



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Ahmed Zabana de Relizane

Faculté de Technologie

Département de Génie Mécanique

N° attribué par la bibliothèque

|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

THESE

Présentée pour l'obtention du Diplôme de Doctorat 3^{ème} Cycle (LMD)

Par :

M^r KHELIFA Lakhdar

Spécialité : Génie Mécanique

Option : Génie des Matériaux

Intitulé de la thèse

Contribution à l'étude de l'effet de la porosité sur le comportement mécanique des structures en matériaux fonctionnellement gradués.

Soutenue le 2025

Composition de jury :

DJILALI beida maamar	MCA	Président	U Relizane
SADOUN Mohamed	Pr	Directeur de thèse	U. de Mascara
ZEMRI Amine	MCA	Co- Directeur de thèse	U. de Relizane
HADJ mostefa adda	MCA	Examineur	U. de Relizane
MEFTAH Sidahmed	Pr	Examineur	UDL Sidi Bel Abbes
MEKSI Ali	MCA	Examineur	U. de Mascara
BOUSAHLA Abdelmoumen Anis	Pr	Invité	UDL Sidi Bel Abbes

Remerciements

Au terme de cette thèse, je tiens à exprimer ma plus sincère reconnaissance à toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail.

Je remercie très chaleureusement mon encadreur, **Professeur SADOUN Mohamed**, pour sa rigueur scientifique, ses conseils avisés et son accompagnement constant tout au long de ces années de recherche. Son encadrement attentif et sa confiance m'ont permis d'avancer sereinement dans ce travail.

Ma gratitude s'adresse également à mon co-encadreur, **Docteur ZEMRI Amine**, pour son soutien technique, sa disponibilité et la qualité de ses interventions qui ont été d'une aide précieuse dans l'avancement de cette thèse.

Je tiens à remercier l'ensemble des membres du **jury de cette thèse** pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail, leurs remarques pertinentes et enrichissantes. En particulier, je remercie **Professeur BOUSAHLA Abdelmoumen Anis** et **Professeur TOUNSI Abdelouahed**, de l'Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès, pour leur implication, leur bienveillance et leur soutien scientifique. Leur expertise et leurs retours m'ont été extrêmement utiles pour finaliser cette recherche dans les meilleures conditions.

Je n'oublie pas d'exprimer toute ma gratitude à **mes parents et à l'ensemble de ma famille** pour leur amour, leur patience et leur soutien moral indéfectible. Leur présence à mes côtés a été une force essentielle tout au long de ce parcours exigeant.

À toutes et à tous, **merci du fond du cœur** pour votre soutien et votre confiance.

ملخص

تقدم هذه الأطروحة مساهمة جديدة في تحليل تأثير المسامية على السلوك الميكانيكي للمنشآت المصنوعة من المواد متدرجة الخواص (FGM). تم تطوير نظرية جديدة لحزمة تيموشينكو من الدرجة الأولى (N-FSDBT) تعتمد على التكامل غير المحدد لدراسة السلوك الاهتزازي للحزم متدرجة الخواص من الأنواع الثلاثة: الأسّي (P-FG) ، السيجمويدي (S-FG) ، والأسّي (E-FG). تأخذ هذه النظرية في الاعتبار تشوه القص العرضي وتدخل تعديلات على قواعد المزج لتضمين الكسر الحجمي للمسامية، وهو معلم أساسي في المواد متدرجة الخواص حيث قد تظهر فجوات صغيرة أو عيوب هيكلية أثناء التصنيع.

تم نمذجة التغيرات في المسامية من خلال ثلاث توزيعات: منتظمة، غير منتظمة، ومعتمدة على الكثافة. تم حل المعادلات الحاكمة للحزم متدرجة الخواص باستخدام تقنية "نافييه" للحزم المدعومة ببساطة، بناءً على إطار نظرية الحزمة الكلاسيكية (CBT) والنظرية الجديدة N-FSDBT. تم إجراء تحليل بارامترى شامل لفحص تأثير أنواع الحزم متدرجة الخواص، توزيعات المسامية، معلمات الأس المادي، نسب النحافة، ومؤشر المسامية على السلوك الديناميكي للحزم غير المثالية. تقدم النتائج رؤى قيمة حول تأثير المسامية وتفتح آفاقاً لتحسين تصميم الهياكل القائمة على المواد متدرجة الخواص.

الكلمات المفتاحية: نظرية الحزمة من الدرجة الأولى، نظرية الحزمة الكلاسيكية، السلوك الديناميكي، المواد متدرجة الخواص، توزيعات المسامية.

Abstract

This thesis presents a novel contribution to the analysis of the effect of porosity on the mechanical behavior of structures made of functionally graded materials (FGM). A new first-order Timoshenko beam theory (N-FSDBT), based on the indefinite integral, is developed to investigate the vibrational behavior of power-law (P-FG), sigmoid (S-FG), and exponential (E-FG) functionally graded beams. The proposed formulation incorporates the transverse shear deformation and introduces modified mixture rules to account for the porosity volume fraction—a critical parameter in FGMs, where micro-voids and structural imperfections may arise during manufacturing.

Porosity variations are modeled through three distributions: uniform, non-uniform, and mass-density based. The governing equations of FG beams, derived within the frameworks of classical beam theory (CBT) and the new N-FSDBT, are solved using Navier's technique for simply supported beams. A comprehensive parametric analysis is conducted to examine the influence of FG beam types, porosity distributions, material exponent parameters, slenderness ratios, and porosity indices on the dynamic behavior of imperfect FG beams. The results provide valuable insights into the impact of porosity and offer pathways for optimizing FGM-based structural designs.

Keywords: New first-order Timoshenko beam theory, Classical beam theory, Dynamic behavior, Functionally graded materials, Porosity distributions.

Résumé

Cette thèse présente une contribution novatrice à l'analyse de l'effet de la porosité sur le comportement mécanique des structures en matériaux fonctionnellement gradués (FGM). Une nouvelle théorie de poutre de Timoshenko d'ordre un (N-FSDBT), fondée sur l'intégrale indéfinie, est développée pour étudier le comportement vibratoire des poutres FG de types puissance (P-FG), sigmoïde (S-FG) et exponentiel (E-FG). Cette formulation prend en compte la déformation transversale par cisaillement et introduit une modification des règles de mélange afin d'intégrer la fraction volumique de porosité, un paramètre critique dans les FGM, où des micro-vides et des imperfections structurelles peuvent se former lors de la fabrication.

Les variations de porosité sont modélisées à travers trois distributions : uniforme, non uniforme et basée sur la densité massique. Les équations gouvernantes des poutres FG, dérivées selon les cadres de la théorie classique des poutres (CBT) et de la nouvelle N-FSDBT, sont résolues en utilisant la technique de Navier pour des poutres simplement appuyées. Une analyse paramétrique approfondie est réalisée pour examiner l'influence des types de poutres FG, des distributions de porosité, du paramètre d'exposant des matériaux, du rapport d'élancement et de l'indice de porosité sur le comportement dynamique des poutres FG imparfaites. Les résultats obtenus permettent de mieux comprendre les effets de la porosité et offrent des perspectives pour l'optimisation des structures en FGM.

Mots-clés : Théorie de poutre de Timoshenko d'ordre un, Théorie classique des poutres, Comportement dynamique, Matériaux fonctionnellement gradués, Distribution de porosité.

Table des Matières

Titres	Page
Listes des Tableaux	I
Listes des Figures	II
Listes des Notations	III
Introduction Générale	1
Chapitre 1 : Les Matériaux Avancés	
1.1. Introduction	4
I.2. Matériaux composites	4
I.3. Eléments constitutants d'un matériau composite	5
I.4. Concept des matériaux fonctionnellement gradués	9
I.5. Historique de développement des matériaux fonctionnellement gradués	15
I.6. Classification conventionnelle des matériaux FGM	16
I.7. Application des matériaux fonctionnellement gradués FGM dans le domaine du génie civil	19
I.8. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM	20
I.9. Les relations contrainte-déformation	24
I.10. Conclusion	24
Chapitre 2 : Modélisation et Théories des Plaques	
II.1. Introduction	26
II.2. Généralités sur les théories d'élasticité	26
2.1. Théorie classique de Kirchhoff	28
2.2. Théories de déformation de cisaillement de premier et de haut ordre	33
2.3. Approche avancée avec modélisation de haute précision	35
II.3. Conclusion	38

Chapitre 3 : Modèle Analytique - Nouvelle Approche Mathématique

III.1. Introduction et contexte	39
III.2. Formulation du modèle : équations de mouvement et déformations	40
III.3. Inclusion des effets liés à la porosité et à la distribution de matériau	43
III.4. Expression mathématique du mouvement prenant en compte la variation de matériau	44
III.5. Résolution analytique et développement des solutions	45

Chapitre 4 : Résultats et Discussion

IV.1. Introduction	51
IV.2. Discussion des résultats numériques :	51
IV.3. Validation Numérique des Fréquences Propres des Poutres FG	52
IV.4. Analyse Comparée des Fréquences Propres des Poutres FG Parfaites et Imparfaites	54
IV.5. Impact de la Porosité sur les Fréquences Propres des Poutres FG	56
IV.6. Analyse des Effets de la Porosité sur les Fréquences Propres des Poutres FG	57
IV.7. Influence de la Porosité et de l'indice d'exposant du matériau sur les Fréquences Propres des Poutres E-FG	59
IV.8. Analyse en Fonction du Type de Distribution de Porosité	60
IV.9. Impact du Paramètre de Porosité sur la Réponse Vibratoire des Poutres P-FG et S-FG	61
IV.10. Effet du Rapport d'Élancement sur les Fréquences Propres des Poutres P-FG et S-FG	62
IV.11. Impact de la Distribution de Porosité sur les Fréquences Propres des Poutres E-FG, P-FG et S-FG	64
IV.12. Analyse des Fréquences Propres des Poutres E-FG, P-FG et S-FG	64
IV.13. Conclusion	65
Conclusion Générale	67
Références	71

Liste des Tableaux

Numéro du Tableau	Titre du Tableau	Page
Tableau I.1	Principales différences entre matrices TD et les TP	6
Tableau I.2	Fibres de verre principales	7
Tableau I.3	Propriétés physiques de différentes classes de fibres de verre	8
Tableau I.4	Les différences entre le composite et le FGM	12
Tableau II.1	Fonctions de cisaillement relatives aux différentes théories de plaque d'ordre élevé HSDT	24
Tableau IV.1	Les propriétés matérielles de la poutre FG	52
Tableau IV.2	Variation des fréquences propres (rad/s) de la poutre P-FG en fonction de l'indice d'exposant du matériau	53
Tableau IV.3	Les fréquences adimensionnelles de la poutre P-FG en fonction de l'indice et du rapport d'élancement	53
Tableau IV.4	Les trois premières fréquences adimensionnelles du faisceau P-FG en fonction de l'indice d'exposant du matériau variable	54
Tableau IV.5	Les trois premières fréquences des poutres P-FG parfaites/poreuses en fonction de l'indice d'exposant matérielle	55
Tableau IV.6	Les trois premières fréquences sans dimension de faisceaux P-, S-FG parfaits/poreux	57
Tableau IV.7	Trois premières fréquences sans dimension de la poutre E-FG parfaits/poreux	58
Tableau IV.8	Les trois premières fréquences de la poutre E-FG parfaits/poreux par rapport à la variation en fonction de l'indice d'exposant du matériau	59

Liste des Figures

Numéro de la Figure	Titre de la Figure	Page
Fig. I.1	Schéma de la distribution de la composition des matériaux dans les FGM	10
Fig. I.2	Matériau en deux phases : a) composite traditionnel ; b) FGM	10
Fig. I.3	Exemples des matériaux FGM dans la nature	11
Fig. I.4	Protection thermique des matériaux	12
Fig. I.5	Représentation de la hiérarchie des matériaux modernes	13
Fig. I.6	Exemples de quelques combinaisons pour un matériau FGM	14
Fig. I.7	Aperçu historique des étapes importantes de la recherche et du développement des FGM	16
Fig. I.8	Classification des structures FGM ; a) FGM à gradient continu ; b) FGM à gradient discontinu	17
Fig. I.9	Différents types d'un FGM : a) Gradient de composition ; b) Gradient de la dimension ; c), d) Gradient de l'orientation ; e), f) Gradient de fraction volumique	18
Fig. I.10	Classification des matériaux à gradient fonctionnel selon le type de gradients FGM	19
Fig. I.23	Géométrie d'une plaque en FGM	21
Fig. I.24	Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM	22
Fig. I.25	Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM	23
Fig. I.26	Variation du module de Young dans une plaque E-FGM	24
Fig. II.1	Exemple de plaque d'une géométrie quelconque	27
Fig. II.2	Illustration de la plaque de Love-Kirchhoff avant et après déformation	28
Fig. II.3	Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin	31
Fig. II.4	Illustration de la plaque d'ordre élevé	33
Fig.III.1	Géométrie de la poutre FG	41

Fig. IV.1	Variation des trois premières valeurs de la fréquence adimensionnelle des poreux P- et S-FG poutres pour différentes valeurs d'indice de porosité	61
Fig. IV.2	Variation de la fréquence adimensionnelle des poutres poreuses P- et S-FG pour différents types de porosité et rapports L/h	62
Fig. IV.3	Variation de la fréquence adimensionnelle des poutres E-FG poreuses en fonction de différents rapports portée/hauteur	64
Fig. IV.4	Variation de la fréquence adimensionnelle des plaques E-, P-, S-FG parfaite/imparfaite en fonction de l'indice d'exposant du matériau variable	65

Liste des notations

LISTE DES NOTATIONS

$\{ \}$	Vecteur colonne
$[]$	Matrice
V_f	Fraction volumique
$E(z)$	Module de Young en fonction de l'épaisseur
E_M	Module Young (Métal)
E_C	Module Young (céramique)
p	L'indice de la puissance (la loi de la puissance)
$\rho(z)$	La masse volumique en fonction de l'épaisseur
ρ_M	La masse volumique (Métal)
ρ_C	La masse volumique (Céramique)
h	L'épaisseur de la plaque
a	La largeur de la plaque
b	La longueur de la plaque
γ	L'indice de propriété matérielle
$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})$	Les composants des contraintes
$(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})$	Les composants des déformations
i, j	Nombre naturelle
Q_{ij}	Les coefficients de rigidité
ν	Coefficient de poisson
u	Déplacement suivant x
v	Déplacement suivant y
w	Déplacement suivant z
u_0, v_0, w_0	Les déplacements au niveau du plan moyen (z=0)
$f(z), \psi(z)$	La fonction de forme (fonction de cisaillement)
θ_x	Rotation de la normale en plan médian par rapport à l'axe y

θ_y	Rotation de la normale en plan médian par rapport à l'axe x
$(\)_{,x}$	Dérivée partielle par rapport à x
$(\)_{,y}$	Dérivée partielle par rapport à y
$f'(z)$	La première dérivée de la fonction de forme
δ	Variation
U	L'énergie de déformation
K	L'énergie cinétique de la plaque
U_f	L'énergie de déformation de la fondation
W	Travail des forces extérieures
f_e	La densité de la force de réaction de la fondation
k_0	Rigidité de Winkler (paramètre de fondation)
k_1	Rigidité de cisaillement (paramètre de fondation)
∇	Laplacien
$(\ddot{\ })$	La dérivée seconde par rapport au temps
N	Composant de l'effort normal
M	Composant de moment fléchissant
P	Effort d'ord élevé
R	Effort d'ord élevé
$\{A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, G_{ij}, F_{ij}\}$	Composant de rigidité
$(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, \dots)$	Composant de moment d'inertie
Σ	La somme
m	Nombre de mode selon x
n	Nombre de mode selon y
$A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, T_{xmn}, T_{ymn}$	Les paramètres arbitraires
ω	Fréquence naturelle
$[K]$	La matrice de rigidité

$[M]$	La matrice de masse
α	Nombre d'onde
β	Nombre d'onde
ε	Vecteur de déformation
k	Vecteur de courbure
θ	Vecteur de rotation normal

Abréviation :

FGM : matériaux à gradient fonctionnelle (Functionally graded materials).

E- FGM : matériau FGM avec distribution exponentielle des propriétés.

P- FGM : matériau FGM avec distribution polynomiale des propriétés.

S- FGM : matériau FGM avec distribution sigmoïde des propriétés.

CPT : théorie classique des poutres (classical beam theory).

FSDT : théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (first order shear deformation theory).

HSDT : théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé.

Introduction Générale

INTRODUCTION GENERALE

Dans un contexte industriel marqué par des exigences de plus en plus strictes concernant les imperfections et les concentrations de contraintes dans les matériaux composites laminés composés de matériaux différents, les chercheurs ont déployé des méthodes analytiques et investi des efforts significatifs pour résoudre ces problématiques d'ingénierie complexes. Les avancées technologiques et matérielles ont permis de développer des solutions optimisées. Parmi ces innovations, le concept des matériaux fonctionnellement gradués (FGM) a été introduit par des experts japonais en 1984 pour pallier les défauts récurrents des matériaux traditionnels [1-2]. Ces matériaux se distinguent par une distribution volumique stratégique de deux ou plusieurs composants, variant progressivement le long d'une ou plusieurs dimensions pour atteindre des propriétés fonctionnelles spécifiques. Cette conception innovante permet d'optimiser les propriétés des matériaux en les adaptant de manière continue et graduelle.

Les FGM se sont révélés particulièrement pertinents pour répondre aux défis posés par des environnements thermiques sévères, avec des applications dans des domaines variés tels que l'aérospatiale, la défense, le nucléaire et le biomédical [3-5]. Parmi les éléments structurels essentiels, les poutres occupent une place prépondérante, et une compréhension approfondie de leur comportement vibratoire est cruciale pour les ingénieurs avant toute conception. C'est pourquoi le comportement dynamique des poutres en FGM a suscité un intérêt croissant au fil des années. L'objectif principal de cette thèse est d'analyser les propriétés dynamiques de ces structures innovantes et d'optimiser leurs performances et leur fiabilité dans divers contextes d'application [6-8].

Les matériaux fonctionnellement gradués poreux (FG poreux) représentent une classe émergente de FGM qui attire particulièrement l'attention des chercheurs en raison de leurs caractéristiques uniques. En ajustant la géométrie, la densité des pores et la composition des matériaux lors de la fabrication, il devient possible d'améliorer considérablement les performances structurelles. Cette thèse se concentre sur l'évaluation de l'effet de la porosité sur le comportement mécanique des structures en FGM. En effet, plusieurs études récentes ont mis en évidence l'influence des imperfections géométriques, telles que les micro-vides et les défauts structurels, sur les réponses dynamiques des poutres en FGM. Par exemple, Chen et al. [9] ont

Introduction Générale

analysé l'influence des imperfections géométriques sur le flambement élastique et les charges critiques, tandis que Wattanasakulpong et Chaikittiratana [10] ont examiné les vibrations flexionnelles des poutres FG poreuses en incluant la fraction volumique de porosité.

L'état de l'art révèle que, bien que de nombreux travaux aient étudié les comportements des poutres FGM classiques (E-FG et P-FG), le développement des matériaux fonctionnels à gradient sigmoïdal (S-FG) reste limité. Ces derniers, introduits pour résoudre les problèmes de variation continue des contraintes observés dans les FGM traditionnels, se caractérisent par une transition régulière des propriétés matérielles aux deux extrémités de la structure [11]. Cependant, les recherches sur les poutres poreuses S-FG ou E-FG restent encore à approfondir, notamment pour comprendre pleinement leurs comportements mécaniques et vibratoires [12-16].

Dans cette thèse, une nouvelle théorie de poutre de Timoshenko d'ordre un, basée sur l'intégrale indéfinie, est développée pour analyser le comportement vibratoire des poutres FG, en tenant compte de la déformation transversale par cisaillement. Contrairement à la théorie classique des poutres d'Euler-Bernoulli, cette formulation permet de modéliser plus précisément les effets des charges externes, notamment dans le cas des poutres courtes. La recherche s'est concentrée sur la modification des règles de mélange pour inclure la fraction volumique de porosité. Différentes configurations de poutres FG poreuses sont examinées : des poutres P-FG avec porosité uniforme (type I), porosité non uniforme (type II), et porosité dépendante de la densité de masse (type III), ainsi que des poutres E-FG avec porosité (type IV).

Une comparaison entre les poutres FG parfaites et poreuses est réalisée. Une approche mathématique est utilisée pour simplifier les équations de mouvement des poutres FG dans le cadre de la réponse dynamique. Les équations résultantes sont résolues à l'aide de la technique de Navier, avec l'hypothèse que les extrémités des poutres FG sont simplement appuyées. Une étude paramétrique est également menée pour examiner l'influence des paramètres de porosité, de l'exposant du matériau, du rapport longueur-épaisseur et du schéma de porosité sur le comportement vibratoire des poutres FG [17-18].

Enfin, cette thèse se distingue par une approche intégrative visant à établir un lien entre les résultats théoriques et les applications pratiques. L'étude s'inscrit dans une perspective à la fois fondamentale et appliquée, en abordant des problématiques telles que la stabilité structurelle, la durabilité des matériaux et leur comportement sous des charges dynamiques variées. De plus, l'analyse comparative entre les différents modèles de distribution de porosité et les types de matériaux gradués permettra de fournir des recommandations pratiques pour la

Introduction Générale

conception et l'optimisation de ces structures dans des environnements contraignants. Les résultats attendus contribueront à l'amélioration des performances des matériaux avancés dans des secteurs clés, tout en ouvrant de nouvelles perspectives pour les recherches futures sur les matériaux fonctionnels innovants et durables.

Chapitre I
Les Matériaux Avancés

Les Matériaux Avancées

I.1. Introduction

Les matériaux, l'énergie et la science moderne forment les piliers de la technologie actuelle. La science des matériaux connaît un essor rapide grâce aux interactions interdisciplinaires, aux nouvelles théories et techniques expérimentales, ainsi qu'à la demande croissante d'applications pratiques [19].

Dans le secteur de la construction, deux tendances majeures émergent : l'automatisation des techniques de construction et le développement de matériaux à haute performance, comme les composites [20]. Ces derniers, en raison de leur rapport résistance/poids élevé et de leur excellente résistance à la fatigue, sont très prisés, notamment dans l'aérospatiale [21, 22].

Parmi les innovations récentes, les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) se distinguent par leur polyvalence et leurs performances élevées, particulièrement dans les engins spatiaux de nouvelle génération, mais aussi dans d'autres domaines de l'ingénierie [23].

I.2. Matériaux composites

Le terme « matériau composite (CM) » désigne un matériau solide et hétérogène, formé de plusieurs constituants distincts, dont l'association confère à l'ensemble des propriétés qu'aucun des composants considérés ne possède séparément [24]. Le CM nécessite l'association intime d'au moins deux composants : le renfort et la matrice, qui doivent être compatibles entre eux et se solidariser, ce qui introduit la notion d'un agent de liaison, **l'interface** [24].

Le renfort, assure la tenue mécanique et la matrice a pour rôle d'assurer la cohésion entre les éléments du renfort, de transférer les flux d'efforts entre les plis, et de garantir la tenue à l'environnement (corrosion, vieillissement humide) et la tenue en température [26].

Les matériaux composites sont classés selon le type de matrice en trois grandes familles, à savoir organique, minérale et métallique. Parmi les composites organiques, on trouve le carton (résines et fibres de cellulose), les pneus laminés (caoutchouc, acier, résines organiques, fibres de verre, carbone et bore) et les plastiques renforcés (résines et fibres courtes) [29].

Chapitre 1 : Les Matériaux Avancées

Parmi les composites minéraux, on trouve le béton (ciment, sable et additifs), les composites carbone-carbone (carbone et fibres de carbone) et les composites céramiques (céramiques et fibres céramiques) [30]. Et aussi, les derniers sont les composites métalliques (aluminium/fibres de bore et aluminium/fibres de carbone).

Ces matériaux composites affectent plusieurs domaines d'application, à savoir l'emballage, l'automobile, les structures légères, le génie civil, l'aviation, les sports, la biomédecine, les composants thermomécaniques et l'aérospatiale.

I.3. Eléments constituant d'un matériau composite

I.3.1. Matrice

La matrice peut être thermoplastique, thermodurcissable et/ou élastomère type. Le rôle de la matrice est de lier les fibres de renforcement, répartir les contraintes, fournir la résistance chimique de la structure et donner la forme désirée au produit final. Le choix de la matrice dépend de l'utilisation pour laquelle le matériau composite est destiné.

- **Matrices thermoplastiques**

Les matrices thermoplastiques sont en forme de chaînes linéaires qui peut être transformé à l'état fondu. Dans la plupart des processus de fabrication, les matrices thermoplastiques sont chauffées, puis formées par moulage, par injection, extrusion ou thermoformage, avant d'être refroidi de sorte que le produit fini conserve sa forme. Cette opération est réversible, ce qui permet de recycler ce matériau.

Aujourd'hui il existe de nombreux types de thermoplastiques avec un large éventail de propriétés. Ils peuvent être rendus aussi flexibles que le caoutchouc, aussi rigide que le métal et le béton, ou aussi transparents que le verre, pour une utilisation dans de nombreux produits. Ils ne s'oxydent pas, ont une résistance élevée à la corrosion et sont excellents thermiques et isolants électriques. En raison de leur légèreté, haute résistance mécanique et résistance aux effets de l'environnement, les thermoplastiques sont des matériaux idéals pour de nombreuses applications. Parmi les résines thermoplastiques, nous citerons : le polyéther sulfone (PES), le polyamide (polyhexaméthylène sébacique), le polycarbonate (PC), le polyéther-imide (PEI), le polyéther-cétone-cétone (PEKK) et Polyéther éther cétone (PEEK) [31].

Chapitre 1 : Les Matériaux Avancées

- **Matrices thermodurcissables**

Généralement liquides à température ambiante, ils se solidifient pendant leur exécution sous l'influence de la chaleur et d'un additif appelé durcisseur. Ils sont ainsi transformés par la cuisson qui est une modification chimique consistant en un lien très fort entre les molécules en trois dimensions. La transformation est irréversible et forme un produit infusible et insoluble.

