجمها n

اذا علمت أن 96 % من العينات لا يزيد متوسط ارصدة الحسابات فيها عن 32000 دج ، فما هي قيمة n ؟

حل التطبيق 2

$$\bar{x} \sim N\,(\,30000\;\;;\;\;9000\,)$$

$$\Rightarrow \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{9000}{\sqrt{n}}$$

$$P(\bar{x} \leq 32000) = 0,96$$

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad , \qquad Z \sim N\,(\,0\,,1\,)$$

$$\Rightarrow\; P(\bar{x} \leq 32000) = P\left(Z \leq \frac{32000 - 30000}{\frac{9000}{\sqrt{n}}}\right) = 0,96$$

$$On\ pose\ \ a = \frac{32000 - 30000}{\frac{9000}{\sqrt{n}}}$$

$$\Rightarrow\; P(\bar{x} \leq 32000) = P(Z \leq a) = 0,96 \;\Rightarrow\; a = 1,75$$

$$\Rightarrow 1,75 = \frac{32000 - 30000}{\frac{9000}{\sqrt{n}}} \Rightarrow 1,75\left(\frac{9000}{\sqrt{n}}\right) = 2000$$

$$\Rightarrow \frac{9000}{\sqrt{n}} = 1142,85 \Rightarrow \sqrt{n} = 7,87 \Rightarrow n = 62$$

حالة توزيع T student

يمكن لمتغير توزيع المعاينة بالنسبة للأوساط الحسابية أن يخضع الى توزيع T student اذا توفرت الشروط التالية معا

الشرط الأول : المتغير العشوائي X يخضع لتوزيع طبيعي $X \sim N(\mu\,,\sigma\,)$

الشرط الثاني : تباين المجتمع مجهول

الشرط الثالث : حجم العينة n أصغر من 3O أي $n < 30$

اذا توفرت كل هذه الشروط معا نقول أن المتغير العشوائي لتوزيع المعاينة يخضع لتوزيع T student بدرجة حرية V= n-1 و نكتب

$$\bar{x} \sim T\ v_{(n-1)}$$

وفي هذه الحالة المتغير العشوائي المعياري T

$$T = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \quad \text{أو} \quad T = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}$$

$$d'ou\ S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

حيث S^2 *هو عبارة عن مقدر تباين المجتمع*

توزيع المعاينة للفروق بين وسطين حسابين (عينتين مستقلتين)

نعتبر مجتمعا A عدد عناصره N1 وسطه الحسابي μ_1 و انحرافه المعياري σ_1 ، و مجتمعا اخر B عدد عناصره N2 وسطه الحسابي μ_2 و انحرافه المعياري σ_2 ، نسحب عينتين عشوائيتين من المجتمعين حجمهما n1 و n2 على الترتيب ووسطها الحسابي $\bar{x}_1$ و $\bar{x}_2$ ،

و ليكن (d= $\bar{x}_1$ - $\bar{x}_2$) ، نلاحظ أن الفرق d كلما تغيرت العينتين المسحوبين ، و بما أن السحب تم عشوائيا فان الفرق di هو متغير عشوائي يطلب تحديد توزيعه الاحتمالي

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2\ ;\ \sqrt{\sigma^2_{\bar{x}_1} + \sigma^2_{\bar{x}_2}}\right)$$

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ \text{أو} \\ \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{E(d)} = \boldsymbol{E}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = E(\bar{x}_1) - E(\bar{x}_2) = \mu_1 - \mu_2$$

$$\boldsymbol{V(d)} = \boldsymbol{V}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = V(\bar{x}_1) + \left[(-1)^2 V(\bar{x}_2)\right]$$
$$= V(\bar{x}_1) + V(\bar{x}_2)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\boldsymbol{V(d)}} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}_1}^2 + \sigma_{\bar{x}_2}^2}$$

بعد تحويل المتغير العشوائي الى متغير عشوائي معياري نحصل على ما يلي

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_{\bar{x}_1}^2 + \sigma_{\bar{x}_2}^2}} \quad , \quad Z \sim N(0,1)$$

او بعبارة أخرى

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_1^2}{n_2}}} \quad , \quad Z \sim N(0,1)$$

أو

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}\left(\dfrac{N1 - n_1}{N1 - 1}\right) + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}\left(\dfrac{N1 - n_1}{N1 - 1}\right)}}$$

تطبيق

تخضع أجور العمال في مؤسستين A و B الى توزيع طبيعي، تم سحب عينتين عشوائيتين n_1 و n_2 و الجدول التالي يلخص الخصائص الإحصائية

المؤسسة B	***المؤسسة A***
$\mu_2 = 40000$	$\mu_1 = 35000$
$\sigma_2^2 = 4500$	$\sigma_1^2 = 5000$
$n_2 = 25$	$n_1 = 36$

المطلوب

1. حدد التوزيع الاحتمالي لمتغير توزيع المعاينة
2. أحسب الاحتمالات التالية:

$P(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \leq -5030)$ ، $P(-4980 \leq \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \leq -5000)$

حل التطبيق

التوزيع الاحتمالي لمتغير توزيع المعاينة

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2 ; \sqrt{\sigma_{\bar{x}_1}^2 + \sigma_{\bar{x}_2}^2}\right)$$

$$\sqrt{\sigma_{\bar{x}_1}^2 + \sigma_{\bar{x}_2}^2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_1^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{5000}{36} + \frac{4500}{25}} = \sqrt{138,88 + 180}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}_1}^2 + \sigma_{\bar{x}_2}^2} = \sqrt{318,88} = 17,85$$

$$\boldsymbol{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \sim N(-5000 ;\ 17,85)}$$

حساب الاحتمال

$$P(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \leq -5030)$$

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_1^2}{n_2}}} \quad , \quad Z \sim N(0,1)$$

$$P(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \leq -5030\ ) = P\left(Z \leq \frac{-5030 - (-5000)}{17{,}85}\right)$$

$$\Rightarrow P(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \leq 5030\ ) = P(Z \leq -1{,}68)$$

$$\Rightarrow P(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \leq 5030\ ) = 1 - P(Z \leq 1{,}68) = 1 - 0{,}953 = 0{,}047$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{P(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \leq 5030\ ) = 0{,}047}$$

حساب الاحتمال

$$P(-4980 \leq \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \leq -5000\ )$$

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_1^2}{n_2}}} \quad , \quad Z \sim N\ (0\ ,1\ )$$

$$P(-4980 \leq \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \leq -5000\ )$$

$$= P\left(\frac{-4980 + 5000}{17{,}85} \leq Z \leq \frac{-5000 + 5000}{17{,}85}\right)$$

$$\Rightarrow P(-4980 \leq \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \leq -5000\ ) = P(-1{,}12 \leq Z \leq 0)$$

$$\Rightarrow P(-4980 \leq \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \leq -5000\ ) =$$

$$P(Z \leq 0) - P(Z \leq -1{,}12)$$

$$= P(Z \leq 0) - [1 - P(Z \leq 1{,}12)] = 0{,}5 - [1 - 0{,}868]$$

$$\Rightarrow P(-4980 \leq \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \leq -5000\ ) = 0{,}5 - 0{,}132 = \boldsymbol{0{,}368}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{P(-4980 \leq \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \leq -5000\ ) = 0{,}368}$$

توزيع المعاينة للتباين S^2

نفترض أنه لدينا مجتمع احصائي يخضع لتوزيع طبيعي وسطه الحسابي **μ** و انحرافه المعياري **σ** ، نسحب عينة عشوائية من هذا المجتمع حجمها **n** و تباينها $\boldsymbol{S^2}$ ، نلاحظ أنه كلما غيرنا العينة المسحوبة **n** يتغير التباين $\boldsymbol{S^2}$ و بما أن السحب تم

عشوائيا فان S^2 عبارة عن متغير عشوائي يخضع لتوزيع مربع كاي بدرجة حرية **v** حيث :

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{v=n-1}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

توزيع المعاينة لنسبة تباينين

$$\frac{\frac{(n1-1)S^2}{\sigma_1^2}/(n1-1)}{\frac{(n2-1)S^2}{\sigma_2^2}/(n2-1)} \sim F\,(n1-1\,,n2-1\,)$$

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} * \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F\,(n1-1\,,n2-1\,)$$

$P(S_1^2 \geq 2\,S_2^2) = ?$

$$\Rightarrow P(S_1^2 \geq 2\,S_2^2) = P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \geq \frac{2\,S_2^2}{S_2^2}\right) = P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \geq 2\right)$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \geq 2\right) = P\left(F \geq \frac{S_1^2}{S_2^2} * \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right)$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \geq 2\right) = \boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{F}_{(\,\mathbf{15}\,,\ \mathbf{24}\,)} \geq \mathbf{2} * \frac{6{,}5}{5}\right)$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \geq 2\right) = \boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{F}_{(\mathbf{15},\ \mathbf{24})} \geq \mathbf{2,6}\right) = \mathbf{0,025}$$

$$\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{F}_{(\mathbf{15},\ \mathbf{24})} \geq \mathbf{2,43}\right)\mathbf{0,025}$$

2,43 P= 0,025

16 n1 v1= 15

25 n2 v2 = 24

$\sigma_2^2 = 6{,}5 \quad , \sigma_1^2 = 5$

2 ($\frac{6,5}{5}$)

توزيع المعاينة للنسب في العينات

$$E\{2, \quad 7, \quad 4 \quad ,9\}$$

نهتم بنسبة الاعداد الزوجية في عناصر المجتمع

$$P = \frac{2}{4} = 0{,}5$$

نسحب عينة عشوائية حجمها n=2 (سحب بالإرجاع)

العينات الممكن سحبها

$$\Omega = 4^2 = 16\ cas$$

$$(2,2)\ (2\ 7)\ (2\ 4)\ (2\ 9)\ (7\ 2)\ (7\ 7)\ (7\ 4)\ (7\ 9)$$

$$(4\ 2)\ (4\ 7)\ (4\ 4)\ (4\ 9)\ (9\ 2)\ (9\ 7)\ (9\ 4)\ (9\ 9)$$

يمكن حساب النسب في العينات على النحو التالي:

العينة	النسبة $\overline{p}$	العينة	النسبة $\overline{p}$
(2,2)	1	(4 2)	1
(2 7)	0,5	(4 7)	0,5
(2 4)	1	(4 4)	1
(2 9)	0,5	(4 9)	0,5
(7 2)	0,5	(9 2)	0,5
(7 7)	0	(9 7)	0
(7 4)	0,5	(9 4)	0,5
(7 9)	0	(9 9)	0
المجمـــوع		8	

حساب المتوسط الحسابي العام للنسب في العينات

$$\bar{\bar{p}} = \frac{\sum_{i=1}^{\Omega} \bar{p}}{\Omega} = \frac{8}{16} = 0,5$$

و منه يمكن استنتاج أن المتوسط الحسابي للنسب في العينات هو نفسه النسبة في العينة

$$\bar{\bar{p}} = E(\bar{p}) = P$$

حساب الانحراف المعياري لننسب في العينات $\sigma_{\bar{P}}$

$\bar{p}$	p	$(\bar{p} - P)^2$
1	0,5	0,25
0,5	0,5	0
1	0,5	0,25
0,5	0,5	0
0,5	0,5	0
0	0,5	0,25
0,5	0,5	0
0	0,5	0,25
1	0,5	0,25
0,5	0,5	0
1	0,5	0,25
0,5	0,5	0
0,5	0,5	0
0	0,5	0,25
0,5	0,5	0
0	0,5	0,25
المجموع		**2**

$$\sigma_{\bar{P}} = \sqrt{\frac{\sum_{=1}^{N}(\boldsymbol{p_i} - \boldsymbol{p})^{\boldsymbol{2}}}{\Omega}} = \sqrt{\frac{2}{16}} = 0{,}35$$

باعتبار أن X متغير عشوائي يخضع لتوزيع برنولي حيث:

$$\boldsymbol{X \sim Br\ (\ P\ )}$$

من جانب اخر نعلم أن خصائص توزيع برنولي هي :

$$E(X) = P \ \ , \ \ V(X) = pq \ \ \ ,d'ou \ \ q = 1 - P$$

و عند سحب عينة عشوائية حجمها n من قيم المتغير العشوائي X فيمكن اعتبار أن النسبة $\bar{p}$ هي المتوسط الحسابي للعينة حيث

$$\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

بالنسبة للتوقع الرياضي للنسبة $\bar{p}$

$$E(\bar{P}) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right) = E\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots \ldots x_{n-1} + x_n}{n}\right)$$

$$\Rightarrow E(\bar{p}) = \frac{1}{n} E(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots \ldots x_{n-1} + x_n)$$

$$\Rightarrow E(\bar{p}) = \frac{1}{n}(\ p + p + p + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots p)$$

$$\Rightarrow E(\bar{p}) = \frac{1}{n}(p * n) = \frac{p * n}{n} = P$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{E(\bar{P}) = P}$$

بالنسبة للتباين

$$V(\bar{p}) = V\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right) = V\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots \ldots x_{n-1} + x_n}{n}\right)$$

$$\Rightarrow V(\bar{x}) = \frac{1}{n^2} V(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots \ldots x_{n-1} + x_n)$$

$$\Rightarrow V(\bar{x}) = \frac{1}{n^2}(\, pq + pq + pq + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots pq)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{V(\bar{x}) = \frac{1}{n^2}(npq) = \frac{npq}{n^2} = \frac{pq}{n}}$$

$$\boldsymbol{\sigma_{\bar{p}} = \sqrt{V(\bar{p})} = \sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

وفقا لنظرية النهاية المركزية فان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي الذي يمثل النسبة $\bar{p}$ هو التوزيع الطبيعي اذا كان حجم العينة $\mathbf{n \geq 30}$ ، و يمكن تلخيص الحالات الخاصة فق الجدول التالي :

	السحب بالارجاع	السحب بدون ارجاع
N غير محدود أو $\mathbf{n < 0,05\ N}$	$\bar{p} \sim N\left(P\ , \sqrt{\frac{Pq}{n}}\right)$	$\bar{p} \sim N\left(P\ , \sqrt{\frac{Pq}{n}}\right)$
$\mathbf{n \geq 0,05\ N}$	$\bar{p} \sim N\left(P\ , \sqrt{\frac{Pq}{n}}\right)$	$\bar{p} \sim N\left(P\ , \sqrt{\frac{Pq}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right)$

P= 8 %

n=64

v(pbar) = 0,00115

sigma pbar 0,033

تطبيق

نسبة القروض المتعثرة (الغير قابلة للتسديد) في بنك معين هي 8 %

نسحب عينة عشوائية من (64) قرض

المطلوب:

1- حدد التوزيع الاحتمالي لمتغير توزيع المعاينة
2- أحسب احتمال ان لا تقل نسبة القروض المتعثرة في العينة عن 10 %
3- نفرض أن 63 % من العينات لا تزيد نسبة القروض المتعثرة فيها عن 9,5 % ، فما حجم العينة n المسحوبة في هذه الحالة ؟

حل التطبيق

تحديد التوزيع الاحتمالي لمتغير توزيع المعاينة

$n = 64 \quad , P = 0{,}08 \quad , q = 0{,}92$

$n > 30$

$$\bar{p} \sim N\left(P , \sqrt{\frac{Pq}{n}} \right)$$

$$\sigma_{\bar{p}} = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{(0{,}08) * (0{,}92)}{64}} = \sqrt{0{,}00115} = 0{,}033$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\sigma_{\bar{p}} = 0{,}033}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\bar{p} \sim N\ (0{,}08 \quad ; 0{,}033\ )}$$

احتمال ان لا تقل نسبة القروض المتعثرة في العينة عن 10 %

$$P\ (\bar{p} \geq 0{,}1\ ) = 1 - \ P\left(Z \ \leq \frac{0{,}1 - 0{,}08}{0{,}033}\right) = 1 - P(Z \leq 0{,}6)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{P(Z \leq 0{,}6) = 0{,}72}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{P\ (\bar{p} \geq 0{,}1\ ) = 1 - 0{,}72 = 0{,}28}$$

63 % من العينات لا تزيد نسبة القروض المتعثرة فيها عن 9,5 %

حجم العينة n المسحوبة في هذه الحالة

$$\bar{p} \sim N\left(P\ ,\sqrt{\frac{Pq}{n}}\right)$$

$$P\ (\bar{p} \leq 0{,}095\ ) = 0{,}63$$

$$\Rightarrow P\ (\bar{p} \leq 0{,}095\ ) = \ P\left(Z\ \leq \frac{0{,}095 - 0{,}08}{\sqrt{\frac{Pq}{n}}}\right) = 0{,}63$$

$$On\ pose\ a = \frac{0{,}095 - 0{,}08}{\sqrt{\frac{Pq}{n}}} \Rightarrow\ a = 0{,}34$$

$$\Rightarrow\ a = \ 0{,}34 = \frac{0{,}095 - 0{,}08}{\sqrt{\frac{Pq}{n}}} \Rightarrow 0{,}34 = \frac{0{,}015}{\sqrt{\frac{Pq}{n}}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{Pq}{n}} = \frac{0{,}015}{0{,}34} \Rightarrow \frac{(0{,}08) * (0{,}92)}{n} = \left(\frac{0{,}015}{0{,}34}\right)^2$$

$$\Rightarrow n = \frac{0{,}0736}{0{,}00194} = \mathbf{38}$$

حجم العينة هو n=38

توزيع المعاينة للفرق بين نسبتين

نعتبر مجتمعا A عدد عناصره N1 و نسبة عناصره التي تتميز بخاصية معينة هي P_1 ، و مجتمعا اخر B عدد عناصره N2 و نسبة عناصره التي تتميز بذات الخاصية هي P_1 ، نسحب عينتين عشوائتين من المجتمعين حجمهما **n1 و n2** على الترتيب و نسبة عناصرهما التي تتميز بنفس الخاصي هي $\bar{p}_1$ و $\bar{p}_2$ على الترتيب ،

و ليكن ($\bar{p}_2$ - $\bar{p}_1$ =d) ، نلاحظ أن الفرق d يتغير كلما تغيرت العينتين المسحوبين ، و بما أن السحب تم عشوائيا فان الفرق di هو متغير عشوائي يطلب تحديد توزيعه الاحتمالي

مثـــــال

نعتبر مجتمعين احصائيين A و B كل مجتمع يتكون من العناصر التالية

$\boldsymbol{A}$ (**1 , 4 , 8**)

$\boldsymbol{B}$ (**5 , 7 , 6**)

نسحب عينة عشوائية حجمها n=2 من كل مجتمع (سحب بارجاع) و نهتم بالفرق بين نسبة الاعداد الزوجية بين العينتين و ليكن الفرق (**d=** $\bar{p}_1$ - $\bar{p}_2$)

الجدول التالي يلخص كل النتائج الممكن الحصول عليها عند حساب الفرق بين نسبة الاعداد الزوجية

	(5,5) **0**	**(5,7)** **0**	**(5,6)** **0,5**	**(7,5)** **0**	**(7,7)** **0**	**(7,6)** **0,5**	**(6,5)** **0,5**	**(6,7)** **0,5**	**(6,6)** **1**
(1 , 1) **0**	0	0	-0,5	0	0	-0,5	-0,5	-0,5	-1
(1, 4) **0,5**	0,5	0,5	0	0,5	0,5	0	0	0	-0,5
(1,8) **0,5**	0,5	0,5	0	0,5	0,5	0	0	0	-0,5
(4 , 1) **0,5**	0,5	0,5	0	0,5	0,5	0	0	0	-0,5
(4 , 4) **1**	1	1	0,5	1	1	0,5	0,5	0,5	0
(4 , 8) **1**	1	1	0,5	1	1	0,5	0,5	0,5	0
(8 , 1) **0,5**	0,5	0,5	0	0,5	0,5	0	0	0	-0,5
(8 , 4) **1**	1	1	0,5	1	1	0,5	0,5	0,5	0
(8 , 8) **1**	1	1	0,5	1	1	0,5	0,5	0,5	0

$$\bar{p}_1 - \bar{p}_2 \sim N\left(P_1 - P_2 \; ; \; \sqrt{\sigma^2_{\bar{p}_1} + \sigma^2_{\bar{p}_2}} \right)$$

$$\sigma_{\bar{p}}^2 = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{Pq}{n}} \\ \text{أو} \\ \sqrt{\dfrac{Pq}{n}}\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{E(d)} = \boldsymbol{E}(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) = E(\bar{p}_1) - E(\bar{p}_2) = p_1 - p_2$$

$$\boldsymbol{V(d)} = \boldsymbol{V}(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) = V(\bar{p}_1) + \left[(-1)^2 V(\bar{p}_2)\right]$$
$$= V(\bar{p}_1) + V(\bar{p}_2)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_{\bar{p}_1 - \bar{p}_2} = \sqrt{\boldsymbol{V(d)}} = \sqrt{\sigma_{\bar{p}_1}^2 + \sigma_{\bar{p}_2}^2}$$

بعد تحويل المتغير العشوائي الى متغير عشوائي معياري نحصل على ما يلي

$$Z = \frac{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\sigma_{\bar{p}_1}^2 + \sigma_{\bar{p}_2}^2}} \quad , \quad Z \sim N(0,1)$$

او بعبارة أخرى

$$Z = \frac{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\dfrac{p_1 q_1}{n_1} + \dfrac{p_2 q_2}{n_2}}} \quad , \quad Z \sim N(0,1)$$

أو

$$Z = \frac{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\dfrac{p_1 q_1}{n_1}\left(\dfrac{N1 - n_1}{N1 - 1}\right) + \dfrac{p_2 q_2}{n_2}\left(\dfrac{N1 - n_1}{N1 - 1}\right)}}$$

تطبيـــق

ينتج مصنعين A و B نوعين من المصابيح، حيث قدرت نسبة المصابيح الغير صالحة من انتاج المصنعين بـــــ 9 % و 8 % على الترتيب ، نسحب عينة عشوائية من انتاج المصنعين حجمها على الترتيب n1= 36 و n2= 40

المطلوب :

- أحسب احتمال لا يزيد الفرق بين نسبة المصابيح الغير صالحة في العينتين عن 3 %
- أحسب احتمال ان يتراوح الفرق بين نسبة المصابيح الغير صالحة في العينتين بين 2 % و 3,5 %

حل التطبيـــق

$$p_1 = \mathbf{0,09} \quad , \quad q_1 = 0{,}91 \quad , p_2 = \mathbf{0,09} \quad , \quad q_2 = 0{,}91$$

بعد تحويل المتغير العشوائي الى متغير عشوائي معياري نحصل على ما يلي

$$Z = \frac{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\sigma^2_{\bar{p}_1} + \sigma^2_{\bar{p}_2}}} \quad , \; Z \sim N\,(0\,,1)$$

او بعبارة أخرى

$$Z = \frac{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}} \quad , \; Z \sim N\,(0\,,1)$$

بالتعويض نجد

$$\boldsymbol{\sigma_{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}} = \sqrt{\frac{(\mathbf{0,09}) * (\mathbf{0,91})}{\mathbf{36}} + \frac{(\mathbf{0,08}) * (\mathbf{0,92})}{\mathbf{40}}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\sigma_{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}} = \sqrt{\mathbf{0,002275 + 0,00184}} = \sqrt{\mathbf{0,004115}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\sigma_{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}} = \mathbf{0,064}$$

بما أن حجم العينتين أكبر من 30 فيمكن استنتاج ما يلي

$$\bar{p}_1 - \bar{p}_2 \sim N\left(P_1 - P_2\ ;\ \sqrt{\sigma^2_{\bar{p}_1} + \sigma^2_{\bar{p}_2}}\right)$$

$$\Rightarrow \bar{p}_1 - \bar{p}_2 \sim N\ (\ 0{,}01\ ;\ \ 0{,}064)$$

حساب الاحتمالات

$$P(\bar{p}_1 - \bar{p}_2 \leq 0{,}03) = P\left(Z\ \leq \frac{0{,}03 - 0{,}01}{0{,}064}\right)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{P(\bar{p}_1 - \bar{p}_2 \leq 0{,}03) = P(Z \leq 0{,}31) = 0{,}62}$$

$$P(0{,}02 \leq \bar{p}_1 - \bar{p}_2 \leq 0{,}035)$$

$$= P\left(\frac{0{,}02 - 0{,}01}{0{,}064} \leq Z \leq \frac{0{,}035 - 0{,}01}{0{,}064}\right)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{P(0{,}02 \leq \bar{p}_1 - \bar{p}_2 \leq 0{,}035)} = P(0{,}156 \leq Z \leq 0{,}39)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{P(0{,}02 \leq \bar{p}_1 - \bar{p}_2 \leq 0{,}035)} = P(Z \leq 0{,}39) - P(Z \leq 0{,}156)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{P(0{,}02 \leq \bar{p}_1 - \bar{p}_2 \leq 0{,}035)} = 0{,}65 - 0{,}55 = 0{,}1$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{P(0{,}02 \leq \bar{p}_1 - \bar{p}_2 \leq 0{,}035)}$$

نظرية التقديــر

التقدير النقطي

طريقة الإمكان الأعظم

$$L\left(x_1, x_1, x_1, \dots\dots\dots x_{n-1}, x_n, \theta_1, \theta_1, \dots\dots\theta_1\right) = \prod_{i=1}^{n} f(X, \theta_1, \theta_1, \dots\dots\theta_1)$$

حساب لوغاريتم دالة الإمكان الأكبر حيث

$$Log\ L = Log \prod_{i=1}^{n} f(X, \theta_1, \theta_1, \dots\dots\theta_1)$$

حساب المشتقات الجزئية بالنسبة للمعلمات $\theta_1, \theta_1, \dots\dots\theta_n$ حيث :

$$\frac{\partial\ Log\ L}{\partial\ \theta_1} = \frac{\partial Log \prod_{i=1}^{n} f(X, \theta_1, \theta_1, \dots\dots\theta_1)}{\partial\ \theta_1}$$

$$\frac{\partial\ Log\ L}{\partial\ \theta_2} = \frac{\partial Log \prod_{i=1}^{n} f(X, \theta_1, \theta_1, \dots\dots\theta_1)}{\partial\ \theta_2}$$

$$\frac{\partial\ Log\ L}{\partial\ \theta_n} = \frac{\partial Log \prod_{i=1}^{n} f(X, \theta_1, \theta_1, \dots\dots\theta_1)}{\partial\ \theta_n}$$

مقدرات المعلمات $\theta_1, \theta_1, \dots\dots\theta_1$ هي حلول المعادلات التالية :

$$\frac{\partial\ Log\ L}{\partial\ \theta_1} = \frac{\partial Log \prod_{i=1}^{n} f(X, \theta_1, \theta_1, \dots\dots\theta_1)}{\partial\ \theta_1} = 0$$

$$\frac{\partial\ Log\ L}{\partial\ \theta_2} = \frac{\partial Log \prod_{i=1}^{n} f(X, \theta_1, \theta_1, \dots\dots\theta_1)}{\partial\ \theta_2} = 0$$

$$\frac{\partial\ Log\ L}{\partial\ \theta_n} = \frac{\partial Log \prod_{i=1}^{n} f(X, \theta_1, \theta_1, \dots\dots\theta_1)}{\partial\ \theta_n} = 0$$

مثال 1

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ ae^{-ax}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$L\ (\ x_1\ , x_2\ , \dots , x_n\ , a_1,) = \prod_{i=1}^{n} ae^{-ax}$$

$$\Rightarrow L\ (\ x_1\ , x_2\ , \dots , x_n\ , a_1,)$$

$$= ae^{-ax1} * ae^{-ax2} * ae^{-ax3} \dots\dots\dots * ae^{-axn}$$

$$\Rightarrow L\ (\ x_1\ , x_2\ , \dots , x_n\ , a_1,) = a^n e^{-a \sum x_i}$$

$$\Rightarrow Log\ L = \log(a^n e^{-a \sum x_i})$$

$$\Rightarrow Log\ L = n\ log\ a - a \sum x_i$$

$$\frac{\partial\ Log\ L}{\partial\ a} = \frac{\partial(n\ log\ a\ - a \sum x_i)}{\partial\ a} = \frac{n}{a} - \sum x_i$$

$$\frac{\partial\ Log\ L}{\partial\ \theta_1} = 0 \Rightarrow \frac{n}{a} - \sum x_i = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{a}} = \sum \boldsymbol{x_i} \Rightarrow \hat{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{n}}{\sum \boldsymbol{x_i}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\bar{\boldsymbol{X}}}$$

مثال 2

$$f(x) = p^x(1-P)^{1-x} \quad , \qquad x \in [0\,, \qquad 1]$$

$$L\,(\,x_1\,,x_2\,,\dots,x_n\,,P,\,) = \prod_{i=1}^{n} p^x(1-P)^{1-x}$$

$$\Rightarrow L\,(\,x_1\,,x_2\,,\dots,x_n\,,P,\,) = p^x(1-P)^{1-x1} * p^x(1-P)^{1-x2} * \dots\dots\dots p^x(1-P)^{1-xn}$$

$$L\,(\,x_1\,,x_2\,,\dots,x_n\,,P,\,) = p^{\sum x_i}(1-P)^{n-\sum x_i}$$

$$Log\ L = \log(p^{\sum x_i}(1-P)^{n-\sum x_i})$$

$$\Rightarrow logL = \sum x_i\ logP + \left(n - \sum x_i\right)\log(1-P)$$

$$\frac{\partial\ Log\ L}{\partial\ p} = \frac{\sum x_i}{p} - \frac{(n-\sum x_i)}{(1-p)}$$

$$\frac{\partial\ Log\ L}{\partial\ p} = 0 \Rightarrow \frac{\sum x_i}{p} - \frac{(n-\sum x_i)}{(1-p)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sum x_i}{p} = \frac{(n-\sum x_i)}{(1-p)}$$

$$\Rightarrow \sum x_i\,(1-P) = P\left(n - \sum x_i\right)$$

$$\Rightarrow \sum x_i - P\sum x_i = np - p\sum x_i$$

$$\Rightarrow \sum x_i = np \Rightarrow \boldsymbol{\hat{p} = \frac{\sum x_i}{n} = \bar{X}}$$

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

$$\lim_{n\to\infty} V(\hat{\theta}) = 0$$

$$nI_{\hat{\theta}} = nE\left(\frac{\partial \log f(x,\theta)^2}{\partial\, \theta}\right)$$

$$V(\hat{\theta}) = \frac{1}{nI_{\hat{\theta}}}$$

تطبيق

$$f(x) = p^x(1-P)^{1-x} \quad , \qquad x \in [0\,, \qquad 1]$$

$$E(x) = p \;, V(X) = pq \;, \qquad q = 1 - p$$

$$\hat{\boldsymbol{p}} = \frac{\sum \boldsymbol{x_i}}{\boldsymbol{n}}$$

دراسة عدم التحيز

$$E(\hat{p}) = E\left(\frac{\sum x_i}{n}\right) = \frac{1}{n}E(x1 + x2 + \cdots..xn)$$

$$\Rightarrow E(\hat{p}) = \frac{1}{n}(P + P + P + \cdots \ldots..P)$$

$$\Rightarrow E(\hat{p}) = \frac{1}{n}(np) = \frac{np}{n} = p$$

$$\boldsymbol{E(\hat{p}) = P}$$

التقارب

$$V(\hat{P}) = V\left(\frac{\sum x_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum x_i\right)$$

$$\Rightarrow V(\hat{P}) = \frac{1}{n^2}(pq + pq + \cdots \ldots . pq)$$

$$\Rightarrow V(\hat{P}) = \frac{1}{n^2}(pqn) = \frac{pq}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{pq}{n} = 0$$

الفعالية

$$f(x) = p^x(1-P)^{1-x}, \qquad x \in [0\,, \qquad 1]$$

$$Log\, f(x,p) = \log(p^x(1-P)^{1-x})$$
$$= xlogP + (1-x)\log(1-P)$$

$$\frac{\partial\, Log\, L}{\partial\, p} = \frac{\partial xlogP + (1-x)\log(1-P)}{\partial\, p} = \frac{x}{P} - \frac{(1-x)}{(1-P)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\, Log\, L}{\partial\, p} = \frac{x(1-p) - P(1-x)}{Pq} = \frac{x - xp - p + Px}{Pq}$$
$$= \frac{x-P}{pq}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial\, Log\, L}{\partial\, p}\right)^{\mathbf{2}} = \left(\frac{x-P}{pq}\right)^{\mathbf{2}} = \frac{x^2 - 2xp + p^2}{p^2q^2}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{nE}\left(\frac{\partial\, Log\, L}{\partial\, p}\right)^{\mathbf{2}} = \boldsymbol{nE}\left(\frac{x^2 - 2xp + p^2}{p^2q^2}\right)$$

$$\Rightarrow nI_{\hat{\theta}} = \frac{n}{p^2q^2}[\boldsymbol{E}(x^2) - 2PE(x) + p^2]$$

$$E(x^2) = V(X) + E(x)^2 = Pq + p^2$$

$$\Rightarrow nI_{\hat{\theta}} = \frac{n}{p^2q^2}(Pq + p^2 - 2p^2 + p^2) = \frac{npq}{p^2q^2} = \boldsymbol{\frac{n}{pq}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{nI_{\hat{\theta}} = \frac{n}{pq} = \frac{1}{V(\hat{\theta})}}$$

تطبيق 2

$$f(x, P) = C_n^x P^x (1-P)^{n-x} \quad x \in [0, 1, 2 \dots n]$$

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, P) = \prod_{i=1}^{K} C_n^x P^x (1-P)^{n-x}$$

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, P) = C_n^x P^x (1-P)^{n-x1} * C_n^x P^x (1-P)^{n-x2} * \dots . C_n^x P^x (1-P)^{n-xk}$$

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, P) = C_n^x P^{\sum xi} * (1-P)^{nk-\sum xi}$$

$$Log\ L = Log\left(C_n^x P^{\sum xi}\right) + \log((1-P)^{nk-\sum xi})$$

$$\Rightarrow Log\ L = \sum xi\ Log\ P + \left(nk - \sum xi\right) \log(1-P)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\ Log\ L}{\partial\ P} = \frac{\sum xi}{p} - \frac{(nk - \sum xi)}{1-P}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\ Log\ L}{\partial\ P} = 0 \Rightarrow \frac{\sum xi}{p} - \frac{(nk - \sum xi)}{1-P} = 0$$

$$\Rightarrow \sum xi\,(1-P) = P\left(nk - \sum xi\right) \Rightarrow \sum xi - P\sum xi = Pnk - P\sum xi$$

$$\Rightarrow \sum xi = Pnk \Rightarrow \boldsymbol{\hat{P} = \frac{\sum xi}{nk}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\hat{P} = \frac{\sum xi}{nk}}}$$

دراسة خصائص المقدر

عدم التحيز

On a $E(X) = np$

$$E(\hat{P}) = E\left(\frac{\sum xi}{nk}\right) = \frac{1}{nk}E\left(\sum xi\right) = \frac{1}{nk}(pnk) = \frac{pnk}{nk} = P$$

$$\Rightarrow E(\boldsymbol{\hat{P}}) = \boldsymbol{P}$$ المقدر غير متحيز

التقارب

On a $V(X) = npq \quad d'ou \quad q = 1 - P$

$$\Rightarrow V(\hat{P}) = V\left(\frac{\sum xi}{nk}\right) = \frac{1}{n^2k^2}V\left(\sum xi\right) = \frac{1}{n^2k^2}(npqk) = \frac{pq}{nk}$$

$$\Rightarrow V(\boldsymbol{\hat{P}}) = \frac{\boldsymbol{pq}}{\boldsymbol{nk}}$$

$$et \quad \lim_{k\to\infty}\frac{\boldsymbol{pq}}{\boldsymbol{nk}} = 0$$

و منه المقدر $\hat{P}$ متقارب

$$f(x, P) = C_n^x P^x (1-P)^{n-x}$$

$$Log\ f(x,p) = Log\ (\ C_n^x P^x (1-P)^{n-x}\ \ )$$

$$\Rightarrow Log\ f(x,p) = logC_n^x + logP^x + \log\ \ (1-P)^{n-x}$$

$$\Rightarrow Log\ f(x,p) = logC_n^x + \ x\log\frac{1}{P} + (n-x)\log(1-P)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\ Log\ f(x,p)}{\partial\ P} = \frac{x}{P} - \frac{(n-x)}{1-P} = \frac{x(1-p) - p(n-x)}{pq}$$

$$= \frac{x - xp - np + xp}{pq} = \frac{x-np}{pq}$$

$$\left[\frac{\partial\ Log\ f(x,p)}{\partial\ P}\right]^2 = \left(\frac{x-np}{pq}\right)^2 = \frac{x^2 - 2xnp + n^2p^2}{P^2q^2}$$

$$E\left(\frac{x-np}{pq}\right)^2 = E\left(\frac{x^2 - 2xnp + n^2p^2}{P^2q^2}\right) = \frac{1}{P^2q^2}E(x^2 - 2xnp + n^2p^2)$$

$$E\left(\frac{x-np}{pq}\right)^2 = \frac{1}{P^2q^2}E(x^2) - 2npE(X) + n^2p^2$$

$$E(x^2) = V(X) + E(X)^2 \Rightarrow E(x^2) = npq + n^2p^2$$

$$\Rightarrow E\left(\frac{x-np}{pq}\right)^2 = \frac{1}{P^2q^2}(\, npq + n^2p^2 - 2n^2p^2 + n^2p^2 = \frac{npq}{P^2q^2} = \frac{n}{pq}$$