En général, ils sont plus rigides que les matrices thermoplastiques, résistent mieux au fluage et conviennent au moulage de grandes pièces avec des fibres courtes, longues ou tissées [32]. Les matrices thermodurcissables les plus utilisées sont les polyesters, les phénoplastes, les résines époxy, les polyuréthanes et les polyimides.

Tableau I. 1 : Principales différences entre matrices TD et les TP

Matrices	TD	TP
Etat de base	Liquide visqueux à polymériser	Solide prêt à l'emploi
stockage	Réduit	Illimité
Mouillabilité des renforts	Aisée	Difficile
moulage	Chauffage continu	Chauffage + refroidissement
cycle	Long (polymérisation)	Court
Tenue au choc	Limitée	Assez bonne
Tenue thermique	Meilleure	Réduite (sauf nouveau TP)
Chutes et déchets	Perdus ou utilisés en charges	Recyclables
Conditions de travail	Emanations de solvants	Propreté

- **Élastomères**

Les polymères élastomères ont les mêmes qualités élastiques que le caoutchouc. Un élastomère au repos se compose de longues chaînes moléculaires repliées sur elles-mêmes. Sous l'action d'une contrainte, les molécules peuvent glisser les unes par rapport aux autres et se déformer. Pour que le matériau de base ait une bonne élasticité, il subit une vulcanisation. C'est un processus de durcissement qui crée un réseau tridimensionnel plus ou moins rigide sans enlever la flexibilité des chaînes moléculaires. Le soufre, le carbone et divers agents chimiques sont introduits dans l'élastomère pendant la vulcanisation [33].

Chapitre 1 : Les Matériaux Avancées

Différentes formulations permettent la production de caoutchoucs synthétiques pour des utilisations spécifiques. Les élastomères sont utilisés dans la fabrication de coussins, de certains isolants, de semelles de chaussures ou de pneus. Le styrène butadiène est un matériau thermoplastique obtenu par polymérisation du styrène en présence de butadiène [34].

I.3.2. Renforcement

Le renfort constitue le renfort ou le squelette qui fournit la résistance mécanique (résistance à la traction et la rigidité). Il est, par définition, de nature filamenteuse (fibre organique ou inorganique) allant de la particule allongée à la fibre continue. Le plus utilisé est la fibre de verre E qui représente plus de 95% des applications. En outre, la fibre d'aramide (Kevlar) est également d'un grand intérêt [35].

En général, dans une structure composite (anisotrope), les fibres fonctionnent bien en traction, mais en comparaison avec les structures métalliques (isotropes), la performance en compression est moins bonne et la résistance au cisaillement reste faible. Parmi les fibres les plus employées, on peut citer :

- **Fibres de verre**

Actuellement, les fibres de verre représentent la majorité des renforts les plus utilisés pour le renforcement de matériaux composites avancés dans divers domaines d'application industrielle. Elles constituent le renforcement essentiel des matériaux composites à diffusion large et à haute performance (Tableau.I.2). La forme la plus ancienne et la plus populaire des fibres de verre est le verre E ou le verre de qualité électrique. Les autres types de fibres de verre comprennent le verre A ou le verre alcalin, Verre C ou verre résistant aux produits chimiques, le verre R à haute résistance, le verre D et le verre S [23].

Tableau I. 2: Fibres de verre principales [31].

Principaux constituants en %	types de verres		
	E	D	R
Oxyde de silice (SiO_2)	53-54	70	60
Oxyde d'alumine (Al_2O_3)	14-15	-	25
Oxyde de magnésie (MgO)	20-24	0.5	9
Oxyde de bore (B_2O_3)	6-9	22	6

Chapitre 1 : Les Matériaux Avancées

Tableau I. 3: Propriétés physiques de différentes classes de fibres de verre [23].

Classes de fibres de verre	Propriétés physiques
verre A	Durabilité, résistance et résistivité électrique élevées
verre C	Haute résistance à la corrosion
verre D	Faible constante diélectrique
verre E	Résistance et résistivité électrique plus élevées
verre AR	Résistance aux alcalis
verre R	Résistance supérieure et résistance à la corrosion acide
verre S	Résistance à la traction plus élevée

- **Fibre de carbone à haute résistance (CFHS)**

Les fibres de carbone sont largement utilisées dans l'élaboration des matériaux composites thermodurcissables. Elles ont été employées dans plusieurs domaines industriels tels que la construction spatiale, l'aéronautique, l'aviation, l'automobile [36]. La fibre de carbone connue comme la meilleure fibre, a été préparée à partir de la carbonisation du polyacrylonitrile (PAN). Le polyacrylonitrile (PAN) est le précurseur le plus utilisé pour produire les fibres de carbone, qui offre une résistance à la traction élevée et un module élastique plus élevé.

Les fibres de carbone offrent des caractéristiques de résistance mécanique et thermique exceptionnelles, une résistance à la traction et à la compression extrêmement élevée et une rigidité supérieure. Elles offrent le module et la force spécifiques les plus élevés. Leur rigidité et leur module d'élasticité peuvent aller du verre à trois fois celle de l'acier.

De plus, elles ont la capacité de conserver leur résistance à la traction même à des températures élevées et sont indépendantes de l'humidité. Les fibres de carbone ne se cassent pas nécessairement sous contrainte contrairement aux fibres de verre et autres polymères organiques. Elles offrent également des conductivités électriques et thermiques élevées avec un coefficient de dilatation thermique relativement faible [37].

- **Fibres aramides**

Actuellement, les matériaux composites thermodurcissables avancés renforcés de fibres d'aramide ont une performance économique significative dans le domaine industriel. Ces

Chapitre 1 : Les Matériaux Avancées

matériaux avancés ont une excellente ténacité, excellente résistance aux chocs, faible densité et longue durée de vie [37]. Le kevlar est la fibre aramide la plus connue.

Les fibres de Kevlar sont souvent utilisées pour des applications composites à haute performance où la légèreté, la résistance et la rigidité élevées, la résistance aux dommages et la résistance à la fatigue sont de la plus haute importance.

Les fibres aramides sont souvent utilisées dans les applications qui exigent une grande résistance et un faible poids avec une résistance aux chocs élevée. Certaines des applications les plus fréquentes des matériaux aramides comprennent les gilets pare-balles, les véhicules de refroidissement, les coques de navires et le renforcement structurel des structures civiles. Néanmoins, ces fibres présentent souvent une faible force de compression. En outre, le module de compression de l'aramide est du même ordre que son module de traction [38].

- **Fibre de polybenzimidazole**

Le polybenzimidazole (PBI) est une fibre très efficace et possède d'excellentes propriétés nouvelles et avancées dans les matériaux composites utilisés dans les secteurs de l'aérospatiale, de l'automobile et de l'énergie éolienne [39].

I.4. Concept des matériaux fonctionnellement gradués

Les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) appartiennent à une classe de matériaux avancés dont les propriétés évoluent progressivement selon une dimension donnée [40].

Contrairement aux matériaux composites traditionnels (CM), constitués par l'association de plusieurs matériaux distincts aux propriétés physiques et chimiques spécifiques, les FGM ne présentent pas d'interface abrupte. Les composites classiques souffrent souvent d'une faible liaison interfaciale, provoquant des changements brusques de propriétés et entraînant des défaillances sous des conditions extrêmes, telles que des températures élevées ou des charges d'impact importantes. Ce phénomène, connu sous le nom de délamination, résulte de la désintégration de la matrice de renforcement [41].

Pour surmonter cette limitation, des chercheurs japonais ont mis au point les FGM dans les années 1980. Ces matériaux, illustrés à la fig. I.1, se distinguent par leur variation continue de propriétés dans une direction spécifique, assurant une meilleure performance et durabilité.

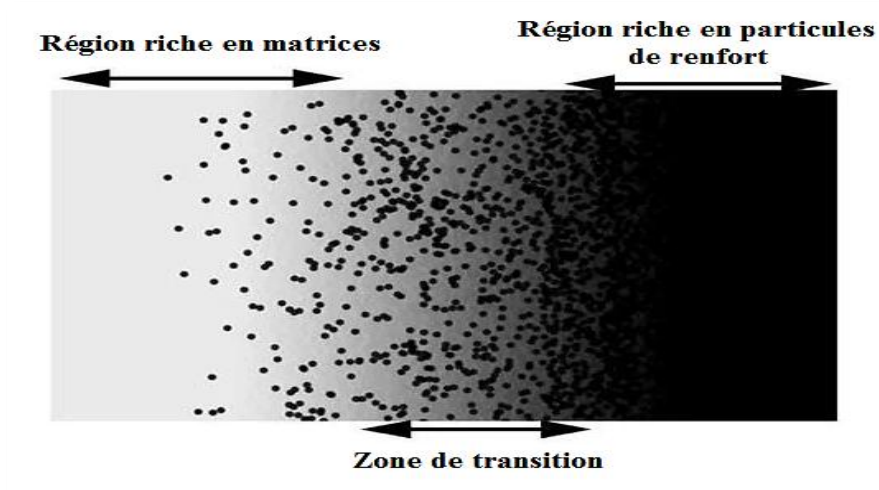


Fig. I.1 Schéma de la distribution de la composition des matériaux dans les FGM.

Les Matériaux à gradient fonctionnel peuvent comprendre plus de deux phases constitutives (comme CM), L'interface pointue et le changement progressif d'un composite traditionnel et d'un FGM sont illustrés respectivement sur les figures I.2.a et I.2.b.

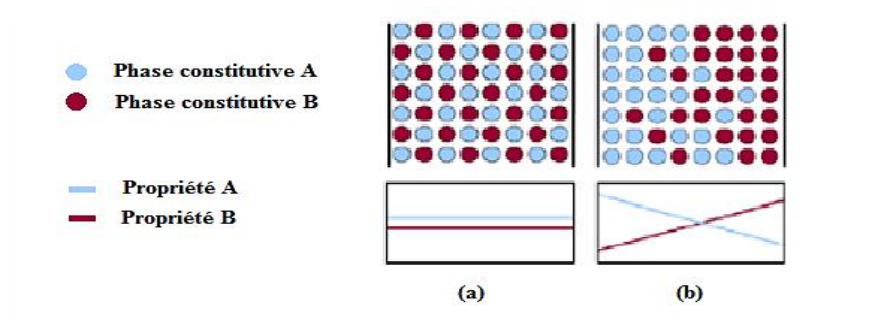


Fig. I.1 Matériau en deux phases [42] : a) composite traditionnel : composition et propriétés constantes ; b) FGM : changement graduel de la composition et de la microstructure donne un gradient dans les propriétés

Bien que les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) aient été développés par des ingénieurs et des scientifiques, ils existent également dans la nature. Parmi les exemples naturels les plus remarquables, on trouve les os, les dents, la peau, ainsi que les bio-tissus des animaux et des arbres. Ces structures présentent une gradation progressive des propriétés, telles que la dureté et la ductilité. La fig. I.3 illustre quelques exemples de FGM naturels.

La nature a conçu ces matériaux pour répondre efficacement aux exigences de service. Cette approche biomimétique inspire les ingénieurs à résoudre des problèmes d'ingénierie, de la

même manière que le réseau neuronal artificiel s'inspire du fonctionnement du cerveau humain [43].

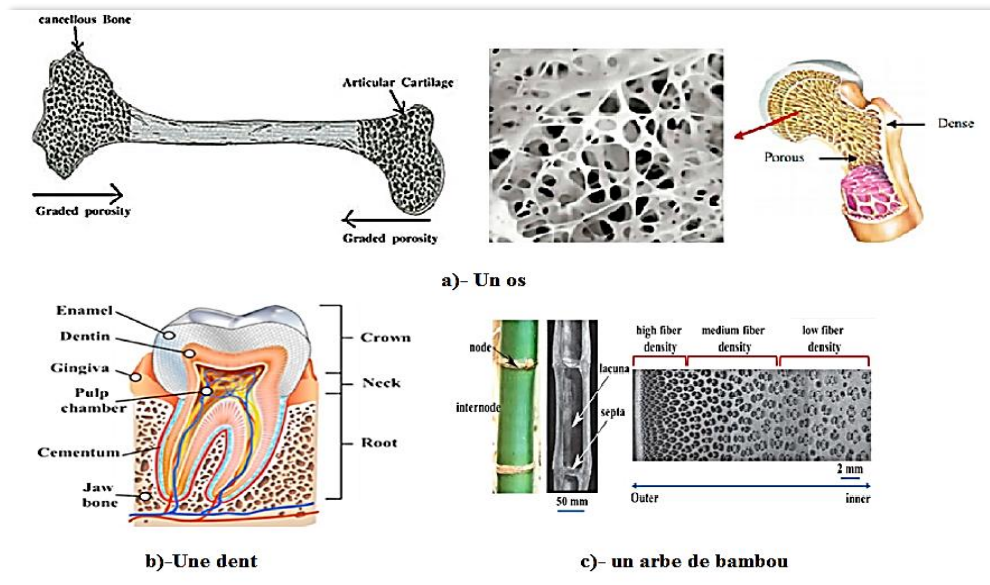


Fig. I. 3. Exemples des matériaux FGM dans la nature

Les matériaux fonctionnellement gradués présentent une variation continue des propriétés des matériaux qui résultent de la microstructure non homogène.

Les FGM présentent une microstructure, une composition chimique et un ordre atomique qui varient en fonction de la position, entraînant une variation continue des propriétés du matériau, telles que les caractéristiques mécaniques, électriques et thermiques. Ainsi, les propriétés globales des FGM sont uniques et distinctes de celles des matériaux individuels qui les composent. En raison de ces caractéristiques exceptionnelles, les FGM suscitent un grand intérêt dans divers domaines, tels que l'aérospatiale, les biomatériaux et l'ingénierie, depuis plusieurs décennies.

La gradation des propriétés dans un FGM permet de réduire les contraintes thermiques, résiduelles et les concentrations de contraintes souvent observées dans les composites traditionnels. La fig. I.4 montre la protection thermique des matériaux FGM et non-FGM.

Les FGM suppriment les interfaces abruptes présentes dans les composites, qui sont responsables des défaillances, et les remplacent par une interface graduée, permettant une transition plus douce entre les matériaux [41].

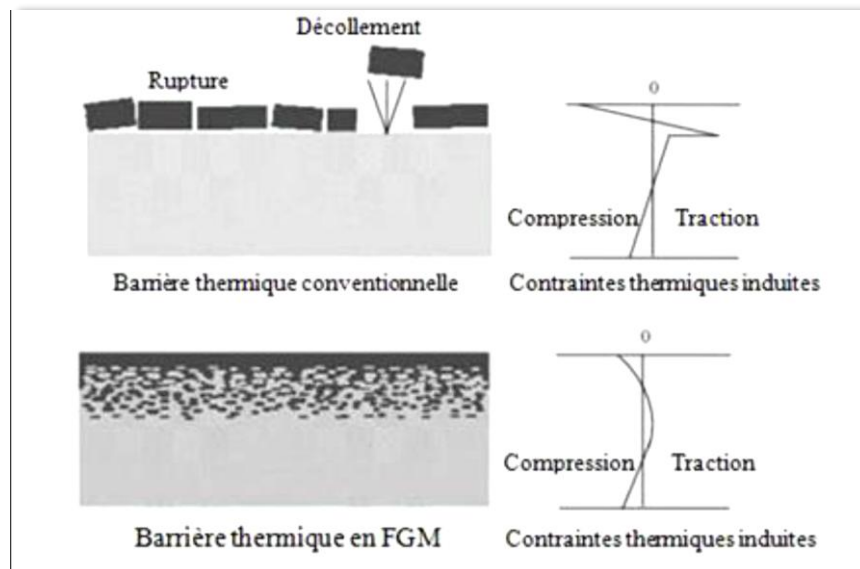


Fig. I. 2. Protection thermique des matériaux [44].

L'une des caractéristiques uniques du FGM est la possibilité de personnaliser un matériau pour une application spécifique. Les différences entre les matériaux composites et les FGM sont présentées dans le tableau I.4.

Tableau I. 4: Les différences entre le composite et le FGM [40].

Composite traditionnel	FGM
-Interface abrupte entre les matériaux qui se combinent, entraînant un changement brutal des propriétés	-Transition en douceur entre les matériaux de combinaison
-La délamination se produit dans des conditions de travail extrêmes	-Très bonne liaison interfaciale entre les matériaux, donc la délimitation est évitée
-La charge matricielle, la faiblesse et la force des matériaux de combinaison sont également réparties	-Les propriétés des matériaux de combinaison sont spatialement distribuées
-Toute la pièce est un peu thermoconductrice et la matrice a perdu un peu de dureté.	-Un côté est largement dur et l'autre côté est largement conductrice de chaleur

L'exploitation scientifique des matériaux de base, disponibles sous forme de composés inorganiques et organiques, a permis le développement de polymères avancés, d'alliages d'ingénierie, de céramiques structurales, et bien d'autres. La structure du développement des matériaux modernes est présentée à la Fig. I.5. Ces matériaux offrent de nombreux avantages, les rendant adaptés à diverses applications potentielles, comme une réduction de la résistance dans le plan et à travers l'épaisseur, une amélioration des propriétés thermiques, ainsi qu'une grande ténacité [45].

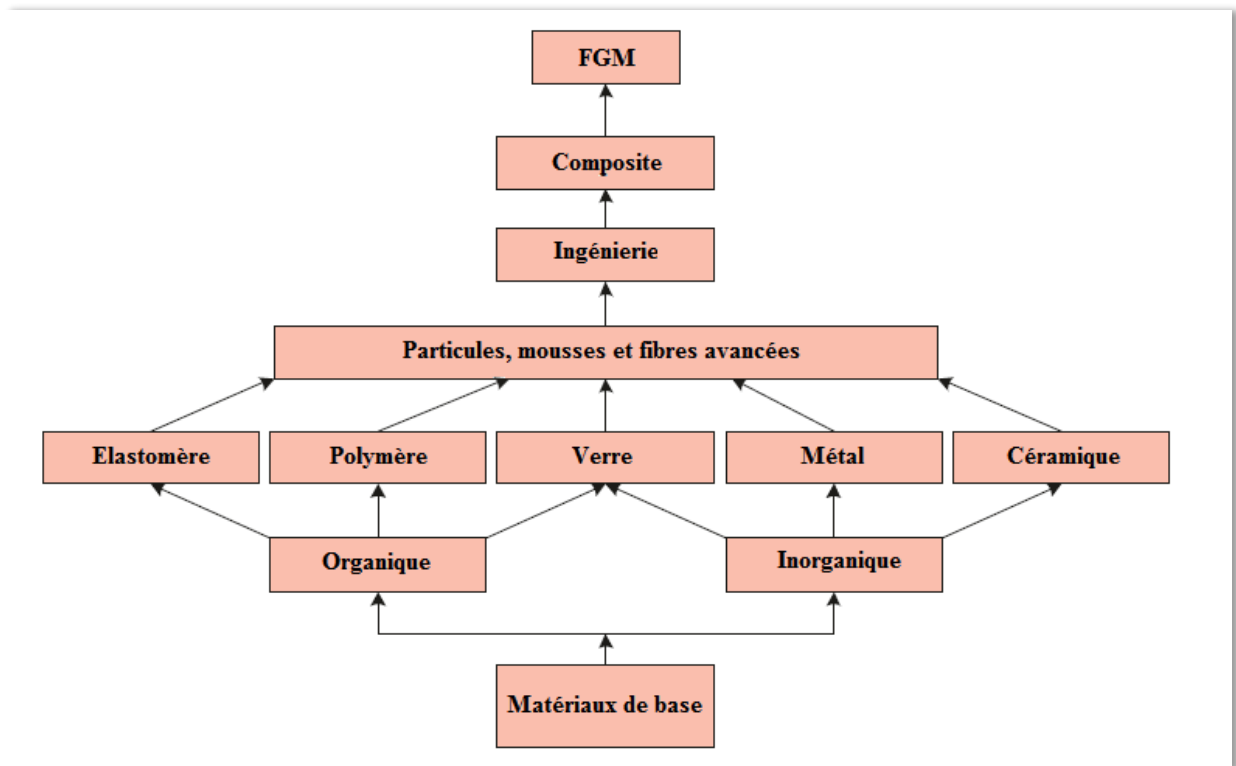


Fig. I. 3. Représentation de la hiérarchie des matériaux modernes [45].

La gradation des propriétés des matériaux FGM permet aux concepteurs d'adapter les réponses des matériaux afin de répondre précisément aux critères de conception. Par exemple, la navette spatiale utilise des tuiles en céramique pour se protéger thermiquement lors de la rentrée dans l'atmosphère. Cependant, ces tuiles sont sujettes à des fissures à l'interface tuile/superstructure en raison des différences de coefficients de dilatation thermique. Un FGM composé de céramique et de métal pourrait offrir une protection thermique et une capacité de charge dans un seul matériau, résolvant ainsi le problème des tuiles fissurées rencontrées sur la navette spatiale [99].

Les FGM conçus par les ingénieurs sont généralement classés selon la combinaison de matériaux constitutifs, tels que céramique/métal, céramique/céramique, métal/métal et céramique/polymère, la combinaison céramique/métal étant la plus courante (Fig. I.6). Les FGM céramique/métal, contenant des alliages métalliques (matrice) et des phases secondaires en céramique, sont gradués d'une phase céramique à une phase métallique.

Ces FGM céramique/métal ont gagné une grande importance grâce à leur capacité à tirer parti de propriétés mécaniques améliorées, telles que la dureté, la résistance, l'usinabilité, la ténacité, et à offrir de meilleures résistances thermiques, à l'usure et à la corrosion [46]. Ils

permettent également de réduire les contraintes thermiques et d'afficher une meilleure adhérence entre les phases, améliorant ainsi la résistance à la rupture et la ténacité tout au long du volume gradué [47].

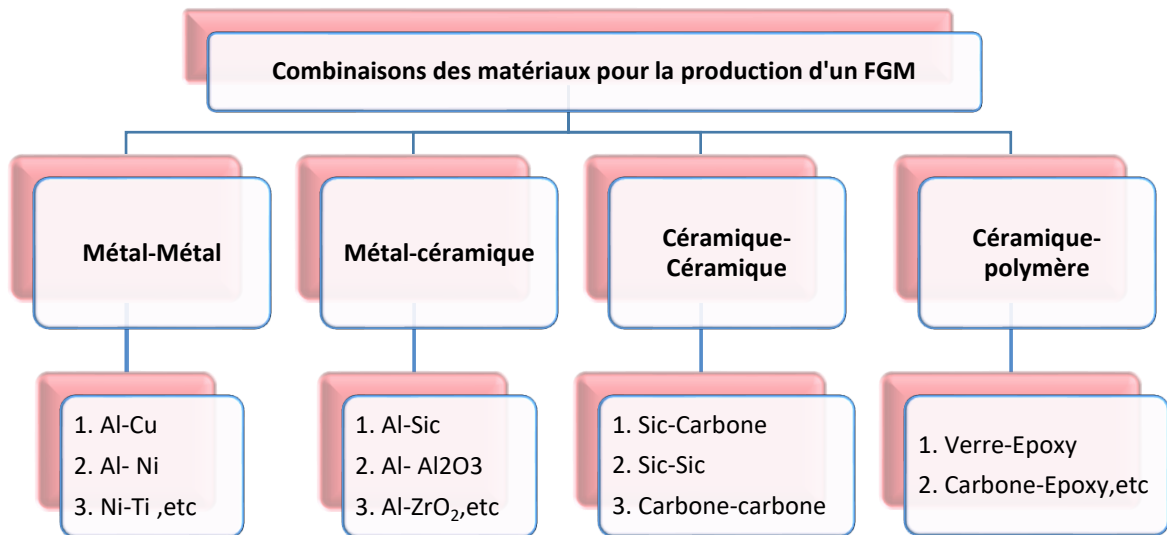


Fig. I. 4. Exemples de quelques combinaisons pour un matériau FGM [48].

En fonction de la géométrie et de la section transversale du matériau à produire, les FGM peuvent être classés en deux groupes principaux, les FGM minces (dit FGM thin) et les FGM massifs ou en vrac (dits FGM bulk).

a. FGM mince

Les FGM minces, généralement utilisés comme revêtements de surface à section transversale réduite, sont fabriqués selon des méthodes de dépôt adaptées aux exigences de service. Les principales techniques incluent le dépôt chimique et physique en phase vapeur (CVD/PVD), la pulvérisation plasma, le dépôt de couches atomiques (ALD), l'électrodéposition et la synthèse autopropagée à haute température (SHS), entre autres [49]. Toutefois, ces FGM restent inappropriés pour des applications sous conditions de service extrêmes.

b. FGMmassifs :

Les FGM en vrac, constitués de volumes massifs, nécessitent des procédés plus exigeants en main-d'œuvre. Ils sont principalement produits par des techniques telles que la métallurgie des poudres, la coulée par centrifugation et le moulage libre solide, entre autres.

I.5. Historique de développement des matériaux fonctionnellement gradués

L'idée originale de la variation de la composition et de la structure dans la microstructure des matériaux a été introduite pour la première fois en 1972, dans le cadre des composites et des matériaux polymères. Les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) modernes ont émergé de ces travaux initiaux par Bever et Duwez [50], qui ont étudié les propriétés globales des matériaux et réévalué les applications potentielles des composites à gradient. En 1972, Bever a exploré divers composites à gradient et les applications possibles, tandis que Shen a rapporté que la gradation des matériaux polymères pouvait être induite par la variation chimique des monomères et des propriétés moléculaires et supramoléculaires. Toutefois, cette étude n'a pas abordé la conception, la fabrication et l'évaluation du gradient de structure [51].

Le développement des FGM modernes a commencé dans les années 1980 au Japon, motivé par la recherche d'un matériau adapté à une barrière pour un avion spatial hypersonique. Cette barrière devait résister à des températures extrêmes et une épaisseur inférieure à 10 mm. Ce défi a conduit à l'adoption du concept FGM. En 1985, dans le cadre du développement de revêtements et de joints en céramique pour moteurs de fusées réutilisables, l'application de contrôle continu de la texture a été proposée pour réduire les contraintes thermiques et améliorer la force d'adhérence. Ces matériaux gradués ont été désignés sous le nom de matériaux à gradient fonctionnel en 1986 [52].

En 1987, un projet de recherche national a été lancé au Japon pour développer des matériaux à gradient fonctionnel pour les barrières thermiques d'un avion spatial [52]. Les FGM ont permis de supporter une température de surface de 17 000 °C et un gradient thermique de 10 000 °C sur seulement 10 mm d'épaisseur. Les résultats de ce projet ont été largement diffusés par des articles et des conférences internationales, attirant un grand intérêt pour les FGM et leurs applications potentielles dans divers domaines.

De 1987 à 1991, la technologie FGM a gagné en popularité, avec le développement de plusieurs techniques de production, telles que le dépôt chimique en phase vapeur (CVD), la

pulvérisation plasma, la métallurgie des poudres, la synthèse auto-propagée à haute température (SHS) et le galvanofonnage. En 1990, le premier symposium international sur les FGM a eu lieu à Sendai, attirant environ 400 participants, et a conduit à la création d'un comité consultatif international [53].

Depuis 1991, ces techniques ont été réévaluées et modifiées, avec le développement de nouvelles méthodes. Miyamoto et al. (1999) ont classé ces méthodes de fabrication en quatre catégories : les processus de couche, de fusion, de masse et de préforme. Ces procédés ont permis de résoudre le problème traditionnel de délamination des composites, causé par des interfaces abruptes, qui sont souvent responsables des défaillances dans les matériaux composites.

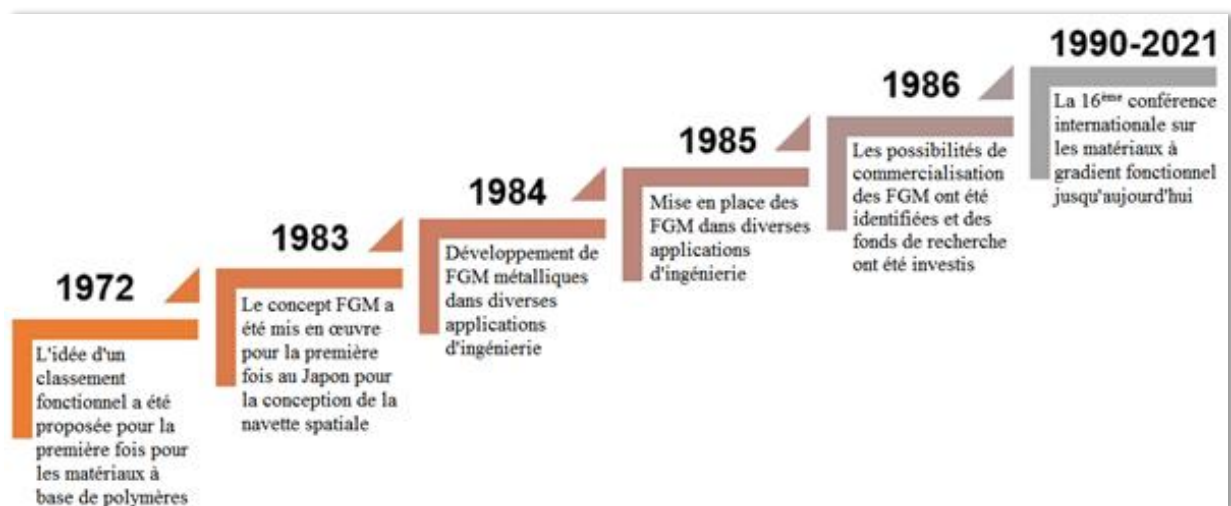


Fig. I. 5. Aperçu historique des étapes importantes de la recherche et du développement des FGM [47].

I.6. Classification conventionnelle des matériaux FGM

I.6.1. Classification basée sur la structure des FGM

En général, les structures FGM sont classées en deux catégories générales (Fig.I.8). La première catégorie est constituée de structures dites à gradient continu, dans lesquelles le facteur de gradient traverse en continu le volume du matériau et la seconde catégorie est appelée gradients discontinus, dans lesquelles le facteur de gradient change progressivement [54].

- a. Dans le premier groupe, aucune zone claire ou ligne de séparation n'a pu être observée à l'intérieur du matériau pour distinguer les propriétés de chaque zone.
- b. Les composants du matériau évoluent selon une gradation discontinue par étape dans un autre groupe, qui est identifié comme FGM stratifié ou séparé. Dans cette catégorie, il existe une interface similaire entre les couches qui est visible et distingue chaque couche de la suivante. Le choix du type de structure de gradient dépend fortement des conditions de travail du matériau.

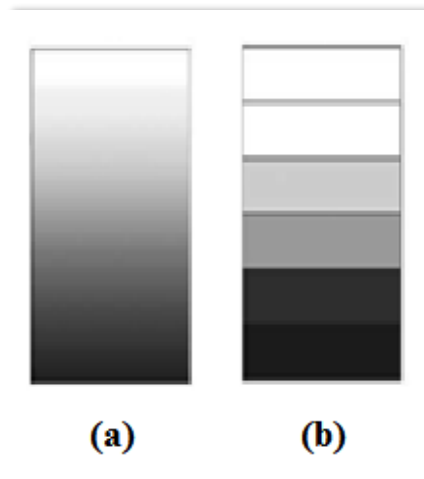


Fig. I. 6. Classification des structures FGM ;(a) FGM à gradient continu ; (b) FGM à gradient discontinu.

Selon la nature du gradient, les FGM peuvent être regroupés selon les types suivants :

- 1) Type de gradient de fraction
- 2) Type de gradient de taille.
- 3) Type de gradient de forme.
- 4) Type de gradient d'orientation.

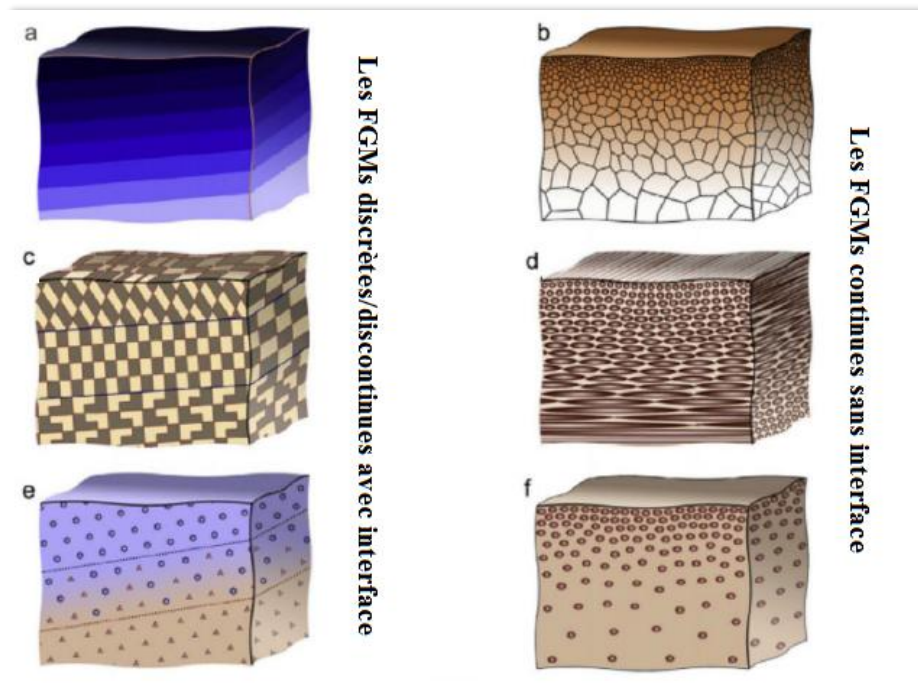


Fig. I. 7. Différents types d'un FGM. a) Gradient de composition. b) gradient de la dimension. c), d) Gradient de l'orientation. e), f) Gradient de fraction volumique [55].

I.6.2. Classification basée sur le type de gradient FGM

Afin de classer les FGM selon leurs types de gradients, trois catégories principales sont identifiées : le gradient de composition chimique, le gradient de microstructure et le gradient de porosité (Fig. I.10) [56].

Dans le cas des FGM à gradient de composition chimique, la composition varie progressivement selon la position dans le matériau. Cette variation entraîne la formation de phases distinctes aux structures chimiques différentes, dépendant de la composition des matériaux, des quantités utilisées et des conditions de production [57].

Le deuxième type, basé sur la microstructure, concerne les matériaux dont la surface présente une microstructure différente de celle du noyau, principalement due au processus de refroidissement. Ces FGM sont utilisés dans des applications nécessitant des surfaces résistantes à l'usure et à la corrosion, tandis que le noyau conserve d'autres propriétés spécifiques.

Enfin, les FGM à porosité graduelle présentent une variation de porosité en fonction de leur emplacement dans le matériau. Dans leur conception, la taille et la forme des pores sont essentielles selon les exigences de l'application. Ces matériaux trouvent de nombreuses applications dans l'industrie médicale, où des recherches approfondies ont été réalisées.

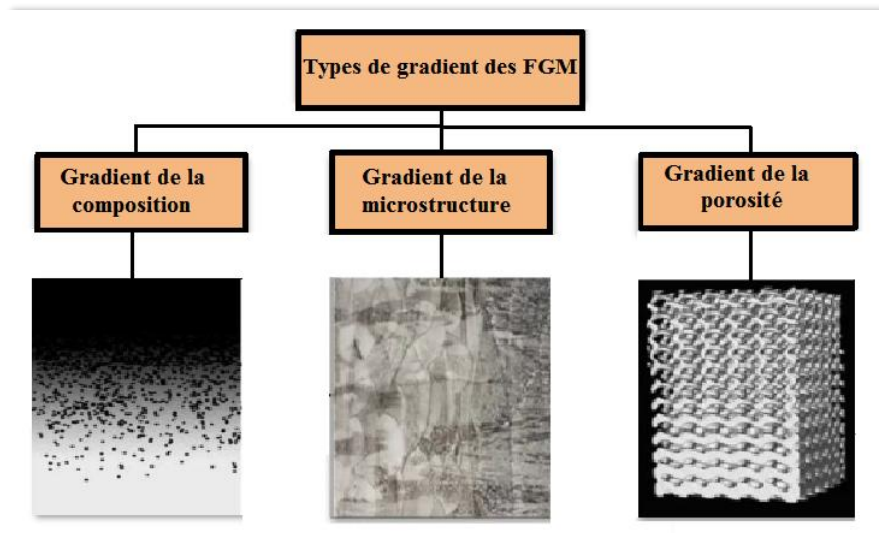


Fig. I. 8. Classification des matériaux à gradient fonctionnel selon le type de gradients FGM [56]

I.7. Application des matériaux fonctionnellement gradués FGM dans le domaine du génie civil

I.7.1. Les chaussées rigides (Functionally Graded Concrete Materials for Rigid Pavements)

Les FGM peuvent être intégrés dans les chaussées rigides en béton, avec une gradation obtenue par la variation de la fraction volumique de fibres. Cette technique est particulièrement adaptée aux autoroutes, aux routes à fort trafic, aux dallages industriels et aux pistes d'aéroports, où l'utilisation de chaussées souples en béton bitumineux est déconseillée. Elle vise à optimiser l'épaisseur de la chaussée en combinant une surface de roulement rigide avec une couche de fondation moins rigide, garantissant ainsi une meilleure résistance et durabilité [58].

I.7.2. Les chaussées souples

Les FGM peuvent être utilisés dans les chaussées souples pour éliminer les couches d'accrochage entre la Grave Bitume et la couche de roulement en Béton Bitumineux. Cette approche permet d'éviter le glissement entre les deux couches, de réduire l'épaisseur totale tout en optimisant le comportement mécanique de la structure, augmentant ainsi la capacité portante et la durabilité de la chaussée [58].

I.7.3. Les grands vitrages dans les zones chaudes

Les vitres sont en FGM pour contrôler la température dans les zones chaudes et éviter les vitrages multiples.

I.7.4. Les tunnels (functionally graded concrete segment in tunnel)

Les parois intérieures des tunnels doit être réalisées en matériau réfractaire et rigide dans la surface exposée et d'un matériau imperméable dans la surface en contact avec le sol et les roches. L'utilisation des FGM semble être une solution efficace.

I.7.5. Les joints dans la charpente métallique

Dans certaines structures métalliques, l'assemblage nécessite des soudures entre des éléments de poids et de nuances différents, tels que l'acier et l'aluminium. Les joints ordinaires en acier, souvent utilisés dans ces cas, présentent l'inconvénient de subir une forte concentration de contraintes, les rendant vulnérables aux actions cycliques. L'utilisation de joints en FGM constitue une solution optimale pour améliorer la performance et la durabilité de ces assemblages [58].

I.8. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM

Les FGM, qui sont souvent isotropes et non homogènes, sont constitués d'un mélange de deux matériaux pour obtenir une composition qui assure une certaine fonctionnalité. Un FGM peut être définie par la variation graduelle de la fraction volumique des constituants.

La fonction de loi de puissance [59] et la fonction exponentielle [60] sont couramment utilisées pour décrire les variations des propriétés des FGM. Cependant, ces fonctions peuvent engendrer des concentrations de contraintes aux interfaces où le matériau change de manière rapide et continue. Pour remédier à ce problème, Chung et Chi [61] ont introduit le FGM sigmoïde (S-FGM), basé sur deux fonctions de puissance pour définir une nouvelle distribution de fraction volumique. Chi et Chung [62-63] ont démontré que l'utilisation d'un S-FGM réduit significativement les facteurs d'intensité de contrainte dans les corps fissurés.

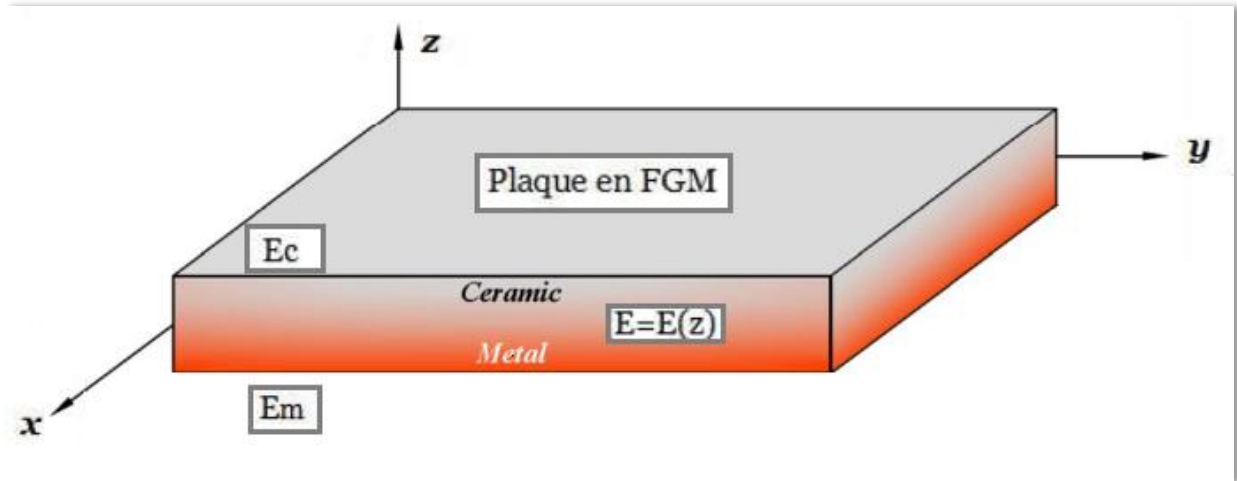


Fig. I. 9. Géométrie d'une plaque en FGM.

Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur.

Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les surfaces supérieures et inférieures sont différentes mais sont déterminés selon les demandes d'exécution.

Toutefois le module de Young et le coefficient de Poisson varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur (l'axe z) soit : $E = E(z)$, $\nu = \nu(z)$.

Le module de Young dans le sens de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM) ou la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

I.8.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

La fraction volumique de la classe P-FGM correspond à une fonction de loi de puissance sous la forme :

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^P \quad \text{I. 1}$$

Où P est un paramètre du matériau et h est l'épaisseur de la plaque.

Une fois la fraction volumique locale $V(z)$ a été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges [66] :

$$P(z) = P_1 + (P_2 - P_1)V(z) \quad \text{I. 2}$$

Où P_1 et P_2 sont respectivement les caractéristiques du matériau de la surface inférieure ($z = -h/2$) et supérieure ($z = h/2$) de la plaque FGM, la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la fig.I.24, ce qui montre que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour $P < 1$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $P > 1$.

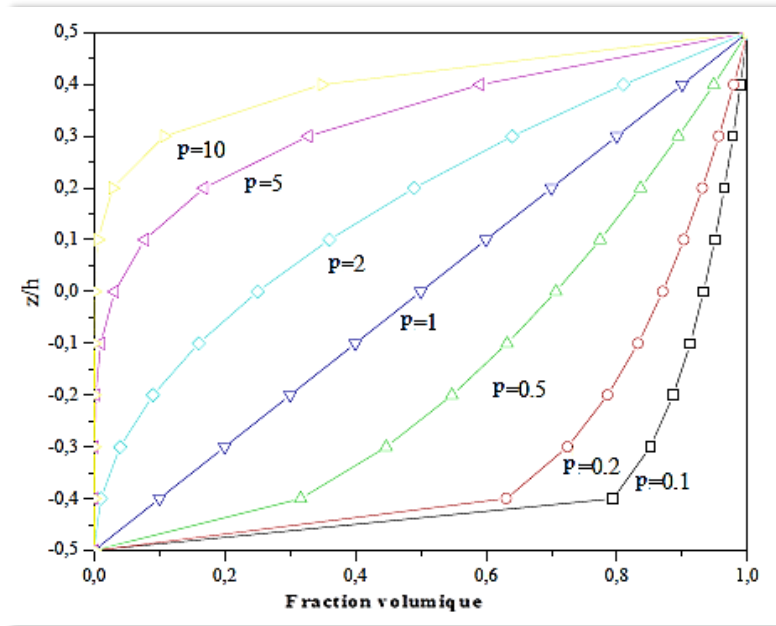


Fig. I. 10. Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

I.8.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Dans le cas de l'ajout d'une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement [64]. Afin de résoudre ce problème, Chung et chi [67] ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne répartition des contraintes entre toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies comme suit :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} + z}{\frac{h}{2}} \right)^P \text{ Pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad \text{I. 3. a}$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} - z}{\frac{h}{2}} \right)^P \text{ Pour } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad \text{I. 3. b}$$

En appliquant la loi de mélange, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z)E_1 + [1 - V_1(z)]E_2 \text{ pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad \text{I. 4. a}$$

$$E(z) = V_2(z)E_1 + [1 - V_2(z)]E_2 \text{ pour } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad \text{I. 4. b}$$

La variation de la fraction volumique selon les équations (I.4.a) et (I.4.b) avec des répartitions sigmoïdes est présentée dans La fig. I.25, ce type de plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM).

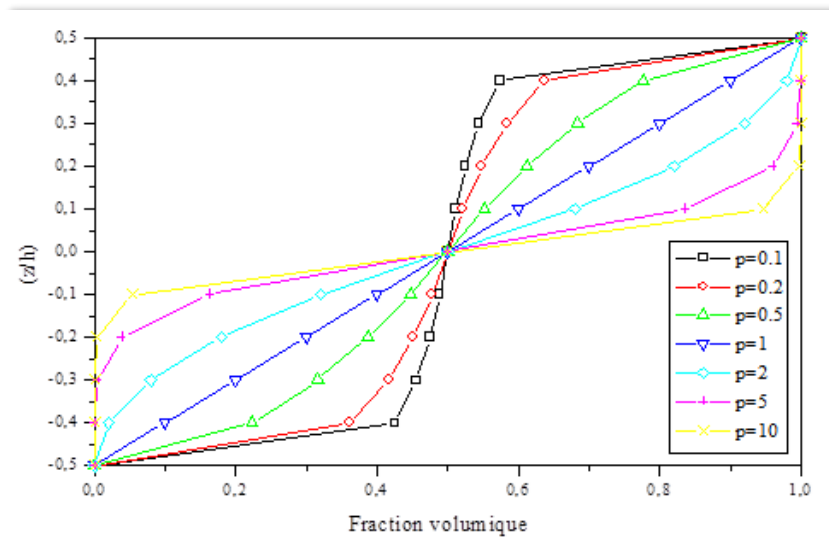


Fig. I. 11. Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

I.8.3. Propriétés matérielles de la plaque E-FGM

Plusieurs chercheurs emploient la fonction exponentielle pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FG comme suit [68] :

$$E(z) = E_2 e^{B(z + \frac{h}{2})} \quad \text{I. 5. a}$$

Avec :

$$B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_1}{E_2} \right) \quad \text{I. 5. b}$$

La fig.I.26 présente La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM.

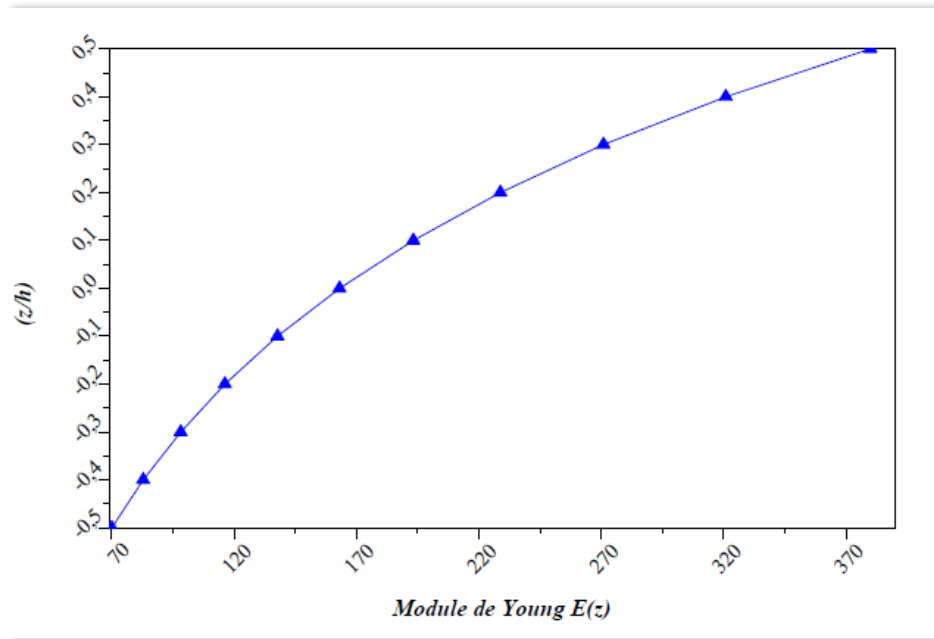


Fig. I. 12. Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.

I.9. Les relations contrainte-déformation

La forme généralisée de la loi de Hooke, qui relie la contrainte à la déformation, est la suivante :

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \quad \text{I.6}$$

Où $[C]$ est une matrice de rigidité.

La relation entre la contrainte et la déformation par $[C]$ est une approximation qui est valable pour de petites déformations. Pour un matériau homogène linéairement élastique, les propriétés du matériau sont supposées être les mêmes en tout point du matériau.

La relation déformation-contrainte est obtenue en inversant la matrice de rigidité dans la relation contrainte-déformation (I.6), ce qui donne :

$$\{\varepsilon\} = [C]^{-1}\{\sigma\} = [S]\{\sigma\} \quad \text{I.7}$$

Où $[S]$ est la matrice de flexibilité ou de souplesse (symétrique).

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exposé d'une façon claire des généralités sur les matériaux composites, ensuite, nous avons défini les matériaux à gradient de propriétés « FGM », leurs propriétés, l'histoire de leur développement, leurs classifications, les principales techniques

Chapitre 1 : Les Matériaux Avancées

d'élaboration de ces matériaux, ainsi que leurs domaines d'application, nous avons aussi cité les différentes lois régissant la variation des propriétés matérielles de ces derniers et à la fin nous avons présenté les différents types des matériaux.

Chapitre II
Revue sur les Théories de Plaques

Revue sur les Théories de Plaques

II.1. Introduction

En général, le comportement des plaques sous charges mécaniques et thermiques peut être prédit en utilisant soit la théorie de l'élasticité tridimensionnelle (3D), soit des théories équivalentes d'élasticité monocouche « Equivalent single layer theory (ESL) ». Ces théories d'ESL peuvent tenir compte des effets de cisaillement et de déformation normale selon le niveau d'hypothèses.

Le modèle ESL le plus simple est la théorie classique des plaques (CPT), également connue sous le nom de Théorie de Love-Kirchoff [69], qui ignore les effets de cisaillement transversal. Il convient donc uniquement aux plaques minces.

La théorie suivante dans la hiérarchie des modèles ESL est la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) connue sous le nom Reissner [70] et Mindlin [71]. La FSDT tient compte de l'effet de déformation de cisaillement par le biais d'une variation linéaire des déplacements à travers l'épaisseur de la plaque. Un facteur de correction de cisaillement est donc nécessaire.

Afin d'éviter l'utilisation du facteur de correction du cisaillement, des théories de déformation du cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) ont été introduites.

II.2. Généralités sur les théories d'élasticité

II.2.1. Définition des plaques

Une plaque est par définition un corps solide délimité par deux plans parallèles appelés faces et dont une des dimensions (appelée épaisseur h) est petite par rapport aux deux autres dimensions (fig.II.1). Les éléments de plaques sont généralement utilisés pour modéliser des structures minces, car seule une dimension est faible par rapport aux deux autres.