طريقة العزوم

مثال 1

ليكن X متغير عشوائي يخضع لتوزيع منتظم كثافة احتماله من الشكل:

$$f(x) = \frac{1}{a} \;,\quad si\; x \in\; (0\,,\quad a)$$

المطلوب :

قدر a بطريقة العزوم moments method

الحل

أولا نقوم بحساب $E(X)$

$$\boldsymbol{E(X)} = \int_0^a \boldsymbol{x}\frac{1}{a}\,dx = \frac{1}{a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \frac{1}{a}\left(\frac{a^2}{2}\right) = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{E(X)} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{2}}$$

بمساواة العزم الأول مع المتوسط الحسابي $\bar{x}$ نجد

$$\boldsymbol{E(X)} = \bar{\boldsymbol{x}} \Rightarrow \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{2}} = \bar{\boldsymbol{x}} \Rightarrow \hat{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{2\bar{x}}$$

و يمكن اثبات ان $\hat{a}$ **غير متحيز على النحو التالي** :

$$E(\hat{a}) = E(2\bar{x}) = 2E(\bar{x}) = 2E\left(\frac{\sum xi}{n}\right) = \frac{2}{n}E\left(\sum xi\right)$$

$$\Rightarrow E(\hat{a}) = \frac{2}{n} E(x_1 + x_1 + \cdots \ldots \ldots + x_{n-1} + x_n)$$

$$\Rightarrow E(\hat{a}) = \frac{2}{n}\left(\frac{an}{2}\right) = \frac{2an}{2n} = \boldsymbol{a}$$

$$\Rightarrow E(\hat{a}) = \boldsymbol{a}$$

مثال 2

ليكن X متغير عشوائي مستمر كثاف احتمالية من الشكل :

$$f(x\,,\theta) = \theta\, x^{\theta-1}\ ,\quad si\ x \in (0\,,\quad 1),\ \theta > 0$$

المطلوب :

1 – تأكد أن $f(x\,,\theta)$ فعلا دالة كثافة احتمال ؟

2 - قدر θ بطريقة العزوم moments method ؟

3 – أوجد قيمة θ باستخدام المشاهدات التالية :

0,24 0,7 0,12 0,53 0,42 0,6

حل المثال 2

$$\int_0^1 \theta\, x^{\theta-1}\, dx$$

$$= \theta \int_0^1 x^{\theta-1}\, dx = \theta\left[\frac{x^{\theta-1+1}}{\theta-1+1}\right]_0^1 = \theta\left[\frac{x^{\theta}}{\theta}\right]_0^1 = 1$$

و منه نستنتج أن $f(x\,,\theta)$ فعلا دالة كثافة احتمالية

تقدير θ بطريقة العزوم moments method

نقوم بحساب $E(X)$

$$E(X) = \int_0^1 x\ f(x)dx = \theta \int_0^1 x\, x^{\theta-1}dx = \theta \int_0^1 x^{\theta}\, dx$$

$$\Rightarrow E(X) = \theta \left[\frac{x^{\theta+1}}{\theta+1}\right]_0^1 = \theta\left(\frac{1}{\theta+1}\right) = \frac{\theta}{\theta+1}$$

نقوم بمساواة التوقع بالعزم الأول نحصل على ما يلي :

$$\frac{\theta}{\theta+1} = \bar{x} \Rightarrow \theta = \bar{x}\theta + \bar{x} \Rightarrow (\theta - \bar{x}\theta) = \bar{x}$$

$$\Rightarrow \theta(1-\bar{x}) = \bar{x}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\widehat{\theta}} = \frac{\boldsymbol{\bar{x}}}{(\mathbf{1}-\boldsymbol{\bar{x}})}$$

تقدير قيمة θ باستخدام المشاهدات حيث n=6

حساب $\boldsymbol{\bar{x}}$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i}{6} = \frac{0{,}24 + 0{,}7 + 0{,}12 + 0{,}53 + 0{,}42 + 0{,}6}{6} = \mathbf{0,435}$$

تقدير قيمة $\boldsymbol{\widehat{\theta}}$

$$\boldsymbol{\widehat{\theta}} = \frac{\boldsymbol{\bar{x}}}{(\mathbf{1}-\boldsymbol{\bar{x}})} = \frac{\mathbf{0,435}}{\mathbf{1-0,435}} = \mathbf{0,77}$$

التقدير بمجال الثقـــــة

يرتكز تقدير معلمات المجتمع الاحصائي بفترة ثقة (أو مجال الثقة) على حصر معلمة المجتمع θ بين معلمتين θ_1 و θ_2 باحتمال معين ($1-\alpha$) يسمى بمستوى الثقة

1 – تقدير المتوسط الحسابي للمجتمع الاحصائي μ بمستوى ثقة

نفرض أنه لدينا مجتمع احصائي وسط الحسابي μ مجهول و تباين σ^2 معلوم ، نسحب عينة عشوائية من هذا المجتمع عدد عناصرها n حيث $n \geq 30$

في هذه الحالة و وفقا لنظرية النهاية المركزية فان التوزيع الاحتمالي لمتغير توزيع المعاينة $\bar{x}$ هو التوزيع الطبيعي حيث :

$$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

اذا افترضنا ان Z متغير عشوائي طبيعي معياري فيمكن كتابة ما يلي :

$$Z = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad ; \quad Z \sim N(0,1)$$

من جانب اخر نعلم أن

$$1-\alpha = P\left(-Z\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \leq Z \leq Z\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

$$1-\alpha = P\left(-Z\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \leq \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq Z\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

$$1-\alpha = P\left(-\frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \leq \bar{x}-\mu \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

و بالتالي يمكن استنتاج مجال الثقة على النحو التالي:

$$P\left(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right) = 1-\alpha$$

تطبيق

نفترض لدينا مجتمع وسطه الحسابي μ و انحرافه المعياري $\boldsymbol{\sigma = 4,5}$ ، في عينة عشوائية حجمها $n=40$ سحبت من هذا المجتمع قدر وسطها الحسابي $\boldsymbol{\bar{x} = 13}$

المطلوب : قدر مجال الثقة للمتوسط الحسابي لهذا المجتمع بمستوى ثقة 95 % ؟

حل التطبيق

$$\mathbf{n=40 \ , \sigma = 4,5 \ , \ \bar{x} = 13}$$

$$\mathbf{1-\alpha = 0,95 \ , \alpha = 0,05 \ , Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} = Z_{(0,975)} = 1,96}$$

$$P\left(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right) = 1-\alpha$$

حساب الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة

$$\boldsymbol{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\mathbf{4,5}}{\sqrt{40}} = 0,711$$

بالتعويض في مجال الثقة نجد

$$P\big(13 - (0,711)(1,96) \leq \mu \leq 13 + (0,711)(1,96)\big) = 95\%$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{P(\ 13 - 1,39 \ \leq \mu \leq \ 13 + 1,39) = 95\ \%}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{P(\ 11,61 \ \leq \mu \leq 14,39\ ) = 95\ \%}$$

تحديد حجم العينة n بدلالة مجال الثقة و مستوى الخطأ e

البرهان

نعلم أن

$$P\left(\bar{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\mathrm{Z}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\leq\mu\leq\bar{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\mathrm{Z}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right)=1-\alpha$$

من جانب اخر نضع d هو طول فترة الثقة

$$d=\bar{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\mathrm{Z}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)-\bar{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\mathrm{Z}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Rightarrow d=2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\mathrm{Z}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$$

ونعلم كذلك أن مستوى الخطأ e يمثل نصف طول فترة الثقة

$$\Rightarrow e=\frac{d}{2}=\frac{2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\mathrm{Z}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}{2}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\mathrm{Z}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Rightarrow e=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\mathrm{Z}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\Rightarrow\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{e}{\mathrm{Z}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow\sqrt{n}=\frac{\sigma\,\mathrm{Z}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}{e}\Rightarrow n=\left(\frac{\sigma\,\mathrm{Z}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}{e}\right)^2$$

$$\Rightarrow\boldsymbol{n=\frac{\sigma^2\mathrm{Z}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)^2}{e^2}}$$

تطبيق ، *نفرض انه لدينا مجتمع طبيعي وسطه الحسابي* μ *و تباينه* 20 ، *ماهو حجم العينة الضروري سحبه من المجتمع بهامش خطأ* 0,8 *و مستوى ثقة* 95 %

$$\mathrm{Z}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)=Z(0{,}975)=1{,}96\,,\qquad e=0{,}8\ ,\boldsymbol{\sigma^2=20}$$

$$\Rightarrow\boldsymbol{n=\frac{20(1{,}96)^2}{(0{,}8)^2}=120}$$

حالة توزيع *T student*

يمكن لمتغير توزيع المعاينة بالنسبة للأوساط الحسابية أن يخضع الى توزيع T student اذا توفرت الشروط التالية معا

الشرط الأول : المتغير العشوائي X يخضع لتوزيع طبيعي $\boldsymbol{X \sim N(\mu, \sigma)}$

الشرط الثاني : تباين المجتمع مجهول

الشرط الثالث : حجم العينة n أصغر من 3O أي $n < 30$

اذا توفرت كل هذه الشروط معا نقول أن المتغير العشوائي لتوزيع المعاينة يخضع لتوزيع T student بدرجة حرية V= n-1 و نكتب

$$\boldsymbol{\bar{x} \sim T\ v_{(n-1)}}$$

$$\boldsymbol{T = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \quad ; \quad S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

و بالتالي يمكن استنتاج مجال الثقة على النحو التالي:

$$P\left(\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} T^{v=n-1}_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} T^{v=n-1}_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right) = 1 - \alpha$$

تطبيق

البيانات التالية مستخرجة من مجتمع طبيعي وسطه الحسابي **μ** و تباينه مجهول

xi	5	8	2	10	6	8	6	5

المطلوب : قدر المتوسط الحسابي للمجتمع بمجال ثقة (99 %)

حل التطبيق

x_i	$\bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
5	6,25	1,5625
8	6,25	3,0625
2	6,25	18,0625
10	6,25	14,0625
6	6,25	0,0625
8	6,25	3,0625
6	6,25	0,0625
5	6,25	1,5625
50		**41,5**

$\bar{x}$	6,25	
S^2	5,9285714	
S	2,43486579	
$\frac{S}{\sqrt{n}}$	0,86	

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = 0,86 \ , \quad \bar{x} = 6,25$$

$$T^{v=n-1}_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} = T^{v=7}_{(0,995)} = 3,5$$

بالتعويض في مجال الثقة نجد

$$P\left(6,25 - (0,86)(3,5) \leq \mu \leq 6,25 + (0,86)(3,5)\right) = 99\%$$

$$P\left(6,25 - 3,01 \leq \mu \leq 6,25 + 3,01\right) = 99\%$$

$$P\left(3,24 \leq \mu \leq 9,25\right) = 99\%$$

1 – تقدير الفرق بين متوسطين حسابيين بمستوى ثقة

من خلال نظرية توزيع المعاينة للفرق بين وسطين حسابيين حالة n1 و n2 كبيرين يمكن كتابة ما يلي

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2 \ ; \ \sqrt{\sigma^2_{\bar{x}_1} + \sigma^2_{\bar{x}_2}}\right)$$

بعد تحويل المتغير العشوائي الى متغير عشوائي معياري نحصل على ما يلي

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma^2_{\bar{x}_1} + \sigma^2_{\bar{x}_2}}} \quad , \ Z \sim N\,(0\,,1)$$

او بعبارة أخرى

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma^2_1}{n_1} + \frac{\sigma^2_1}{n_2}}} \quad , \ Z \sim N\,(0\,,1)$$

من جانب اخر نعلم أن

$$P\left(-\mathrm{Z}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \leq Z \leq \mathrm{Z}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right) = 1-\alpha$$

بالتعويض في مجال الثقة

$$P\left(-\mathrm{Z}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \leq \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_1^2}{n_2}}} \leq \mathrm{Z}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right) = 1-\alpha$$

يمكن استنتاج مجال الثقة على النحو التالي:

$$\boldsymbol{P}\left((\bar{x}_1-\bar{x}_2)-\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \leq \mu_1-\mu_2 \leq (\bar{x}_1-\bar{x}_2)+\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right) = 1-\alpha$$

تطبيق

قدرت مدة الاشتغال اليومية لنوعين من العناصر الالكترونية A و B بـــ 18 *ساعة و* 20 *ساعة على الترتيب في عينة من* (40) *يوم بالنسبة للنوع الأول و* 50 *يوم للنوع الثاني ، علما ان الانحراف المعياري لمدة الاشتغال* 5 و 8 *على الترتيب*

المطلوب: *قدر الفرق متوسط مدة الاشتغال اليومية للعناصر* A و B *بمستوى ثقة* 95 %

حل التطبيق

$$\bar{x}_1 = 18 \quad ,\bar{x}_2 = 20 \quad ,n1 = 40 \quad , \qquad n2 = 50$$

$$\boldsymbol{\sigma_1^2 = 5 \quad ,\sigma_2^2 = 8}$$

$$\sqrt{\sigma_{\bar{x}_1}^2 + \sigma_{\bar{x}_2}^2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_1^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{5}{40} + \frac{8}{50}} = \sqrt{0,125 + 0,16}$$

$$= 0,513$$

$$Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} = Z_{(0,975)} = 1,96$$

بالتعويض في مجال الثقة نجد

$$P(-2 - 0,513(1,96) \leq \mu_1 - \mu_2 \leq -2 - 0,513(1,96)) = 95\ \%$$

$$P(-2 - 1,005 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq -2 + 1,005) = 95\ \%$$

$$\Rightarrow P(-3,005 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 0,995) = 95\ \%$$

$$S^{*2} = \frac{\sum_{i=1}^{n1}(x_{i1} - \bar{x}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n2}(x_{i2} - \bar{x}_2)^2}{n1 + n2 - 2}$$

$$S_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n1}(x_{i1} - \bar{x}_1)^2}{n1 - 1}, S_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n2}(x_{i2} - \bar{x}_2)^2}{n2 - 1}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n1}(x_{i1} - \bar{x}_1)^2 = (n_1 - 1)s_1^2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n2}(x_{i2} - \bar{x}_1)^2 = (n_2 - 1)s_2^2$$

$$\Rightarrow S^{*2} = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n1 + n2 - 2}$$

من جانب اخر نعلم أن

$$\boldsymbol{\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}} = \sqrt{\sigma^2_{\bar{x}_1} + \sigma^2_{\bar{x}_2}} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{S^{*2}}}{n_1} + \frac{\boldsymbol{S^{*2}}}{n_2}} = \boldsymbol{S^*}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

$$T = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\boldsymbol{S^*}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim T_{v=n1+n2-2}$$

يمكن استنتاج مجال الثقة على النحو التالي:

$$P\left((\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - S^*\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}T^{v=n1+n2-2}_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \leq \mu_1 - \mu_2 \right.$$
$$\left. \leq (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + S^*\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}T^{n1+n2-2}_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \right) = 1 - \alpha$$

تقدير النسبة* P *في المجتمع بمجال الثقة

$$\bar{p} \sim N\left(P\,, \sqrt{\frac{Pq}{n}} \right)$$

بما أن P مجهولة فيتم تقدير الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة على النحو التالي

$$\boldsymbol{\sigma_{\bar{P}}} = \sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}} \quad , \quad = \frac{\bar{p} - P}{\sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}}} \qquad , \quad Z \sim N\,(\,0\,,1\,)$$

من جانب اخر نعلم أن

$$P\left(-\mathrm{Z}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \leq Z \leq \mathrm{Z}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(-\mathrm{Z}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \leq \frac{\bar{p}-P}{\sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}}} \leq \mathrm{Z}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right) = 1-\alpha$$

يمكن استنتاج مجال الثقة على النحو التالي:

$$P\left(\bar{p} - \sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}} Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \leq \mathrm{P} \leq \bar{p} + \sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}} Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right) = 1-\alpha$$

تحديد حجم العينة n بدلالة مجال الثقة وهامش الخطأ e

البرهان

نعلم أن

$$P\left(\bar{p} - \sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}} Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \leq \mathrm{P} \leq \bar{p} + \sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}} Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right) = 1-\alpha$$

من جانب اخر نضع d هو طول فترة الثقة

$$d = \bar{p} + \sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}} Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} - \bar{p} + \sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}} Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow d = 2\sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}} Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \Rightarrow e = \frac{d}{2} = \frac{2\sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}} Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}}{2} = \sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}} Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow e = \sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}} Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \Rightarrow \sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}} = \frac{e}{Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}} \Rightarrow \frac{\bar{p}\bar{q}}{n} = \left(\frac{e}{Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{p}\bar{q}}{n} = \frac{e^2}{Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}^{\ 2}} \Rightarrow n = \frac{Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}^{\ 2}(\bar{p}\bar{q})}{e^2}$$

و مع افتراض ان النسبة في المجتمع معلومة تصبح العلاقة الرياضية لحساب العينة n على النحو التالي :

$$\boldsymbol{n = \frac{Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}^{\ 2}(Pq)}{e^2}}$$

حيث e : هامش الخطأ المسموح به

Z : الإحصائية الجدولية عند مستوى ثقة معين

P : النسبة في المجتمع مع $q=1-P$

تطبيق : تقدر نسبة خاصية معينة في مجتمع 20 % ، *ماهو حجم العينة الضروري سحبها من المجتمع بهامش خطأ* 0,06 *و مستوى ثقة* 95 %