On définit :

- Le plan moyen est situé dans le plan $(0, x, y)$ à équidistance entre les deux faces (Un plan passant au milieu de l'épaisseur de la plaque)
- h est l'épaisseur de la plaque.
- Les deux surfaces générées par les points supérieurs ($z = h/2$) et inférieurs ($z = -h/2$) de h sont les surfaces supérieures et inférieures (ou faces) de la plaque

Chapitre 2 : Revue sur les Théories de Plaques

- Ω est appelée surface médiane, ou surface de référence de la plaque.
- le feuillet neutre (ou feuillet moyen) constitue un élément de matière d'épaisseur infinitésimale situé autour du plan moyen (O, x, y), où $z = 0$.
- Une fibre normale est par définition l'ensemble des points situés sur une normale au plan médian (ayant ainsi pour direction z) à une position (x, y)

Selon le mode de déformation, les plaques peuvent être classées en trois grandes catégories :

- les **plaques minces à petites déformations** (Kirchhoff).
- les **plaques minces à grandes déformations** (Karman).
- les **plaques épaisses** (Mindlin-Reissner).

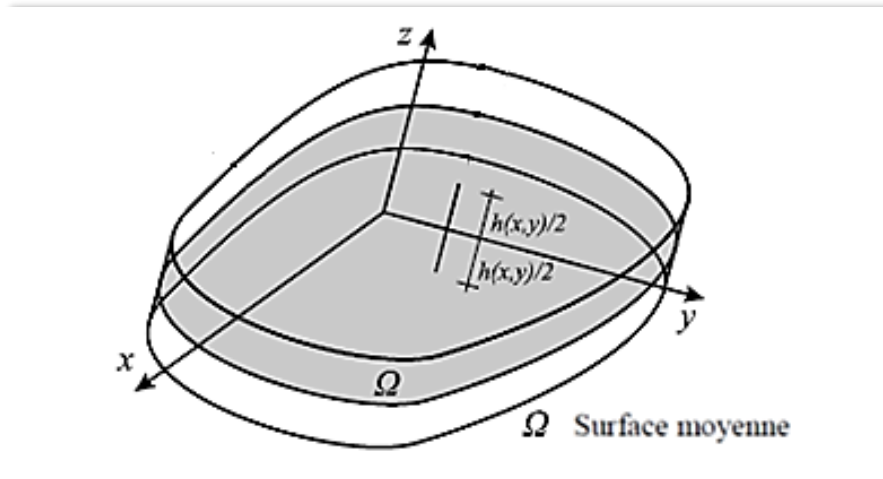


Fig. II. 1. Exemple de plaque d'une géométrie quelconque [207].

II.2.2. Théorie Classique de Love-Kirchhoff (CPT, Classical plate theory) :

Le modèle le plus simple de Love -Kirchhoff est parfois appelé dans la littérature « la théorie Classique des plaques minces ». Ce modèle est basé sur une distribution linéaire des déplacements à travers l'épaisseur [69].

Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élancement (L/h).

La théorie classique des plaques minces (CPT) se base sur les hypothèses de Love- Kirchhoff [72] :

- Les sections perpendiculaires au plan moyen de la plaque restent normales lors de la déformation. Donc la déformation de cisaillement transverse est supposée nulle ($\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$) et les effets dus à l'effort tranchant sont négligés.

Chapitre 2 : Revue sur les Théories de Plaques

- L'épaisseur de la plaque est faible, par conséquent les contraintes dans le sens de cette dernière sont supposées nulles ($\sigma_z = 0$).
- Les normales transversales ne subissent pas d'allongement (c'est-à-dire qu'elles sont non extensibles).

Ces hypothèses sont clairement résumées dans la fig.II.2 :

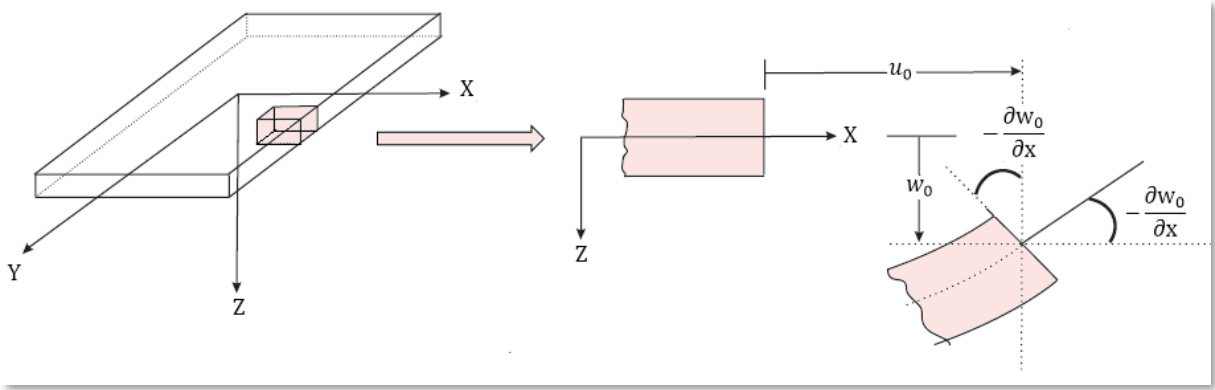


Fig. II. 2. Illustration de la plaque de Love-Kirchhoff avant et après déformation [69].

En se basant sur les hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement s'écrit pour la théorie classique des plaques sous la forme [69] :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (\text{II. 1. a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{II. 1. b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II. 1. c})$$

Où :

u_0 et v_0 sont les déplacements de membrane dans les directions x et y respectivement.

w_0 est la flèche de la plaque.

$\frac{\partial w_0}{\partial x}$ et $\frac{\partial w_0}{\partial y}$ sont les rotations dues à la flexion (sans cisaillement).

Cette théorie donne des résultats imprécis pour les plaques épaisses car elle ne tient pas en compte de l'effet de cisaillement.

La CPT est le modèle ESL le plus simple et il convient seulement aux plaques/coques minces où les effets de cisaillement et de déformation normale sont négligeable.

- Feldman et Aboudi [73] ont étudié le flambement élastique des plaques FG sous charge de compression uniaxiale en utilisant une combinaison d'approches micromécaniques et structurales. Les équations directrices dérivées de la CPT ont été résolues

analytiquement pour la charge de flambement des plaques FG avec diverses conditions aux limites.

- La CPT est utilisée par Javaheri et Eslami [74-75] pour étudier le comportement de flambement des plaques FG sous quatre types de chargements thermiques [74] et de chargement en compression [75].
- Ghannadpour et al. [76] ont examiné le flambement thermique des plaques FG en utilisant la CPT. Cependant, la charge de flambement a été calculée en utilisant la méthode des éléments finis au lieu de Solution de Navier [74].
- Mahdavian [77] a examiné le gauchissement des plaques FG soumises à une compression non uniforme en utilisant la CPT et les solutions de Fourier.
- Mohammadi et al. [78] ont dérivé les solutions analytiques pour la charge de flambage des plaques FG avec deux bords opposés simplement appuyés et les deux autres bords ayant des conditions limites arbitraires (c.-à-d. plaque de type Levy). Les équations gouvernantes dérivées de la CPT ont été résolues analytiquement en utilisant une approche de solution de type Levy.
- Yanga et Shen [79] ont étudié les réponses non linéaires de flexion et de post-flambement des plaques FG reposant sur des fondations élastiques sous des charges axiales et transversales en utilisant la CPT avec les hypothèses de Von Karman.
- Alinia et Ghannadpour [80] ont également utilisé la CPT avec les hypothèses de Von-Karman pour étudier les réponses non linéaires des plaques FG sous pression transversale. Cependant, ils ont utilisé le principe de l'énergie potentielle minimale pour obtenir les solutions analytiques de plaques simplement appuyées.
- La CPT a également été utilisé pour analyser les plaques circulaires. Par exemple, les comportements de flexion non linéaire et de post-flambement thermique des plaques circulaires FG sous des charges mécaniques et thermiques ont été étudiés par Ma et Wang [81].
- Li et al. [82] ont également étudié le comportement de post-flambement non linéaire des plaques circulaires FG sous charge mécanique et thermique à l'aide de la CPT avec les hypothèses de Von Karman.
- La CPT a également été utilisé pour les coques FG en raison de sa simplicité. Du et al. [83] ont étudié la vibration non linéaire des coques cylindriques FG sous excitation sur la base de la CPT avec les hypothèses de Von Karman en combinaison avec une méthode à échelles multiples.

- Du et Li [83] ont étudié la réponse aux vibrations non linéaires des coques cylindriques FG dans des environnements thermiques en suivant une approche similaire.
- Shen [84] a étudié le comportement de post-flambement des coques cylindriques FG sous compression axiale [84] ou pression latérale [85] ou une augmentation de température uniforme [86] en utilisant la CPT avec les hypothèses de von Karman.
- Woo et al. [87] ont étudié le comportement de post-flambement des plaques FG et des coques cylindriques peu profondes sous des charges mécaniques et thermiques en utilisant la CPT et les hypothèses de Von Karman.
- Cheng et al. [89] ont adopté la CPT pour étudier le flambage des coques cylindriques FG soumis à une flexion pure.
- Woo et Meguid [89] ont étudié la flexion non linéaire des coques peu profondes FG sous charges transversales et un champ de température. Les équations gouvernantes dérivées de la CPT avec les hypothèses de Von Karman ont été résolues analytiquement pour la déflexion, les contraintes et les moments de flexion d'une coque simplement appuyées en utilisant la méthode de la série de Fourier.

II.2.3. Théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT First Order

Shear Deformation Theory) :

La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre, également appelée « Théorie de Reissner-Mindlin ». Elle est considérée comme une amélioration de la théorie classique des plaques minces en prend en considération l'effet de cisaillement transverse.

Mindlin et Reissner ont proposé indépendamment une théorie des plaques qui incorpore l'effet de la déformation de cisaillement transversal pour l'analyse des plaques épaisses.

On peut souvent trouver des cas dans la littérature où les deux théories des plaques ont été associées ensemble sous le nom de théorie des plaques de Reissner-Mindlin ou classées dans la catégorie des théories des plaques dites déformation de cisaillement du premier ordre.

Hypothèse de Reissner-Mindlin :

Les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, où après application des charges, les fibres normales au plan moyen restent droites mais pas nécessairement normales au plan moyen déformé, de plus la longueur d'une fibre transverse varie peu au cours de la déformation.

Chapitre 2 : Revue sur les Théories de Plaques

Dans ce cas la déformation de cisaillement transversale est différente de zéro, mais elle mène aussi à la violation statique de la contrainte de cisaillement qui est nulle sur les surfaces extérieures puisque la contrainte de cisaillement devient constante à travers l'épaisseur de la plaque. Cette divergence entre l'état de contrainte réel et l'état de contrainte constant prédit par la théorie du premier ordre est souvent corrigé en introduisant un facteur de correction de cisaillement K. [72]

La théorie du premier ordre est basée sur un champ des déplacements comportant cinq inconnues (il y en avait que trois dans le cas de la CPT) comme suivant [72] :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z\phi_x(x, y) \quad (\text{II. 2. a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z\phi_y(x, y) \quad (\text{II. 2. b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II. 2. c})$$

Où :

u_0 et v_0 sont les déplacements de membrane dans les directions x et y respectivement.

w_0 est la flèche de la plaque.

ϕ_x, ϕ_y sont les rotations de la normale au plan moyen autour des axes x et y respectivement.

Le champ de déplacement définis dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière section par le remplacement :

$$\left(\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)$$

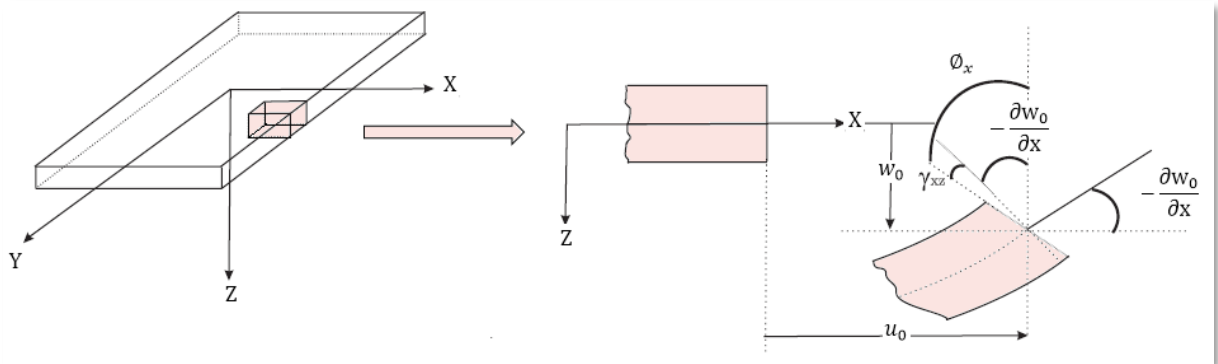


Fig. II. 3. Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin [70].

La théorie FSDT est largement appliquée pour étudier le comportement des plaques FGM :

- Praveen et Reddy [91] ont étudié les réponses transitoires non linéaires des plaques FG sous charges thermiques et mécaniques en utilisant la méthode des éléments finis et la FSDT avec les hypothèses de Von Karman.
- Della Croce et Venini [92] ont présenté une famille hiérarchique d'éléments finis pour l'analyse de flexion des plaques FG sous charges mécaniques et thermiques à l'aide de la FSDT et d'une formulation variationnelle. Cependant, le couplage étirement-flexion a été ignoré dans leur travail.
- Chen [93] a étudié les vibrations non linéaires des plaques FG soumises à une action combinée de contraintes de compression et de flexion initiales dans le plan à l'aide de la FSDT avec les hypothèses de Von Karman.
- La FSDT avec les hypothèses de Von Karman a également été utilisée par Alijani et al. [94] pour étudier les vibrations non linéaires des plaques FG simplement appuyées dans les environnements thermiques.
- Fallah et al. [95] ont étudié les vibrations libres des plaques FG reposant sur une fondation élastique à l'aide de la FSDT et d'une approche semi-analytique basée sur une combinaison de la série de puissance infinie et de la méthode de Kantorovich.
- Lanhe [96] et Bouazza et al. [97] ont dérivé des solutions analytiques pour la température de flambage des plaques FG simplement appuyées sous deux types de charges thermiques en utilisant la FSDT et solution de Navier.
- Yaghoobi et Yaghoobi [98] ont étudié le flambage des plaques sandwich FG reposant sur une fondation élastique sous des charges thermiques et mécaniques.
- Park et Kim [99] ont adopté la FSDT avec les hypothèses de Von Karman pour étudier le post-flambement et les vibrations des plaques FG sous charges thermiques en utilisant la méthode des éléments finis.
- Kiani et Eslami [100] ont étudié le flambement et le post-flambement des plaques sandwich FG reposant sur une fondation élastique sous charge mécanique en utilisant la FSDT avec les hypothèses de Von Karman.

II.2.4. Théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT Higher Shear Deformation Theory) :

Les limitations de la FSDT peuvent être surmontées en introduisant les théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé des plaques.

La théorie des plaques d'ordre élevée est basée sur les mêmes hypothèses que les théories classiques et du premier ordre des plaques, sauf que la section droite et perpendiculaire au plan moyen avant déformation, ne reste pas droite après déformation et peut présenter un gauchissement. Ce modèle n'exige aucun coefficient de correction du cisaillement et donne des contraintes de cisaillement transversales plus précises.

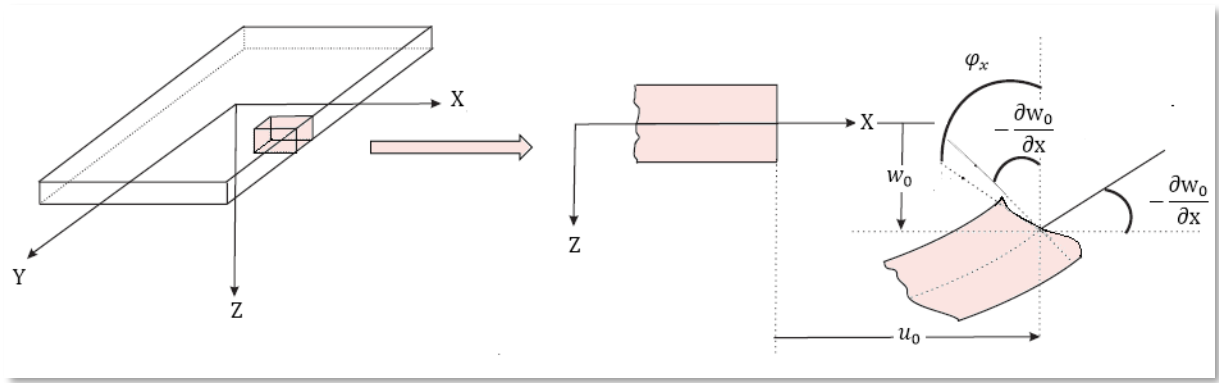


Fig. II. 4. Illustration de la plaque d'ordre élevé.

Le champ de déplacement de cette théorie est généralement écrit comme suit :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z\phi_x + f(z)\phi_x(x, y) \quad (\text{II. 3. a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z\phi_y + f(z)\phi_y(x, y) \quad (\text{II. 3. b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II. 3. c})$$

Où : u_0, v_0 et w_0 sont les déplacements de membrane dans les directions x, y et z respectivement.

ϕ_x, ϕ_y sont les rotations de la normale au plan moyen autour des axes x et y respectivement.

On pose aussi $\left(\phi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \phi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \right)$.

La fonction $f(z)$ représente la fonction de forme déterminant la distribution des déformations et des contraintes de cisaillement transversales sur l'épaisseur.

Chapitre 2 : Revue sur les Théories de Plaques

En effet, les déplacements de la théorie de Love-Kirchhoff (CPT) sont obtenus facilement en mettant :

$$f(z) = 0 \quad (\text{II. 4})$$

La théorie de Reisner-Mindlin (FSDT) peut être obtenue par :

$$f(z) = z \quad (\text{II. 5})$$

On obtient aussi le déplacement de la théorie de la plaque de déformation de cisaillement parabolique (**Parabolic shear deformation plate theory (PSDPT)**) de Reddy par :

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4}{3h^2} z^2\right) \quad (\text{II. 6})$$

Reddy [72] a proposé une théorie modifiée qui prend en compte non seulement l'effet de déformations transversale de cisaillement mais aussi leur variation parabolique dans l'épaisseur.

La théorie sinusoïdale de plaque de déformation de cisaillement (**sinusoidal shear deformation plate theory (SSDPT)**) de Touratier [101] est obtenue comme suit :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{II. 7})$$

Touratier a proposé le modèle "sinus" (SSDPT) en introduisant une fonction trigonométriques sinusoïdale pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur. Ce modèle est différent des autres modèles d'ordre élevé puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale.

En outre, la théorie exponentielle de plaque de déformation de cisaillement (**Exponential shear deformation plate theory (ESDPT)**) de Karama et al [102] est obtenue par :

$$f(z) = ze^{-2(z/h)^2} \quad (\text{II. 8})$$

Chapitre 2 : Revue sur les Théories de Plaques

Pour d'autres théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé, la fonction $f(z)$ est montrée sur le tableau suivant :

Tableau II. 1. Fonctions de cisaillement relatives aux différentes théories de plaque d'ordre élevé HSDT

Théorie	Fonction de cisaillement $f(z)$
Ambartsumyan [103]	$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$
Reissner [104]	$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$
Soldatos et al. [105]	$f(z) = h \sin\left(\frac{z}{h}\right) - z \sinh\left(\frac{1}{2}\right)$
Aydogdu [106]	$f(z) = z \alpha^{\frac{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\ln(\alpha)}} \quad \alpha \succ 0$
Ait Atmane et al [107]	$f(z) = \frac{\cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2)-1]} z - \frac{(h/\pi) \sinh\left(\frac{\pi}{h} z\right)}{[\cosh(\pi/2)-1]}$
El Meiche et al [108]	$f(z) = \frac{(h/\pi) \sin(hz/\pi) - z}{(\cos(\pi/2)-1)}$
Hebali et al. [109]	$f(z) = \frac{(h/\pi) \sinh\left(\frac{\pi}{h} z\right) - z}{[\cosh(\pi/2)-1]}$

II.2.4.1. Modèles basés sur des fonctions polynomiales

- Le comportement de flexion des plaques FG a été étudié par Roque et al. [110] à l'aide d'une méthode sans mailles avec des RBF multiquadriques. La formulation était basée sur la HSDT de Pandya et Kant [111] avec 7 inconnues et en tenant compte d'une variation cubique des déplacements axiaux et d'un déplacement transversal constant à travers l'épaisseur.
- Matsunaga a encore étendu sa théorie aux problèmes de flambage thermique [112] et aux problèmes de flexion thermique de plaques FG.
- Chen et al. [9] ont étudié les vibrations libres et le flambage des plaques FG sous une combinaison d'une contrainte d'extension et d'une contrainte de flexion pure.

- Xiang et al. [113] ont proposé une théorie de déformation de cisaillement du nième ordre pour l'analyse des vibrations libres des plaques sandwich FG et composites. Le champ de déplacement de leur théorie a été obtenu en modifiant le champ de déplacement de la TSDT pour tenir en compte des termes polynomiaux d'ordre n . La TSDT est donc déduite en tant que cas spécifique. Cette théorie a été appliquée aux problèmes de flexion des plaques FG et aux problèmes de vibration libre des plaques isotropes, des plaques sandwich FG et des plaques FG reposant sur une fondation élastique.
- Xiang et Kang [114] ont évalué diverses théories de déformation de cisaillement à cinq inconnus pour la flexion des plaques FG à l'aide d'une méthode sans mailles avec des FBR à cannelures, tandis que Sobhy [115] a évalué diverses théories de déformation de cisaillement à cinq inconnus pour le flambage et la vibration libre des plaques sandwich FG reposant sur une fondation élastique avec diverses conditions aux limites en utilisant une méthode en série.
- Wattanasakulpong et al. [116] ont utilisé la théorie TSDT raffinée et la méthode de Ritz pour analyser les problèmes de vibration libre et forcée des plaques FG encastées sous des charges thermiques.
- Nguyen-Xuan et al. [117] ont présenté une formulation efficace pour les plaques sandwich composites en utilisant une théorie de déformation de cisaillement de cinquième ordre (FiSDT) en combinaison avec l'analyse isogéométrique par éléments finis (l'IGA). Les comportements de flexion statique, de flambage et de vibrations libres des plaques rectangulaires et circulaires dans différentes conditions limites ont été étudiés.

II.2.4.2. Modèles basés sur des fonctions non-polynomiales

- La fonction non-polynomiale a d'abord été utilisée par Levy [19] avec une fonction sinusoïdale pour développer une théorie raffinée pour les plaques isotropes épaisses.
- La fonction sinusoïdale a ensuite été adoptée par Touratier [101] pour élaborer une théorie de déformation de cisaillement sinusoïdale (SSDT) à cinq inconnues pour les plaques composites isotropes et stratifiées, respectivement.
- La SSDT a été largement utilisé pour étudier la flexion thermique des plaques composites, le flambage des plaques composites, la flexion des plaques sandwich FG, le flambage et les vibrations des plaques sandwich FG, les vibrations des plaques FG,

la flexion des plaques FG, la flexion thermique des plaques de FG reposant sur une fondation élastique, le flambage thermique des plaques FG reposant sur une fondation élastique, nanopoutres et nanoplaques.

- Soldatos [119] a d'abord utilisé une fonction hyperbolique pour développer une HSDT pour les plaques composites stratifiées.
- Akavci [120] a proposé une nouvelle fonction hyperbolique pour développer une HSDT pour l'analyse de flexion des plaques composites et l'analyse des vibrations libres des plaques FG reposant sur une fondation élastique.
- Grover et al. [121] ont utilisé une fonction hyperbolique inverse pour développer une HSDT pour les plaques composites et les plaques sandwich.
- Mahi [122] a récemment développé une HSDT pour les plaques sandwich et composites FG basé sur une nouvelle fonction hyperbolique.
- La fonction exponentielle a d'abord été utilisée par Karama et al [102] pour développer une HSDT pour les poutres composites.
- Mantari et al. [123] ont également utilisé la fonction exponentielle pour développer une HSDT pour les coques sandwich et composite. Cette HSDT a été adoptée par pour étudier le comportement de flexion des plaques FG.
- Basé sur une nouvelle fonction exponentielle, Mantari et al. [123] ont proposé une HSDT pour l'analyse des vibrations des plaques FG reposant sur une fondation élastique.
- Mantari et al. [124] et Mantari et Guedes Soares [125] ont utilisé une fonction tangentielle pour développer une HSDT pour les plaques isotropes, composites et sandwich et les plaques FG .
- Mantari et al. [124] ont combiné des fonctions exponentielles et trigonométriques pour développer une HSDT pour les plaques sandwich et composites , les plaques FG [et les coques doublement courbées FG.
- Mantari et Guedes Soares [125] ont combiné des fonctions exponentielles et hyperboliques pour développer une HSDT pour les plaques/coques isotropes et multicouches et les plaques FG.
- Une combinaison de fonctions tangentielles et exponentielles a été proposée par Mantari et al. [124] pour développer une HSDT pour les plaques FG.

- Nguyen et al. [126] ont combiné des fonctions tangentielles et cubiques inverses pour les plaques sandwich FG, tandis que Thai et al. [127] ont combiné des fonctions tangentielles et linéaires inverses pour les plaques composites et sandwich.
- Thai et al. [127] ont suivi leurs travaux antérieurs pour développer une HSDT pour l'analyse Isogéométrique des plaques sandwich FG en utilisant deux nouvelles fonctions trigonométriques.

II.3. Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté les différentes théories de déformation des plaques à savoir la théorie classique des plaques (CPT), la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) et la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT) pour prédire la réponse globale des plaques et des coques sous chargement mécaniques et thermiques.

Un aperçu sur les divers modèles pour la modélisation et l'analyse des plaques et des coques FG a été aussi présenté.