الحل

$$\boldsymbol{Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} = Z_{(0,975)} = 1,96 \ , \ e = 0,06 \ , P = 0,2 \ , \ q = 0,8}$$

$$\boldsymbol{n = \frac{(1,96)^2(0,2)(0,8)}{(0,06)^2} = 171}$$

تقدير الفرق بين نسبتين في مجتمعين بمجال الثقة

نفرض انه لدينا مجتمعين نسحب عينتين حيث $n1 , n2 \geq 30$ *من نظرية توزيع المعاينة للفرق بين نسبين لدينا*

$$\bar{p}_1 - \bar{p}_2 \sim N\left(P_1 - P_2 \ ; \ \sqrt{\sigma_{\bar{p}_1}^2 + \sigma_{\bar{p}_2}^2}\right)$$

بما أن *P1* و *P2* مجهولتين، نستخدم النسب في العينتين لحساب الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة

$$\boldsymbol{\sigma_{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}} = \sqrt{\frac{\bar{p}_1\bar{q}_1}{n_1} + \frac{\bar{p}_2\bar{q}_2}{n_2}}$$

بعد تحويل المتغير العشوائي الى متغير عشوائي معياري نحصل على ما يلي

$$Z = \frac{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{\bar{p}_1\bar{q}_1}{n_1} + \frac{\bar{p}_2\bar{q}_2}{n_2}}} \quad , \quad Z \sim N(0,1)$$

بالتعويض في مجال الثقة نجد

$$P\left(-\mathrm{Z}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \leq \frac{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{\bar{p}_1\bar{q}_1}{n_1} + \frac{\bar{p}_2\bar{q}_2}{n_2}}} \leq \mathrm{Z}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \right) = 1 - \alpha$$

ليصبح مجال الثقة على النحو التالي:

$$P\left((\bar{p}_1 - \bar{p}_2) - \sqrt{\frac{\bar{p}_1\bar{q}_1}{n_1} + \frac{\bar{p}_2\bar{q}_2}{n_2}}\, \boldsymbol{z}_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \leq P_1 - P_2 \leq (\bar{p}_1 - \bar{p}_2) + \sqrt{\frac{\bar{p}_1\bar{q}_1}{n_1} + \frac{\bar{p}_2\bar{q}_2}{n_2}}\, \boldsymbol{z}_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \right) = 1 - \alpha$$

تقدير تباين مجتمع طبيعي σ^2 بمجال الثقة

من خلال نظرية توزيع المعاينة فنعلم أن المتغير العشوائي $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ يخضع لتوزي كاي تربيع $\chi^2_{v=n-1}$ بدرجة حرية $v = n-1$ ، نرمز للإحصائية $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ بـــ χ^2 و يمكن صياغة مجال الثقة على النحو التالي

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{d2} \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \frac{(n-1)S^2}{d1}\right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{(n-1)S^2}{d2} \leq \chi^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{d1}\right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(\chi^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{d2}\right) - P\left(\chi^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{d1}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\chi^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{d2}\right) = P2$$

$$\Rightarrow\ P2 - P1 = 1-\alpha$$

$$P\left(\chi^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{d1}\right) = P1$$

نضع

$$P\left(\chi^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{d2}\right) = P2 = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow P1 = 1-\frac{\alpha}{2}$$

نجد

$$d2 = \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}} \quad , \quad d1 = \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}$$

فنحصل على مجال الثقة التالي:

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2}\right),v=n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),v=n-1}}\right) = 1-\alpha$$

تطبيق

سعر تداول السهم (أ) اليومي في البورصة يخضع لتوزيع طبيعي وسطه الحسابي μ و تباينه σ^2 ، في عينة من (**30**) يوم تدول قدر الانحراف المعياري بـ 12,25

قدر التباين بمجال ثقة باحتمال قدره 95 %

حل التطبيق

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2}\right),v=n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),v=n-1}}\right) = 1-\alpha$$

$$\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),v=n-1} = \chi^2_{(0,975),v=29} = 16,05$$

$$\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2}\right),v=n-1} = \chi^2_{(0,025),v=29} = 45,72$$

بالتعويض في مجال الثقة نجد

$$P\left(\frac{(29)12,25}{45,72} \leq \sigma^2 \leq \frac{(29)12,25}{16,05}\right) = 95\ \%$$

$$P(7,77 \leq \sigma^2 \leq 22,13\ ) = 95\ \%$$

و يمكن استنتاج مجال الثقة للانحراف المعياري على النحو التالي :

$$P(2,78 \leq \sigma \leq 4,7\ ) = 95\ \%$$

تقدير نسبة تباينين لمجتمع طبيعيين بمجال الثقة

نفرض أنه لدينا مجتمعين طبيعيين تباينهما σ_1^2 و σ_2^2 على الترتيب ، نسحب عينتين عشوائيتين حجمها n1 و n2 تباينهما S_1^2 و S_2^2 على الترتيب بحيث يكون

S_1^2 أكبر من S_2^2 (العينة رقم 1 تباينها أكبر من العينة رقم 2) ، يمكن استنتاج مجال الثقة للنسبة $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ على النحو التالي :

$$\frac{S_1^2\sigma_1^2}{S_2^2\sigma_2^2} = \frac{\frac{(n2-1)S_2^2}{\sigma_2^2(n2-1)}}{\frac{(n1-1)S_1^2}{\sigma_1^2(n1-1)}} \sim F\ (\ v1\ \ ,v2\ )$$

مجال الثقة للنسبة $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$

$$P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} * \frac{1}{F_{(\frac{\alpha}{2},n1-1\ ,n2-1)}} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{S_1^2}{S_2^2} * F_{(\frac{\alpha}{2},n2-1\ ,n1-1)}\right) = 1-\alpha$$

تطبيق

تخضع العوائد المالية اليومية لنوعين من الأسهم (A) و (B) الى توزيع طبيعي ، في عينة من (25) يوم قدر تباين عوائد السهم (A) بـــ 28 و السهم (B) بـــ (20) ، شكل مجال ثقة لنسبة تباين العوائد المالية بالنسبة للسهمين A و B بمستوى ثقة 90 %

حل التطبيق

لدينا من معطيات التطبيق

$$.n1= 25\ ,\ n2= 25\ \ ,\ S_1^2 = 28\ \ ,S_2^2 = 20$$

$$F_{(\frac{\alpha}{2},n1-1\ ,n2-1)} = F_{(0,05\ ,24\ \ ,24\ )} = 1,98$$

بالتعويض نجد

$$P\left(\frac{28}{20} * \frac{1}{1{,}98} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{28}{20} * 1{,}98\right) = 90\ \%$$

$$\boldsymbol{P\left(0{,}70 \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq 2{,}772\right) = 90\ \%}$$

اختبار الفرضيات

يلعب اختبار الفرضيات دورا مهما جدا في عملية اتخاذ القرار فيما يخص الحكم على معلمة او عدة معلمات خاصة بمجتمع احصائي مثل(المتوسط الحسابي، النسبة، التباين .... الخ) ، تجد الإشارة بان قبول فرضية من طرف الباحث الاحصائي لا يعني بالضرورة انها صحيحة و انما عدم توفر ادلة كافية لرفضها من العينة أدى الى قبولها ، كما ان رفض فرضية من طرف الباحث الاحصائي لا يعني بالضرورة انها خاطئة و انما عدم توفر ادلة كافية لقولها من العينة أدى الى رفضها ، عند القيام اختار الفرضيات يضع الباحث الاحصائي فرضيتين أساسيتين هما الفرضية العدمية (الصفرية) و يرمز لها بـــ H_0 الإضافة الى فرضية أخرى تسمى بالفرضية البديلة و يرمز لها بـــ H_1

الفرضية الصحيحة / الفرضية المقبولة	H_0	H_1
H_0	لا يوجد خطأ	الخطأ من النوع الثاني β
H_1	الخطأ من النوع الأول α	لا يوجد خطأ

$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_0: \mu > \mu_0 \end{cases}$$

$$P(H_1/H_0) = \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = P(\bar{x} \geq a \ / \mu = \mu_0)$$

من جانب اخر نعلم أن

$$\bar{x} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right), \quad d'ou \quad z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$\Rightarrow P(\bar{x} \geq a) = P\left(z \geq \frac{a - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{a - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = z_{(1-\alpha)} \Rightarrow \boldsymbol{a = \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{(1-\alpha)}}$$

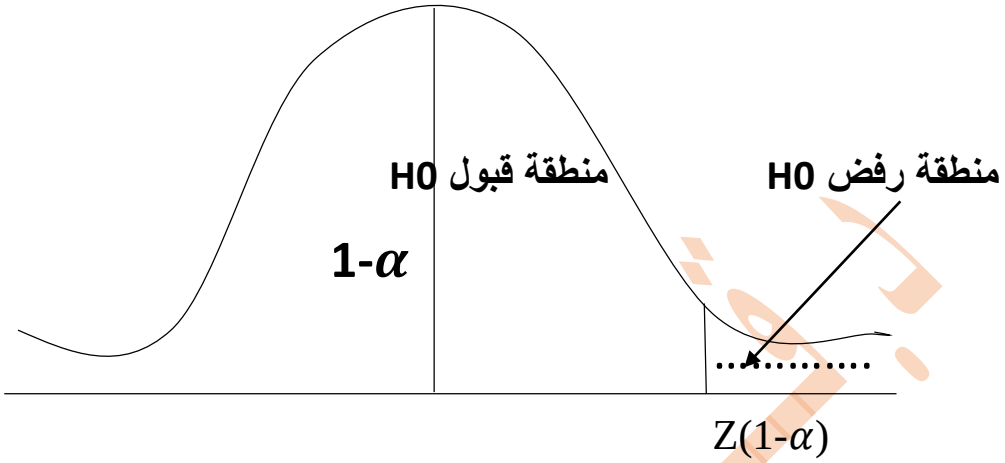
كما يمكن تحديد حدوث الثقة بالمتوسط الحسابي $\bar{x}$ كما يلي :

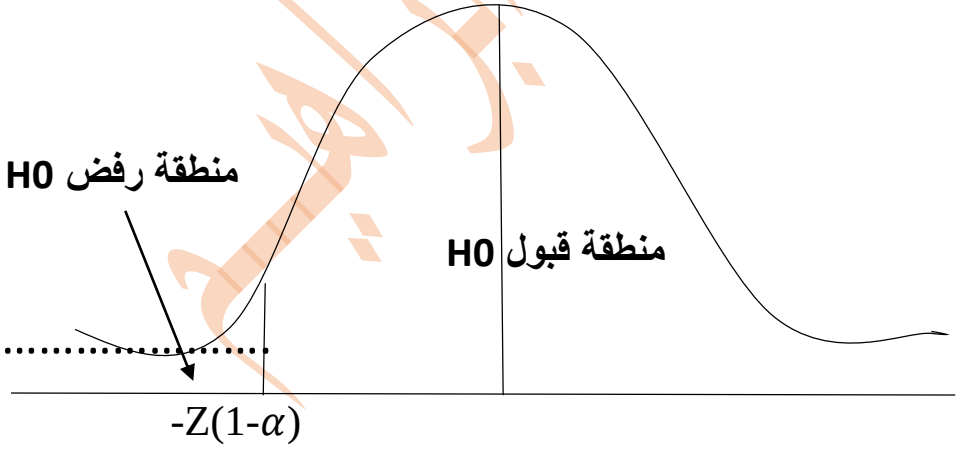
$$1 - \alpha = P(Z \leq z_{(1-\alpha)})$$

$$\bar{x} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right), \quad d'ou \quad z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$\Rightarrow 1 - \alpha = P\left(\frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z_{(1-\alpha)}\right)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{1 - \alpha = P\left(\bar{x} \leq \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{(1-\alpha)}\right)}$$



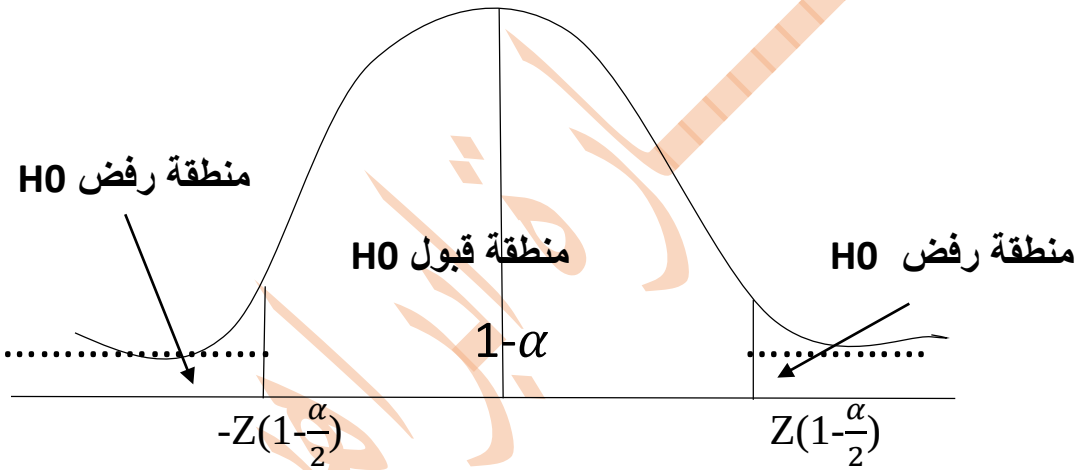


$$1-\alpha = P(Z \geq -z_{(1-\alpha)})$$

$$\bar{x} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right), \quad d'ou \quad z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$\Rightarrow 1-\alpha = P\left(\frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq -z_{(1-\alpha)}\right)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{1-\alpha = P\left(\bar{x} \geq \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{(1-\alpha)}\right)}$$



$$1-\alpha = P\left(-Z\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \leq z \leq Z\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

$$d'ou \quad z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$\Rightarrow 1-\alpha = P\left(-Z\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \leq \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq Z\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \mathbf{1-\alpha = P\left(\mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \le \bar{x} \le \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right)}$$

تطبيق 1

الوسط الحسابي لمجتمع احصائي هو μ و انحرافه المعياري σ = 4 ، في عينة حجمها (36) قدر المتوسط الحسابي بـ (75)

المطلوب : اختبر عند مستوى معنوية 3 % الفرضيات $H_0 : \mu = 80$ مقابل الفرضية البديلة $H_1 : \mu < 80$ ، ثم حدد حدود منطقة القبول و الرفض بقيم $\bar{x}$

حل التطبيق 1

وضع الفرضيات

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 = 80 \\ H_0 : \mu < 80 \end{cases}$$

$$\sigma = 4 \quad , n = 36 \quad , \bar{x} = 75$$

حساب $\sigma_{\bar{x}}$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{36}} = \frac{4}{6} = 0{,}66$$

$$n > 30 \quad , \quad \bar{x} \sim N\left(\mu_0 , \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

حساب إحصائية الاختبار Z'

$$Z' = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \Rightarrow Z' = \frac{75-80}{0{,}66} = \mathbf{-7{,}57}$$

تحديد قواعد اتخاذ القرار

$$Z^c = Z_{(1-\alpha)} = Z_{(0{,}97)} = 1{,}88$$

$$\begin{cases} Si \quad |Z'| > Z^c \quad \text{نرفض } H0 \\ Si \quad |Z'| < Z^c \quad \text{نقبل } H0 \end{cases}$$

و بمقارنة القيمة المطلقة للإحصائية المحسوبة نلاحظ أن

$$[-7,57] > 1,88$$

و منه نرفض الفرضية $H0$ ، أي أن المتوسط الحسابي للمجتمع أصغر من 80 عند مستوى معنوية 5 %

حدود منطقة القبول و الرفض بقيم $\bar{x}$

$$\Rightarrow \alpha = P(\bar{x} < \hat{\theta} \ / \mu = \mu_0)$$

$$\Rightarrow 0,03 = P\left(\frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < -Z_{(1-\alpha)}\right) \Rightarrow$$

$$0,03 = P\left(\bar{x} < \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{(1-\alpha)}\right) = P(\bar{x} < 80 - 1,24)$$

$$0,03 = P(\bar{x} < 78,76)$$

و منه يمكن استنتاج حدود منطقة القبول و الرفض على النحو التالي :

$$\begin{cases} si \ \bar{x} < 78,76 & \text{نرفض } H0 \\ Si \ \bar{x} \geq 78,76 & \text{نقبل } H0 \end{cases}$$

تطبيق 2

متوسط طول نوع من القطع الميكانيكية من المفروض أن يكون (20) سم بانحراف معياري قدره 6 سم ، تلقت احدى الشركات المنتجة لهذا النوع من القطع شكاوى من الزبائن تؤكد ان متوسط طول هذه القطع يختلف عن (20) سم ، و للتأكد من ذلك اخذت عينة عشوائية من (64) قطعة و لاختبار الفرضية الإحصائية تم وضع قواعد اتخاذ القرار التالية :

$$\begin{cases} si \ 18,59 \leq \bar{x} \leq 21,41 & \text{نقبل } H0 \\ si \ \bar{x} < 18,59 \ ou \ \bar{x} > 21,41 & \text{نرفض } H0 \end{cases}$$

المطلوب :

1. أحسب الخطأ من النوع الأول α ؟
2. اختبر الفرضيات علما أن المتوسط الحسابي للعينة هو 24 ؟

حل التطبيق 2

حساب الخطأ من النوع الأول α

$$\alpha = [P(\bar{x} < 18{,}59) + P(\bar{x} > 21{,}41)/\mu = 20]$$

$$n > 30 \ , \qquad \bar{x} \sim N\left(\mu_0 , \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{6}{\sqrt{64}} = \frac{6}{8} = 0{,}75$$

$$\Rightarrow \alpha = P\left(Z < \frac{18{,}59 - 20}{0{,}75}\right) + P\left(Z > \frac{21{,}41 - 20}{0{,}75}\right)$$

$$\Rightarrow \alpha = P(Z < -1{,}88) + P(Z > 1{,}88)$$

$$\Rightarrow \alpha = [1 - P(Z \leq 88)] + [1 - P(Z \leq 88)] = 0{,}03 + 0{,}03$$

$$= 0{,}06 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha = 6\ \%}$$

تطبيق

يريد مدير مصنع التأكد من أن نسبة الإنتاج الغير صالح للبيع المنتج باستخدام الألة A أقل من الالة B ، حيث تم سحب عينتين عشوائيتين من الإنتاج حجمهما 36 و 40 بالنسبة لـ A و B على الترتيب ، قدرت نسبة الإنتاج الغير صالح في العينتين بـ 5 % و 8 % على الترتيب

المطلوب

1. اختبر عند مستوى 5 % الفرضيات المناسبة؟

2. حدد منطقتي الرفض والقبول باستخدام الفرق بين النسبتين؟

حل التطبيق

وضع الفرضيات

$$\begin{cases} H_0: P_1 = P_2, \quad d = 0 \\ H_1: P_1 < P_2, \quad d < 0 \end{cases}$$

حساب النسبة المتوسطة $\hat{P}$

$$n1 = 36 \quad , n_2 = 40 \quad , \bar{p}_1 = 0{,}05 \quad , \bar{p}_2 = 0{,}08$$

$$\hat{P} = \frac{n_1\bar{p}_1 + n_1\bar{p}_1}{n1 + n2} = \frac{(0{,}05)(36) + (0{,}08)(40)}{76} = 0{,}065$$
$$= 6{,}5\ \%$$

حساب $\sigma_{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}$

$$\sigma_{\bar{p}_1 - \bar{p}_2} = \sqrt{\hat{p}\hat{q}}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \Rightarrow \sigma_{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}$$

$$= \sqrt{(0{,}065)(0{,}935)}\sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1}{40}} = \mathbf{0{,}055}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\sigma_{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}} = \mathbf{0{,}055}$$

حساب إحصائية الاختبار Z'

$$Z' = \frac{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) - 0}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{-0{,}03}{\mathbf{0{,}055}} = -0{,}54$$

تحديد قواعد اتخاذ القرار

$$Z^c = Z_{(1-\alpha)} = Z_{(0{,}95)} = 1{,}64$$

$$\begin{cases} Si \quad |Z'| > 1{,}64 \quad \text{نرفض } H0 \\ Si \quad |Z'| < 1{,}64 \quad \text{نقبل } H0 \end{cases}$$

وبمقارنة القيمة المطلقة للإحصائية المحسوبة نلاحظ أن

$$\mathbf{[-0,54]} < 1{,}64$$

ومنه نقبل الفرضية $H0$ ، أي أن النسبتين متساويتين عند مستوى معنوية 5 %

تحديد منطقتي الرفض والقبول باستخدام الفرق بين النسبتين

$$0{,}05 = P\left(\frac{(\overline{p_1} - \bar{p}_2) - d0}{\boldsymbol{\sigma_{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}}} < -Z_{(1-\alpha)}\right)$$

$$\Rightarrow 0{,}05 = P\left(\bar{p}_1 - \bar{p}_2 < d0 - \boldsymbol{\sigma_{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}} Z_{(1-\alpha)}\right)$$

$$\Rightarrow \mathbf{0,05} = \boldsymbol{P}(\bar{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{1}} - \bar{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{2}} < \mathbf{-0,0902})$$

$$\begin{cases} si \quad \bar{p}_1 - \bar{p}_2 < -0{,}0902 \quad \text{نرفض } H0 \\ Si \quad \bar{p}_1 - \bar{p}_2 \geq -0{,}0902 \quad \text{نقبل } H0 \end{cases}$$

اختبار فرضيات التباين σ^2 لمجتمع توزيعه طبيعي

من خلال نظرية توزيع المعاينة للتباين نعلم أن الإحصائية

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2{}_{v=n-1}$$

أو بعبارة أخرى

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2{}_{v=n-1}$$

نقوم بمقارنة الإحصائية χ^2 بالقيم الحرجة لتوزيع مربع كاي حسب الحالات التالية

الحالة الأولى *اختبار ذو جناحين*

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

تكون قاعدة اتخاذ القرار على النحو التالي

$$\begin{cases} Si\ \chi^2 < \chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2},n-1\right)}\ Ou\ \chi^2 > \chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2},n-1\right)} \text{ نرفض } H0 \\ Si\ \chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2},n-1\right)} \leq \chi^2 \leq \chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2},n-1\right)} \text{ نقبل } H0 \end{cases}$$

الحالة الثانية اختبار ذو جناح واحد ايمن

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$$

تكون قاعدة اتخاذ القرار على النحو التالي

$$\begin{cases} Si\ \chi^2 > \chi^2_{(\alpha,n-1)} \text{ نرفض } H0 \\ Si\ \chi^2 \leq \chi^2_{(\alpha,n-1)} \text{ نقبل } H0 \end{cases}$$

الحالة الثالثة : *اختبار جناح واحد أيسر*

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$$

تكون قاعدة اتخاذ القرار على النحو التالي

$$\begin{cases} Si\ \chi^2 < \chi^2_{(1-\alpha,n-1)} \text{ نرفض } H0 \\ Si\ \chi^2 \geq \chi^2_{(1-\alpha,n-1)} \text{ نقبل } H0 \end{cases}$$

اختبار فيشر F لتساوي تباينين لمجتمعين طبيعيين

يرتكز هذا الاختبار على صياغة الفرضيات التالية:

$$\begin{cases} H_0: \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \quad H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1: \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1 \quad H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \end{cases}$$

نسحب عينتين عشوائيين من المجتمعين الطبيعيين حجمهما n1 و n2 على الترتيب و تباينهما S1 و S2 على الترتيب ، مع افتراض ان تباين المجتمع أول أكبر من المجتمع الثاني أي يجب تحقق $S_1^2 > S_2^2$ أي أن المجتمع الأول هو صاحب التباين الأكبر

يتم حساب إحصائية فيشر $\boldsymbol{F}$ وفق العلاقة التالية:

$$F = \frac{\dfrac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2(n_1-1)}}{\dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2(n_2-1)}} = \frac{\dfrac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\dfrac{S_2^2}{\sigma_2^2}} = \frac{S_1^2}{\sigma_1^2} * \frac{\sigma_2^2}{S_2^2} \sim F\ (n_1-1, n_2-1)$$

من جانب اخر نعلم أن $\boldsymbol{\sigma_1^2 = \sigma_2^2}$ وفقا لـــ H_0 و بالتالي نستنتج أن :

$$F = \frac{S_1^2}{S_1^2} \sim F\ (n_1-1, n_2-1)$$

الخطا من النوع الثاني

مثال :

يرغب صاحب مصنع في اختبار عند مستوى $\alpha = 10\ \%$ و $\beta = 20\ \%$ اذا كان سمك صفائح الألمنيوم التي ينتجها منتج محلي تزيد عن تلك التي ينتجها مورد أجنبي بحيث :

$$\mu_1 - \mu_2 = d_0 = \ 0{,}3$$

$$\mu_1 - \mu_2 = d_1 = \ 0{,}5$$

اخذت عينيتين عشوائيتين حمهما n_1 و n_2 حيث $\bar{x}_1$ و $\bar{x}_2$ مع العلم ان

$$\bar{x}_1 \sim N\left(\mu_1, \sigma_{\bar{x}_1}\right) et\ \bar{x}_2 \sim N\left(\mu_2, \sigma_{\bar{x}_2}\right)$$

المطلوب

1. عرف المتغير العشوائي و ضع الفرضيات المناسبة للاختبار ؟
2. أحسب حد الثقة $\hat{\theta}$ و الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة
3. ارسم منحنى توصيف العمليات و منحنى قوة الاختبار ، مع التعليق على النتائج ؟

الحل

1 تعريف المتغير العشوائي و صياغة الفرضيات المناسبة

نعلم أن

$$\bar{x}_1 \sim N\left(\mu_1, \sigma_{\bar{x}_1}\right) et\ \bar{x}_2 \sim N\left(\mu_2, \sigma_{\bar{x}_2}\right)$$

من جانب اخر لدينا

$$d = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$$

و منه يمكن استنتاج ما يلي :

$$d \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}\right)$$

$$d'ou\ \sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{{\sigma_{\bar{x}_1}}^2 + {\sigma_{\bar{x}_2}}^2}$$

$$\Rightarrow d \sim N\left(\mu_1 - \mu_2 , \sqrt{{\sigma_{\bar{x}_1}}^2 + {\sigma_{\bar{x}_2}}^2}\right)$$

وضع الفرضيات المناسبة للاختبار

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d_0 = 0{,}3 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 > d_0 \end{cases}$$

$$P(H_1/H_0) = \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = P(d \geq \hat{\theta} \ / d = d_0 = 0{,}3)$$

$$d \sim N\left(d_0 , \sqrt{{\sigma_{\bar{x}_1}}^2 + {\sigma_{\bar{x}_2}}^2}\right)$$

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - d_0}{\sqrt{{\sigma_{\bar{x}_1}}^2 + {\sigma_{\bar{x}_2}}^2}} \quad , Z \sim N(0 , 1)$$

$$\Rightarrow 0{,}1 = P\left(\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - d_0}{\sqrt{{\sigma_{\bar{x}_1}}^2 + {\sigma_{\bar{x}_2}}^2}} \geq Z_{(0{,}9)}\right)$$

$$\Rightarrow 0{,}1 = P\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \geq d_0 + \sqrt{{\sigma_{\bar{x}_1}}^2 + {\sigma_{\bar{x}_2}}^2}\ Z_{(0{,}9)}\right)$$

$$\Rightarrow 0{,}1 = P\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \geq 0{,}3 + \sqrt{{\sigma_{\bar{x}_1}}^2 + {\sigma_{\bar{x}_2}}^2}\ (1{,}28)\right)$$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = 0{,}3 + \sqrt{{\sigma_{\bar{x}_1}}^2 + {\sigma_{\bar{x}_2}}^2}\ (1{,}28) \dots\dots\dots\dots\dots E(1)$$

$$P(H_1/H_0) = \beta$$

$$\Rightarrow \beta = P(d \leq \hat{\theta} \ / d = d_1 = 0{,}5)$$

$$d \sim N\left(d_0 , \sqrt{{\sigma_{\bar{x}_1}}^2 + {\sigma_{\bar{x}_2}}^2}\right)$$

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - d_0}{\sqrt{{\sigma_{\bar{x}_1}}^2 + {\sigma_{\bar{x}_2}}^2}} \quad , Z \sim N\,(0\,,1\,)$$

$$0{,}2 = \; P\left(\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - d_1}{\sqrt{{\sigma_{\bar{x}_1}}^2 + {\sigma_{\bar{x}_2}}^2}} \leq -Z_{(0{,}8)}\right)$$

$$\Rightarrow 0{,}2 = \; P\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \leq d_1 - \sqrt{{\sigma_{\bar{x}_1}}^2 + {\sigma_{\bar{x}_2}}^2}\, Z_{(0{,}8)}\right)$$

$$\Rightarrow 0{,}2 = \; P\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \leq 0{,}5 + -\sqrt{{\sigma_{\bar{x}_1}}^2 + {\sigma_{\bar{x}_2}}^2}\;(0{,}84)\right)$$

$$\hat{\theta} = 0{,}5 - 0{,}84\sqrt{{\sigma_{\bar{x}_1}}^2 + {\sigma_{\bar{x}_2}}^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots E(2)$$

فنحصل على جملة معادلتين على النحو التالي:

$$\begin{cases} \hat{\theta} = 0{,}3 + 1{,}28\sqrt{{\sigma_{\bar{x}_1}}^2 + {\sigma_{\bar{x}_2}}^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad E(1) \\ \hat{\theta} = 0{,}5 - 0{,}84\sqrt{{\sigma_{\bar{x}_1}}^2 + {\sigma_{\bar{x}_2}}^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots E(2) \end{cases}$$

بطرح المعادلتين

$$E(1) - E(2) \Leftrightarrow -0\,{,}2 + 2{,}09\sqrt{{\sigma_{\bar{x}_1}}^2 + {\sigma_{\bar{x}_2}}^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2{,}09\sqrt{{\sigma_{\bar{x}_1}}^2 + {\sigma_{\bar{x}_2}}^2} = 0{,}2$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}} = \sqrt{{\boldsymbol{\sigma_{\bar{x}_1}}}^2 + {\boldsymbol{\sigma_{\bar{x}_2}}}^2} = \mathbf{0\,,095}$$

$$\hat{\theta} = 0{,}3 + 1{,}28(\,0{,}095) \Rightarrow \boldsymbol{\hat{\theta} = 0{,}421}$$

منحنى توصيف العمليات

في هذه المرحل سوف نفترض قيم للفرضية البديلة H_1 و نحسب في كل حالة قيمة الخطأ من النوع الثاني β

حالة $\boldsymbol{d_1 = 0{,}55}$

$$\Rightarrow \beta = P(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \leq \hat{\theta} \ / d = d_1 = 0{,}55)$$

$$\Rightarrow \beta = P(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \leq \mathbf{0{,}421} \ / d = d_1 = 0{,}55)$$

$$\Rightarrow \beta = P\left(Z \leq \frac{0{,}421-0{,}55}{0{,}095}\right) = P(Z \leq -1{,}35)$$

$$\Rightarrow \beta = 1 - P(Z \leq 1{,}35) = 1 - 0{,}911$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\beta = 0{,}09}$$

حالة $\boldsymbol{d_1 = 0{,}6}$

$$\Rightarrow \beta = P(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \leq \hat{\theta} \ / d = d_1 = 0{,}6)$$

$$\Rightarrow \beta = P(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \leq \mathbf{0{,}421} \ / d = d_1 = 0{,}6)$$

$$\Rightarrow \beta = P\left(Z \leq \frac{0{,}421-0{,}6}{0{,}095}\right) = P(Z \leq -1{,}88)$$

$$\Rightarrow \beta = 1 - P(Z \leq 1{,}88) = 1 - 0{,}969$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\beta = 0{,}031}$$

حالة $\boldsymbol{d_1 = 0{,}7}$

$$\Rightarrow \beta = P(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \leq \hat{\theta} \ / d = d_1 = 0{,}7)$$

$$\Rightarrow \beta = P(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \leq \mathbf{0{,}421} \ / d = d_1 = 0{,}7)$$

$$\Rightarrow \beta = P\left(Z \leq \frac{0{,}421-0{,}7}{0{,}095}\right) = P(Z \leq -2{,}93)$$

$$\Rightarrow \beta = 1 - P(Z \leq 2{,}93) = 1 - 0{,}998$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\beta = 0,002}$$

حالة $\boldsymbol{d_1 = 0,8}$

$$\Rightarrow \beta = P(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \leq \hat{\theta} \ / d = d_1 = 0,8)$$

$$\Rightarrow \beta = P(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \leq \boldsymbol{0,421} \ / d = d_1 = 0,8)$$

$$\Rightarrow \beta = P\left(Z \leq \frac{0,421-0,8}{0,095}\right) = P(Z \leq -3,98)$$

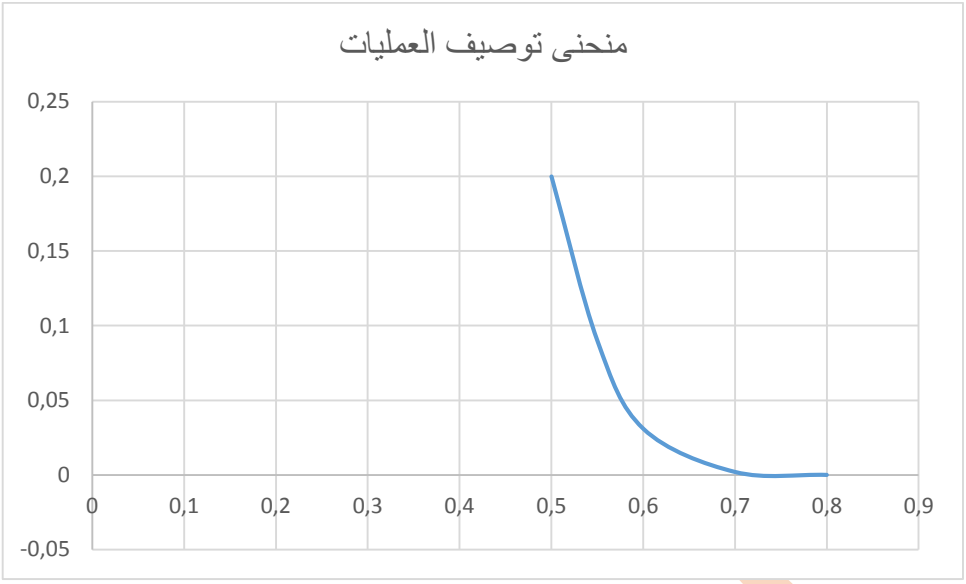
$$\Rightarrow \beta = 1 - P(Z \leq 3,98) = 1 - 0,9999$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\beta = 0,00001}$$

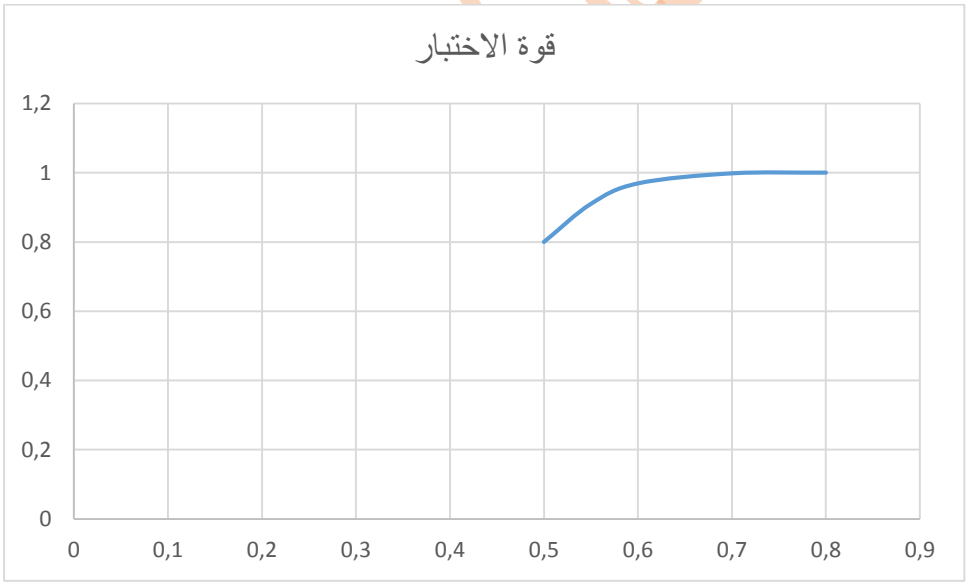
يمكن تلخيص النتائج وفق الجدول التالي :