- Parmi les modèles ESL, la CPT est largement utilisé pour prédire Les réponses non linéaires de flexion et de post-flambement des plaques/coques minces FG. Tous les effets de la température, des imperfections géométriques initiales et de la non-linéarité géométrique peuvent être facilement inclus dans le modèle CPT car il est le plus simple parmi les modèles ESL. Bien que la CPT ignore les effets de cisaillement et de déformation normale, il peut fournir des prédictions acceptables pour les plaques minces/coques où les effets du cisaillement et des déformations normales sont insignifiants.
- Parmi les théories de déformation de cisaillement, la FSDT et la TSDT ont été largement utilisés pour la modélisation et l'analyse des plaques/coques FG. Cela pourrait être dû au fait que la FSDT et la TSDT ont été développés il y a longtemps par rapport à d'autres HSDT ayant le même nombre d'inconnues.
- Un grand nombre de HSDT basées sur des fonctions non polynomiales ont été développées récemment. Cependant, elles ne sont pas largement utilisées par rapport aux HSDT basées sur des fonctions polynomiales, sauf dans le cas de la SSDT.

Chapitre III

Modèle Analytique : Nouvelle approche mathématique

Modèle Analytique : Nouvelle approche mathématique

III.1. Introduction

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) ont émergé comme une solution innovante dans le domaine de l'ingénierie des structures, offrant une transition continue entre deux matériaux aux propriétés distinctes. Ces matériaux permettent d'optimiser les performances mécaniques, thermiques et physiques des structures, tout en réduisant les concentrations de contraintes qui se produisent dans les interfaces classiques des matériaux composites traditionnels. Parmi ces structures, les poutres fonctionnellement graduées poreuses (FG) suscitent un intérêt croissant, notamment dans des applications aéronautiques, biomédicales et mécaniques, où la gestion des contraintes et du poids est cruciale.

Dans cette étude, nous nous intéressons à la formulation théorique des poutres FG poreuses, en prenant en compte l'impact des variations de propriétés mécaniques, telles que le module d'élasticité et la densité, en fonction de la distribution du matériau et du taux de porosité. La présence de porosité, qu'elle soit uniforme ou non uniforme, est un paramètre fondamental influençant le comportement mécanique et dynamique de ces structures.

Ce chapitre a pour objectif de développer une approche analytique rigoureuse permettant de modéliser ces poutres en intégrant différentes lois de gradation des matériaux (puissance, exponentielle et sigmoïdale) ainsi que divers modèles de porosité. Nous analysons également l'impact du cisaillement et des imperfections matérielles sur la réponse mécanique des poutres FG. Dans ce cadre, une nouvelle théorie de la déformation au cisaillement de premier ordre est introduite pour mieux appréhender les effets des irrégularités structurelles.

Après avoir détaillé les hypothèses fondamentales adoptées pour la modélisation, nous établirons les équations gouvernantes du mouvement des poutres FG poreuses. L'approche analytique utilisée repose notamment sur la méthode de Navier, qui permet une résolution efficace des équations différentielles en exploitant des fonctions propres trigonométriques adaptées aux conditions aux limites considérées. Enfin, ce chapitre mettra en lumière les avantages et les limites des différentes approches théoriques utilisées pour prédire le comportement vibratoire et mécanique de ces poutres, ouvrant ainsi la voie à des applications concrètes en ingénierie.

III.2. Formulation théorique de la poutre FG poreuse

Dans cette étude, la structure de la poutre est composée de céramique sur sa face supérieure et de métal sur sa face inférieure. Les variations des propriétés mécaniques, telles que le module d'élasticité

Chapitre 3 : Modèle Analytique “ Nouvelle approche mathématique ”

E et la densité ρ , dépendent des distributions des matériaux fonctionnellement gradués selon les lois de puissance (P-FG), exponentielle (E-FG) et sigmoïdale (S-FGM) [16], en prenant en compte les effets de la porosité.

La porosité, présente en tant que micro-vides ou défauts dans la structure du matériau, est intégrée dans le modèle pour évaluer son impact sur le comportement mécanique. Différents schémas de distribution de la porosité, uniformes ou non uniformes, sont considérés pour mieux représenter les conditions réelles de fabrication et les contraintes structurelles auxquelles les poutres FG sont soumises.

La géométrie et l'axe de la poutre sont illustrés dans la Fig. III.1. La poutre est modélisée comme un solide allongé avec une section rectangulaire, où l'axe longitudinal est aligné avec l'axe x . La céramique et le métal, qui composent la poutre, sont distribués selon un gradient continu le long de l'épaisseur z . Ce gradient vise à optimiser les propriétés mécaniques et thermiques tout en minimisant les concentrations de contraintes.

Cette formulation théorique repose sur les hypothèses suivantes :

1. La distribution du matériau suit une loi analytique basée sur des fonctions continues (P-FG, E-FG ou S-FGM), permettant une transition fluide entre les matériaux.
2. Les effets de cisaillement transversal sont pris en compte pour refléter plus fidèlement les déformations dans les poutres courtes ou les structures épaisses.
3. Les propriétés mécaniques du matériau, comme E et ρ , varient non seulement en fonction du gradient fonctionnel mais également en fonction des paramètres de porosité.

L'objectif de cette formulation est d'analyser les réponses mécaniques et dynamiques des poutres FG poreuses sous différentes conditions de chargement et d'appui, tout en fournissant une base théorique robuste pour évaluer l'influence des paramètres de porosité sur les performances structurelles globales. Cette approche permet également de modéliser et d'optimiser des structures avancées en FGM dans des applications où les charges dynamiques et thermiques jouent un rôle clé.

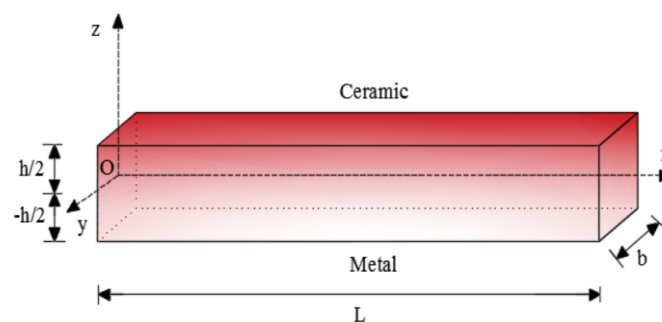


Fig.III.1 Géométrie de la poutre FG

III. 2-1. Poutre poreuse P-FG

Les caractéristiques des matériaux des poutres P-FG utilisant les modèles de porosité uniforme (IP-I) et non uniforme (IP-II) peuvent être décrites comme suit [10] :

$$\begin{aligned} P &= (P_c - P_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + P_m - \frac{\zeta}{2} (P_c + P_m) \quad \underline{\text{IP-I}} \\ P &= (P_c - P_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + P_m - \frac{\zeta}{2} (P_c + P_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \quad \underline{\text{IP-II}} \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

Soient P_m et P_c les propriétés respectives du métal et de la céramique ; p désigne l'indice d'exposant de matériau ($0 \leq p \leq \infty$). Lorsque $\zeta = 0$ la poutre FG imparfaite devient une poutre FG parfaite, sans porosité ni défauts, caractérisée par une transition parfaitement lisse entre les propriétés métalliques et céramiques.

- Modèle de porosité uniforme (IP-I)

Dans ce modèle, la porosité est distribuée de manière homogène à travers l'épaisseur de la poutre. Cela signifie que la densité de porosité reste constante, ce qui entraîne une répartition uniforme des propriétés mécaniques dans toute la structure.

- Modèle de porosité non uniforme (IP-II)

Ce modèle suppose une répartition variable de la porosité à travers l'épaisseur de la poutre. La variation peut être symétrique ou asymétrique, ce qui reflète mieux les irrégularités des matériaux gradués fabriqués par des procédés réels.

III.2-2. Porosités de densité de masse

Ce modèle de porosité repose sur la distinction entre la densité de masse réelle et la densité de masse apparente. Les formulations de la densité de masse réelle et apparente peuvent être exprimées comme suit [65] :

$$m_0 = \int_h \rho(z) dz \text{ at } \zeta = 0 \text{ and } m(\zeta) = \int_h \rho(z) dz \text{ at } \zeta > 0$$

$$E(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + E_m - \frac{m_0 - m(\zeta)}{m_0} (E_c + E_m) \quad \underline{\text{IP-III}} \quad (\text{III.2})$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + \rho_m - \frac{\zeta}{2} (\rho_c + \rho_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right)$$

III. 2-3. Poutres S-FGM imparfaites

Les caractéristiques des matériaux des poutres S-FG utilisant les modèles de porosité uniforme (IP-I) et non uniforme (IP-II) peuvent être exprimées comme suit [128] :

$$P_1 = (P_c - P_m) \left[1 - \frac{1}{2} \left(1 - 2 \frac{z}{h} \right)^p \right] + P_m - \frac{\zeta}{2} (P_c + P_m) \text{ for } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad \underline{\text{IP-I}} \quad (\text{III.3})$$

$$P_2 = (P_c - P_m) \left[\frac{1}{2} \left(1 + 2 \frac{z}{h} \right)^p \right] + P_m - \frac{\zeta}{2} (P_c + P_m) \text{ for } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0$$

$$P_1 = (P_c - P_m) \left[1 - \frac{1}{2} \left(1 - 2 \frac{z}{h} \right)^p \right] + P_m - \frac{\zeta}{2} (P_c + P_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \text{ for } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad \underline{\text{IP-II}} \quad (\text{III.4})$$

$$P_2 = (P_c - P_m) \left[\frac{1}{2} \left(1 + 2 \frac{z}{h} \right)^p \right] + P_m - \frac{\zeta}{2} (P_c + P_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \text{ for } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0$$

III. 2-4. Poutres E-FGM Imparfaites

Dans cette étude, un nouveau modèle de distribution de porosité, nommé IP-IV, est proposé sur la base de la loi de mélange exponentielle afin de prendre en compte la présence de vides. Ce point est devenu crucial dans l'analyse des structures basées sur la loi de mélange des matériaux fonctionnellement gradués exponentiels (E-FGM). L'intégration des effets de porosité dans les modèles permet d'améliorer la précision des prédictions et de mieux représenter le comportement réel des matériaux dans les applications d'ingénierie.

La porosité est une caractéristique inhérente à de nombreux matériaux avancés, résultant des processus de fabrication tels que le frittage, le dépôt ou le laminage. Négliger cet aspect peut

Chapitre 3 : Modèle Analytique “ Nouvelle approche mathématique ”

conduire à une surestimation de la rigidité et de la résistance des structures, compromettant ainsi leur fiabilité ou leur efficacité. Le modèle proposé aide les ingénieurs et chercheurs à mieux comprendre l'impact de la distribution des porosités sur la réponse des structures, permettant ainsi des conceptions plus sûres et plus robustes.

Les propriétés mécaniques des poutres E-FGM imparfaites, telles que le module d'élasticité et la densité, sont modélisées à l'aide de la loi de mélange exponentielle modifiée pour inclure l'influence de la porosité. Les formules générales de ces propriétés peuvent être exprimées comme suit :

$$P = P_0 e^{p\left(z+\frac{h}{2}\right)} \quad \text{(III.5)}$$

$$P = P_0 \left(1 - \frac{\zeta}{2} \left(1 - 2 \frac{z}{h}\right)\right) e^{p\left(z+\frac{h}{2}\right)} \quad \text{IP-IV} \quad \text{(III.6)}$$

III.3. Dédution des équations du mouvement :

Afin d'établir les équations du mouvement gouvernantes des poutres FG imparfaites, une nouvelle théorie de la déformation par cisaillement intégrale de premier ordre est proposée. Cette approche permet de mieux prendre en compte les effets de la déformation transversale dans le cas des poutres courtes ou épaisses, ce qui n'est pas correctement capturé par la théorie d'Euler-Bernoulli classique.

Les champs de déplacement intégral sont alors définis comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, z, t) &= u_0(x, t) + zk \int \theta(x, t) dx \\ w(x, z, t) &= w_0(x, t) \end{aligned} \quad \text{(III.7)}$$

L'utilisation de cette théorie permet de prendre en compte, de manière plus réaliste, les effets de la porosité et des imperfections sur la déformation de la poutre FG. En effet, les défauts dans la structure du matériau, tels que les vides ou les irrégularités dans la distribution des matériaux, influencent la réponse mécanique et dynamique de la poutre. L'objectif est d'obtenir une expression plus exacte du mouvement en tenant compte des variations de matériau dues à la porosité et de l'effet de cisaillement.

Une fois les champs de déplacement définis, les équations du mouvement gouvernantes peuvent être dérivées en appliquant les principes de la mécanique des milieux continus et en utilisant

Chapitre 3 : Modèle Analytique “ Nouvelle approche mathématique ”

les équations d'équilibre dynamique pour les poutres FG avec porosité. Ces équations sont ensuite résolues pour obtenir les réponses dynamiques de la poutre sous différentes conditions de chargement et de soutien, permettant ainsi d'évaluer l'impact des paramètres de porosité sur le comportement vibratoire et mécanique des structures en matériaux fonctionnellement gradués.

$u_0(x,t)$ et $w_0(x,t)$ sont les inconnues (déplacements axiaux et transversaux), respectivement, t est le temps et θ est la rotation de la section transversale. Conformément aux déplacements définis dans l'Équation (7), le champ de déformations peut être obtenu comme suit :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + zk\theta \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w_0}{\partial x} + k \int \theta(x,t) dx\end{aligned}\tag{III.8}$$

En s'appuyant sur la méthode de type Navier, les intégrales mentionnées précédemment peuvent être exprimées sous forme dérivée comme suit :

$$\int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x}, A' = -\frac{1}{\alpha^2}, k_1 = -\alpha^2\tag{III.9}$$

Cette reformulation permet d'exprimer les intégrales en termes de fonctions propres trigonométriques associées aux conditions de bord simplement appuyées. En utilisant cette approche, les équations différentielles partielles peuvent être simplifiées en équations différentielles ordinaires, facilitant ainsi leur résolution.

Avantages de l'Approche Navier

La méthode de type Navier offre plusieurs avantages dans l'analyse des plaques et des poutres:

1. **Simplicité Mathématique** : En utilisant des fonctions trigonométriques comme solutions propres, la méthode réduit la complexité de l'intégration et de la résolution des équations.
2. **Adaptabilité** : Cette méthode est particulièrement efficace pour des conditions de bord simplement appuyées, souvent rencontrées dans les applications réelles.

3. **Précision** : En décomposant les réponses structurelles en séries modales, l'approche permet une analyse précise des comportements vibratoires et dynamiques.

Applications Pratiques

Cette méthode est largement utilisée pour modéliser les comportements dynamiques des structures en matériaux gradués fonctionnels (FGM), notamment dans les plaques soumises à des charges thermiques et mécaniques. En combinant l'approche Navier avec des lois de gradation avancées et des modèles de porosité, les ingénieurs peuvent prédire avec précision les réponses vibratoires des structures complexes dans des domaines tels que l'aérospatiale, la mécanique et le génie civil.

III.3.1 Théorie des Poutres Classique (CBT)

La théorie classique des poutres (CBT), qui néglige les déformations dues au cisaillement $\gamma_{xz} = 0$, simplifie les formulations mécaniques en supposant que les sections transversales restent perpendiculaires à l'axe neutre de la poutre après déformation. Ainsi, l'équation (8) se réduit à la forme suivante [129] :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (\text{III.10})$$

En supposant que les composants du matériau de la poutre fonctionnellement graduée (FG) suivent la loi de Hooke, la relation constitutive peut être exprimée comme suit [129] :

$$\sigma_x = \overline{Q_{11}}(\zeta) \varepsilon_x = \overline{Q_{11}}(\zeta) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \quad (\text{III.11})$$

ou $\overline{Q_{11}}$ représente le module d'élasticité, qui varie en fonction de l'épaisseur selon la distribution du matériau :

$$\overline{Q_{11}}(\zeta) = E(z) \quad (\text{III.12})$$

Les résultantes des contraintes, comprenant la force axiale et le moment de flexion, peuvent être exprimées respectivement comme suit :

$$N = \overline{A} \frac{\partial u_0}{\partial x} - \overline{B} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (\text{III.13})$$

$$M = \bar{B} \frac{\partial u_0}{\partial x} - \bar{D} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}$$

Où $\bar{A}$, $\bar{B}$ et $\bar{D}$ sont les composants de rigidité de la poutre fonctionnellement graduée (FG) poreuse sont définis comme suit [129] :

$$(\bar{A}, \bar{B}, \bar{D}) = \int_A \bar{Q}_{11}(\zeta)(1, z, z^2) dA$$

Les conditions d'équilibre de la poutre sont définies par [15]:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\partial M}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = J_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

le moment d'inertie de masse I_0 de la poutre est exprimé par

$$J_0 = \int_A \rho(z) dA \quad (\text{III.15})$$

En utilisant les relations d'équilibre établies précédemment pour la poutre fonctionnellement graduée (FG) et après application de techniques de simplification mathématique, on obtient l'équation différentielle gouvernant le comportement en vibration libre de la poutre FG selon la théorie classique des poutres (CBT) [129] :

$$\bar{\eta} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} = -J_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (\text{III.16})$$

Dans lequel l'expression ci-dessous s'applique

$$\bar{\eta} = \left(\bar{D} - \frac{\bar{B}^2}{\bar{A}} \right) \quad (\text{III.17})$$

Cette équation permet de décrire le comportement dynamique des poutres FG en tenant compte de la variation des propriétés mécaniques à travers l'épaisseur, essentielle pour prédire leur réponse vibratoire sous diverses conditions de chargement.

III.3.2. Nouvelle théorie de premier ordre FSDBT

Les relations régissant le comportement de la poutre fonctionnellement graduée (FG) dans le cadre de la **Nouvelle Théorie de Déformation au Cisaillement de Premier Ordre (New-FSDBT)** sont formulées comme suit :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \overline{Q_{11}}(\zeta) \varepsilon_x = \overline{Q_{11}}(\zeta) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + z \beta \theta \right) \\ \tau_{xz} &= \overline{Q_{55}}(\zeta) \gamma_{xz} = \overline{Q_{55}}(\zeta) \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \beta \int \theta(x, t) dx \right)\end{aligned}\tag{III.18}$$

Où $\overline{Q_{55}}(\zeta)$ est la rigidité au cisaillement.

Ces relations permettent d'incorporer l'effet du cisaillement transverse, améliorant ainsi la précision des prédictions pour les poutres FG de grande épaisseur ou soumises à des charges complexes.

Les résultats des contraintes sont

$$\begin{aligned}N &= \bar{A} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \bar{B} k \theta \\ M &= \bar{B} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \bar{D} k \theta\end{aligned}\tag{III.19}$$

$$Q = C^s \bar{G} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \beta \int \theta(x, t) dx \right)$$

Dans ce cadre, le facteur de correction du cisaillement C^s et le composant de rigidité du matériau sont définis comme suit :

C^s est le facteur de correction du cisaillement, essentiel pour compenser la distribution non uniforme des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur de la poutre, A représente le composant de rigidité en cisaillement du matériau,

$$\bar{G} = \int_A \overline{Q_{55}}(\zeta) dA\tag{III.20}$$

En tenant compte de l'inclusion des déformations en cisaillement et des effets de l'inertie rotatoire dans la **Nouvelle Théorie de Déformation au Cisaillement de Premier Ordre (New-FSDBT)**, les conditions d'équilibre de la poutre fonctionnellement graduée (FG) poreuse s'écrivent comme suit :

$$Q = \frac{\partial M}{\partial x} - \kappa A' \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial t^2} \quad (\text{III.21a})$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = J_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (\text{III.21b})$$

n appliquant le principe de Hamilton [130] et en intégrant les équations différentielles tout en prenant en compte les conditions d'équilibre de la structure FG (Fonctionnellement Gradée) avec les relations mentionnées précédemment, on obtient, après avoir appliqué des techniques de simplification mathématique, l'équation différentielle simplifiée qui prédit le comportement vibratoire de la poutre FG dans le cadre de la nouvelle théorie FSDBT (First-order Shear Deformation Beam Theory).

Cette équation différentielle simplifiée permet de modéliser de manière efficace les vibrations de la poutre FG en tenant compte des propriétés matérielles variables le long de son épaisseur. La FSDBT, en particulier, offre une approche plus précise pour décrire la déformation due au cisaillement, ce qui est essentiel pour les structures où les effets de cisaillement ne peuvent être négligés.

$$\frac{\eta}{A'} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + J_0 \left(1 - \frac{\eta}{A' C^s \bar{G}} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - \kappa \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{J_0 \kappa}{C^s \bar{G}} \frac{\partial^4 w_0}{\partial t^4} = 0 \quad (\text{III.22})$$

dans lequel l'expression ci-dessous s'applique

$$\kappa = \left(J_2 - \frac{J_1^2}{J_0} \right) \quad (\text{III.23})$$

III.4. Résolution des équations du mouvement :

Dans cette étude, les poutres poreuses FG (Fonctionnellement Gradées) sont analysées sous des conditions aux limites de type simplement appuyées (SS). Une solution de type Navier [131-132] est employée pour résoudre les équations gouvernantes du système. Par ailleurs, les formules de l'équation (24) sont utilisées pour décrire les fonctions de variables de déplacement des poutres.

Cette approche permet de modéliser avec précision le comportement mécanique des poutres poreuses FG, en tenant compte de leur microstructure poreuse et de la variation graduelle des propriétés matérielles. Les conditions aux limites simplement appuyées simplifient l'analyse tout en restant représentatives de nombreuses configurations pratiques. La méthode de Navier, basée sur des séries trigonométriques, est particulièrement adaptée pour résoudre les équations différentielles

Chapitre 3 : Modèle Analytique “ Nouvelle approche mathématique ”

gouvernantes dans ce contexte, offrant une solution analytique efficace pour prédire les déplacements et les contraintes au sein de la poutre.

En utilisant les expressions fournies par l'équation (24), il est possible de décrire les champs de déplacement en fonction des variables spatiales, ce qui permet d'explorer en détail la réponse vibratoire et statique des poutres FG poreuses. Cette méthodologie ouvre la voie à une meilleure compréhension des propriétés mécaniques de ces matériaux innovants, notamment dans des applications où la légèreté et la résistance mécanique sont des critères essentiels.

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ w_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_n e^{i\omega t} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\ W_n e^{i\omega t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\ X_n e^{i\omega t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.24})$$

Où U_n, W_n and X_n sont des paramètres arbitraires doivent être déterminés et n désigne le numéro du mode.

Remplacement de l'équation. (24) dans l'équation. (22), l'équation de fréquence est trouvée pour le faisceau FG dans le cadre de FSDBT :

$$\eta \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 - \omega^2 \left\{ J_0 + \left[\kappa + \frac{\eta J_0}{C^s G} \right] \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right\} + \frac{\kappa J_0}{C^s G} \omega^4 = 0 \quad (\text{III.25})$$

De même, en remplaçant Eq. (24) dans l'équation. (16), l'équation de fréquence suivante est trouvée pour le faisceau FG dans le cadre du CBT [129] :

$$\eta \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 + \omega^2 J_0 = 0 \quad (\text{III.26})$$

III.5. Conclusion

L'étude menée dans ce chapitre a permis d'établir une formulation théorique approfondie des poutres fonctionnellement graduées poreuses, en intégrant les effets de la porosité et des variations de propriétés mécaniques le long de l'épaisseur. La prise en compte des différentes lois de distribution du matériau ainsi que des modèles de porosité a permis de mieux comprendre l'impact de ces paramètres sur la réponse mécanique et vibratoire de ces structures.

Chapitre 3 : Modèle Analytique “ Nouvelle approche mathématique ”

Les équations du mouvement dérivées dans ce travail, basées sur une nouvelle théorie de la déformation au cisaillement de premier ordre (FSDBT), offrent une modélisation plus réaliste des poutres FG, notamment pour les structures épaisses où l'effet du cisaillement ne peut être négligé. L'utilisation de la méthode de Navier a également démontré son efficacité pour obtenir des solutions analytiques sous certaines conditions aux limites, facilitant ainsi l'analyse des phénomènes vibratoires.

Les résultats théoriques obtenus constituent une base solide pour l'optimisation des structures FG poreuses dans diverses applications industrielles, notamment dans l'aéronautique, le biomédical et les structures avancées en génie mécanique. Toutefois, il serait pertinent d'étendre cette étude en intégrant des approches numériques et expérimentales afin de valider les prédictions théoriques et d'explorer des configurations plus complexes.

En perspective, l'extension de cette analyse aux structures tridimensionnelles, ainsi qu'à d'autres conditions de chargement, pourrait permettre d'améliorer encore la compréhension du comportement des poutres FG poreuses. De plus, l'influence de facteurs environnementaux tels que la température et l'humidité pourrait être prise en compte pour affiner la modélisation et accroître la fiabilité des prédictions.

Chapitre IV
Résultats et Discussion

Résultats et Discussion

IV.1. Introduction

Ce chapitre présente une analyse détaillée des résultats obtenus pour l'étude des poutres fonctionnellement graduées (FG) parfaites et imparfaites en tenant compte des effets de la porosité et de la distribution du matériau sur les caractéristiques vibratoires. L'objectif principal est d'évaluer l'impact de différents paramètres structurels, notamment le rapport d'élancement (L/h), l'indice de gradation des matériaux (p) et les schémas de distribution de la porosité sur les fréquences propres des poutres FG.

Les résultats sont examinés pour différents types de poutres FG, notamment :

- Poutres exponentiellement graduées (E-FG)
- Poutres polynomiales graduées (P-FG)
- Poutres symétriquement graduées (S-FG)

L'analyse est menée en comparant plusieurs théories de déformation, dont la Nouvelle Théorie de Déformation au Cisaillement de Premier Ordre (New-FSDBT) et la Théorie Classique des Poutres (CBT). De plus, des distributions spécifiques de porosité, telles que IP-I, IP-II, IP-III et IP-IV, sont prises en compte afin d'évaluer leur influence sur le comportement vibratoire des structures étudiées.

Les principales investigations de ce chapitre portent sur :

- L'impact de la porosité sur la réduction des fréquences propres pour différentes distributions de vides.
- L'effet du rapport d'élancement (L/h) sur les fréquences des poutres P-FG et S-FG.
- L'interaction entre l'indice de gradation des matériaux et la porosité pour prédire les tendances vibratoires des poutres FG imparfaites.
- La comparaison entre les poutres parfaites et poreuses afin de déterminer l'influence de l'imperfection sur la stabilité dynamique.

L'analyse comparative avec les résultats existants dans la littérature permet de valider la précision du modèle utilisé et de mettre en évidence les avantages de la New-FSDBT pour la prédiction des comportements dynamiques des poutres FG.

IV.2. Discussion des résultats numériques :

Dans cette section, les résultats numériques pour les poutres FG (Fonctionnellement Graduées) parfaites et imparfaites sont comparés et validés par rapport aux résultats disponibles dans la

littérature scientifique. Toutes les poutres FG étudiées sont constituées d'un mélange d'Alumine (Al_2O_3) et d'Aluminium (Al), dont les propriétés matérielles sont détaillées dans le tableau 1.

Le paramètre de fréquence de vibration libre adimensionnel pour les poutres FG est défini comme suit [15]

$$\bar{\omega} = \omega \frac{L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \quad (IV.1)$$

Tableau IV.1 : les propriétés matérielles de la poutre FG :

Matériaux I	$E_{st} = 210Pa$, $E_{Al} = 70Pa$ $\rho_{st} = 7850kg / m^3$, $\rho_{Al} = 2707kg / m^3$ $\nu_{st} = \nu_{Al} = 0.3$
Matériaux II	$E_c = 210GPa$, $E_m = 70GPa$ $\rho_m = 2700kg / m^3$, $\rho_c = 3800kg / m^3$ $\nu_m = \nu_c = 0.23$
Matériaux III	$E_c = 210GPa$, $E_m = 70GPa$ $\rho_m = 2702kg / m^3$, $\rho_c = 3960kg / m^3$ $\nu_m = \nu_c = 0.3$

IV.3. Validation Numérique des Fréquences Propres des Poutres FG

La Tableau 2 compare les résultats numériques des cinq premières fréquences propres d'une poutre fonctionnellement graduée (FG) parfaite composée du matériau I, en fonction de l'exposant de gradation des matériaux (p). Les valeurs obtenues à l'aide de la nouvelle Théorie de Déformation au Cisaillement de Premier Ordre Modifiée (New-FSDBT) sont confrontées aux résultats d'Avcar [129], Li [133], Simsek [134], ainsi que Kahya et Turan [135], qui ont utilisé la théorie FSDBT traditionnelle. Comme l'illustre la Table 2, les résultats issus du modèle proposé montrent un excellent accord avec ceux d'Avcar [129] et de Li [133], validant ainsi la précision et la fiabilité de l'approche développée.

La Tableau 3 présente une comparaison des fréquences fondamentales adimensionnelles d'une poutre FG parfaite constituée du matériau II, sous différentes valeurs de l'exposant de gradation (p) et pour plusieurs rapports longueur/épaisseur (L/h). Les résultats obtenus dans cette étude sont vérifiés par rapport à ceux d'Avcar [129], Sina et al. [8], Simsek [134], Pradhan et Chakraverty [136], Cheng et Chang [137], et Nguyen et al. [138], qui ont utilisé la Théorie Classique des Poutres (CBT) et la FSDBT traditionnelle.

Tableau 2 : Variation des fréquences propres (rad/s) de la poutre P-FG en fonction de l'indice d'exposant du matériau (p).

Num éro du mode (n)	$p=0$				$p=1$				$p=\infty$				
	Kahya				Kahy				Simse k [134]	Kahy			
	Prése	Avcar	Li	and	Prése	Avcar	Li	a and		Prése	Avcar	Li	a and
	n te	[129]	[133]	Turan	n te	[129]	[133]	Turan		n te	[129]	[133]	Turan
1	6615.	6615.	6615.	6742.8	6457.	6457.	6457.	6574.	6443.	6728.	6728.	6728.	6858.
	66	66	66	3	93	93	93	81	08	89	89	89	23
2	21904	21904	21904	22788	21603	21603	2603.	22456	21470	22279	22279	22279	23178
	.14	.14	.14	8.88	.18	.18	18	.85	.95	.03	.03	.03	.91
3	40402	40402	40402	42195.	40145	40145	40145	41942	39775	41094	41094	41094	42917
	.57	.57	.57	37	.42	.42	.42	.82	.55	.04	.04	.04	.53
4	59865	59865	59865	62259.	59779	59779	59779	62243	59092	60889	60889	60889	63325
	.40	.40	.40	45	.01	.01	.01	.73	.37	.98	.98	.98	.00
5	79534	79534	79534	82223.	79686	79686	79686	82505	78638	80895	80895	80895	83630
	.57	.57	.57	70	.16	.16	.16	.87	.36	.78	.78	.78	.93

Tableau 3 Les fréquences adimensionnelles de la poutre P-FG en fonction de l'indice (p) et du rapport d'élancement (L/h)

Théorie	Comparaison	$p=0$			$p=0.3$		
		$L/h=10$	$L/h=30$	$L/h=100$	$L/h=10$	$L/h=30$	$L/h=100$
CBT	Présente	2.8491	2.8492	2.8491	2.7427	2.7427	2.7427
	Avc ar [129]	2.849	2.849	2.849	2.743	2.743	2.743
	Sina et al. [8]	2.849	2.849	2.849	-	-	-
	Simsek [139]	2.837	2.847	2.848	2.731	2.741	2.743
	Pradhan and Chakraverty [28]	2.837	2.847	2.849	2.768	2.778	2.779
	Cheng and Chang [137]	-	-	-	-	-	2.743
FSDBT	Présente	2.8023	2.8438	2.8486	2.7003	2.7378	2.7423
	Avc ar [129]	2.805	2.844	2.849	2.703	2.738	2.742
	Sina et al. [8]	2.797	2.843	2.848	2.695	2.737	2.742
	Simsek [139]	2.804	2.843	2.848	2.701	2.738	2.742
	Pradhan and Chakraverty [28]	2.805	2.844	2.848	2.738	2.774	2.778
	Nguyen et al. [138]	2.804	2.844	2.849	2.702	2.738	2.742
	Cheng and Chang [137]	-	-	-	2.702	-	-

IV.4. Analyse Comparée des Fréquences Propres des Poutres FG Parfaites et Imparfaites

La Tableau 4 illustre la comparaison des trois premières fréquences propres adimensionnelles des poutres fonctionnellement graduées parfaites (P-FG) constituées du matériau III, en fonction de l'exposant de gradation des matériaux (p).

Tableau IV.4 les Trois premières fréquences adimensionnel du faisceau P-FG en fonction de l'indice d'exposant du matériau variable (p).

Numéro du Mode (n)	Théorie	p							
		0	0.2	0.5	1	2	5	10	∞
1	Présente	5.1525	4.8058	4.4098	3.9949	3.6425	3.4401	3.3190	2.6772
	Avcar [129]	5.1525	4.8058	4.4098	3.9948	3.6425	3.4401	3.3190	2.6772
	Simsek [134]	5.1525	4.8066	4.4083	3.9902	3.6344	3.4312	3.3134	2.6772
	Thai and Vo [26]	5.1527	-	4.4107	3.9904	3.6264	3.4012	3.2816	-
	Nguyen et al. [29]	5.1525	4.8047	4.4075	3.9902	3.6344	3.4312	3.3135	-
	Kahya and Turan [135]	5.2219	-	4.4693	4.0497	3.6936	3.4882	3.3643	2.7133
	Chen and Chang [137]	5.1525	-	4.4079	3.9904	3.6346	3.4315	3.3136	-
2	Présente	17.8710	16.7452	15.4443	14.0478	12.7894	11.8948	11.3548	9.2857
	Avcar [129]	17.8711	16.7453	15.4443	14.0478	12.7895	11.8949	11.3548	9.2857
	Thai and Vo [26]	17.8812	-	15.4588	14.0100	12.6405	11.5431	11.0240	-
	Nguyen et al. [138]	17.8711	16.7393	15.4250	14.0030	12.7120	11.8157	11.3073	-
	Chen and Chang [137]	17.8711	-	15.4277	14.0064	12.7179	11.8226	11.3119	-
3	Présente	34.1449	32.1236	29.7662	27.1781	24.7138	22.6712	21.4402	17.7414
	Avcar [129]	34.1149	32.1236	29.7662	27.1781	24.7137	22.6714	21.4402	17.7414
	Thai and Vo [26]	34.2097	-	29.8382	27.0979	24.3152	21.7158	20.5561	-
	Nguyen et al. [138]	34.1449	32.1098	29.7146	27.0525	24.4970	22.4642	21.3219	-
	Chen and Chang [137]	34.1449	-	29.7231	27.0683	24.5242	22.4933	21.3399	-

Chapitre 4 : Résultats et Discussion

Les résultats obtenus en utilisant la Nouvelle Théorie de Déformation au Cisaillement de Premier Ordre (New-FSDBT) sont confrontés à ceux de Simsek [134], Nguyen et al. [138], Kahya et Turan [135], Thai et Vo [26], ainsi que Chen et Chang [137], qui ont appliqué la FSDBT traditionnelle.

L'analyse comparative des Tableaux 3 et 4 montre clairement que les résultats obtenus à partir du modèle proposé sont en très bon accord avec ceux des études antérieures sur les poutres FG parfaites. Cette correspondance confirme la précision et la fiabilité de l'approche développée pour prédire les comportements vibratoires de ces structures avancées.

Il ressort également du tableau 4 que les résultats obtenus avec la New-FSDBT sont rigoureusement identiques à ceux rapportés par Avcar [129], mais présentent de légères différences avec ceux d'Al-Rjoub et Hamad. Cette divergence est principalement attribuée à l'omission de l'effet du coefficient de Poisson dans l'équation constitutive utilisée dans leur étude. Cela souligne l'importance de prendre en compte correctement toutes les propriétés mécaniques du matériau pour garantir une modélisation fidèle du comportement dynamique des poutres FG.

L'étude des fréquences propres met en évidence plusieurs tendances fondamentales :

- Influence du Nombre de Modes : Plus le nombre de modes vibratoires considérés est élevé, plus la fréquence propre augmente. Cela s'explique par la rigidité accrue associée aux modes supérieurs.
- Effet de l'Hétérogénéité du Matériau : Lorsque l'exposant de gradation (p) augmente, la fréquence des poutres FG poreuses diminue de manière significative. Cette tendance est due à l'augmentation de la proportion de matériau métallique, qui réduit la rigidité globale de la structure.

Tableau IV.5. Les trois premières fréquences des poutres P-FG parfaites/poreuses en fonction de l'indice d'exposant matérielle (p)

Type de la poutre	Numéro du Mode (n)	Théorie	p						
			0	0.2	0.5	1	2	5	∞
Parfaite $\zeta = 0$	1	Présente	5.4834	5.1019	4.6690	4.2210	3.8518	3.6675	2.8491
	2		21.9335	20.4076	18.6759	16.8839	15.4073	14.6699	11.3964
	3		49.3503	45.9172	42.0207	37.9889	34.6665	33.0073	25.6420
	1	Avcar [129]	5.4834	5.1019	4.6690	4.2210	3.8518	3.6675	2.8491
	2		21.9335	20.4076	18.6759	16.8839	15.4073	14.6699	11.3964

Imparfaite $\zeta = 0.1$	3		49.3503	45.9172	42.0207	37.9889	34.6665	33.0073	25.642
	1	Al-Rjoub and Hamad [58]	5.4834	5.1351	4.8072	4.5207	4.2877	4.0295	2.8491
	2		21.9335	20.4076	18.6759	16.8839	15.4073	14.6699	11.3964
	3		49.3503	45.9506	42.1617	38.3034	35.1372	33.3944	25.642
	1	Présente	5.5574	5.1449	4.6589	4.1269	3.6478	3.395286	2.50655
	2		22.2297	20.5795	18.6354	16.5076	14.5910	13.5811	10.0262
	3		50.0168	46.3038	41.9297	37.1422	32.8298	30.5576	22.5589
	1	Avcar [129]	5.5574	5.1449	4.6589	4.1269	3.6478	3.3953	2.5065
	2		22.2297	20.5795	18.6354	16.5076	14.5910	13.5811	10.0262
	3		50.0168	46.3038	41.9297	37.1422	32.8298	30.5576	22.5589
	1	Al-Rjoub and Hamad [58]	5.5574	5.1837	4.8244	4.4982	4.2144	3.9084	2.5065
	2		22.2297	20.5795	18.6354	16.5076	14.5910	13.5811	10.0262
	3		50.0168	46.3428	42.0992	37.5368	33.4594	31.1261	22.5589
Imparfaite $\zeta = 0.2$	1	Présente	5.6452	5.1961	4.6426	3.9917	3.3244	2.9002	1.9616
	2		22.5807	20.7842	18.5705	15.9667	13.2977	11.6008	7.8463
	3		50.8065	46.7645	41.7837	35.9251	29.9199	26.1017	17.6542
	1	Avcar [129]	5.6452	5.1961	4.6426	3.9917	3.3244	2.9002	1.9616
	2		22.5807	20.7842	18.5705	15.9667	13.2977	11.6008	7.8463
	3		50.8065	46.7645	41.7837	35.9251	29.9199	26.1017	17.6542
	1	Al-Rjoub and Hamad [58]	5.6452	5.2419	4.8444	4.4636	4.0897	3.6833	1.9616
	2		22.5807	20.7842	18.5705	15.9667	13.2977	11.6008	7.8463
	3		50.8065	46.8107	41.9915	36.4365	30.8147	27.0427	17.6542

IV.5. Impact de la Porosité sur les Fréquences Propres des Poutres FG

La Table 5 présente une comparaison des trois premières fréquences propres adimensionnelles des poutres FG parfaites et imparfaites (matériau III), en fonction de l'exposant de gradation (p) et de l'indice de porosité (ζ). Les résultats obtenus à l'aide de la New-FSDBT sont comparés aux travaux de référence d'Avcar [129] et d'Al-Rjoub et Hamad [58] dans le cadre de la FSDBT traditionnelle.

L'ajout de porosité dans le matériau induit plusieurs effets notables sur les fréquences vibratoires des poutres FG :

- **Diminution de la Rigidité** : La présence de vides entraîne une réduction de la rigidité effective du matériau, ce qui se traduit par une diminution des fréquences propres.
- **Réduction des Différences entre les Modes** : L'impact de la porosité est plus marqué pour les modes inférieurs et tend à s'atténuer pour les modes supérieurs, suggérant une modification plus homogène du comportement dynamique à haute fréquence.

- **Interaction entre Hétérogénéité et Porosité** : L'effet combiné de la gradation des matériaux et de la porosité amplifie la diminution des fréquences propres, nécessitant une prise en compte rigoureuse lors de la conception des structures FG destinées à fonctionner sous contraintes dynamiques.

IV.6. Analyse des Effets de la Porosité sur les Fréquences Propres des Poutres FG

Les Tableaux 6 et 7 présentent les résultats des trois premières fréquences propres pour les poutres fonctionnellement graduées de type P-FG, S-FG et E-FG, en tenant compte de l'impact de la porosité. L'étude est réalisée en appliquant à la fois la théorie classique des poutres (CBT) et la nouvelle théorie de déformation au cisaillement de premier ordre (New-FSDBT) afin de comparer leurs prédictions.

Une analyse comparative est menée sur trois modèles distincts de distribution de porosité (IP-I, IP-II et IP-III) pour les poutres P-FG et S-FG, tandis que pour le cas des E-FG, la comparaison est effectuée entre une poutre parfaite et une poutre présentant une nouvelle distribution de porosité (IP-E-FG).

Effet de l'Indice de Porosité sur les Fréquences Propres

Tableau IV. 6 les trois premières fréquences sans dimension de faisceaux P-, S-FG parfaits/poreux avec ($L/h=10$, $p=2$).

Théorie	Mode	Type de distribution	Parfaite	Imparfaite (IP-I)		Imparfaite (IP-II)		Imparfaite (IP-III)	
			$\zeta = 0$	$\zeta = 0.1$	$\zeta = 0.2$	$\zeta = 0.1$	$\zeta = 0.2$	$\zeta = 0.1$	$\zeta = 0.2$
CBT	1	P-FGM	3.852	3.6478	3.3244	3.8388	3.8171	3.5126	3.0369
	2		15.407	14.591	13.2977	15.3551	15.2684	14.0506	12.1475
	3		34.666	32.83	29.9198	34.549	34.354	31.614	27.332
	1	S-FGM	3.9917	3.83488	3.60428	3.99064	3.9852	3.7326	3.39814
	2		15.9667	15.3395	14.4171	15.9626	15.9409	14.9304	13.5926
	3		35.925	34.514	32.4386	35.9158	35.8672	33.5934	30.5832
New-FSDBT	1	P-FGM1	3.7952	3.5972	3.2828	3.7818	3.7598	3.4638	2.9989
	2		14.57	13.8399	12.6761	14.512	14.4225	13.3256	11.5803
	3		30.8806	29.4182	27.0748	30.742	30.5386	28.3226	24.7368
	1	S-FGM	3.9384	3.7865	3.5625	3.937	3.9314	3.6851	3.3579
	2		15.1733	14.6165	13.7894	15.1646	15.1398	14.2209	12.9895
	3		32.3098	31.2052	29.5486	32.2824	32.222	30.3498	27.8118

Selon les résultats présentés dans le Tableau 6, l'augmentation de l'indice de porosité entraîne une diminution marquée des fréquences propres pour les poutres ayant des distributions de type

IP-I et IP-III. Cette baisse s'explique par la réduction de la rigidité relative par rapport à la masse de la poutre, ce qui diminue la capacité de la structure à résister aux vibrations. Cette tendance est particulièrement prononcée lorsque la proportion de phases métalliques est inférieure à celle des phases céramiques, car la rigidité est fortement influencée par la teneur en céramique, qui offre une meilleure résistance mécanique.

En revanche, la distribution IP-II présente un comportement différent, où l'augmentation de la porosité n'entraîne pas une diminution aussi marquée des fréquences. Ce phénomène est attribué à une meilleure répartition de la porosité à travers l'épaisseur de la poutre, permettant un équilibre plus stable entre rigidité et masse.

Tableau IV.7 trois premières fréquences sans dimension de la poutre E-FG parfaits/poreux avec ($L/h=10$, $p=2$).

Théorie	Mode	Parfaite	Imparfaite			
		$\zeta = 0$	$\zeta = 0.05$	$\zeta = 0.1$	$\zeta = 0.15$	$\zeta = 0.2$
CBT	1	4.989	4.999	5.00916	5.0195	5.03
	2	19.956	19.996	20.0366	20.078	20.12
	3	44.901	44.991	45.0826	45.1754	45.27
FSDBT	1	4.9208	4.9304	4.94016	4.95006	4.96012
	2	18.9403	18.9746	19.0094	19.0448	19.0806
	3	40.273	40.3384	40.4048	40.4722	40.5406

Les résultats du tableau 7 montrent également une légère augmentation des trois premières fréquences propres avec l'accroissement de l'indice de porosité. Cette tendance s'explique par la réduction de la masse de la poutre, qui contrebalance en partie la diminution de la rigidité. Cependant, cet effet dépend du type de distribution de la porosité et des proportions relatives des matériaux métalliques et céramiques.

Comparaison entre la New-FSDBT et la CBT

L'analyse comparative entre les modèles CBT et New-FSDBT révèle que la New-FSDBT fournit des résultats plus précis et plus significatifs que la théorie classique. En intégrant les effets du cisaillement transverse et de l'inertie rotatoire, cette approche permet de mieux capturer les effets de la porosité et de prédire avec davantage de fiabilité le comportement vibratoire des poutres FG, en particulier lorsque leur épaisseur devient importante.

Implications pour la Conception des Structures FG

Les résultats obtenus soulignent l'importance de choisir judicieusement la distribution de porosité pour optimiser la performance dynamique des poutres FG. Les configurations de

porosité qui maintiennent un bon équilibre entre rigidité et masse offrent des performances vibratoires plus stables, tandis que des distributions mal adaptées peuvent réduire considérablement la résistance de la structure aux vibrations.

Tableau IV.8 : les trois premières fréquences de la poutre E-FG parfaits/poreux par rapport à la variation en fonction de l'indice d'exposant du matériau (p) avec ($L/h = 5$).

Type de la poutre	Numéro du Mode (n)	Théorie									
		CBT					New-FSDBT				
		p					p				
		0.2	0.5	1	2	5	0.2	0.5	1	2	5
Parfaite	1	5.4779	5.4493	5.3499	4.9890	3.4595	5.3881	5.3609	5.2661	4.9208	3.4364
	2	21.9116	21.7972	21.3996	19.9560	13.8379	20.5916	20.4964	20.1640	18.9403	13.4824
	3	49.3008	49.0438	48.1492	44.9010	31.1354	43.3872	43.2100	42.5884	40.2730	29.4338
Imparfaite $\zeta = 0.1$	1	5.5127	5.4833	5.3807	5.0092	3.4486	5.4212	5.3932	5.2955	4.9402	3.4257
	2	22.0510	21.9330	21.5228	20.0366	13.7942	20.7076	20.6096	20.2672	19.0094	13.4419
	3	49.6146	49.3494	48.4264	45.0826	31.0370	43.6030	43.4206	42.7818	40.4048	29.3504
Imparfaite $\zeta = 0.2$	1	5.5492	5.5188	5.4129	5.0300	3.4368	5.2071	5.1819	5.0937	4.7702	3.3495
	2	22.1968	22.0750	21.6514	20.1200	13.7470	18.0162	17.9493	17.7138	16.8284	12.5176
	3	49.9427	49.6686	48.7156	45.2698	40.5794	34.3526	34.2569	33.9188	32.6202	25.6858

IV.7. Influence de la Porosité et de l'indice d'exposant du matériau sur les Fréquences Propres des Poutres E-FG

L'analyse des poutres fonctionnellement graduées exponentielles (E-FG), qu'elles soient poreuses ou parfaites, révèle une relation inverse entre le paramètre de fréquence et l'indice d'exposant du matériau (p). Cela signifie qu'une augmentation de p , qui traduit une plus forte concentration de matériau métallique dans la poutre, entraîne une réduction des fréquences propres. Ce phénomène est attribué à la diminution de la rigidité globale de la structure, le métal étant généralement moins rigide que la céramique.

Par ailleurs, l'analyse des résultats présentés dans le tableau 8 met en évidence une augmentation des fréquences propres avec le numéro de mode. Cette tendance est typique des structures vibrantes, car les modes supérieurs correspondent à des déformations plus complexes nécessitant une plus grande énergie, ce qui entraîne des valeurs de fréquences plus élevées.

Impact Spécifique de la Porosité

L'introduction de la porosité ajoute un effet supplémentaire au comportement vibratoire des poutres E-FG. Contrairement aux poutres parfaites, où les fréquences varient de manière plus marquée avec p , les poutres poreuses présentent une certaine stabilité des valeurs de fréquence

lorsque l'indice de porosité augmente.

Ce phénomène peut être expliqué par deux effets opposés :

1. Réduction de la rigidité due à la porosité : L'augmentation du taux de porosité diminue la densité de matière rigide dans la poutre, ce qui entraîne une réduction de la capacité de la structure à résister aux déformations et donc une diminution des fréquences.
2. Diminution de la masse de la poutre : En parallèle, la réduction de la masse associée à la porosité tend à contrebalancer cet effet en augmentant les fréquences propres, puisque des structures plus légères vibrent à des fréquences plus élevées.

L'équilibre entre ces deux mécanismes explique pourquoi les variations des fréquences propres sont moins marquées dans le cas des poutres poreuses, suggérant une stabilisation du comportement dynamique avec l'augmentation de l'indice de porosité.

IV.8. Analyse en Fonction du Type de Distribution de Porosité

[1] Distribution IP-II (Porosité Uniforme Modérée)

- Pour les modes 2 et 3, les fréquences vibratoires adimensionnelles diminuent de manière linéaire à mesure que l'indice de porosité augmente.
- Cette tendance suggère une influence plus progressive et homogène de la porosité sur la rigidité de la poutre, ce qui permet une meilleure prévisibilité de la réponse dynamique.
- Ce comportement peut être lié à une répartition plus équilibrée des vides dans la structure, limitant les effets localisés de perte de rigidité.

[2] Distribution IP-I (Porosité Concentrée ou Aléatoire)

- Contrairement au cas IP-II, les fréquences propres des poutres présentant une distribution IP-I montrent une diminution rapide et non linéaire avec l'augmentation du paramètre de porosité.
- Cette décroissance abrupte est probablement due à une répartition irrégulière ou localisée des vides, ce qui crée des zones de faiblesse structurelle plus marquées et réduit drastiquement la capacité de la poutre à résister aux vibrations.
- Cette tendance est particulièrement préoccupante pour les structures soumises à des charges dynamiques importantes, car elle peut accélérer l'apparition d'instabilités mécaniques.

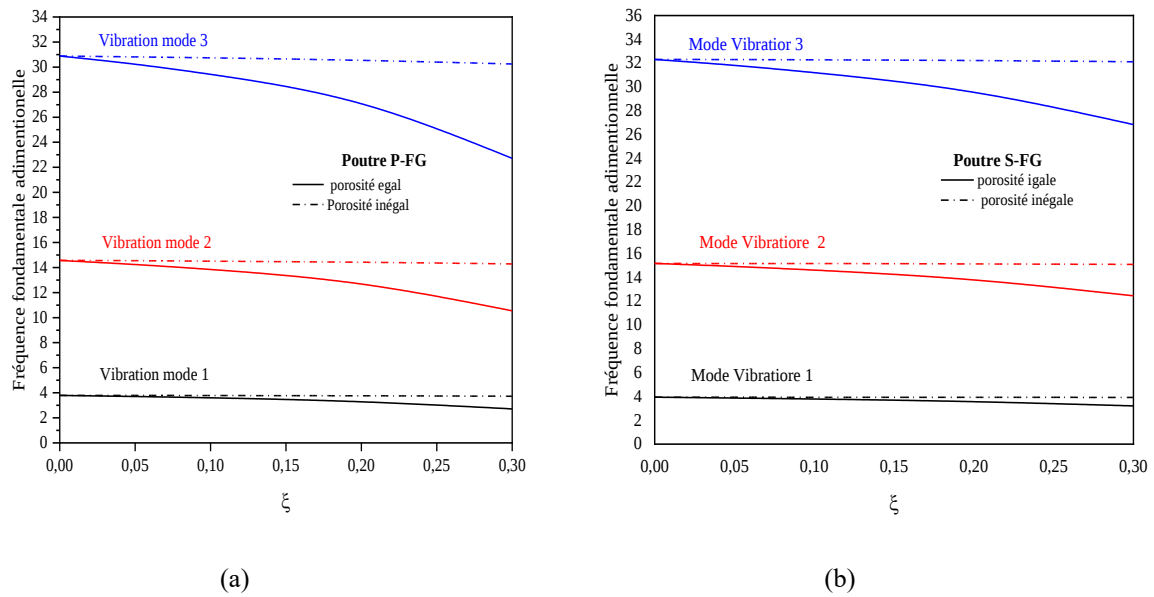


Fig. IV. 1 Variation des trois premières valeurs de la fréquence adimensionnelle des poreux P- et S-FG. poutres pour $L/h=10$, $p=2$ Et en fonction de différentes valeurs d'indice de porosité.

IV.9. Impact du Paramètre de Porosité sur la Réponse Vibratoire des Poutres P-FG et S-FG

L'influence du paramètre de porosité sur la réponse vibratoire des poutres P-FG et S-FG est étudiée pour trois modes vibratoires et deux distributions de porosité (IP-I et IP-II), comme illustré dans la Figure 1.

Indépendamment du mode de vibration considéré, l'augmentation du paramètre de porosité entraîne une diminution des fréquences propres adimensionnelles des poutres P-FG et S-FG. Cette réduction des fréquences s'explique par la diminution de la rigidité effective du matériau, induite par la présence de vides, qui réduit la capacité de la structure à résister aux vibrations.

Analyse en Fonction de la Distribution de Porosité

1) Distribution IP-II (Porosité Uniforme Modérée)

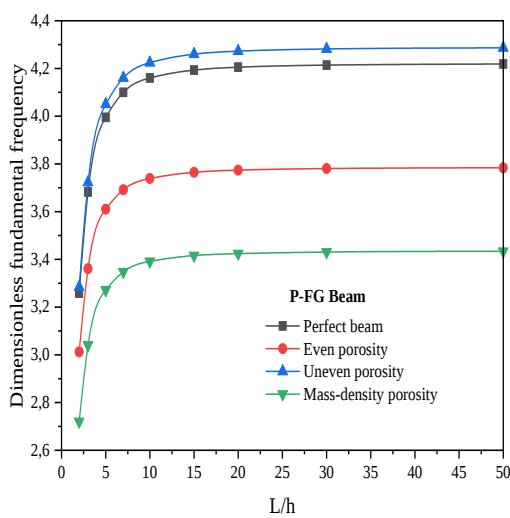
- Pour les modes 2 et 3, les fréquences propres adimensionnelles diminuent de manière linéaire à mesure que l'indice de porosité augmente.
- Cette tendance suggère une réduction progressive et homogène de la rigidité de la poutre, ce qui facilite la prévisibilité de la réponse vibratoire.
- La porosité étant répartie de manière équilibrée, les effets de réduction de la rigidité sont modérés, limitant les instabilités structurelles.

2) Distribution IP-I (Porosité Concentrée ou Localisée)

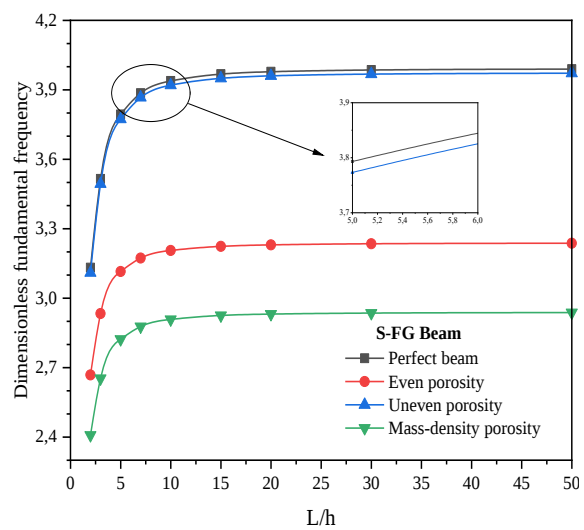
- Contrairement au cas IP-II, les fréquences propres des poutres présentant une

distribution IP-I diminuent rapidement et de manière non linéaire avec l'augmentation de l'indice de porosité.

- Cette chute abrupte des fréquences indique une altération significative de la rigidité structurelle, causée par une distribution non homogène des vides qui crée des zones de faiblesse locales.
- Une telle diminution non linéaire des fréquences peut conduire à une perte de stabilité structurelle, ce qui peut être critique pour les applications soumises à des charges vibratoires dynamiques.



(a)



(b)

Fig. IV. 2 Variation de la fréquence adimensionnelle des poutres poreuses P- et S-FG pour $p = 1$, $\zeta = 0.3$ par rapport à différents types de porosité et rapports L/h

IV.10. Effet du Rapport d'Élancement sur les Fréquences Propres des Poutres P-FG et S-FG

La Figure 2 illustre les courbes de fréquence en fonction du rapport d'élancement (L/h) pour les poutres P-FG et S-FG, en prenant en compte trois distributions de porosité : uniforme (IP-I), non-uniforme (IP-II) et dépendante de la densité de masse (IP-III).

Influence du Rapport d'Élancement (L/h) sur les Fréquences Propres

- Augmentation initiale des fréquences : Les courbes montrent que lorsque le rapport L/h augmente jusqu'à 20, les fréquences propres des poutres augmentent progressivement. Cette augmentation est due à la réduction de la rigidité en flexion relative à l'élancement, ce qui modifie la dynamique vibratoire de la poutre.
- Stabilisation au-delà de $L/h = 20$: Lorsque L/h dépasse cette valeur, les fréquences

propres adimensionnelles deviennent constantes, quelle que soit la distribution de porosité. Cela suggère que l'effet de l'élancement sur la rigidité structurelle atteint une limite où il n'influence plus significativement la réponse vibratoire.

Impact des Différentes Distributions de Porosité

L'analyse des courbes met en évidence des variations notables selon le type de porosité :

- Distribution dépendante de la densité de masse (IP-III) → Fréquences minimales
 - Parmi les configurations étudiées, la distribution IP-III entraîne les valeurs de fréquence les plus faibles.
 - Cette diminution est attribuée à une réduction plus marquée de la rigidité du matériau, la répartition de la porosité affectant davantage la densité de masse globale.
- Distribution non-uniforme (IP-II) → Fréquences supérieures à celles de la poutre parfaite
 - Contrairement à IP-III, la distribution IP-II produit des fréquences légèrement supérieures à celles de la poutre parfaite.
 - Cela suggère que certaines configurations de porosité peuvent contribuer à un renforcement localisé de la rigidité, offrant une meilleure résistance aux vibrations.

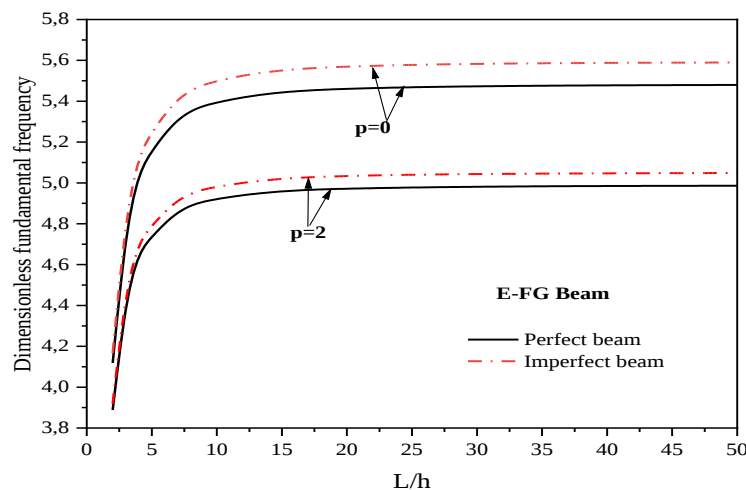


Fig. IV. 3 Variation de la fréquence adimensionnelle des poutres E-FG poreuses en fonction de différents rapports portée/hauteur. ($\zeta = 0.3$).

IV.11. Impact de la Distribution de Porosité sur les Fréquences Propres des Poutres E-FG, P-FG et S-FG

IV. 11.1 Effet de la Distribution de Porosité (IP-IV) sur les Poutres E-FG

La Figure 3 illustre l'impact de la distribution de porosité IP-IV sur les caractéristiques vibratoires des poutres E-FG. Les courbes montrent que la présence de vides dans la poutre E-FG n'induit pas d'instabilité dans le comportement vibratoire, contrairement à ce qui est observé dans d'autres types de poutres FG.

- Absence de réduction significative de la rigidité : Contrairement aux autres distributions de porosité, la configuration IP-IV ne diminue pas la rigidité globale de la poutre. Cette stabilité structurelle permet de maintenir une bonne résistance aux vibrations.
- Maintien des fréquences propres : L'analyse des courbes montre que la porosité ne provoque pas de baisse drastique des fréquences propres, ce qui suggère une meilleure répartition des vides dans la structure, permettant d'éviter une perte excessive de rigidité.

IV.12. Analyse des Fréquences Propres des Poutres E-FG, P-FG et S-FG

La Figure 4 présente les fréquences propres adimensionnelles des poutres E-FG, P-FG et S-FG parfaites et imparfaites, en tenant compte d'une porosité dépendante de la densité de masse et d'un indice de gradation des matériaux (p) variable.

- Relation inverse entre fréquence et indice de matériau (p)
 - Pour les trois types de poutres, il est clairement observé que la fréquence diminue lorsque l'indice de matériau (p) augmente.
 - Cette tendance s'explique par une augmentation de la fraction volumique du métal, qui réduit la rigidité globale de la structure et entraîne une baisse des fréquences propres.
- Comparaison entre les poutres parfaites et imparfaites
 - L'analyse comparative montre que les fréquences propres sont systématiquement plus élevées pour les poutres parfaites (sans porosité).
 - Cela est attendu, car la porosité introduit des vides dans la structure, ce qui diminue la masse volumique effective et réduit la rigidité globale.
- Comportement spécifique des poutres E-FG
 - Les poutres E-FG affichent une diminution plus rapide des fréquences par rapport aux poutres P-FG et S-FG.

- La différence entre les poutres E-FG parfaites et imparfaites est faible, suggérant que l'imperfection n'affecte pas significativement la réponse vibratoire, contrairement aux autres types de poutres.

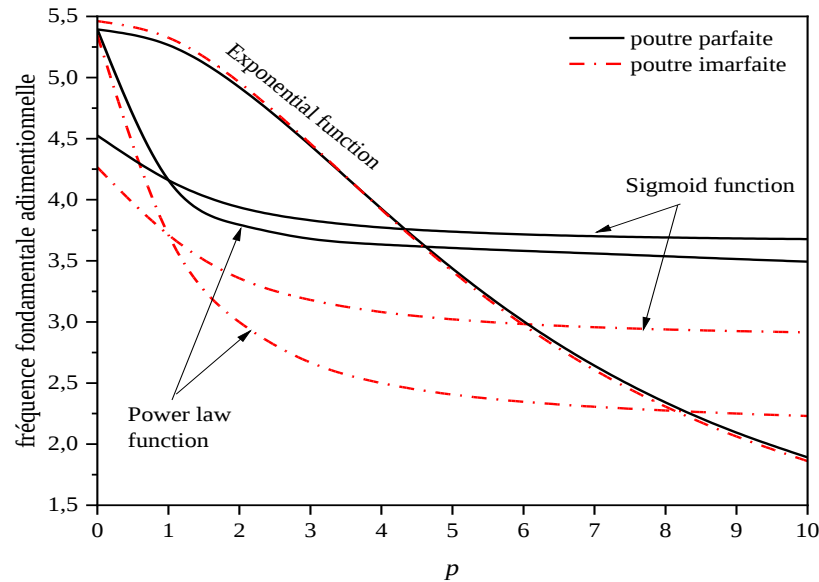


Fig. IV.4 Variation de la fréquence adimensionnelle des plaques E-, P-, S-FG parfaite/imparfaite en fonction de l'indice d'exposant du matériau variable avec ($L/h=10$, $\zeta=0.2$)

IV.13. Conclusion

Les résultats obtenus dans ce chapitre mettent en évidence l'importance de la porosité, de la distribution du matériau et des paramètres structuraux sur les fréquences propres des poutres FG. Plusieurs conclusions majeures peuvent être tirées de cette étude :

1. Impact de la porosité sur les fréquences propres
 - L'augmentation de l'indice de porosité entraîne une réduction marquée des fréquences propres, notamment pour les distributions IP-I et IP-III, qui introduisent des zones de faiblesse structurelle.
 - La distribution IP-II permet une atténuation plus progressive de la fréquence, suggérant une meilleure répartition des vides à travers l'épaisseur.
 - La distribution IP-IV, spécifique aux poutres E-FG, ne compromet pas la stabilité vibratoire, indiquant une meilleure optimisation de la rigidité.
2. Effet du rapport d'élancement (L/h)
 - L'augmentation du rapport d'élancement jusqu'à $L/h=20$ entraîne une hausse

progressive des fréquences, tandis que pour des valeurs supérieures, celles-ci deviennent stables.

- Les poutres présentant une porosité liée à la densité de masse (IP-III) affichent les valeurs de fréquence les plus faibles, indiquant une réduction significative de la rigidité effective.

3. Influence de l'indice de gradation des matériaux (p)

- Pour toutes les configurations étudiées, une augmentation de ppp entraîne une diminution des fréquences propres, en raison de la proportion plus élevée de matériau métallique, qui réduit la rigidité globale.
- Cette tendance est particulièrement marquée dans les poutres E-FG, où la réduction des fréquences est plus rapide que dans les poutres P-FG et S-FG.

4. Comparaison entre poutres parfaites et imparfaites

- Les poutres parfaites affichent des fréquences plus élevées que leurs homologues poreuses, confirmant que la présence de vides altère significativement la dynamique vibratoire.
- Toutefois, dans le cas des poutres E-FG, la différence entre les structures parfaites et imparfaites est moins prononcée, suggérant que cette configuration permet de mieux compenser les effets de la porosité.

Conclusion Générale et Perspectives

Conclusion Générale et Perspectives

Dans cette étude, une modélisation approfondie des poutres fonctionnellement graduées (FG) imparfaites a été réalisée en prenant en compte la porosité du matériau, un facteur souvent négligé dans les approches conventionnelles. Quatre modèles de distribution de porosité ont été introduits et étudiés afin d'évaluer leur influence sur les caractéristiques vibratoires des poutres FG sous différentes lois de gradation du matériau : S-FG, P-FG et E-FG.

L'analyse a été menée en appliquant à la fois la théorie classique des poutres (CBT) et une nouvelle version améliorée de la théorie de déformation au cisaillement de premier ordre (FSDBT), permettant de mieux capturer les effets du cisaillement transverse. Pour garantir la conformité aux conditions aux limites de contrainte nulle sur les surfaces libres de la poutre, un facteur de correction du cisaillement a été intégré dans le modèle.

L'étude a nécessité une approche analytique rigoureuse, combinant le principe variationnel de Hamilton et des techniques de simplification mathématique afin de dériver les équations différentielles régissant le comportement dynamique des poutres FG poreuses. Ces équations ont ensuite été résolues à l'aide de la méthode de Navier, permettant d'obtenir des solutions analytiques précises. Une validation théorique a été effectuée par comparaison avec les résultats de la littérature, confirmant la fiabilité et la robustesse du modèle proposé.

L'impact de divers paramètres a été examiné sur les fréquences fondamentales adimensionnelles, notamment :

- Le type et la distribution de la porosité
- Les paramètres de porosité et l'indice de porosité
- L'indice de gradation des matériaux (p)
- Le rapport d'élancement (L/h)

Principaux Résultats et Contributions

Les résultats obtenus permettent de dégager plusieurs conclusions majeures :

1. Validation et Fiabilité du Modèle Proposé

- Les fréquences propres obtenues avec la nouvelle théorie FSDBT sont en excellent accord avec celles des études antérieures, confirmant la précision du modèle et sa capacité à prédire fidèlement le comportement dynamique des poutres FG poreuses.

Conclusion Générale et Perspectives

- L'introduction des effets de porosité dans la formulation analytique a permis une meilleure représentation de la réalité physique des structures FG, contrairement aux approches classiques qui supposent souvent un matériau homogène et parfait.

2. Influence de la Distribution de Porosité

- Le modèle de distribution de la porosité a un impact significatif sur les fréquences propres des poutres FG.
- Les poutres P-FG et S-FG avec une distribution non uniforme (IP-II) présentent les fréquences les plus élevées, indiquant une rigidité plus importante et une meilleure résistance aux vibrations.
- En revanche, les poutres FG présentant une distribution de porosité basée sur la densité de masse (IP-III) affichent les fréquences les plus faibles, ce qui traduit une réduction plus marquée de la rigidité structurelle due à la présence accrue de vides.

3. Effet du Rapport d'Élancement (L/h)

- Lorsque le rapport d'élancement (L/h) augmente jusqu'à 20, les fréquences propres augmentent progressivement, en raison de la réduction de la flexibilité en flexion relative.
- Toutefois, au-delà de cette valeur, les fréquences se stabilisent, indiquant qu'une augmentation supplémentaire de L/h n'a pas d'impact significatif sur la réponse vibratoire.

4. Influence de l'Indice de Gradation des Matériaux (p)

- L'augmentation de ppp entraîne une diminution des fréquences propres, due à l'augmentation de la fraction volumique du métal, qui est mécaniquement plus souple que la céramique.
- Cet effet est particulièrement marqué dans les poutres E-FG, où la transition exponentielle entre les phases du matériau amplifie l'effet de la gradation sur les propriétés dynamiques.

5. Comportement Dynamique des Poutres E-FG

- Les poutres E-FG poreuses offrent une meilleure réponse vibratoire par rapport aux poutres P-FG et S-FG poreuses.

Conclusion Générale et Perspectives

- Contrairement aux autres types de poutres FG, la porosité dans les poutres E-FG ne réduit pas drastiquement la rigidité, ce qui explique leur stabilité vibratoire accrue.
- Cette robustesse fait des poutres E-FG un choix optimal pour les applications nécessitant des performances mécaniques fiables dans des environnements à haute sollicitation dynamique.

Perspectives et Travaux Futurs

Les résultats obtenus ouvrent plusieurs pistes de recherche pour approfondir l'étude des structures FG poreuses et imparfaites :

1. Intégration d'un Modèle Thermo-Mécanique Couplé

- Dans cette étude, seule l'influence de la porosité sur les propriétés mécaniques a été examinée.
- Il serait pertinent d'introduire un couplage thermo-mécanique, prenant en compte les effets de la température sur la réponse vibratoire des poutres FG, en particulier pour les applications aérospatiales et énergétiques.

2. Influence de Conditions aux Limites Complexes

- L'analyse menée repose sur des conditions aux limites simplement appuyées.
- Une étude complémentaire pourrait explorer l'impact de conditions encastrees, libres ou mixtes sur la dynamique des poutres FG, afin d'étendre l'applicabilité du modèle.

3. Développement de Méthodes Numériques Complémentaires

- L'approche analytique adoptée dans cette étude pourrait être complétée par des méthodes numériques avancées, telles que la méthode des éléments finis (FEM) ou la méthode des différences finies (FDM), pour traiter des configurations plus complexes.
- L'introduction d'algorithmes d'intelligence artificielle et d'optimisation, tels que les réseaux de neurones et les algorithmes génétiques, permettrait d'améliorer la prédiction des comportements vibratoires et d'optimiser la conception des structures FG.

4. Application aux Structures Réelles et Validation Expérimentale

Conclusion Générale et Perspectives

- Une extension naturelle de ce travail serait de réaliser des essais expérimentaux pour valider les modèles théoriques développés.
- Ces tests pourraient être effectués sur des prototypes de poutres FG fabriqués par impression 3D ou par procédés de fabrication additive avancés, permettant ainsi de comparer les résultats théoriques et les mesures expérimentales.
- L'application des résultats obtenus à des structures industrielles réelles, telles que les composants aérospatiaux, les implants biomédicaux ou les ponts en matériaux composites, constituerait une avancée majeure dans l'optimisation et la conception des structures FG intelligentes et adaptatives.

Conclusion Finale

Cette étude a permis de développer une approche analytique robuste pour l'analyse des poutres FG poreuses, en prenant en compte l'effet combiné de la porosité, du rapport d'élancement et de l'indice de gradation du matériau sur leur réponse vibratoire. L'intégration de la New-FSDBT a permis d'améliorer la précision des prédictions, ouvrant ainsi la voie à des applications concrètes dans des domaines variés, allant de l'ingénierie aérospatiale à la conception de biomatériaux avancés.

Les perspectives évoquées constituent des axes de recherche prometteurs pour l'optimisation et l'amélioration des performances des structures FG, avec pour objectif final le développement de matériaux et de structures intelligentes, capables de s'adapter aux environnements complexes et extrêmes

Références

Références

- [1] Koizumi, M. (1993), “The concept of FGM”, *Ceram. Trans. Funct. Graded Mater.*, 34, 3–10.
- [2] Koizumi, M. (1997), “FGM activities in Japan”, *Compos. Part B Eng.*, 28, 1–4. [https://doi.org/10.1016/S1359-8368\(96\)00016-9](https://doi.org/10.1016/S1359-8368(96)00016-9)
- [3] Lee, Y.D. and Erdogan, F. (1995), “Residual/thermal stresses in FGM and laminated thermal barrier coatings”, *Int. J. Fract.*, 69, 145–165. <https://doi.org/10.1007/BF00035027>
- [4] Abrate, S. (2008), “Functionally graded plates behave like homogeneous plates”, *Compos. Part B*, 39(1), 151-158. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2007.02.026>
- [5] Eltaher, M.A., Khairy, A., Sadoun, A.M. and Omar, F.A. (2014), “Static and buckling analysis of functionally graded Timoshenko nanobeams”, *Appl. Math. Comput.*, 229, 283-295. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.12.072>
- [6] Li, X.F. (2008), “A unified approach for analyzing static and dynamic behaviors of functionally graded Timoshenko and Euler–Bernoulli beams”, *J. Sound Vib.*, 318, 1210–1229. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.04.056>
- [7] Li, X.F., Wang, B.L. and Han, J.C. (2010), “A higher-order theory for static and dynamic analyses of functionally graded beams”, *Arch. Appl. Mech.*, 80, 1197–1212. <https://doi.org/10.1007/s00419-010-0435-6>
- [8] Sina, S.A., Navazi, H.M. and Haddadpour, H. (2009), “An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams”, *Mater. Des.* 30, 741–747. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2008.05.015>
- [9] Chen, D., Yang, J., and Kitipornchai, S. (2015) , “Elastic buckling and static bending of shear deformable functionally graded porous beam”, *Composite Structures*, 133, 54-61. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.07.052>
- [10] Wattanasakulpong, N. and Chaikittiratana, A. (2015), “Flexural vibration of imperfect functionally graded beams based on Timoshenko beam theory: Chebyshev collocation method”, *Meccanica*, 50, 1331–1342. <https://doi.org/10.1007/s11012-014-0094-8>
- [11] Chung, Y.L. and Chi, S.H. (2001), “The residual stress of functionally graded materials”, *J. Chinese Inst. Civ. Hydraul. Eng.*, 13, 1–9. <https://sid.ir/paper/616026/en>.
- [12] Chi, S.H. and Chung, Y.L. (2002), “Cracking in sigmoid functionally graded coating”, *J. Mech.* 18, 41–53.

- [13] Chi, S. and Chung, Y.L. (2003), “Cracking in coating–substrate composites with multi-layered and FGM coatings”, *Eng. Fract. Mech.*, 70, 1227–1243. [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(02\)00114-5](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(02)00114-5)
- [14] Chi, S.H. and Chung, Y.L. (2006a), “Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load—Part I: Analysis”, *Int. J. Solids Struct.*, 43, 3657–3674. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.04.011>
- [15] Chi, S.H. and Chung, Y.L. (2006b), “Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load—Part II: Numerical results”, *Int. J. Solids Struct.*, 43, 3675–3691. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.04.010>
- [16] Han, S.C., Lee, W.H., Park and W.T. (2009), “Non-linear analysis of laminated composite and sigmoid functionally graded anisotropic structures using a higher-order shear deformable natural Lagrangian shell element”, *Compos. Struct.*, 89, 8–19. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2008.08.006>
- [17] Aris, H., & Ahmadi, H. (2023), “Superharmonic and subharmonic vibration resonances of rotating stiffened FGM truncated conical shells”, *Structural Engineering and Mechanics*, 85(4), 545–562. <https://doi.org/10.12989/SEM.2023.85.4.545>
- [18] Delale, F. and Erdogan, F. (1983), “The crack problem for a nonhomogeneous plane”, *J. Appl. Mech.*, 50, 609. <https://doi.org/10.1115/1.3167098>
- [19] Pindera, M.-J., Arnold, S. M., Aboud, J., and Hui, D. (1994). Use of composite in Functionally Graded Materials, *composites Eng*, 4, 1-145
- [20] A. kumre, R.S. Rana, R. Purohit, (2017). A Review on mechanical property of sisal glass fiber reinforced polymer composites. *Mater. Today Proc*, 4 (2), 3466-3476. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2017.02.236>
- [21] Banakar, P., Shivanand, H. K., & Niranjana, H. B. (2012). Mechanical properties of angle ply laminated composites-A review. *International Journal of Pure and Applied Sciences and Technology*, 9(2), 127.
- [22] Kundachira Subramani, N. (2015). Opto-electrical characteristics of poly (vinyl alcohol)/cesium zincate nanodielectrics. *The Journal of Physical Chemistry C*, 119(35), 20244-20255. <https://doi.org/10.1021/acs.jpcc.5b03652>
- [23] Prashanth, S., Subbaya, K. M., Nithin, K., & Sachhidananda, S. (2017). Fiber reinforced composites-a review. *J. Mater. Sci. Eng*, 6(03), 2-6.
- [24] Suresh, S., Mortensen, A., (1998). *Fundamentals of Functionally Graded Materials*. Barnes and Noble, New York. <https://doi.org/10.4172/2169-0022.1000341>

- [25] JONES, R. (1975). *Mechanics of composite materials* (Book). Mc Graw-Hill Compan.
- [26] <https://doi.org/10.1201/9781498711067>
- [27] Berreur, L., de Maillard, B., & Nösperger, S. (2002). L'industrie française des matériaux composites. Etude stratégique (Rapport de synthèse) réalisée par Nodal consultants pour le compte de la Digitip/SIM, 14.
- [28] Ledru, Y. (2009). Etude de la porosité dans les matériaux composites stratifiés aéronautiques (Doctoral dissertation).
- [29] Ahmadijokani, F., Shojaei, A., Dordanihaghighi, S., Jafarpour, E., Mohammadi, S., & Arjmand, M. (2020). Effects of hybrid carbon-aramid fiber on performance of non-asbestos organic brake friction composites. *Wear*, 452, 203280. <https://doi.org/10.1016/j.wear.2020.203280>Get rights and content
- [30] Bołtryk, M., Krupa, A., & Pawluczuk, E. (2018). Modification of the properties of the cement composites with the organic filler. *Construction and Building Materials*, 167, 143-153. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2018.02.025>
- [31] Hsissou, R., Seghiri, R., Benzekri, Z., Hilali, M., Rafik, M., & Elharfi, A. (2021). Polymer composite materials: A comprehensive review. *Composite structures*, 262, 113640. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.113640>
- [32] Saba, N., & Jawaid, M. (2018). A review on thermomechanical properties of polymers and fibers reinforced polymer composites. *Journal of industrial and engineering chemistry*, 67, 1-11. <https://doi.org/10.1016/j.jiec.2018.06.018>
- [33] Dong, Z. J., Zhou, T., Luan, H., Williams, R. C., Wang, P., & Leng, Z. (2019). Composite modification mechanism of blended bio-asphalt combining styrene-butadiene-styrene with crumb rubber: A sustainable and environmental-friendly solution for wastes. *Journal of cleaner production*, 214, 593-605. <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2019.01.004>
- [34] Thuong, N. T., Dung, T. A., Yusof, N. H., & Kawahara, S. (2020). Controlling the size of silica nanoparticles in filler nanomatrix structure of natural rubber. *Polymer*, 195, 122444. <https://doi.org/10.1016/j.polymer.2020.122444>
- [35] Chee, S. S., Jawaid, M., Sultan, M. T. H., Alothman, O. Y., & Abdullah, L. C. (2019). Thermomechanical and dynamic mechanical properties of bamboo/woven kenaf mat reinforced epoxy hybrid composites. *Composites Part B: Engineering*, 163, 165-174. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.11.039>
- [36] Ismail KI, Sultan MTH, Shah AUM, Jawaid M, Safri SNA. (2019). Low velocity impact and compression after impact properties of hybrid bio-composites modified with multi-walled carbon nanotubes. *Compos B Eng*;163,455–463. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.>

- [37] Hajduk F (2005) Carbon fibres overview; global outlook for carbon fibres 2005. In: Intertech conferences. San Diego: CA.
- [38] Rosato, D. V., & Rosato, D. V. (2004). Reinforced plastics handbook. Elsevier.
- [39] Menczel JD. (2020). 17 - Polybenzimidazole fiber. In: Jaffe M, Menczel JD, editors. Thermal analysis of textiles and fibers. Woodhead Publishing, 291–5.
- [40] Atai, A. A., Nikranjbar, A., & Kasiri, R. (2012). Buckling and post-buckling behaviour of semicircular functionally graded material arches: a theoretical study. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 226(3), 607-614. <https://doi.org/10.1177/0954406211416179>
- [41] Wang, S. S. (1983). Fracture mechanics for delamination problems in composite materials. Journal of composite materials, 17(3), 210-223. <https://doi.org/10.1177/002199838301700302>
- [42] Dalal R. (2016) Thermal Analysis of Functionally Graded Material (FGM) Plate Using Finite Element Method (FEM). Tech. Murthal: Mechanical Engineering, Deenbandhu Chhotu Ram University of Science and Technology.
- [43] Bohidar, S. K., Sharma, R., & Mishra, P. R. (2014). Functionally graded materials: A critical review. International Journal of Research, 1(4), 289-301.
- [44] Houari, M. S. A. (2011). Analyse des contraintes thermo-élastiques : Lois des puissances, [Thèse de Doctorat]. Université Djillali Liabes.
- [45] Jha, D. K., Kant, T., & Singh, R. K. (2013). A critical review of recent research on functionally graded plates. Composite Structures, 96, 833-849. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.09.001>
- [46] Sam, M., Jojith, R., & Radhika, N. (2021). Progression in manufacturing of functionally graded materials and impact of thermal treatment—A critical review. Journal of Manufacturing Processes, 68, 1339–1377. <https://doi.org/10.1016/j.jmapro.2021.06.062>
- [47] Sam, M., & Radhika, N. (2022). Influence of carbide ceramic reinforcements in improving tribological properties of A333 graded hybrid composites. Defence Technology, 18(7), 1107-1123. <https://doi.org/10.1016/j.dt.2021.06.005>
- [48] El-Galy, I. M., Saleh, B. I., & Ahmed, M. H. (2019). Functionally graded materials classifications and development trends from industrial point of view. SN Applied Sciences, 1(11), 1-23. <https://doi.org/10.1007/s42452-019-1413-4>
- [49] Ebhota, W. S., Karun, A. S., & Inambao, F. L. (2016). Principles and baseline knowledge o

f functionally graded aluminium matrix materials (FGAMMs): Fabrication techniques and applications. In *International Journal of Engineering Research in Africa* (Vol. 26, pp. 47-67). Trans Tech Publications Ltd. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/JERA.26.47>

- [50] Bever, M. B., & Duwez, P. E. (1972). Gradients in composite materials. *Materials Science and Engineering*, 10, 1-8. [https://doi.org/10.1016/0025-5416\(72\)90059-6](https://doi.org/10.1016/0025-5416(72)90059-6)
- [51] Shen, M., & Bever, M. B. (1972). Gradients in polymeric materials. *Journal of Materials science*, 7(7), 741-746. <https://doi.org/10.1007/BF00549902>
- [52] Ichikawa, K. (Ed.). (2001). *Functionally graded materials in the 21st century: a workshop on trends and forecasts*. Springer Science & Business Media.
- [53] Ankit BM, Khushbu CP. (2014). A review of stress analysis of functionally graded material plate with cut-out. *International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT)*, 3. <https://doi.org/10.17577/IJERTV3IS031576>
- [54] Malik, P., & Kadoli, R. (2018). Nonlinear bending and free vibration response of SUS316-Al₂O₃ functionally graded plasma sprayed beams: theoretical and experimental study. *Journal of Vibration and Control*, 24(6), 1171-1184. <https://doi.org/10.1177/1077546316659422>
- [55] Zhang, C., Chen, F., Huang, Z., Jia, M., Chen, G., Ye, Y., Lin, Y., Liu, W., Chen, B., Shen, Q., Zhang, L., & Lavernia, E. J. (2019). Additive manufacturing of functionally graded materials : A review. *Materials Science and Engineering: A*, 764, 138209.
- [56] Mahmoud, D., & Elbestawi, M. A. (2017). Lattice structures and functionally graded materials applications in additive manufacturing of orthopedic implants: a review. *Journal of Manufacturing and Materials Processing*, 1(2), 13. <https://doi.org/10.3390/jmmp1020013>
- [57] Popoola, P., Farotade, G., Fatoba, O., & Popoola, O. (2016). Laser engineering net shaping method in the area of development of functionally graded materials (FGMs) for aero engine applications-a review. *Fiber Laser*, 2, 64. <https://doi.org/10.5772/61711>
- [58] SAID, A. (2016). *Etude et Analyse des Plaque FGM en Génie Civil* (Doctoral dissertation) .
- [59] Jin, Z. H., & Paulino, G. H. (2001). Transient thermal stress analysis of an edge crack in a functionally graded material. *International Journal of Fracture*, 107(1), 73-98. <https://doi.org/10.1023/A:1026583903046>
- [60] Erdogan, F., & Chen, Y. F. (1998). Interfacial cracking of FGM/metal bonds. *Ceramic coating*, 29-37.
- [61] Chung, Y. L., & Chi, S. H. (2001). The residual stress of functionally graded materials. *Journal of Chinese Institute of Civil and Hydraulic Engineering*, 1-9.

- [62] Chi, S. H., & Chung, Y. L. (2002). Cracking in sigmoid functionally graded coating. *J Mech*, 18(2002), 41-53.
- [63] Chi, S. H., & Chung, Y. L. (2003). Cracking in coating–substrate composites with multi-layered and FGM coatings. *Engineering Fracture Mechanics*, 70(10), 1227-1243. [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(02\)00114-5](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(02)00114-5)
- [64] Bao, G., & Wang, L. (1995). Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings. *International Journal of Solids and Structures*, 32(19), 2853-2871. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(94\)00267-Z](https://doi.org/10.1016/0020-7683(94)00267-Z)
- [65] Eltaher, M.A., Fouda, N., El-midany, T., Sadoun, A.M. (2018), "Modified porosity model in analysis of functionally graded porous nanobeams", *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, **40**,141. <https://doi.org/10.1007/s40430-018-1065-0>
- [66] Gayen, D., Tiwari, R., & Chakraborty, D. (2019). Static and dynamic analyses of cracked functionally graded structural components: a review. *Composites Part B: Engineering*, 173, 106982. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2019.106982>
- [67] Chi, S. H., & Chung, Y. L. (2003). Cracking in coating–substrate composites with multi-layered and FGM coatings. *Engineering Fracture Mechanics*, 70(10), 1227-1243. [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(02\)00114-5](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(02)00114-5)
- [68] Delale, F., & Erdogan, F. (1983). The crack problem for a nonhomogeneous plane. *ASME J Appl Mech*, 50 (3), 609-614. <https://doi.org/10.1115/1.3167098>
- [69] Love, A. E. H. (1888). On the small free vibrations and deformations of elastic shells. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 179, 491–549. <https://doi.org/10.1098/rsta.1888.0011>
- [70] Reissner, E. (1945). The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 12, A69–A77.
- [71] Mindlin, R. D. (1951). Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 18, 31–38.
- [72] Reddy, J. N. (2007). *Theory and analysis of elastic plates and shells* (2nd ed.). CRC Press.
- [73] Feldman, A., & Aboudi, J. (1997). Buckling analysis of functionally graded plates subjected to uniaxial loading. *Composite Structures*, 38(1-4), 29–36. [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(97\)00038-X](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(97)00038-X)
- [74] Javaheri, R., & Eslami, M. R. (2002). Thermal buckling of functionally graded plates. *AIAA Journal*, 40(1), 162–169. <https://doi.org/10.2514/2.1626>
- [75] Ghannadpour, S. A. M., Ovesy, H. R., & Nassirnia, M. (2012). Buckling analysis of functionally graded plates under thermal loadings using the finite strip method. *Computers & Str*

- uctures, 93–94, 93–99. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2012.02.011> ScienceDirect+5
- [76] Mahdavian, M. (2009). Buckling analysis of simply supported functionally graded rectangular plates under non-uniform in-plane compressive loading. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 223(12), 2845–2855. <https://doi.org/10.1243/09544062JMES1569>
- [77] Mahdavian, M. (2009). Buckling analysis of simply supported functionally graded rectangular plates under non-uniform in-plane compressive loading. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 223(12), 2845–2855. <https://doi.org/10.1243/09544062JMES1569>
- [78] Mohammadi, M., Saidi, A. R., & Jomehzadeh, E. (2009). Levy solution for buckling analysis of functionally graded rectangular plates. *Applied Composite Materials*, 17(1), 81–93. <https://doi.org/10.1007/s10443-009-9105-0>
- [79] Yang, J., & Shen, H. S. (2003). Nonlinear analysis of functionally graded plates under transverse and in-plane loads. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 38(4), 467–482. [https://doi.org/10.1016/S0020-7462\(01\)00122-2](https://doi.org/10.1016/S0020-7462(01)00122-2)
- [80] Alinia, M. M., & Ghannadpour, S. A. M. (2009). Nonlinear analysis of pressure loaded functionally graded plates. *Composite Structures*, 88(3), 354–359. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2008.05.003>
- [81] Ma, L. S., & Wang, T. J. (2003). Nonlinear bending and post-buckling of a functionally graded circular plate under mechanical and thermal loadings. *International Journal of Solids and Structures*, 40(13–14), 3311–3330. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(03\)00156-5](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00156-5)
- [82] Li, X. F., Wang, X. Q., & Liew, K. M. (2010). Post-buckling of functionally graded circular plates under uniform radial compression. *Applied Mathematical Modelling*, 34(12), 3986–3998. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2010.03.0193>
- [83] Du, C., Li, Y., & Jin, X. (2014). Nonlinear forced vibration of functionally graded cylindrical thin shells. *Thin-Walled Structures*, 78, 26–36. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2014.01.003>
- [84] Yang, J., & Shen, H. S. (2003). Nonlinear analysis of functionally graded plates under transverse and in-plane loads. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 38(4), 467–482. [https://doi.org/10.1016/S0020-7462\(01\)00122-2](https://doi.org/10.1016/S0020-7462(01)00122-2)
- [85] Ma, L. S., & Wang, T. J. (2003). Nonlinear bending and post-buckling of a functionally graded circular plate under mechanical and thermal loadings. *International Journal of Solids and Structures*, 40(13–14), 3311–3330. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(03\)00118-5](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00118-5)
- [86] Li, X. F., Wang, X. Q., & Liew, K. M. (2010). Post-buckling of functionally graded circular

r plates under uniform radial compression. *Applied Mathematical Modelling*, 34(12), 3986–3998. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2010.03.019>

- [87] Du, C., Li, Y., & Jin, X. (2014). Nonlinear forced vibration of functionally graded cylindrical thin shells. *Thin-Walled Structures*, 78, 26–36. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2013.12.010>
- [88] Javaheri, R., & Eslami, M. R. (2002). Thermal buckling of functionally graded plates. *AIAA Journal*, 40(1), 162–169. <https://doi.org/10.2514/2.1626>
- [89] Cheng, Z. Q., & Batra, R. C. (2000). Exact correspondence between eigenvalues of membranes and plates. *Journal of Sound and Vibration*, 229(4), 879–895. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1999.2515>
- [90] Ghannadpour, S. A. M., Ovesy, H. R., & Nassirnia, M. (2012). Buckling analysis of functionally graded plates under thermal loadings using the finite strip method. *Computers & Structures*, 108–109, 93–99. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2012.02.011>
- [91] Praveen, G. N., & Reddy, J. N. (1998). Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic–metal plates. *International Journal of Solids and Structures*, 35(33), 4457–4476.
DOI: 10.1016/S0020-7683(97)00305-2.
- [92] Della Croce, L., & Venini, P. (2001). A hierarchical family of finite elements for thermoelastic analysis of Functionally graded plates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(34), 4607–4620. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(00\)00301-7](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(00)00301-7)
- [93] Chen, Y. (2005). A power-law functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plate. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 1(1), 1–21.
- [94] Alijani, F., Sadeghi, F., & Amabili, M. (2020). Nonlinear dynamics of carbon nanotube-reinforced functionally graded plates resting on viscoelastic foundations. *Composite Structures*, 234, 111722.
- [95] Fallah, A., Kiani, Y., & Eslami, M. R. (2016). Thermo-mechanical buckling analysis of CNT-reinforced composite plates. *Composites Part B: Engineering*, 89, 223–233.
- [96] Lanhe, W. (2004). Vibration and stability of rectangular plates of functionally graded materials. *Composite Structures*, 64(1), 139–146.
- [97] Bouazza, M., Tounsi, A., Bousahla, A. A., & Bennai, R. (2020). Thermo-elastic stability of FG plates reinforced by CNTs using a new refined plate theory. *Engineering with Computers*, 36, 1003–1016.
- [98] Yaghoobi, H., & Yaghoobi, P. (2017). Nonlinear bending of CNT reinforced FG plates using quasi-3D theory. *Applied Mathematical Modelling*, 49, 206–222.

- [99] Park, H. C., & Kim, J. H. (2007). Analysis of functionally graded plates using a refined plate theory. *Composite Structures*, 79(1), 70–78.
- [100] Kiani, Y., & Eslami, M. R. (2010). Thermal buckling analysis of functionally graded plates. *Thin-Walled Structures*, 48(10), 830–838.
- [101] Touratier, M. (1991). An efficient standard plate theory. *International Journal of Engineering Science*, 29(8), 901–916.
- [102] Karama, M., Afaq, K. S., & Mistou, S. (2003). Mechanical behavior of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity. *International Journal of Solids and Structures*, 40(6), 1525–1546.
- [103] Ambartsumyan, S. A. (1958). On the theory of anisotropic shells. Leningrad: Gosudarstvennoe Izdatel'stvo Tehniko-Teoreticheskoy Literatury.
- [104] Reissner, E. (1945). The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 12, 68–77.
- [105] Soldatos, K. P., & Eisenberger, M. (1992). A refined theory for symmetric laminated plates. *Composites Engineering*, 2(6), 459–475.
- [106] Aydogdu, M. (2009). A new shear deformation theory for laminated composite plates. *Composite Structures*, 89(1), 94–101.
- [107] Ait Atmane, H., Tounsi, A., & Bernard, F. (2010). A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic analysis of functionally graded sandwich plates. *Applied Mathematical Modelling*, 34(12), 3839–3851.
- [108] El Meiche, A., Tounsi, A., Benyoucef, S., Adda Bedia, E. A., & Mahmoud, S. R. (2011). A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plates. *International Journal of Mechanical Sciences*, 53(4), 237–247.
- [109] Hebali, H., Tounsi, A., Benyoucef, S., & Bousahla, A. A. (2014). New quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 36, 611–626.
- [110] Roque, C., Ferreira, A. J. M., Carrera, E., & Cinefra, M. (2012). Refined theory for laminated composite and sandwich plates in cylindrical bending. *Composite Structures*, 94(7), 2239–2248.
- [111] Pandya, B. N., & Kant, T. (1988). Flexural analysis of laminated composites using a higher order theory. *Composite Structures*, 9(1), 15–34.
- [112] Matsunaga, H. (2008). A comparison between two higher-order shear deformation theories for bending and free vibration analyses of functionally graded plates. *Composite Structure*

s, 82(4), 499–512.

- [113] • Xiang, Y., Kang, D. E., Ji, L., & Zhang, X. (2021). Sestrin2 maintains OXPHOS integrity to modulate cardiac substrate metabolism during ischemia and reperfusion. *Redox Biology*, 28, 101082. <https://doi.org/10.1016/j.redox.2020.101082>
- [114] • Xiang, Y., Kang, D. E., Ji, L., & Zhang, X. (2021). Sestrin2 maintains OXPHOS integrity to modulate cardiac substrate metabolism during ischemia and reperfusion. *Redox Biology*, 28, 101082. <https://doi.org/10.1016/j.redox.2020.101082>
- [115] • Sobhy, M. (2022). Effect of pre-deformation by torsion and addition of ZnO nanoparticles on microstructure and tensile behavior of Sn-based soft solder alloys. *Egyptian Journal of Solids*, 45(2), 123–135. https://ejournals.ekb.eg/article_264265_58d0b7762c04a620439ebfec43d6c39c.pdf
- [116] • Wattanasakulpong, N., & Chaikittiratana, A. (2013). Nonlinear analysis of nanotube-reinforced composite beams resting on elastic foundations. *Engineering Structures*, 49, 593–605. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2012.11.033>
- [117] • Nguyen-Xuan, H., Tran, L. V., & Nguyen-Thoi, T. (2013). Isogeometric analysis of functionally graded plates using higher-order shear deformation theory. *Composites Part B: Engineering*, 55, 558–574. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.07.015>
- [118] • Levy, S. (1951). Bending of rectangular plates with large deflections. *NACA Technical Report*, 737.
- [119] • Soldatos, K. P. (1992). A refined theory for symmetric laminated plates. *Composites Engineering*, 2(6), 459–475. [https://doi.org/10.1016/0961-9526\(92\)90006-6](https://doi.org/10.1016/0961-9526(92)90006-6)
- [120] • Akavci, S. S., & Tanrikulu, A. H. (2008). Buckling and free vibration analyses of laminated composite plates by using two new hyperbolic shear deformation theories. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 15(6), 403–418. <https://doi.org/10.1080/15376490802168662>
- [121] • Grover, S. L., Teo, S. T. T., Pick, D., Roche, M., & Newton, C. J. (2017). Mindfulness as a personal resource to reduce work stress in the job demands-resources model. *Stress and Health*, 33(4), 426–436. <https://doi.org/10.1002/smi.2726>
- [122] • Mahi, A., Tounsi, A., & Mechab, I. (2015). A refined shear deformation theory for thermoelastic analysis of functionally graded sandwich plates. *Steel and Composite Structures*, 19(2), 297–319. <https://doi.org/10.12989/scs.2015.19.2.297>
- [123] • Mantari, J. L., Oktem, A. S., & Guedes Soares, C. (2012). A new trigonometric shear deformation theory for isotropic, laminated composite and sandwich plates. *International*

Journal of Solids and Structures, 49(1), 43–53.
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.09.017>

- [124] • Mantari, J. L., Oktem, A. S., & Guedes Soares, C. (2013). An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates. *Composites Part B: Engineering*, 45(1), 1222–1230. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2012.07.033>
- [125] • Mantari, J. L., & Guedes Soares, C. (2014). Static response of advanced composite plates by a new non-polynomial higher-order shear deformation theory. *International Journal of Mechanical Sciences*, 79, 60–70. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2014.01.005>
- [126] • Nguyen, T. K., Thai, H. T., & Vo, T. P. (2013). A refined shear deformation theory for the bending and free vibration analysis of functionally graded plates. *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 15(6), 625–648. <https://doi.org/10.1177/1099636213497481>
- [127] • Thai, H. T., Nguyen, T. K., Vo, T. P., & Lee, J. (2013). A refined shear deformation theory for bending, buckling, and vibration analysis of functionally graded plates. *Journal of Sound and Vibration*, 333(9), 2589–2603. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2013.11.004>
- [128] Wang, Y.Q. and Zu, J.W. (2017), “Large-amplitude vibration of sigmoid functionally graded thin plates with porosities”, *Thin-Walled Struct.*, **119**, 911–924. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2017.08.012>
- [129] Avcar, M. (2019), "Free vibration of imperfect sigmoid and power law functionally graded beams", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 30(6), 603–615. <https://doi.org/10.12989/scs.2019.30.6.603>.
- [130] Panda, S.K., Singh, B.N. (2013), “Nonlinear finite element analysis of thermal post-buckling vibration of laminated composite shell panel embedded with SMA fibre”, *Aerospace Science and Technology*, **29**(1), 47–57. doi:10.1016/j.ast.2013.01.007.
- [131] Yaylaci, M., Sabano, B. S., Ozdemir, M. E., & Birinci, A. (2022), “Solving the contact problem of functionally graded layers resting on a HP and pressed with a uniformly distributed load by analytical and numerical methods”, *Structural Engineering and Mechanics*, **82**(3), 401–416. <https://doi.org/10.12989/SEM.2022.82.3.401>
- [132] Adiyaman, G., Öner, E., Yaylaci, M. and Birinci, A. (2023), “A study on the contact problem of a layer consisting of functionally graded material (FGM) in the presence of body force”, *Journal of Mechanics of Materials and Structures.*, **18**(1), 125–141. DOI: 10.2140/jomms.2023.18.125
- [133] Li, X.F. (2008), “A unified approach for analyzing static and dynamic behaviors of functionally graded Timoshenko and Euler–Bernoulli beams”, *J. Sound Vib.*, **318**, 1210–

1229. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.04.056>

- [134] Şimşek, M. (2010a), “Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher-order beam theories”, *Nucl. Eng. Des.*, **240**, 697–705. <http://dx.doi.org/10.1016/j.nucengdes.2009.12.013>
- [135] Kahya, V. and Turan, M. (2017), “Finite element model for vibration and buckling of functionally graded beams based on the first-order shear deformation theory”, *Compos. Part B Eng.*, **109**, 108–115. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.10.039>
- [136] Pradhan, K.K. and Chakraverty, S. (2014), “Effects of different shear deformation theories on free vibration of functionally graded beams”, *Int. J. Mech. Sci.*, **82**, 149–160. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2014.03.014>
- [137] Chen, W.R. and Chang, H. (2017), “Closed-form solutions for free vibration frequencies of functionally graded euler-bernoulli beams”, *Mech. Compos. Mater.*, **53**, 79–98. <https://doi.org/10.1007/s11029-017-9642-3>
- [138] Nguyen, D.K., Nguyen, Q.H., Tran, T.T. and Bui, V.T. (2017), “Vibration of bi-dimensional functionally graded Timoshenko beams excited by a moving load”, *Acta Mech.*, **228**, 141–155. <https://doi.org/10.1007/s00707-016-1705-3>
- [139] Şimşek, M. (2010b), “Vibration analysis of a functionally graded beam under a moving mass by using different beam theories”, *Compos. Struct.*, **92**, 904–917. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2009.09.030>