قيمة d_1 الفرضية H1	قيمة β	قوة الاختبار β -1
d_1 = 0,5	0,2	0,8
d_1 = 0,55	0,09	0,91
d_1 = 0,6	0,031	0,97
d_1 = 0,7	0,002	0,998
d_1 = 0,8	0,00001	0,9999

منحنى توصيف العمليات (قيم β بدلالة H1)



منحنى قوة الاختبار ($1-\beta$) بدلالة قيم H1



التحليل الاحصائي لاختبار مربع كاي Chi- squared test

في المحاور السابقة قمنا بالتطرف لمختلف الاختبارات الإحصائية المعلمية Parametric test باستخدام بعض التوزيعات الاحتمالية الشهيرة خاصة التوزيع الطبيعي و توزريع ت Student (مثل اختبارات الأوساط الحسابية ، اختبارات النسب ..... الخ) ، لكن في بعض الأبحاث الإحصائية نلجأ الى اختبارات لامعلمية Non parametric test و هي الاختبارات الإحصائية التي لا تعتمد على التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي و يعتبر اختبار مربع كاي من أحسن الاختبارات الغير معلمية و سوف نتطرق في هذا المحور الى ثلاثة أنواع من اختبارات مربع كاي و هي

- **اختبارات حسن المطابقة Goodness of fit test**
- **اختبار الاستقلال test of independence**
- **اختبار التجانس Test of homogeneity**

1 / اختبارات حسن المطابقة Goodness of fit test

تعتمد الدراسات الإحصائية على فرض نموذج احصائي أو قانون احتمالي تخضع له المشاهدات المتوفرة، كأن نقول مثلا أن أوزان الطلبة في كلية معينة تخضع الى **توزيع طبيعي**، عدد الإجابات الصحيحة للطلبة في امتحان معين تخضع الى **التوزيع ذي الحدين** ، عدد حوادث السير في طريق معين تخضع الى **توزيع بواسون** ..... الخ ، فيرتكز اختبار حسن المطابقة على التأكد من أن المشاهدات المتوفرة تخضع الى هذا التوزيع النظري ، حيث يتم حساب مقياس يعبر عن مدى الفرق بين البيانات المشاهدة و البيانات المتوقعة (النظرية)

اذا كان هذا المقياس صغيرا يكون النموذج الاحصائي مقبول

اذا كان هذا المقياس كبيرا فانه لا يمكن قبول النموذج الاحصائي المقترح و يتم لبحص عن نموذج اخر

لتكن لدينا تجربة معينة حوادثها هي

$$E^1, E^1, E^1 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ E^c$$

نرمز بـــ f_{0i} للتكرارات الفعلية (المشاهدة)

بـــ f_{ti} للتكرارات المتوقعة (النظرية)

فيرتكز حسن المطابقة على اختبار الفرضيتين التاليتين:

$$\begin{cases} H_0: f_{0i} = f_{ti} & \text{النموذج مقبول} \\ H_1: f_{0i} \neq f_{ti} & \text{النموذج غير مقبول} \end{cases}$$

يتم حساب إحصائية الاختبار U^2

$$U^2 = \sum_{i=1}^{C} \frac{(f_{0i} - f_{ti})^2}{f_{ti}} \sim \chi^2 , v = c - k - 1$$

تخضع الإحصائية U^2 لتوزيع مربع كاي بدرجة حرية $v = c - k - 1$

حيث:

K : عدد المعلمات المقدرة

C : عدد الفئات

بعد حساب الإحصائية U^2 تتم مقارنتها بالقيمة الحرجة (الجدول) لتوزيع مربع كاي عند مستوى معنوية α و درجة حرية $v = c - k - 1$ ، وفقا لقواعد اتخاذ القرار التالي :

$$\begin{cases} si\ U^2 > \chi^2{}_{v=c-k-1}^{\alpha} & H0 \text{ نرفض} \\ si\ U^2 < \chi^2{}_{v=c-k-1}^{\alpha} & H0 \text{ نقبل} \end{cases}$$

تطبيق رقم 1

نرمي قطعة نرد عشوائيا (90) مرة ونسجل النتائج المحصل عليها وفق الجدول التالي:

xi	1	2	3	4	4	6
ni	12	20	14	12	23	9

المطلوب: اختبر عند مستوى معنوية 5 % إذا كانت قطعة النرد متوازنة؟

حل تطبيق رقم 1

وضع الفرضيات

$$\begin{cases} H_0: f_{0i} = f_{ti} & \text{القطعة متوازنة} \\ H_1: f_{0i} \neq f_{ti} & \text{القطعة غير متوازنة} \end{cases}$$

حساب الإحصائية U^2

xi	f_{0i}	f_{ti}	$(f_{0i} - f_{ti})^2$	$\frac{(f_{0i} - f_{ti})^2}{f_{ti}}$
1	12	15	9	0,6
2	20	15	25	1,666666667
3	14	15	1	0,066666667
4	12	15	9	0,6
5	23	15	64	4,266666667
6	9	15	36	2,4
	90			**9,6**

$$\Rightarrow U^2 = 9,6$$

بالنسبة للقيمة الحرجة نستخرجها من جدول توزيع **مربع كاي** حيث :

$$\chi^{2\ (0,05)}_{v=5} = 11,07$$

و بالتالي يمكن استنتاج ان الإحصائية المحسوبة U^2 أصغر من القيمة الحرجة الجدولية و بالتالي نقبل الفرضية العدمية H_0 و معنى ذلك أن قطعة النرد متوازنة عند مستوى معنوية 5 %

اختبار حسن المطابقة للتوزيع ذي الحدين

الجدول التالي يلخص عدد الافراد المتحصلين على شهادة جامعية في عينة من (100) أسرة

xi	0	1	2	3	4	5
ni	10	30	25	20	6	9

المطلوب: اختبر عند مستوى معنوية 5 % إذا كان توزيع عدد الافراد المتحصلين على شهادة جامعية هو التوزيع ذي الحدين

الحل

وضع الفرضيات

$$\begin{cases} H_0: f_{0i} = f_{ti} & \text{يخضع } x \text{ للتوزيع ذي الحدين} \\ H_1: f_{0i} \neq f_{ti} & \text{لا يخضع } x \text{ للتوزيع ذي الحدين} \end{cases}$$

xi	***ni***	***xi ni***
0	10	0
1	30	30
2	25	50

3	20	60
4	6	24
5	9	45
المجموع	100	**209**

تقدير النسبة P بطريقة العزوم بالمقدر $\hat{p}$

نعلم أن التوقع الرياضي للتوزيع ذي الحدين E(X) حيث

$$E(X) = nP$$

نساوي المتوسط الحسابي $\bar{X}$ بالتوقع فتحصل على

$$\bar{X} = np$$

$$d'ou\ \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{c} x_i n_i}{\sum ni}$$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{c} x_i n_i}{\sum ni} = n\,\hat{p}$$

ومنه نستنتج أن

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{c} x_i n_i}{n \sum ni}$$

بالتعويض نجد

$$\hat{p} = \frac{209}{(5) * 100} = \frac{209}{500} = 0{,}418 \cong 0{,}42$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\hat{p} = 0{,}42} \quad , \boldsymbol{\hat{q} = 0{,}58}$$

حساب التكرارات النظرية f_{ti}

$$f_{t0} = 100 * [\, C_5^0 (0{,}42)^0 (0{,}58)^5 \,] = 7$$

$$f_{t1} = 100 * [\, C_5^1 (0{,}42)^1 (0{,}58)^4 \,] = 24$$

$$f_{t2} = 100 * [\, C_5^2 (0{,}42)^2 (0{,}58)^3 \,] = 34$$

$$f_{t3} = 100 * [\, C_5^3 (0{,}42)^3 (0{,}58)^2 \,] = 25$$

$$f_{t4} = 100 * [\, C_5^4 (0{,}42)^4 (0{,}58)^1 \,] = 9$$

$$f_{t5} = 100 * [\, C_5^5 (0{,}42)^5 (0{,}58)^0 \,] = 1$$

حساب الإحصائية U^2

xi	f_{0i}	f_{ti}	$(f_{0i} - f_{ti})^2$	$\frac{(f_{0i} - f_{ti})^2}{f_{ti}}$
0	10	7	9	1,285714286
1	30	24	36	1,5
2	25	34	81	2,382352941
3	20	25	25	1
4	6	9	9	1
5	9	1	64	64
				71,16806723

بالنسبة للقيمة الحرجة نستخرجها من جدول توزيع **مربع كاي** حيث:

$$\chi^{2\,(0{,}05)}_{v=6-1-1=4} = 9{,}49$$

و بالتالي يمكن استنتاج ان الإحصائية المحسوبة U^2 أكبر من القيمة الحرجة الجدولية و بالتالي نرفض الفرضية العدمية H_0 و معنى ذلك أن عدد الفراد الحاصلين على شهادة جامعية لا يخضع للتوزيع ذي الحدين عند مستوى معنوية 5 %

اختبار حسن المطابقة لتوزيع بواسون

الجدول التالي يلخص توزيع عدد الأخطاء المطبعية في مطبعة معينة في (100) *صفحة*

xi	*0*	1	2	3	4
ni	20	30	22	15	13

المطلوب: اختبر عند مستوى معنوية 5 % إذا كان توزيع عدد الأخطاء المطبعي هو توزيع بواسون

تقدير النسبة $\boldsymbol{\lambda}$ بطريقة العزوم بالمقدر $\hat{\lambda}$

نعلم أن التوقع الرياضي للتوزيع بواسون $E(X)$ حيث

$$E(X) = \boldsymbol{\lambda}$$

نساوي المتوسط الحسابي $\bar{X}$ بالتوقع فتحصل على

$$\bar{X} = \lambda$$

$$d'ou\ \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{c} x_i n_i}{\sum ni}$$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{c} x_i n_i}{\sum ni} = \hat{\lambda}$$

xi	ni	xi ni
0	20	0
1	30	30
2	22	44
3	15	45
4	13	52
	100	171

$$\Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{\mathbf{171}}{\mathbf{100}} = 1{,}71 \simeq \boldsymbol{\hat{\lambda} = 2}$$

f_{0i}	f_{ti}	$(f_{0i}-f_{ti})^2$	$\frac{(f_{0i}-f_{ti})^2}{f_{ti}}$
20	14	36	2,571428571
30	27	9	0,333333333
22	27	25	0,925925926
15	18	9	0,5
13	9	16	1,777777778
			6,108465608

يعتبر تحليل التباين ANOVA من بين الطرق الإحصائية المعلمية المستخدمة في اختبر تغيرات المتوسطات الحسابية μ للمتغير Y (متغير كمي) و هذا بعد تأثير عامل واحد (تحليل تباين احادي) ، او عاملين (تحليل التباين الثنائي) و تتمثل هذه العوامل في طرق معالجة معينة ، مجموعات معينة ..... الخ

بافتراض لدينا متغير كمي Y موزع على مجموعات مرقمة من 1 الى غاية K)وفقا لعامل التصنيف F1 لهذه المجموعات

Univ2021

يمكن تلخيص الجدول الخاص بتوزيع البيانات الخاصة بالمتغير y على أساس المجموعات K عامل التصنيف F1 على النحو التالي

المجموعة 1	المجموعة 2	المجموعة 3	..	المجموعة K
$y_{1\,1}$	$y_{2\,1}$	$y_{3\,1}$	..	$y_{K\,1}$
$y_{1\,2}$	$y_{2\,2}$	$y_{3\,2}$	..	$y_{K\,2}$
$y_{1\,3}$	$y_{2\,3}$	$y_{3\,3}$	..	$y_{K\,3}$
$y_{1\,4}$	$y_{2\,4}$	$y_{3\,4}$	..	$y_{K\,4}$
..	...	...	..	...
..	...	...	..	...
..	..	..	..	..
..	..	..	..	..
$y_{1\,n}$	$y_{2\,n}$	$y_{3\,n}$	..	$y_{K\,n}$

$$\overline{y}_{*1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i} y_{1i}$$

$$\overline{y}_{*2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i} y_{2i}$$

$$\overline{y}_{*3} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i} y_{3i}$$

$$\overline{y}_{*K} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i} y_{Ki}$$

المتوسط الحسابي الكلي للبيانات $\overline{Y}_{**}$ يتم حسابه وفق العلاقة التالية

$$\overline{Y}_{**} = \frac{1}{n\,k}\sum_{i=1}^{i} Y_{ij}$$

مجموع المربعات الكلية و يرمز لها ب SST و هي عبارة عن مجموع مربعات انحرافات المشاهدات Y_{ij} عن المتوسط الحسابي الكلي $\overline{Y}_{**}$ حيث :

$$SST = \sum_{i=1}^{nk} (Y_{ij} - \overline{Y}_{**})^2$$

$$SSB = n\sum_{i=1}^{k}(\bar{Y}_{*k} - \bar{Y}_{**})^2$$

$$SSE = \sum_{k=1}^{K}\left(\sum_{i=1}^{n}(Y_{ij} - \bar{Y}_{*k})^2\right)$$

جدول تحليل التباين الأحادي One Way ANOVA

مصدر التباين	مجموع المربعات SS	درجة الحرية DF	متوسط مجموع المربعات MSS	الإحصائية F
بين المجموعات (تأثير العامل) Between	SSB	K-1	MSB=$\frac{SSB}{K-1}$	$F=\frac{\frac{SSB}{K-1}}{\frac{SSE}{N-K}}$
Within داخل المجموعات (البواقي)	SSE	N-K	MSE= $\frac{SSE}{N-K}$	
المجموع	SST	N-1	MST=$\frac{SST}{N-1}$	

G1	$\bar{Y}_1$	$(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_{**})^2$
2	4,5	6,25
3	4,5	2,25
5	4,5	0,25
8	4,5	12,25
	SSE_1	21

G2	$\bar{Y}_2$	$(\bar{Y}_2 - \bar{Y}_{**})^2$
5	7,25	5,0625
8	7,25	0,5625
10	7,25	7,5625
6	7,25	1,5625
	SSE_2	14,75

G3	$\bar{Y}_3$	$(\bar{Y}_3 - \bar{Y}_{**})^2$
2	5,5	12,25
6	5,5	0,25
4	5,5	2,25
10	5,5	20,25
	SSE_2	35

$$\Rightarrow SSE = SSE_1 + SSE_2 + SSE_3$$

$$\Rightarrow SSE = 21 + 14,75 + 35 = 70,75$$

فيما يخص مجموع المربعات الكلية فالجدول التالي يلخص النتائج المحصل عليها

Y_{ij}	$\bar{Y}_{**}$	$(Y_{ij} - \bar{Y}_{**})$	$(Y_{ij} - \bar{Y}_{**})^2$
2	5,75	-3,75	14,0625
3	5,75	-2,75	7,5625
5	5,75	-0,75	0,5625
8	5,75	2,25	5,0625
5	5,75	-0,75	0,5625
8	5,75	2,25	5,0625
10	5,75	4,25	18,0625
6	5,75	0,25	0,0625
2	5,75	-3,75	14,0625

6	5,75	0,25	0,0625
4	5,75	-1,75	3,0625
10	5,75	4,25	18,0625
		SST	**86,25**

$$\Rightarrow SST = \sum_{i=1}^{nk} (Y_{ij} - \overline{Y}_{**})^2 = 86,25$$

حساب مجموع المربعات بين المجموعات SSB (تأثير الخاصية)

نعلم أن :

$$SSB = n \sum_{i=1}^{k} (\overline{Y}_{*k} - \overline{Y}_{**})^2$$

G1	G2	G3
2	5	2
3	8	6
5	10	4
8	6	10
4,5	**7,25**	**5,5**
5,75	5,75	5,75
1,5625	2,25	0,0625

$$SSB= 4\left[(4,5-5,75)^2+(7,25-5,75)^2+(5,5-5,75)^2\right]\Rightarrow SSB=15,5$$

ليصب جدول تحليل التباين الأحادي على النحو التالي :

مصدر التباين	مجموع المربعات SS	درجة الحرية DF	متوسط مجموع المربعات MSS	الإحصائية F
بين المجموعات (تأثير العامل) Between	SSB = 15,5	K-1 =2	=7,75 MSB=$\frac{15,5}{2}$	$F=\frac{7,75}{7,86}$ =0,986
Within داخل المجموعات (البواقي)	SSE =70,75	N-K=9	MSE= $\frac{70,75}{9}$ =7,86	
المجموع	SST =86,25	11	MST=7,84	

وضح الفرضيات

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \\ \exists\, \mu_i \neq \mu_j \end{cases}$$

تحليل التباين الثنائي

يستخدم تحليل التباين الثنائي لاختبار تساوي مجموعة من المتوسطات الحسابية مع تاثير عاملين A و B ، حيث يرتكز اختبار التباين الثنائي على تاثير كل عامل على الأوساط الحسابية للمجموعات

ليكن Y_{ij} للمجموعات متغير عشوائي يخضع لتوزيع طبيعي حيث أن A ، B عبار عن عوامل و مع افتراض ان العينات مستقلة و التباين متجانس بالنسبة لكل المجموعات يمكن تخليص الجدول الخاص بالبيانات وفقا للعوامل A و B على النحو التالي :

العامل A	العامل B				
	B_1	.....	B_3	....	B_K
A_1	$Y_{1\,1}$	....	$Y_{1\,3}$		$Y_{1\,K}$
...		....			
A_3	$Y_{3\,1}$	....	$Y_{3\,3}$		
...			.....		
B_J	$Y_{J\,1}$	.....		.....	$Y_{J\,K}$

$$\overline{Y}_{**} = \frac{1}{J\,K}\sum_{i=1}^{N} Y_{ij}$$

ليكن لدينا النموذج التالي :

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$$

$$d'ou \quad , \quad \sum_{i=1}^{K} \alpha_i = 0\,, \sum_{i=1}^{K} \beta_i = 0\,,$$

و يمكن حساب مجموع المربعات على النحو التالي :

$$SST = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{j} (Y_{ij} - \overline{Y}_{**})^2$$

$$SSA = K\sum_{i=1}^{nk} (\overline{Y}_{i*} - \overline{Y}_{**})^2$$

$$SSB = J\sum_{i=1}^{nk} (\overline{Y}_{j*} - \overline{Y}_{**})^2$$

$$SSE = \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{J} (Y_{ij} - \overline{Y}_{i*} - \overline{Y}_{j*} + \overline{Y}_{**})^2$$

أو بعبارة أخرى

$$\Rightarrow SSE = SST - (SSA + SSB)$$

العامل A	العامل B			
	B1	B2	B3	B4
A_1	10	6	2	7
A_2	12	8	6	5
A_3	18	4	4	4
A_4	11	9	5	8

جدول تحليل التباين الثنائي (بدون تفاعل بين العاملين)

مصدر التباين	مجموع المربعات SS	درجة الحرية DF	متوسط مجموع المربعات MSS	الإحصائية F
(تأثير العامل) A	SSA	J-1	$\boldsymbol{MSA = \frac{SSA}{J-1}}$	$F_A = \frac{MSA}{MSE}$ $F_B = \frac{MSB}{MSE}$
تاثير العامل B	SSB	K-1	$MSB = \frac{SSB}{K-1}$	
البواقي	SSE	(J-1)(K-1)	$\boldsymbol{MSE = \frac{SSE}{(J-1)(K-1)}}$	
المجموع	SST	JK-1	$\boldsymbol{\frac{SST}{JK-1}}$	

جدول تحليل التباين الثنائي (بوجود تفاعل بين العاملين)

مصدر التباين	مجموع المربعات SS	درجة الحرية DF	متوسط مجموع المربعات MSS	الإحصائية F
(تأثير العامل) A	SSA	J-1	$\boldsymbol{MSA = \frac{SSA}{J-1}}$	$F_A = \frac{MSA}{MSE}$
تاثير العامل B	SSB	K-1	$MSB = \frac{SSB}{K-1}$	$F_B = \frac{MSB}{MSE}$
التفاعل AB	SSAB	(J-1)(K-1)	$\boldsymbol{MSAB = \frac{SSAB}{(J-1)(K-1)}}$	$F_{AB} = \frac{MSAB}{MSE}$
البواقي	SSE	N- K*J	$MSE = \frac{SSE}{N-KJ}$	
المجموع	SST	N-1	$\boldsymbol{\frac{SST}{N-1}}$	

Tables Statistiques usuelles

Table 1

Loi Binomiale

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

(k le nombre d'occurrences parmi n)

n = 10

	p	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
k	0	0,5987	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
	1	0,9139	0,7361	0,5443	0,3758	0,2440	0,1493	0,0860	0,0464	0,0233	0,0107
	2	0,9885	0,9298	0,8202	0,6778	0,5256	0,3828	0,2616	0,1673	0,0996	0,0547
	3	0,9990	0,9872	0,9500	0,8791	0,7759	0,6496	0,5138	0,3823	0,2660	0,1719
	4	0,9999	0,9984	0,9901	0,9672	0,9219	0,8497	0,7515	0,6331	0,5044	0,3770
	5	1,0000	0,9999	0,9986	0,9936	0,9803	0,9527	0,9051	0,8338	0,7384	0,6230
	6	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9965	0,9894	0,9740	0,9452	0,8980	0,8281
	7	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9952	0,9877	0,9726	0,9453
	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9983	0,9955	0,9893
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9990
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

n=20

	p	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
k	0	0,3585	0,1216	0,0388	0,0115	0,0032	0,0008	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,7358	0,3917	0,1756	0,0692	0,0243	0,0076	0,0021	0,0005	0,0001	0,0000
	2	0,9245	0,6769	0,4049	0,2061	0,0913	0,0355	0,0121	0,0036	0,0009	0,0002
	3	0,9841	0,8670	0,6477	0,4114	0,2252	0,1071	0,0444	0,0160	0,0049	0,0013
	4	0,9974	0,9568	0,8298	0,6296	0,4148	0,2375	0,1182	0,0510	0,0189	0,0059
	5	0,9997	0,9887	0,9327	0,8042	0,6172	0,4164	0,2454	0,1256	0,0553	0,0207
	6	1,0000	0,9976	0,9781	0,9133	0,7858	0,6080	0,4166	0,2500	0,1299	0,0577
	7	1,0000	0,9996	0,9941	0,9679	0,8982	0,7723	0,6010	0,4159	0,2520	0,1316
	8	1,0000	0,9999	0,9987	0,9900	0,9591	0,8867	0,7624	0,5956	0,4143	0,2517
	9	1,0000	1,0000	0,9998	0,9974	0,9861	0,9520	0,8782	0,7553	0,5914	0,4119
	10	1,0000	1,0000	1,0000	0,9994	0,9961	0,9829	0,9468	0,8725	0,7507	0,5881
	11	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9949	0,9804	0,9435	0,8692	0,7483
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9987	0,9940	0,9790	0,9420	0,8684
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9985	0,9935	0,9786	0,9423
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9984	0,9936	0,9793
	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9985	0,9941
	16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9987
	17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998
	18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Loi Binomiale (suite)

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

(k le nombre d'occurrences parmi n)

n = 25

		p									
		0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
k	0	0,2774	0,0718	0,0172	0,0038	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,6424	0,2712	0,0931	0,0274	0,0070	0,0016	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000
	2	0,8729	0,5371	0,2537	0,0982	0,0321	0,0090	0,0021	0,0004	0,0001	0,0000
	3	0,9659	0,7636	0,4711	0,2340	0,0962	0,0332	0,0097	0,0024	0,0005	0,0001
	4	0,9928	0,9020	0,6821	0,4207	0,2137	0,0905	0,0320	0,0095	0,0023	0,0005
	5	0,9988	0,9666	0,8385	0,6167	0,3783	0,1935	0,0826	0,0294	0,0086	0,0020
	6	0,9998	0,9905	0,9305	0,7800	0,5611	0,3407	0,1734	0,0736	0,0258	0,0073
	7	1,0000	0,9977	0,9745	0,8909	0,7265	0,5118	0,3061	0,1536	0,0639	0,0216
	8	1,0000	0,9995	0,9920	0,9532	0,8506	0,6769	0,4668	0,2735	0,1340	0,0539
	9	1,0000	0,9999	0,9979	0,9827	0,9287	0,8106	0,6303	0,4246	0,2424	0,1148
	10	1,0000	1,0000	0,9995	0,9944	0,9703	0,9022	0,7712	0,5858	0,3843	0,2122
	11	1,0000	1,0000	0,9999	0,9985	0,9893	0,9558	0,8746	0,7323	0,5426	0,3450
	12	1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9966	0,9825	0,9396	0,8462	0,6937	0,5000
	13	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9940	0,9745	0,9222	0,8173	0,6550
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9982	0,9907	0,9656	0,9040	0,7878
	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9971	0,9868	0,9560	0,8852
	16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9992	0,9957	0,9826	0,9461
	17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9988	0,9942	0,9784
	18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9984	0,9927
	19	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9980
	20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995
	21	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
	22	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Loi Binomiale (suite)

$$P(X = k) = C_n^k \, p^k \, (1-p)^{n-k}$$

(k le nombre d'occurrences parmi n)

n = 50

		p									
		0,05	**0,10**	**0,15**	**0,20**	**0,25**	**0,30**	**0,35**	**0,40**	**0,45**	**0,50**
k	**0**	0,0769	0,0052	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,2794	0,0338	0,0029	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,5405	0,1117	0,0142	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,7604	0,2503	0,0460	0,0057	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,8964	0,4312	0,1121	0,0185	0,0021	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,9622	0,6161	0,2194	0,0480	0,0070	0,0007	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	6	0,9882	0,7702	0,3613	0,1034	0,0194	0,0025	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
	7	0,9968	0,8779	0,5188	0,1904	0,0453	0,0073	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000
	8	0,9992	0,9421	0,6681	0,3073	0,0916	0,0183	0,0025	0,0002	0,0000	0,0000
	9	0,9998	0,9755	0,7911	0,4437	0,1637	0,0402	0,0067	0,0008	0,0001	0,0000
	10	1,0000	0,9906	0,8801	0,5836	0,2622	0,0789	0,0160	0,0022	0,0002	0,0000
	11	1,0000	0,9968	0,9372	0,7107	0,3816	0,1390	0,0342	0,0057	0,0006	0,0000
	12	1,0000	0,9990	0,9699	0,8139	0,5110	0,2229	0,0661	0,0133	0,0018	0,0002
	13	1,0000	0,9997	0,9868	0,8894	0,6370	0,3279	0,1163	0,0280	0,0045	0,0005
	14	1,0000	0,9999	0,9947	0,9393	0,7481	0,4468	0,1878	0,0540	0,0104	0,0013
	15	1,0000	1,0000	0,9981	0,9692	0,8369	0,5692	0,2801	0,0955	0,0220	0,0033
	16	1,0000	1,0000	0,9993	0,9856	0,9017	0,6839	0,3889	0,1561	0,0427	0,0077
	17	1,0000	1,0000	0,9998	0,9937	0,9449	0,7822	0,5060	0,2369	0,0765	0,0164
	18	1,0000	1,0000	0,9999	0,9975	0,9713	0,8594	0,6216	0,3356	0,1273	0,0325
	19	1,0000	1,0000	1,0000	0,9991	0,9861	0,9152	0,7264	0,4465	0,1974	0,0595
	20	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9937	0,9522	0,8139	0,5610	0,2862	0,1013
	21	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9974	0,9749	0,8813	0,6701	0,3900	0,1611
	22	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9990	0,9877	0,9290	0,7660	0,5019	0,2399
	23	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9944	0,9604	0,8438	0,6134	0,3359
	24	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9976	0,9793	0,9022	0,7160	0,4439
	25	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9991	0,9900	0,9427	0,8034	0,5561
	26	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9955	0,9686	0,8721	0,6641
	27	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9981	0,9840	0,9220	0,7601
	28	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9993	0,9924	0,9556	0,8389
	29	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9966	0,9765	0,8987
	30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9986	0,9884	0,9405
	31	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9947	0,9675
	32	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9978	0,9836
	33	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9923
	34	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9967
	35	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9987
	36	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995
	37	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998
	38	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Table 2

Loi de Poisson

$$P(X = k) = e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!}$$

(μ le nombre d'occurrences moyen)

	μ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
x	0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
	1	0,9953	0,9825	0,9631	0,9384	0,9098	0,8781	0,8442	0,8088	0,7725	0,7358
	2	0,9998	0,9989	0,9964	0,9921	0,9856	0,9769	0,9659	0,9526	0,9371	0,9197
	3	1,0000	0,9999	0,9997	0,9992	0,9982	0,9966	0,9942	0,9909	0,9865	0,9810
	4	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9996	0,9992	0,9986	0,9977	0,9963
	5	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9997	0,9994
	6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
	7	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

	μ	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	0	0,2231	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000
	1	0,5578	0,4060	0,1991	0,0916	0,0404	0,0174	0,0073	0,0030	0,0012	0,0005
	2	0,8088	0,6767	0,4232	0,2381	0,1247	0,0620	0,0296	0,0138	0,0062	0,0028
	3	0,9344	0,8571	0,6472	0,4335	0,2650	0,1512	0,0818	0,0424	0,0212	0,0103
	4	0,9814	0,9473	0,8153	0,6288	0,4405	0,2851	0,1730	0,0996	0,0550	0,0293
	5	0,9955	0,9834	0,9161	0,7851	0,6160	0,4457	0,3007	0,1912	0,1157	0,0671
	6	0,9991	0,9955	0,9665	0,8893	0,7622	0,6063	0,4497	0,3134	0,2068	0,1301
	7	0,9998	0,9989	0,9881	0,9489	0,8666	0,7440	0,5987	0,4530	0,3239	0,2202
	8	1,0000	0,9998	0,9962	0,9786	0,9319	0,8472	0,7291	0,5925	0,4557	0,3328
	9	1,0000	1,0000	0,9989	0,9919	0,9682	0,9161	0,8305	0,7166	0,5874	0,4579
	10	1,0000	1,0000	0,9997	0,9972	0,9863	0,9574	0,9015	0,8159	0,7060	0,5830
	11	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9945	0,9799	0,9467	0,8881	0,8030	0,6968
	12	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9980	0,9912	0,9730	0,9362	0,8758	0,7916
	13	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9964	0,9872	0,9658	0,9261	0,8645
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9986	0,9943	0,9827	0,9585	0,9165
	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9976	0,9918	0,9780	0,9513
	16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9990	0,9963	0,9889	0,9730
	17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9947	0,9857
	18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9976	0,9928
	19	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9989	0,9965
	20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984
	21	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9993
	22	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997
	23	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
	24	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Table 3

Loi Normale Centrée Réduite

Fonction de répartition F(z)=P(Z<z)

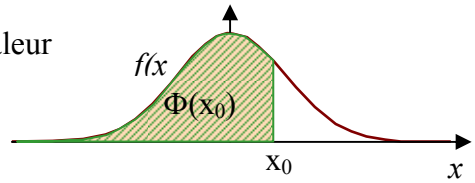
Exemple : P(Z<1.96)= 0.97500 se trouve en ligne 1.9 et colonne 0.06

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56750	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59484	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67365	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69498	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72241
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76731	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78231	0,78524
0,8	0,78815	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82382	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84135	0,84375	0,84614	0,84850	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90148
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92786	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93575	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95544	0,95637	0,95728	0,95819	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97933	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99897	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976

Fonction de répartition de la loi normale réduite

.Si x suit la loi normale, pour $x_0 \geq 0$, la table donne la valeur

$$\Phi(x_0) = P(x \leq x_0)$$

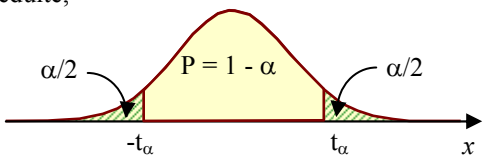


x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

Loi normale réduite. Table de l'écart réduit.

Si x est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite, la table donne, pour α choisi, la valeur t_α telle que

$$P(|x| \geq t_\alpha) = \alpha$$



x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	∞	2.576	2.326	2.170	2.054	1.96	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690
0.5	0.674	0.659	0.643	0.628	0.613	0.598	0.583	0.568	0.553	0.539
0.6	0.524	0.510	0.496	0.482	0.468	0.454	0.440	0.426	0.412	0.399
0.7	0.385	0.372	0.358	0.345	0.332	0.319	0.305	0.292	0.279	0.266
0.8	0.253	0.240	0.228	0.215	0.202	0.189	0.176	0.164	0.151	0.138
0.9	0.126	0.113	0.100	0.088	0.075	0.063	0.050	0.038	0.025	0.013

La fonction de répartition de la loi de Student

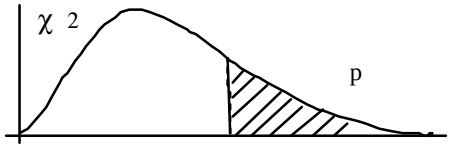
$n \mid P$	0,60	0,70	0,80	0,90	0,95	0,975	0,990	0,995	0,999	0,9995
1	0,325	0,727	1,376	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	318,3	636,6
2	0,289	0,617	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,33	31,60
3	0,277	0,584	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,22	12,94
4	0,271	0,569	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	0,267	0,559	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,859
6	0,265	0,553	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	0,263	0,549	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,405
8	0,262	0,546	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	0,261	0,543	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	0,260	0,542	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	0,260	0,540	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	0,259	0,539	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	0,259	0,538	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	0,258	0,537	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	0,258	0,536	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	0,258	0,535	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	0,257	0,534	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	0,257	0,534	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,611	3,922
19	0,257	0,533	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	0,257	0,533	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	0,257	0,532	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	0,256	0,532	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	0,256	0,532	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767
24	0,256	0,531	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	0,256	0,531	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	0,256	0,531	0,856	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	0,256	0,531	0,855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	0,256	0,530	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	0,256	0,530	0,854	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	0,256	0,530	0,854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
32	0,256	0,530	0,853	1,309	1,694	2,037	2,449	2,738	3,365	3,622
34	0,255	0,529	0,852	1,307	1,691	2,032	2,441	2,728	3,348	3,601
36	0,255	0,529	0,852	1,306	1,688	2,028	2,434	2,719	3,333	3,582
38	0,255	0,529	0,851	1,304	1,686	2,024	2,429	2,712	3,319	3,566
40	0,255	0,529	0,851	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
50	0,255	0,528	0,849	1,298	1,676	2,009	2,403	2,678	3,261	3,496
60	0,254	0,527	0,848	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
70	0,454	0,527	0,847	1,294	1,667	1,994	2,381	2,648	3,211	3,435
80	0,254	0,527	0,846	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,415
90	0,254	0,526	0,846	1,291	1,662	1,987	2,368	2,632	3,183	3,402
100	0,254	0,526	0,845	1,290	1,660	1,984	2,365	2,626	3,174	3,389
200	0,254	0,525	0,843	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131	3,339
500	0,253	0,525	0,842	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,106	3,310
∞	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Student à n degrés de liberté, notée $X \sim t_n$.
La table donne les valeurs $t_{n;P}$ telles que

$$F_X(t_{n;P}) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{P}(X \leq t_{n;P}) = P.$$

Par exemple: $t_{4;0,90} = 1,533$ ce qui implique que $\mathbb{P}(X \leq 1,533) = 0,90$ si $X \sim t_4$.

TABLE DU CHI-DEUX : $\chi^2(n)$



n p	0.90	0.80	0.70	0.50	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01
1	0,0158	0,0642	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635
2	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210
3	0,584	1,005	1,424	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,341
4	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277
5	1,610	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086
6	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812
7	2,833	3,822	4,671	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475
8	3,490	4,594	5,527	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090
9	4,168	5,380	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666
10	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209
11	5,578	6,989	8,148	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725
12	6,304	7,807	9,034	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217
13	7,042	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688
14	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141
15	8,547	10,307	11,721	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578
16	9,312	11,152	12,624	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000
17	10,085	12,002	13,531	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409
18	10,865	12,857	14,440	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805
19	11,651	13,716	15,352	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191
20	12,443	14,578	16,266	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566
21	13,240	15,445	17,182	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932
22	14,041	16,314	18,101	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289
23	14,848	17,187	19,021	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638
24	15,659	18,062	19,943	23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980
25	16,473	18,940	20,867	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314
26	17,292	19,820	21,792	25,336	29,246	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642
27	18,114	20,703	22,719	26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963
28	18,939	21,588	23,647	27,336	31,391	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278
29	19,768	22,475	24,577	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588
30	20,599	23,364	25,508	29,336	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892

Pour n > 30, on peut admettre que $\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2n-1} \approx N(0,1)$

Quantiles d'ordre 0.95 de la loi de Fisher

Degrés de liberté du numérateur sur la première ligne
Degrés de liberté du dénominateur sur la colonne de gauche

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40
3	10.13	9.552	9.277	9.117	9.013	8.941	8.887	8.845	8.812	8.786
4	7.709	6.944	6.591	6.388	6.256	6.163	6.094	6.041	5.999	5.964
5	6.608	5.786	5.409	5.192	5.050	4.950	4.876	4.818	4.772	4.735
6	5.987	5.143	4.757	4.534	4.387	4.284	4.207	4.147	4.099	4.060
7	5.591	4.737	4.347	4.120	3.972	3.866	3.787	3.726	3.677	3.637
8	5.318	4.459	4.066	3.838	3.687	3.581	3.500	3.438	3.388	3.347
9	5.117	4.256	3.863	3.633	3.482	3.374	3.293	3.230	3.179	3.137
10	4.965	4.103	3.708	3.478	3.326	3.217	3.135	3.072	3.020	2.978
11	4.844	3.982	3.587	3.357	3.204	3.095	3.012	2.948	2.896	2.854
12	4.747	3.885	3.490	3.259	3.106	2.996	2.913	2.849	2.796	2.753
13	4.667	3.806	3.411	3.179	3.025	2.915	2.832	2.767	2.714	2.671
14	4.600	3.739	3.344	3.112	2.958	2.848	2.764	2.699	2.646	2.602
15	4.543	3.682	3.287	3.056	2.901	2.790	2.707	2.641	2.588	2.544
16	4.494	3.634	3.239	3.007	2.852	2.741	2.657	2.591	2.538	2.494
17	4.451	3.592	3.197	2.965	2.810	2.699	2.614	2.548	2.494	2.450
18	4.414	3.555	3.160	2.928	2.773	2.661	2.577	2.510	2.456	2.412
19	4.381	3.522	3.127	2.895	2.740	2.628	2.544	2.477	2.423	2.378
20	4.351	3.493	3.098	2.866	2.711	2.599	2.514	2.447	2.393	2.348
21	4.325	3.467	3.072	2.840	2.685	2.573	2.488	2.420	2.366	2.321
22	4.301	3.443	3.049	2.817	2.661	2.549	2.464	2.397	2.342	2.297
23	4.279	3.422	3.028	2.796	2.640	2.528	2.442	2.375	2.320	2.275
24	4.260	3.403	3.009	2.776	2.621	2.508	2.423	2.355	2.300	2.255
25	4.242	3.385	2.991	2.759	2.603	2.490	2.405	2.337	2.282	2.236
26	4.225	3.369	2.975	2.743	2.587	2.474	2.388	2.321	2.265	2.220
27	4.210	3.354	2.960	2.728	2.572	2.459	2.373	2.305	2.250	2.204
28	4.196	3.340	2.947	2.714	2.558	2.445	2.359	2.291	2.236	2.190
29	4.183	3.328	2.934	2.701	2.545	2.432	2.346	2.278	2.223	2.177
30	4.171	3.316	2.922	2.690	2.534	2.421	2.334	2.266	2.211	2.165
40	4.085	3.232	2.839	2.606	2.449	2.336	2.249	2.180	2.124	2.077
50	4.034	3.183	2.790	2.557	2.400	2.286	2.199	2.130	2.073	2.026
60	4.001	3.150	2.758	2.525	2.368	2.254	2.167	2.097	2.040	1.993
70	3.978	3.128	2.736	2.503	2.346	2.231	2.143	2.074	2.017	1.969
80	3.960	3.111	2.719	2.486	2.329	2.214	2.126	2.056	1.999	1.951
90	3.947	3.098	2.706	2.473	2.316	2.201	2.113	2.043	1.986	1.938
100	3.936	3.087	2.696	2.463	2.305	2.191	2.103	2.032	1.975	1.927
150	3.904	3.056	2.665	2.432	2.274	2.160	2.071	2.001	1.943	1.894
200	3.888	3.041	2.650	2.417	2.259	2.144	2.056	1.985	1.927	1.878
400	3.865	3.018	2.627	2.394	2.237	2.121	2.032	1.962	1.903	1.854

Quantiles d'ordre 0.95 de la loi de Fisher

Degrés de liberté du numérateur sur la première ligne
Degrés de liberté du dénominateur sur la colonne de gauche

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	243.0	243.9	244.7	245.4	245.9	246.5	246.9	247.3	247.7	248.0
2	19.40	19.41	19.42	19.42	19.43	19.43	19.44	19.44	19.44	19.45
3	8.763	8.745	8.729	8.715	8.703	8.692	8.683	8.675	8.667	8.660
4	5.936	5.912	5.891	5.873	5.858	5.844	5.832	5.821	5.811	5.803
5	4.704	4.678	4.655	4.636	4.619	4.604	4.590	4.579	4.568	4.558
6	4.027	4.000	3.976	3.956	3.938	3.922	3.908	3.896	3.884	3.874
7	3.603	3.575	3.550	3.529	3.511	3.494	3.480	3.467	3.455	3.445
8	3.313	3.284	3.259	3.237	3.218	3.202	3.187	3.173	3.161	3.150
9	3.102	3.073	3.048	3.025	3.006	2.989	2.974	2.960	2.948	2.936
10	2.943	2.913	2.887	2.865	2.845	2.828	2.812	2.798	2.785	2.774
11	2.818	2.788	2.761	2.739	2.719	2.701	2.685	2.671	2.658	2.646
12	2.717	2.687	2.660	2.637	2.617	2.599	2.583	2.568	2.555	2.544
13	2.635	2.604	2.577	2.554	2.533	2.515	2.499	2.484	2.471	2.459
14	2.565	2.534	2.507	2.484	2.463	2.445	2.428	2.413	2.400	2.388
15	2.507	2.475	2.448	2.424	2.403	2.385	2.368	2.353	2.340	2.328
16	2.456	2.425	2.397	2.373	2.352	2.333	2.317	2.302	2.288	2.276
17	2.413	2.381	2.353	2.329	2.308	2.289	2.272	2.257	2.243	2.230
18	2.374	2.342	2.314	2.290	2.269	2.250	2.233	2.217	2.203	2.191
19	2.340	2.308	2.280	2.256	2.234	2.215	2.198	2.182	2.168	2.155
20	2.310	2.278	2.250	2.225	2.203	2.184	2.167	2.151	2.137	2.124
21	2.283	2.250	2.222	2.197	2.176	2.156	2.139	2.123	2.109	2.096
22	2.259	2.226	2.198	2.173	2.151	2.131	2.114	2.098	2.084	2.071
23	2.236	2.204	2.175	2.150	2.128	2.109	2.091	2.075	2.061	2.048
24	2.216	2.183	2.155	2.130	2.108	2.088	2.070	2.054	2.040	2.027
25	2.198	2.165	2.136	2.111	2.089	2.069	2.051	2.035	2.021	2.007
26	2.181	2.148	2.119	2.094	2.072	2.052	2.034	2.018	2.003	1.990
27	2.166	2.132	2.103	2.078	2.056	2.036	2.018	2.002	1.987	1.974
28	2.151	2.118	2.089	2.064	2.041	2.021	2.003	1.987	1.972	1.959
29	2.138	2.104	2.075	2.050	2.027	2.007	1.989	1.973	1.958	1.945
30	2.126	2.092	2.063	2.037	2.015	1.995	1.976	1.960	1.945	1.932
40	2.038	2.003	1.974	1.948	1.924	1.904	1.885	1.868	1.853	1.839
50	1.986	1.952	1.921	1.895	1.871	1.850	1.831	1.814	1.798	1.784
60	1.952	1.917	1.887	1.860	1.836	1.815	1.796	1.778	1.763	1.748
70	1.928	1.893	1.863	1.836	1.812	1.790	1.771	1.753	1.737	1.722
80	1.910	1.875	1.845	1.817	1.793	1.772	1.752	1.734	1.718	1.703
90	1.897	1.861	1.830	1.803	1.779	1.757	1.737	1.720	1.703	1.688
100	1.886	1.850	1.819	1.792	1.768	1.746	1.726	1.708	1.691	1.676
150	1.853	1.817	1.786	1.758	1.734	1.711	1.691	1.673	1.656	1.641
200	1.837	1.801	1.769	1.742	1.717	1.694	1.674	1.656	1.639	1.623
400	1.813	1.776	1.745	1.717	1.691	1.669	1.648	1.630	1.613	1.597

Quantiles d'ordre 0.95 de la loi de Fisher

Degrés de liberté du numérateur sur la première ligne
Degrés de liberté du dénominateur sur la colonne de gauche

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	248.3	248.6	248.8	249.1	249.3	249.5	249.6	249.8	250.0	250.1
2	19.45	19.45	19.45	19.45	19.46	19.46	19.46	19.46	19.46	19.46
3	8.654	8.648	8.643	8.639	8.634	8.630	8.626	8.623	8.620	8.617
4	5.795	5.787	5.781	5.774	5.769	5.763	5.759	5.754	5.750	5.746
5	4.549	4.541	4.534	4.527	4.521	4.515	4.510	4.505	4.500	4.496
6	3.865	3.856	3.849	3.841	3.835	3.829	3.823	3.818	3.813	3.808
7	3.435	3.426	3.418	3.410	3.404	3.397	3.391	3.386	3.381	3.376
8	3.140	3.131	3.123	3.115	3.108	3.102	3.095	3.090	3.084	3.079
9	2.926	2.917	2.908	2.900	2.893	2.886	2.880	2.874	2.869	2.864
10	2.764	2.754	2.745	2.737	2.730	2.723	2.716	2.710	2.705	2.700
11	2.636	2.626	2.617	2.609	2.601	2.594	2.588	2.582	2.576	2.570
12	2.533	2.523	2.514	2.505	2.498	2.491	2.484	2.478	2.472	2.466
13	2.448	2.438	2.429	2.420	2.412	2.405	2.398	2.392	2.386	2.380
14	2.377	2.367	2.357	2.349	2.341	2.333	2.326	2.320	2.314	2.308
15	2.316	2.306	2.297	2.288	2.280	2.272	2.265	2.259	2.253	2.247
16	2.264	2.254	2.244	2.235	2.227	2.220	2.212	2.206	2.200	2.194
17	2.219	2.208	2.199	2.190	2.181	2.174	2.167	2.160	2.154	2.148
18	2.179	2.168	2.159	2.150	2.141	2.134	2.126	2.119	2.113	2.107
19	2.144	2.133	2.123	2.114	2.106	2.098	2.090	2.084	2.077	2.071
20	2.112	2.102	2.092	2.082	2.074	2.066	2.059	2.052	2.045	2.039
21	2.084	2.073	2.063	2.054	2.045	2.037	2.030	2.023	2.016	2.010
22	2.059	2.048	2.038	2.028	2.020	2.012	2.004	1.997	1.990	1.984
23	2.036	2.025	2.014	2.005	1.996	1.988	1.981	1.973	1.967	1.961
24	2.015	2.003	1.993	1.984	1.975	1.967	1.959	1.952	1.945	1.939
25	1.995	1.984	1.974	1.964	1.955	1.947	1.939	1.932	1.926	1.919
26	1.978	1.966	1.956	1.946	1.938	1.929	1.921	1.914	1.907	1.901
27	1.961	1.950	1.940	1.930	1.921	1.913	1.905	1.898	1.891	1.884
28	1.946	1.935	1.924	1.915	1.906	1.897	1.889	1.882	1.875	1.869
29	1.932	1.921	1.910	1.901	1.891	1.883	1.875	1.868	1.861	1.854
30	1.919	1.908	1.897	1.887	1.878	1.870	1.862	1.854	1.847	1.841
40	1.826	1.814	1.803	1.793	1.783	1.775	1.766	1.759	1.751	1.744
50	1.771	1.759	1.748	1.737	1.727	1.718	1.710	1.702	1.694	1.687
60	1.735	1.722	1.711	1.700	1.690	1.681	1.672	1.664	1.656	1.649
70	1.709	1.696	1.685	1.674	1.664	1.654	1.646	1.637	1.629	1.622
80	1.689	1.677	1.665	1.654	1.644	1.634	1.626	1.617	1.609	1.602
90	1.675	1.662	1.650	1.639	1.629	1.619	1.610	1.601	1.593	1.586
100	1.663	1.650	1.638	1.627	1.616	1.607	1.598	1.589	1.581	1.573
150	1.627	1.614	1.602	1.590	1.580	1.570	1.560	1.552	1.543	1.535
200	1.609	1.596	1.583	1.572	1.561	1.551	1.542	1.533	1.524	1.516
400	1.582	1.569	1.556	1.545	1.534	1.523	1.514	1.505	1.496	1.488

Quantiles d'ordre 0.95 de la loi de Fisher

Degrés de liberté du numérateur sur la première ligne
Degrés de liberté du dénominateur sur la colonne de gauche

	40	50	60	70	80	90	100	150	200	400
1	251.1	251.8	252.2	252.5	252.7	252.9	253.0	253.5	253.7	253.8
2	19.47	19.48	19.48	19.48	19.48	19.48	19.49	19.49	19.49	19.49
3	8.594	8.581	8.572	8.566	8.561	8.557	8.554	8.545	8.540	8.537
4	5.717	5.699	5.688	5.679	5.673	5.668	5.664	5.652	5.646	5.643
5	4.464	4.444	4.431	4.422	4.415	4.409	4.405	4.392	4.385	4.381
6	3.774	3.754	3.740	3.730	3.722	3.716	3.712	3.698	3.690	3.686
7	3.340	3.319	3.304	3.294	3.286	3.280	3.275	3.260	3.252	3.248
8	3.043	3.020	3.005	2.994	2.986	2.980	2.975	2.959	2.951	2.947
9	2.826	2.803	2.787	2.776	2.768	2.761	2.756	2.739	2.731	2.726
10	2.661	2.637	2.621	2.610	2.601	2.594	2.588	2.572	2.563	2.558
11	2.531	2.507	2.490	2.478	2.469	2.462	2.457	2.439	2.431	2.426
12	2.426	2.401	2.384	2.372	2.363	2.356	2.350	2.332	2.323	2.318
13	2.339	2.314	2.297	2.284	2.275	2.267	2.261	2.243	2.234	2.229
14	2.266	2.241	2.223	2.210	2.201	2.193	2.187	2.169	2.159	2.154
15	2.204	2.178	2.160	2.147	2.137	2.130	2.123	2.105	2.095	2.089
16	2.151	2.124	2.106	2.093	2.083	2.075	2.068	2.049	2.039	2.034
17	2.104	2.077	2.058	2.045	2.035	2.027	2.020	2.001	1.991	1.985
18	2.063	2.035	2.017	2.003	1.993	1.985	1.978	1.958	1.948	1.942
19	2.026	1.999	1.980	1.966	1.955	1.947	1.940	1.920	1.910	1.903
20	1.994	1.966	1.946	1.932	1.922	1.913	1.907	1.886	1.875	1.869
21	1.965	1.936	1.916	1.902	1.891	1.883	1.876	1.855	1.845	1.838
22	1.938	1.909	1.889	1.875	1.864	1.856	1.849	1.827	1.817	1.810
23	1.914	1.885	1.865	1.850	1.839	1.830	1.823	1.802	1.791	1.784
24	1.892	1.863	1.842	1.828	1.816	1.808	1.800	1.779	1.768	1.761
25	1.872	1.842	1.822	1.807	1.796	1.787	1.779	1.757	1.746	1.739
26	1.853	1.823	1.803	1.788	1.776	1.767	1.760	1.738	1.726	1.719
27	1.836	1.806	1.785	1.770	1.758	1.749	1.742	1.719	1.708	1.701
28	1.820	1.790	1.769	1.754	1.742	1.733	1.725	1.702	1.691	1.683
29	1.806	1.775	1.754	1.738	1.726	1.717	1.710	1.686	1.675	1.667
30	1.792	1.761	1.740	1.724	1.712	1.703	1.695	1.672	1.660	1.652
40	1.693	1.660	1.637	1.621	1.608	1.597	1.589	1.564	1.551	1.542
50	1.634	1.599	1.576	1.558	1.544	1.534	1.525	1.498	1.484	1.475
60	1.594	1.559	1.534	1.516	1.502	1.491	1.481	1.453	1.438	1.428
70	1.566	1.530	1.505	1.486	1.471	1.459	1.450	1.420	1.404	1.394
80	1.545	1.508	1.482	1.463	1.448	1.436	1.426	1.395	1.379	1.368
90	1.528	1.491	1.465	1.445	1.429	1.417	1.407	1.375	1.358	1.348
100	1.515	1.477	1.450	1.430	1.415	1.402	1.392	1.359	1.342	1.331
150	1.475	1.436	1.407	1.386	1.369	1.356	1.345	1.309	1.290	1.278
200	1.455	1.415	1.386	1.364	1.346	1.332	1.321	1.283	1.263	1.249
400	1.425	1.383	1.352	1.329	1.311	1.296	1.283	1.242	1.219	1.204

[1] Oliver Knill (2009) , Probability Theory and Stochastic Processes with Applications, OVERSEAS PRESS (INDIA) PVT. LTD.

[2]Prasanna Sahoo**,** Probability And Mathematical Statistics

[3] LAOUDJ CHEKRAOUI, Cours de Statistique Mathématique, Master I Mathématiques Appliquées, Département des Mathématiques et Informatique Université Mohamed Sedik ben Yahia – Jijel

[4] Kandethody M.Ramachandran and Chris P.Tsokos (2009) , Mathematical Statistics with Applications

[5]Douglas C. Montgomery and George C. Runger (2002) , Applied Statistics and Probability for Engineers , Third Edition

[6]James Reilly (2015) , Applied Statistics, Published by Statistical Solutions, www.statisticalsolutions.ie

[7] *Robert V. Hogg and Allen T. Craig (1978),* **Introduction to Mathematical Statistics,** *Fourth Edition*

[8] Jun Shao (2005) , Mathematical Statistics : Exercises and Solutions, Department of Statistics , University of Wisconsin , USA

[9]Hervé Carrieu (2008) , PROBABILITÉ Exercices corrigés ,

[10]C. Reder (2002), PROBABILITES et STATISTIQUES, Cours et exercices, Bordeaux I

[11]Boukhari Fakhreddine, cours **Probabilités ,** Département de Mathématiques, Faculté des Sciences , Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen