الجـــــمهورية الجـــــزائرية الديـــــمقراطية الشـــــعبية
République Algérienne Démocratique & Populaire

وزارة التـــــعليم العـــــالي والبـــــحث العـــــلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Ahmed ZABANA de Relizane
Faculté des Sciences de la nature et de la vie
Département des Sciences Agronomiques.

Physique 1, cours et exemples d'applications

(Hydrostatique et Hydrodynamique)

Destiné aux étudiants de la 1ere année ingénieur sciences agronomiques (Semestre1)

Préparé par :

Dr. SIDI ADDA Mustapha

Maitre de Conférences classe B

Département de sciences agronomiques

-2025 -

Avant –propos

Ce polycopié de cours de Physique I répond au programme officiel du ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique. Il est destiné aux étudiants de la première année ingénieur sciences agronomique (1^{er} semestre) du domaine Sciences de la nature et de la vie. Il constitue une initiation à la physique pour les étudiants de sciences agronomique.

Ce document couvre l'essentiel des aspects de la mécanique des fluides. Il est constitué de cinq chapitres qui s'enchainent comme suit :

Dans le premier chapitre, on étudie l'analyse dimensionnelle, calcul d'erreur et incertitude en deuxième chapitre et la dynamique des fluides parfaits incompressibles en troisième chapitre, le dernier et quatrième chapitre est réservé à la dynamique des fluides parfaits incompressibles pour qu'on se termine par la dynamique des fluides réels en dernier chapitre.

Ces cinq chapitres sont illustrés par des exercices résolus qui peuvent aider le lecteur à mieux comprendre le cours.

La rédaction de ce polycopié à été tirée de la documentation existante au niveau de toutes les bibliothèques et les sites Internet.

D^{r}. SIDI ADDA. Mustapha

Sommaire

Chapitre I
Analyse dimensionnelle

I.1.Introduction

L'étude des phénomènes physiques est incomplète si elle ne conduit pas à des interprétations quantitatives c'est-à-dire la mesure concrète des grandeurs.
Pour étudier un phénomène physique, il faut étudier les variables importantes liées à ce problème, la relation mathématique entre ces variables constitue une loi physique. Peut se fait par l'analyse dimensionnelle.

L'analyse dimensionnelle est un outil théorique permettant d'interpréter les problèmes en fonction des dimensions des grandeurs physiques impliquées, telles que la longueur, le temps et la masse. Elle a plusieurs utilités :

- Vérifier la validité dimensionnelle des équations.
- Identifier la nature des grandeurs physiques.
- Assurer l'homogénéité des lois physiques.
- Déterminer l'unité d'une grandeur physique à partir des unités fondamentales (mètre, seconde, kilogramme, etc.).

I.2. Grandeurs physiques

Une grandeur physique est mesurable, ce qui signifie qu'elle peut varier (augmenter ou diminuer). Par exemple, la longueur, le temps et la masse sont considérées comme des grandeurs fondamentales en mécanique. Les autres grandeurs, telles que la vitesse, l'accélération ou la force, s'expriment en fonction de ces trois grandeurs fondamentales.

I.3. Unités

La valeur d'une grandeur physique est exprimée en fonction d'un étalon appelé « unité ». Les unités des grandeurs dérivées sont définies à partir des unités des grandeurs fondamentales.

Grandeurs fondamentales	Symbole	Dimension	Unité (Système international)
Longueur	l	[l]= L	Mètre (m)
Masse	m	[m]=M	Kilogramme (kg)
Temps	t	[t]=T	Seconde (s)
Intensité	i	[i]=I	Ampère (A)

Il y a des unités particulières comme N (Newton) pour la force, Hz (Hertz) pour la fréquence, Watt pour la puissance, Pascal pour la pression… Chaque unité représente une combinaison des unités fondamentales.

Il y a deux types d'unités :

- Système international SI MKSA (mètre, kilogramme, seconde, ampère), c'est le système le plus utilisé
- Système CGSA (centimètre, gramme, seconde, ampère),, il est moins utilisé.

Grandeur physique	Symbole	Formule	Dimension	Unité (SI)
Surface	*S*	$l \times l$	L^2	m^2
Volume	*V*	$l \times l \times l$	L^3	m^3
Masse volumique	ρ	m/V	ML^{-3}	Kg/m^3
Fréquence	*f*	$1/t$	T^{-1}	s^{-1}ou hertz
Vitesse linéaire	*v*	dx/dt	LT^{-1}	m/s
Vitesse angulaire	ω	$d\theta/dt$	T^{-1}	Rd/s
Accélération linéaire	*a*	dv/dt	LT^{-2}	m/s^2
Accélération angulaire	α	$d\theta./dt$	T^{-2}	Rd/s^2
Force	*F*	$m.a$	MLT^{-2}	Newton
Travail et Energie	*W ou E*	$F.d$	$ML^2\,T^{-2}$	Joule
Puissance	*P*	W/t	ML^2T^{-3}	Watt
Pression	*P*	F/S	$ML^{-1}T^{-2}$	Pascal (Pa)

I.4. Equations aux dimensions

En utilisant M, L et T pour représenter les dimensions des grandeurs fondamentales que sont la masse, la longueur et le temps, il est possible d'exprimer les dimensions des grandeurs dérivées en fonction de ces trois paramètres. Les relations obtenues de cette manière sont appelées les équations dimensionnelles de ces grandeurs.

[Vitesse]=[v]=[Longueur]/[Temps]=[l]/[t]=L/T= LT^{-1} (unité m/s)

[Accélération]=[a]= [Vitesse]/[Temps]= $LT^{-1}/T=LT^{-2}$ (unité m/s^2)

[Force]= [F]= [Masse] [Accélération]= [m] [a]= M LT^{-2} (unité kg m/s^2= Newton).

I.4. Homogénéité des équations aux dimensions

Les deux membres d'une équation aux dimensions doivent avoir les mêmes dimensions puisqu'ils représentent des grandeurs de même nature.

C=A+B …… [C]=[A]=[B]

C=A . B…… [C]=[A].[B]

C=A / B…… [C]=[A] / [B]

$C=A^n$…… ….$[C]=[A]^n$

Exemple:

$v= at+v_0$

On a : $[v]=[v_0]=L$ et $[at]=[a][t]=LT^{-1}T=L$

$[v]= [at]=[v_0]$.

Les constantes n'ont pas de dimensions

$[angle] =[\cos \alpha] = [\sin \alpha] = [tg\ \alpha] = [cotg\ \alpha] = [\ln x] =[e^x] = 1$

Souvent les équations aux dimensions sont homogènes.

Cette propriété est utilisée pour définir les lois physiques par la connaissance des facteurs influencent la grandeur physique en question .

Exemple :

La vitesse à la sortie d'un orifice est donnée en fonction de la hauteur et l'acclration de la pesanteur par la relation suivante

$v = \sqrt{2}\, g^x\, h^y$

Pour définir cette loi donner il faut déterminer x et y

On suppose que l'équation est homogène donc

$[v] = [2][g]^x[h]^y$

$[h] = L$, $[\sqrt{2}] = 1$, v est une vitesse $[v] = LT^{-1}$ et g est une accélération donc $[g] = LT^{-2}$

$LT^{-1} =1 . (LT^{-2})^x L^y \Rightarrow L^1 T^{-1}= L^{x+y}T^{-2x}$

Donc ;

$$\begin{cases} x+y=1 \\ -2x=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{2} \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Soit ; $v=\sqrt{2}\, g^{1/2}\, h^{1/2} =\sqrt{2gh}$

Chapitre II

Les incertitudes

II.1. Introduction

II.1.1 La mesure

Lorsqu'une mesure est effectuée, il est impossible d'affirmer qu'elle reflète exactement la valeur réelle de la grandeur observée. Qu'il s'agisse de mesurer une longueur, une masse, un volume ou une durée, il faut admettre que le résultat obtenu n'est qu'une approximation plus ou moins fidèle de la réalité.

II.1.2 L'erreur

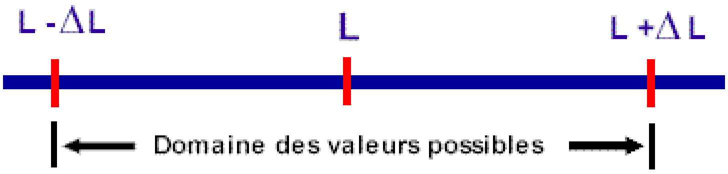
L'erreur, c'est l'écart entre la mesure et la valeur exacte. Puisque la valeur exacte est souvent inaccessible, l'erreur est inconnue.

II.2. L'incertitude absolue

L'incertitude absolue représente une estimation de l'erreur commise par l'expérimentateur. Elle correspond à l'écart maximal susceptible de séparer la valeur mesurée de la valeur réelle. Ensemble, la mesure et son incertitude définissent une plage de valeurs probables au sein de laquelle se situe la valeur exacte.

L : la mesure d'une longueur
ΔL : l'incertitude absolue associée à la mesure de la longueur

La valeur exacte se trouverait donc à l'intérieur du domaine délimité par $L \pm \Delta L$



L'incertitude absolue est influencée par divers facteurs tels que la précision de l'instrument de mesure, les conditions dans lesquelles la mesure est effectuée, ainsi que la dextérité de l'expérimentateur. En évaluer correctement la valeur requiert à la fois du discernement et de l'expérience.

L'incertitude absolue s'exprime généralement avec un seul chiffre en utilisant les mêmes unités que celles associées à la mesure.

Exemple : 125,5 ± 0,3 g

Puisque l'incertitude est estimée à 3 dg, la mesure est arrondie (si nécessaire) au plus décigramme proche.

L'incertitude absolue est de la grandeur x est mentionné Δx

Le calcul de l'incertitude se fait comme suit :

La moyenne ou la valeur exacte $\overline{\boldsymbol{X}} = \frac{\sum_1^N x_i}{N} = \frac{X_1 + X_2 + \ \ldots\ldots X_k}{N}$

x_1, x_2, x_3, ….. : Sont les mesures effectuées.

N : Le nombre des mesures

$\sigma_e = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1} = \frac{(x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + \ \ldots\ldots (x_k-\bar{x})^2}{N-1}$ σ_e : Ecart type estimé

L'incertitude absolue est $\Delta x = \frac{1}{\sqrt{N}} \sigma_e$

II.3. L'incertitude relative

L'incertitude relative correspond au rapport entre l'incertitude absolue et la valeur mesurée, généralement exprimé en pourcentage. Elle permet de comparer la précision de plusieurs mesures : plus l'incertitude relative est faible, plus la mesure est considérée comme précise.

Exemple : 125,5 ± 0,3 g

L'incertitude relative égale 0,3/125,5 = 0,24%

L'incertitude absolue est de la grandeur x est mentionné $\frac{\Delta x}{x}$

II.4. Les chiffres significatifs.

Lorsqu'on exprime une mesure directe ou le résultat d'un calcul, l'incertitude absolue associée au résultat est exprimée avec un seul chiffre significatif. La mesure ou le résultat du calcul sera donc arrondi afin de ne comporter qu'un seul chiffre incertain.

Les chiffres significatifs sont : tous les chiffres certains plus le premier chiffre incertain.

Exemple : le résultat d'un calcul donne 125,483 ± 0,342 cm.

Ce résultat devrait s'écrire, en tenant compte des chiffres significatifs, 125,5 ± 0,3 cm. L'incertitude à été arrondie pour ne comporter qu'un seul chiffre significatif et le résultat à été arrondi pour ne comporter qu'un seul chiffre incertain

II.5. Additions et soustractions

L'incertitude absolue

Si Z=X+Y ou Z=X-Y

ΔZ= ΔX+ΔY

Exemple 1

si $x = 102 \pm 4$ et $y = 55 \pm 3$

A. Calculez $z \pm \Delta z$ si $z = x + y$

La valeur la plus probable pour z est : 102 + 55 = **157**

la valeur maximale possible est : (102 + 4) + (55 + 3) = **164**

la valeur minimale : (102 - 4) + (55 - 3) = **150**

Le résultat : $\boldsymbol{z = 157 \pm 7}$

L'incertitude absolue sur le résultat de cette somme est la somme des incertitudes de chacun des termes de l'addition.

B. Calculez $w \pm \Delta w$ si $w = x - y$

La valeur la plus probable : 102 - 55 = **47**

la valeur maximale possible : (102 + 4) - (55 - 3) = **54**

la valeur minimale : (102 - 4) - (55 + 3) = **40**

Le résultat : $\boldsymbol{w = 47 \pm 7}$

L'incertitude absolue sur le résultat de cette soustraction est la somme des incertitudes de chacun des termes de la soustraction.

Les exemples précédents nous mènent à la règle suivante :

Lors d'une addition ou d'une soustraction, les incertitudes absolues s'additionnent pour donner l'incertitude absolue du résultat de la somme ou de la soustraction.

II.6. Multiplications et divisions

II.6.1. Multiplications et divisions par une constante

Le produit par une valeur constante ;

Si $z = \lambda . x \qquad \Delta z = \lambda . \Delta x$

Exemple 1

si $x = 108 \pm 6$

A. Calculez $z \pm \Delta z$ si $z = 3x$

La valeur la plus probable pour z est : 108 (3) = **324**
la valeur maximale possible est : (108 + 6) (3) = **342**
Le résultat : $z = 324 \pm 18$ ou **$z = 320 \pm 20$**

L'incertitude absolue sur le résultat de la multiplication par 3 correspond à trois fois l'incertitude absolue associée à x.

B. Calculez $w \pm \Delta w$ si $w = {}^{1}/_{2}\, x$

La valeur la plus probable : 108/2 = **54**
la valeur maximale possible : (108 + 6)/2 = **57**
$\Delta w = 1/2 . \Delta x = 1/2 \,.\, 6 = 3$

Le résultat : **$w = 54 \pm 3$**

Les exemples précédents nous permettent de conclure que lors d'une multiplication par une constante ne possédant pas d'incertitude, l'incertitude absolue résultante s'obtient en multipliant l'incertitude absolue initiale par cette constante. Cette propriété est particulièrement utile lors des changements d'unités. Il est important de réaliser que même si l'incertitude absolue résultante est inférieure à l'incertitude absolue initiale, l'incertitude relative est restée la même.

II.6.2. **Multiplications et divisions** (situation générale)

Dans ce cas le calcul débutera par l’incertitude relative ou ;

Si $z = x.y$ donc

$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$$

Exemple 2

si $x = 76 \pm 2$ et $y = 35 \pm 3$

A. Calculez $z \pm \Delta z$ si $z = x \cdot y$

En utilisant les valeurs extrêmes...

la valeur la plus probable (exacte) : 76 (35) = **2660**

$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} \Rightarrow \frac{\Delta z}{z} = \frac{2}{76} + \frac{3}{35}$$

$\frac{\Delta z}{z} = 0{,}112 \;\Rightarrow\; \Delta z = 0{,}112\,.\,2660 = 298$

L'incertitude relative résultante est de 11,2 %. Elle était de 2,4 % sur *x* et de 5,2 % sur *y*.

donc : z = 2660 ± 298 ou **2700 ± 300 ou (49 ± 4) X 10 ^{2}**

B. Calculez $w \pm \Delta w$ si $w = x / y$

La valeur la plus probable : **1,171**
donc w = 1,448 ± 0,116 que nous écrivons **1,4 ± 0,1**

$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} = 0{,}112$$

L'incertitude relative résultante est aussi de 11 ,2 % pour ce calcul.

Les deux calculs précédents nous mènent à la règle suivante :

Lors d'une multiplication ou d'une division, de termes possédant chacun leur incertitude, l'incertitude relative résultante est donnée par la somme des incertitudes relatives des termes de la multiplication ou de la division.

II.7. Autres calculs

Exemple 1

si x = 98 ± 3 (± 3 %)

A. Calculez $z \pm \Delta z$ si $z = x^2$

La valeur la plus probable pour *z* est : **9604**

$\frac{\Delta z}{z} = 2.\frac{\Delta x}{x} = 2.\frac{3}{98} = 0{,}061$

$\Delta z = 0{,}061\,.\,z = 0{,}061.\,9604 = 585 = 600$

z= 9600 ± 600

B. Calculez $z \pm \Delta z$ si $z = x^{1/2}$

La valeur la plus probable : **9,899**
$\frac{\Delta z}{z} = \frac{1}{2}.\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{2}.\frac{3}{98} = 0{,}015$

$\Delta z = 0{,}015\,.\,z = 0{,}015.9{,}899 = 0{,}148$

z= 9 ,9 ± 0,1

L'incertitude absolue sur ce résultat n'est que la moitié de l'incertitude relative initiale. Ce résultat est tout de même conforme à la règle énoncée pour l'incertitude relative des multiplications et des divisions.

II.8. Multiplications et divisions (plus que deux termes)

Dans cette section on doit exposer le cas générale qui est donné comme suit ;

Si $f = x^{\alpha}.y^{\beta}\,.\,z^{-\lambda}$ donc

$\frac{\Delta f}{f} = |\alpha|\frac{\Delta x}{x} + |\beta|\frac{\Delta y}{y} + |\lambda|\frac{\Delta z}{z}$

Exemple 2

si $x = 84 \pm 2$ (± 2,3 %), $y = 58 \pm 3$ (±5,2 %) et $z = 23 \pm 1$ (±4,3 %)

Calculez $f \pm \Delta f$ si $f = x \cdot y / z$

En utilisant les valeurs extrêmes...

La valeur la plus probable : 84 . 58 /23= **211,83**

$$\frac{\Delta f}{f} = |\alpha|\frac{\Delta x}{x} + |\beta|\frac{\Delta y}{y} + |\lambda|\frac{\Delta z}{z}$$

α=1, β= 1 , λ=1

$$\frac{\Delta f}{f} = 1\frac{\Delta x}{x} + 1\frac{\Delta y}{y} + 1\frac{\Delta z}{z} \Rightarrow \frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z}$$

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{2}{84} + \frac{3}{58} + \frac{1}{23} = 0{,}12 \Rightarrow \Delta f = 0{,}12\,.211{,}83 = 25{,}42$$

donc : w = 211,83 ± 25,42 (± 12,6 %) ou **210 ± 30**

Ce résultat est conforme à la règle énoncée pour l'incertitude relative des multiplications et des divisions. Cette règle est valable pour n'importe quel nombre de termes multipliés et/ou divisés entre eux.

On peut utiliser les deux règles énoncées précédemment dans de nombreuses situations. Cependant certains calculs faisant intervenir des fonctions particulières nécessitent l'usage de la méthode des extrêmes.

II.9. Fonctions particulières.

S'il existe des fonctions particulières dans le calcul dons il est préférable qu'on se référé a la forme générale décrit comme suit ;

Si la grandeur physique f est en fonction des paramètres $x, y, z\ldots$ donc la différentielle de f est donnée par ;

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\ \frac{\partial f}{\partial z}dz \ldots$$

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\ \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z \ldots$$

Exemple 3

si $\alpha = 45 \pm 2^{o}$ Calculez $w \pm \Delta w$ si $w = \text{tg}\ \alpha$

La valeur la plus probable est : **1,000**

L'angle α est pris en radian 2°= 0,035 rd

$$\Delta w = \frac{\partial tg}{\partial \alpha}\Delta\alpha = \frac{1}{cos\alpha}\ .0{,}035 = \frac{1}{\left(\sqrt{2}/2\right)^{2}}\ .0{,}035 = \quad 0{,}07$$

Le résultat : $w = 1{,}000 \pm 0{,}07$ ou $\boldsymbol{w = 1{,}00 \pm 0{,}07}$

Exemple 4

si $x = 38 \pm 3$ Calculez $w \pm \Delta w$ si $w = \ln x$

w_{prob} = **3,638**

$$\Delta w = \frac{\partial ln}{\partial x}\Delta x = \frac{1}{x}\ .3 = \frac{1}{(38)}.3 = \quad 0{,}08$$

Le résultat : $\boldsymbol{w = 3{,}64 \pm 0{,}08}$

Conclusion.

La méthode de la différentielle est la méthode la plus généralisée dans les cas complexes

Les méthodes de calcul des incertitudes dans le cas d'une addition, produit ou division sont extraites de cette méthode générale de différentielle.

II.10. Les chiffres significatifs

Lorsqu'on exprime une mesure directe ou le résultat d'un calcul, l'incertitude absolue associée au nombre est exprimée avec un seul chiffre significatif. La mesure ou le résultat du calcul sera alors arrondi afin de ne comporter qu'un seul chiffre incertain.

Il arrive parfois que l'on désire, sans faire le calcul de l'incertitude, conserver le bon nombre de chiffres significatifs lors d'un calcul. Pour ces situations, nous allons, à l'aide de quelques exemples, formuler quelques règles valables pour les opérations mathématiques de base (addition, soustraction, multiplication et division).

II.10.1. Additions et soustractions

Exemple 1

a = 131,12 ± 0,0?   et   b = 12,213 ± 0,00?

la somme...

  131,12?
+ <u>012,213</u>
  143,33(3)

il faudrait donc écrire pour le résultat de la somme   a + b = 143,33 car nous devons conserver qu'un seul chiffre incertain.

Exemple 2

a - b = ?

  131,12?
- <u>012,213</u>
  118,90(7)

le résultat est donc a - b = 118,91

Le résultat d'une addition ou d'une soustraction possède autant de décimales que le terme de l'addition ou de la soustraction qui en possède le moins.

II.10.2. Multiplications et divisions

Règle 2 :

Les deux exemples qui suivent sont des applications de cette deuxième règle.

Exemple 3

a = 12,5 ± 0,? (3 chiffres significatifs) et b = 2,3 ± 0,?   (2 chiffres significatifs)

La multiplication a·b donne 28,75 que l'on doit écrire avec deux chiffres significatifs.

a·b = 29 (2 chiffres significatifs)

Exemple 4

c = 1238 ± ? (4 chiffres significatifs) et d = 33,9 ± 0,? (3 chiffres significatifs)

la division c / d donne 36.519... que l'on doit écrire avec 3 chiffres significatifs.

c / d = 36,5 (3 chiffres significatifs)

Remarque importante

La deuxième règle constitue une façon plus ou moins précise d'obtenir le bon nombre de chiffres significatifs pour le résultat d'un produit ou d'un quotient. Ce n'est pas une règle absolue (voir l'exemple suivant).

Ces règles s'appliquent aux opérations mathématiques de base énumérées précédemment. C'est toujours le calcul des incertitudes par la méthode des extrêmes qui donne le bon résultat.

Exemple

c = 94 ± 1 (2 chiffres significatifs) et d = 2,10 ± 0,02 (3 chiffres significatifs)

la division c / d donne 44,762...

En faisant le calcul des valeurs extrêmes

$(c / d)_{max}$ = 95/2,08 = 45,673 (+0,911)

$(c / d)_{min}$ = 93/2,12 = 43,868 (-0,894)

Le résultat de ce calcul

44,8 ± 0,9 (trois chiffres significatifs)

II.9. Exercices

Écrivez les résultats suivants ainsi que les incertitudes absolues avec le bon nombre de chiffres significatifs (indiquez aussi le nombre de chiffres significatifs que possède le résultat).

1. (a) 845,33 ± 2,65 **(b)** 11 675 ± 94,4 **(c)** 1,851 x 10^3 ± 158,3 **(d)** 0,01863 ± 0,00023 **(e)** 1,567 x 10^{-3} ± 0,00049

2. Les côtés d'un rectangle sont
a = 5,35 ± 0,05 cm et b = 3,45± 0,04 cm

(a) Calculez le périmètre du rectangle
(b) Calculez l'aire du rectangle

3. Le rayon d'une sphère est r = 10,00 ± 0,08 cm

(a) Calculez l'aire de sa surface
(b) Calculez son volume

4. Les côtés opposé et adjacent à l'angle α d'un triangle rectangle sont respectivement

$a = 12{,}1 \pm 0{,}1$ cm et $b = 23{,}3 \pm 0{,}2$ cm.

(a) Calculez l'angle α
(b) Calculez la longueur de l'hypoténuse

5. Un volume cylindrique de diamètre 1,62 ± 0,03 cm et de hauteur 3,44 ± 0,05 cm a une masse de 23,2 ± 0,1g.

(a) Calculez son volume
(b) Calculez sa masse volumique

6. Un véhicule consomme 48,6 ± 0,5 litres de carburant en parcourant 530 ± 20 km

Calculez sa consommation moyenne en litres par 100 km

7. Suite à une série d'essais, on obtient comme résultats qu'un véhicule roulant à 100 ± 5 km/h s'immobilise en 3,3 ± 0,1 s.

Calculez la décélération moyenne (en m/s^2) de ce véhicule.

Réponses aux exercices

1. **(a)** 845 ± 3 (3 C.S.) **(b)** 11 680 ± 90 (4 C.S.) **(c)** 1900 ± 200 (2 C.S.) **(d)** $(1{,}86 \pm 0{,}02) \cdot 10^{-2}$ (3 C.S.)

(e) $(1{,}6 \pm 0{,}5) \times 10^{-3}$ (2 C.S.)

2. (a) 17,6 ± 0,2 cm **(b)** 18,5 ± 0,4 cm

3. (a) 1260 ± 20 cm^2 **(b)** $(42 \pm 1) \cdot 10^2$ cm^3

4. (a) $27{,}4 \pm 0{,}4^o$ **(b)** 26,3 ± 0,2 cm

5. (a) $7{,}1 \pm 0{,}4$ cm^3 **(b)** $3{,}3 \pm 0{,}2$ g/cm^3

6. 9,2 ± 0,5 l/100km

7. $8{,}4 \pm 0{,}7$ m/s^2

Chapitre III

Hydrostatique

III.1. Définition et caractéristiques d'un fluide

III.1.1 Définition d'un fluide

On appelle fluide un corps qui n'a pas de forme propre et qui est facilement déformable. Les liquides et les gaz sont des fluides, ainsi que des corps plus complexes tels que les polymères ou les fluides alimentaires. Ils se déforment et s'écoulent facilement. Un fluide englobe principalement deux états physiques : l'état gazeux et l'état liquide.

III.2. Propriétés des fluides

Tous les fluides possèdent des caractéristiques permettant de décrire leurs conditions physiques dans un état donné. Parmi ces caractéristiques qu'on appelle propriétés des fluides on a :

- Compressibilité
- Masse volumique et densité
- Poids volumique
- Volume massique
- Viscosité

III.2.1. Compressibilité

La compressibilité est le caractère de variation de volume de fluide avec une variation de pression (*dp*), le volume de fluide subit une diminution de volume (*dV*).

L'augmentation de pression entraine une diminution de volume.

Le coefficient de compressibilité est :

$$\beta = \frac{-\frac{dV}{V}}{dp} \ (\mathrm{Pa^{-1}})$$

β : Coefficient de compressibilité (Pa^{-1} ou m^2/N).
V : Volume de fluide (m^3).
dV : Variation de volume (m^3).
dp : Variation de pression (N/m^2)

III.2.2. Masse volumique et densité

a- *Masse volumique* : La masse volumique ρ d'un fluide est la masse de l'unité de volume de ce fluide. Elle s'exprime en ***kg/m³***

Les fluides sont caractérisés par leur masse volumique ρ

$\rho = \frac{M}{V}$

M:Masse du fluide (kg)

V : Volume du fluide (m^3)
ρ : Masse volumique (kg/m^3)

Fluides	mercure	eau de mer	eau pure	huile	essence	butane	air
ρ(kg/m^3)	13 600	1030	1000	900	700	2	1.293

Pour les gaz, la masse volumique dépend de la température et de la pression à cause de leur compressibilité.

b- Densité

La densité est le rapport de la masse volumique du fluide rapportée à un autre fluide de

Référence, c'est une grandeur sans unité définie par :

$$d = \frac{\rho}{\rho_f}$$

Exemple : la densité du mercure paraport a l'eau est de

$$d_{mer} = \frac{\rho_{mer}}{\rho_e} = \frac{13600}{1000} = 13{,}6$$

III.2.3. Poids volumique (poids spécifique) :

Il représente la force d'attraction exercée par la terre sur l'unité de volume, c'est-à-dire le poids de l'unité de volume.

$W = \frac{G}{V} = \frac{Mg}{V} = \rho g (N/m^3)$

III.2.4.Volume massique (volume spécifique)

C'est le volume qu'occupe l'unité de masse d'une substance, c'est l'inverse de la masse volumique

$\omega = \frac{V}{M} (m^3/kg)$

Exemplee :

a- Soit un volume d'huile V= 5 m^3 qui pèse 4,25 t . Calculer la masse volumique, le poids spécifique et la densité de cette huile avec g= 9.81 m/s^2.

b- Calculer le poids G d'un volume V= 0,5 litres de liquide ayant une densité égale à 0,75

Solution :

a- Masse volumique

$$\rho_h = \frac{M}{V} = \frac{4250}{5} = \frac{850kg}{m^3}$$

Poids spécifique (Volumique)$W_h = \rho.g = 850\ 9{,}81 = 8338{,}5\,\frac{N}{m^3}$

b- Densité

$$d_h = \frac{\rho_h}{\rho_e} = \frac{850}{1000} = 0{,}85$$

c- $G = M.g = \rho_l.V.g = d_l\rho_e Vg = 0{,}75\ 1000\ 0{,}5\ 9{,}81 = 3\ 678{,}75N = 3{,}679\ kN$

III.2.5. Viscosité

La viscosité d'un fluide est la propriété de résister aux efforts tangentiels qui tendent à faire déplacer les couches de fluide les unes par rapport aux autres. Lorsque le fluide se déplace en couches parallèles ; le facteur de proportionnalité est le coefficient de viscosité dynamique, (μ) et on écrit alors :

$$\tau = \mu\frac{du}{dy}$$

La viscosité cinématique, ν, est définie comme étant le rapport entre la viscosité dynamique et la masse volumique.

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Dans le système SI, l'unité de la viscosité dynamique est le (Pa.s) ou (kg/ms) ou Pl

Pa.s : Pascal seconde

Pl : Poiseuille avec 1 Pa.s = 1 Pl =1kg /ms

Dans le système CGS l'unité est le Poise (Po) avec Pl = 10 Po

Dans le système SI, l'unité de la viscosité cinématique, ν, est le (m2/s) ; dans le système CGS l'unité est le stockes où 1 stokes = 1 cm2/s = 10^{-4} m2/s

Exemple :

Déterminer la viscosité dynamique d'une huile moteur de densité d = 0.8 et de viscosité cinématique ν= 1.3 St

$$\nu = 1{,}3St = 1{,}3\, cm^2/s = 130\, m^2/s$$

$$\mu = \nu\,\rho = \nu\; d\; \rho_e = 130.0{,}8.1000 = 1{,}04\frac{10^5 kg}{m}.s = 1{,}04.10^5\; Pl$$

III.3..Statique des fluides

III.3.1. Introduction

La statique des fluides est la branche de la mécanique des fluides qui traite principalement les fluides au repos. L'étude des propriétés des fluides au repos constitue la statique des fluides.

III.3.2. La pression

La pression est la quantité de la force exercée perpendiculairement sur une unité de surface :

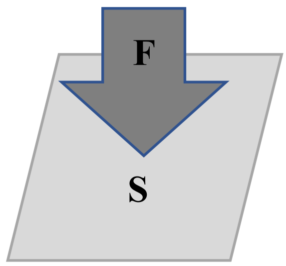


Figure 2.1

$$P(Pa) = \frac{F(N)}{S(m^2)}$$

L'unité de la pression en système SI est le Pascal (Pa=1N/m2)

Autres unités :

- Le bar $1bar = 10^5\,Pa = 10^5\;N/m^2$
- L'atmosphère 1atm = 101325 Pa ≈1,0133 bar

	Pascal (Pa)	Bar	Atmosphère
Pascal	1	10^{-5}	$9{,}869\;10^{-6}$
Bar	10^5	1	0,987167
Kgf/cm²	98039	0.9803	0,968

Atmosphère	101325	1,0133	1
cm d'eau	98.04	$9{,}80\ 10^{-4}$	$9{,}68\ 10^{-4}$
mm de Hg	133	$1{,}333\ 10^{-3}$	$1{,}316\ 10^{-3}$
mbar	10^{2}	10^{-3}	$9{,}87\ 10^{-4}$

III.3.3. Pression en un point d'un fluide au repos

Théorème de Pascal

1- La pression hydrostatique en un point donné d'un fluide au repos est la même (agit de façon égale) dans toutes les directions
2- Toute variation de pression en un point d'un liquide au repos est transmise intégralement à tous les autres points du liquide.

On peut vérifier que la pression exercée au sein d'un liquide en équilibre,

- est constante en tous points d'un même plan horizontal.
- est indépendante de la direction considérée.
- croît au fur et à mesure que l'on s'éloigne de sa surface libre.

III.3.4. Principe fondamental de l'hydrostatique

3.1 Principe fondamental de l'hydrostatique

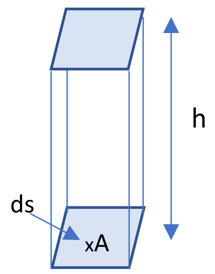


Figure 2.2

La pression exercée en une section élémentaire *ds* horizontale du fluide sous une auteur est comme suit ;

$$p_A = \frac{F_p}{ds} = m.\frac{g}{ds} = \frac{\rho\, V g}{ds} = \frac{\rho\, ds\, h\, g}{ds} = \rho\, g\, h$$

P_A est la pression au point A
F_p est la force de pesanteur.
ρ est la masse volumique du fluide en (kg/m^3).

h est la profondeur de la section élémentaire (m)

g est l'accélération de la pesanteur.

Application

Exercice 1 : Une plaque métallique de dimension (20x10x0,5) cm pèse 5 kg. Quelle pression exerce-t-elle sur le sol suivant la face sur laquelle on la pose ?

Solution

On a $P_1 = \frac{F}{S} = \frac{mg}{S} = \frac{5*9,81}{0,2\ .\ 0,1} = 2452,5\ N/m^2$ (pa)

$$P_2 = \frac{F}{S_2} = \frac{mg}{S_2} = \frac{5*9,81}{0,2\ .\ 0,005} = 49050\ N/m^2 (pa)$$

$$P_3 = \frac{F}{S_3} = \frac{mg}{S_3} = \frac{5*9,81}{0,1\ .\ 0,005} = 98100\ N/m^2 (pa)$$

Exercice 2 : On enfonce une punaise métallique dans une planche en exerçant sur sa tête une force de 3 kgf avec le pouce ; la tête a 1cm de diamètre et la pointe 0.5mm
Quelles sont les pressions exercées sur le pouce ensuite sur la planche ?

Solution

Pression sur le pouce :

$$P_{pc} = \frac{F}{S} = \frac{F}{\frac{\pi d_p^2}{4}} = \frac{2\ .\ 9,81}{\frac{\pi 0,01^2}{4}} = 2,5\ .\ 10^5 Pa$$

$$P_{pl} = \frac{F}{S} = \frac{F}{\frac{\pi d_p^2}{4}} = \frac{2\ .\ 9,81}{\frac{\pi\ .\ (5.10^{-4})^2}{4}} \cong\ 10^8 Pa$$

Exercice 3 : Combien faut-il de mètres d'eau pour avoir une différence de pression de 1bar?

Solution

$$\begin{cases} \Delta P = 1bar = 10^5 N/m^2 \\ \Delta P = \rho g h \end{cases} \Rightarrow \rho g h = 10^5$$

$$h = \frac{10^5}{\rho g} = \frac{10^5}{9810} \cong 10{,}19m$$

Exercice 4 : Calculer la pression relative et la pression absolue auquel est soumis un plongeur en piscine à une profondeur de 5,5 m. On donne la masse volumique de l'eau ρ = 1000 kg/m^3

Solution

Pression relative

Pr = ρ g h = 1000. 9.81. 5,5 = 53 955 Pa = 0,54 bar

Pression absolue

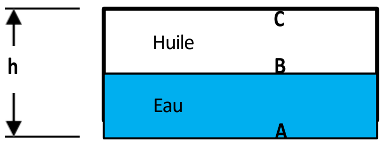
P_{ab}= P_r + $P_{\text{atmosphérique}}$

Soit

P_{ab} = 53 955+ 101 325 = 155 280 Pa = 1,55 bar

Exercice 5 : La cuve ci-contre est à moitié pleine d'eau et l'autre pleine de huile . Calculez la différence de pression entre les points A et B, puis entre les points B et C. Comparer ces résultats et conclure !

On donne : h = 2,5 m , masse volumique de l'eau 103 kg/m3 et celle de l'huile est 900 kg/m3



Solution

$\Delta P_{AB} = \rho_{eau}\, g\, (h_A\text{-}h_B) = \rho_{eau}\, g\, h/2$ soit $\Delta P_{AB} = 10^3$ 9.81 1,25 = 12 262,5Pa

$\Delta P_{BC} = \rho_{air}\, g(h_B\text{-}h_C) = \rho_{air}\, g\, h/2$ soit ΔP_{BC} = 900 9.81 1,25 = 11 036,25 Pa

Conclusion : la pression dans l'eau est importante par rapport à la pression dans l'huile a cause de la masse volumique .

III.4. Transmission des pressions dans les liquides

Soit le schéma de principe d'une presse hydraulique (Fig.2.3). On y produit une force considérable à partir d'une force relativement peu importante, en considérant la surface d'un piston à la sortie 2 plus large que celui à l'entrée 1.

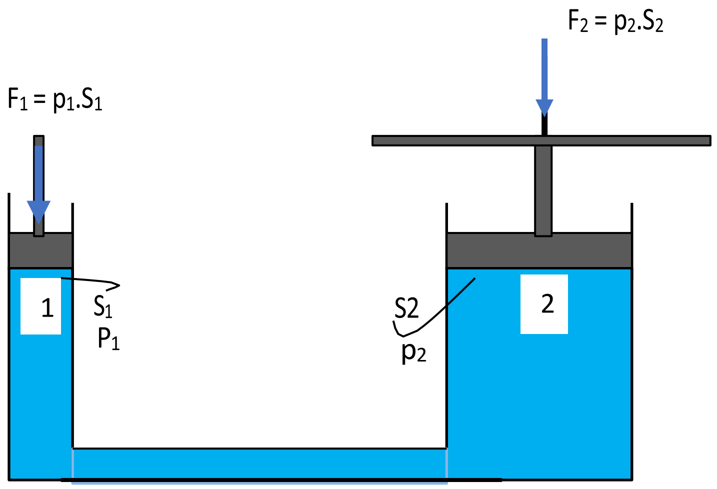


Figure.2.3 : Principe d'une presse hydraulique

Lorsque les deux pistons 1 et 2 sont sur le même niveau, on a :

$$P_1 = P_2 \Rightarrow \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \Rightarrow F_1\, S_2 = F_2\, S_1$$

S_1 et S_2 sont respectivement inversement proportionnelles aux F_1 et F_2.

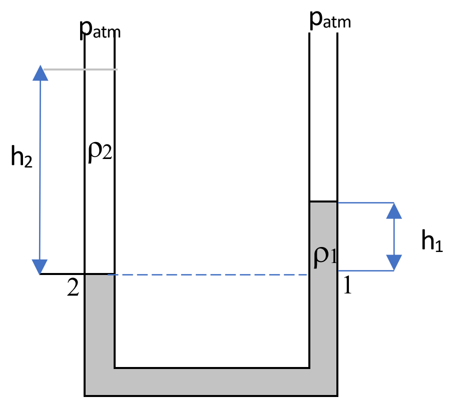
III.5. Equilibre des fluides non miscibles

Un tube en U rempli d'un liquide de masse volumique (ρ1), si dans l'une des branches un autre liquide non miscible au premier et de masse volumique (ρ2) est versé, il est observé une dénivellation h=(h2-h1) entre les deux liquides. Les deux surfaces libres étant à la pression atmosphérique. D'après le principe de Pascal, il est possible d'écrire les équations suivantes :

$P_1 = p_{atm} + \rho_1\, g\, h_1$

$P_2 = p_{atm} + \rho_2\, g\, h_2$

$$p_{atm} + \rho_1\, g\, h_1 = p_{atm} + \rho_2\, g\, h_2 \Rightarrow h_1 = \frac{\rho_2}{\rho_1}\, h_2$$



La simple mesure des hauteurs des deux fluides h_1 et h_2 permet de déterminer la masse volumique d'un fluide. De même ce concept est utilisé pour la masure des pressions avec les manomètres à colonne de liquide ou manomètre différentiel.

III.6. Poussée d'Archimède

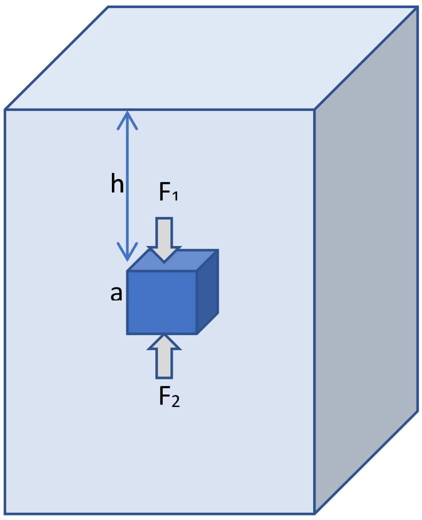
Supposons un cube d'arête a entièrement immergé dans un liquide, sa face du haut étant horizontale et située à une profondeur $z_1 > 0$ (le sens positif est vers le bas). On notera le vecteur unitaire dirigé selon l'axe des z croissants (donc orienté vers le bas).

Dans le cas d'un liquide incompressible au repos soumis à un champ
de pesanteur uniforme,
la pression absolue p à une profondeur z vaut :

$$P_1 = Pat + \rho gh \Rightarrow F_1 = (Pat + \rho gh)s$$

$$P_2 = Pat + \rho g(h+a) \Rightarrow F_2 = (Pat + \rho g(h+a))s$$

Les force F_1 et F_2 , exercées par le liquide sur les faces supérieures (d'aire $s = a^2$) du cube



Sur la verticale

$$\overrightarrow{F_A} = \sum \vec{F} \Rightarrow F_A = F_2 - F_1 \Rightarrow F_A = (Pat + \rho g(h+a))s - (Pat + \rho gh)s$$

$$F_A = \rho \; g \; a \; s = \rho g V$$

- ρ est la masse volumique du liquide ;
- V est le volume de corp (cube) ;
- g est l'accélération de la pesanteur.

- Tout corps totalement immergé dans un liquide est soumis à une poussée dirigée du bas vers le haut et égale au poids du liquide déplacé, c'est-à-dire correspondant au volume du corps immergé cette poussée s'appeler la poussée d'Archimède est dirigée dans le sens inverse du champ de pesanteur.

- F_A-P_d > 0, le corps s'élève dans le fluide et cette ascension aboutit à une flottaison du solide.
- F_A-P_d = 0, le corps est immobile dans le fluide, puisque la poussée d'Archimède équilibre le poids du solide.
- F_A-P_d < 0, le corps s'enfonce dans le fluide, c'est le type de chute qui est rencontrée dans la décantation des solides.
- P_d : Poids du corps immergée.

  Donc en conclusion la poussée d'Archimède est exprimée comme une force dirigée ver le haut et exercée par un fluide sur un corps immergé, la valeur de cette force est calculée par la relation suivante ;

$$F_A = \rho g V$$

III.7. Equations de l'hydrostatique

L'élément de fluide est en équilibre statique sous l'influence de trois forces de volume et de forces de pression hydrostatique. Les forces qui agissent sur cet élément de volume (dxdydz) dans la direction z sont :

1. Les forces de volume : ρZ (dxdydz)
2. Les forces de surface (de pression) : $\left(P - \frac{\partial P}{\partial z}\frac{dz}{2}\right) dx\ dy$ et $\left(P + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{dz}{2}\right) dx\ dy$

Dans un état d'équilibre on obtiens les équations d'équilibre dans toutes les autres directions :

$$\begin{cases} \rho\ a_x - \dfrac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ \rho\ a_y - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \rho\ a_z - \dfrac{\partial P}{\partial z} = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow\ \rho\ \vec{F} - \overrightarrow{grad}P = \vec{0}$$

a_x, a_y, a_z : Les accélération dans les trois directions

Les équations **(2.6)** est appelées équations fondamentales de l'hydrostatique (équations d'Euler). Ces équations montrent que la pression hydrostatique en un point donné d'un fluide au repos dépend des coordonnées du point dans le volume du liquide et de la masse volumique, c'est-à-dire

P = *f*(x, y, z, ρ).

Dans le cas où la force massique est seulement la force de pesanteur, les composantes de la force massique unitaire sont : $a_x=0$ $a_y=0$ $a_z=-\ g$

$$\rho\ a_z - \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \Rightarrow dP = \rho\ a_z dz$$

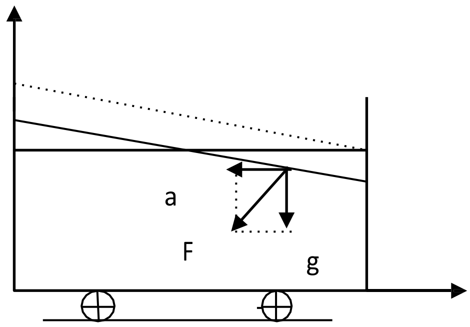
$$\Rightarrow dP = \rho\, a_z dz \Rightarrow P = -\rho g z + c$$

Il y a d'autres cas ou les forces au d'autres directions sont pris en compte

III.8. Champ de pesanteur avec accélération horizontale constante

Soit un liquide homogène soumis à une accélération horizontale constante ***a***, donc :

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ g \end{pmatrix}$$



$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = -\rho a \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \end{cases}$$

La pression est fonction uniquement de ***x*** et de z La variation totale de la pression est définie comme suit

D'où la pression est :

$$dp = \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz$$

$$P = \int \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz = -\rho a x - \rho g z + c$$

$$\Rightarrow P + \rho a x + \rho g z = c$$

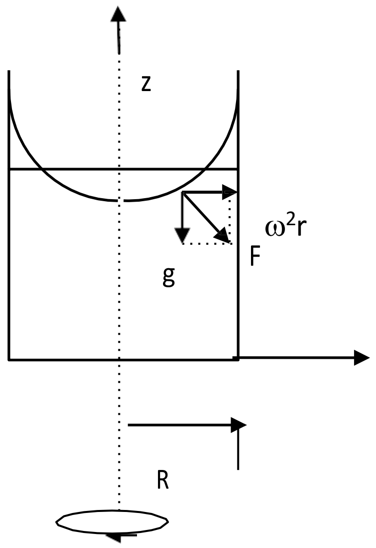
Sur les lignes égale pression $dp = 0$ soit P=cst donc

$$\rho a x + \rho g z = c \Rightarrow \quad z = -\frac{a}{g}x + c'$$

$$c' = \frac{c}{\rho g}$$

III.9. Champ de pesanteur avec rotation uniforme

Considérons un réservoir cylindrique qui tourne à une vitesse angulaire ω constante.



$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^2 r \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial r} = -\rho\omega^2 r \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g + \rho\omega^2 r \Rightarrow P = -\rho g z + \rho\omega^2 \frac{r^2}{2} + c$$

Sur les lignes égale pression *dp = 0* soit P=cst donc

$$-\rho g z + \rho\omega^2 \frac{r^2}{2} = c' \quad \Rightarrow z = \omega^2 \frac{r^2}{2g} + c'$$

Exercice 6 : On donne $F_1 = 100$ N et $D_1 = 10$cm (diamètre du petit piston) Le petit piston descend d'une hauteur $h_1 = 1$m

1. Si le diamètre du grand piston est $D_2 = 1$m, quelle est l'intensité de la force F_2 exercée sur le grand piston ?
2. De quelle hauteur h_2 monte le grand piston ?

Exercice 7 : Un récipient contient de l'eau sur 20cm et de l'huile sur 50cm. La pression au point A est égale à la pression atmosphérique. Calculer la pression aux points B et C ; sachant que $\rho_{eau} = 10^3 kg/m^3$ et $\rho_{huile} = 900 kg/m^3$

Solution :

Soit $P_A = P_{atm} = 10^5$ Pa

$P_B = P_A + \rho_h\, g\, H_2 = 10^5 + 900\ .9.81.\ 0.5 = 104500$ Pa

$P_C = P_B + \rho_e\, g\, H_1 = 104500 + 1000.\ 9.81.\ 0.2 = 106482$ Pa

Exercice 8 : Un récipient en partie rempli d'eau et soumis à une accélération horizontale constante. L'inclinaison de la surface de l'eau est de 30°. Quelle est l'accélération du récipient ?

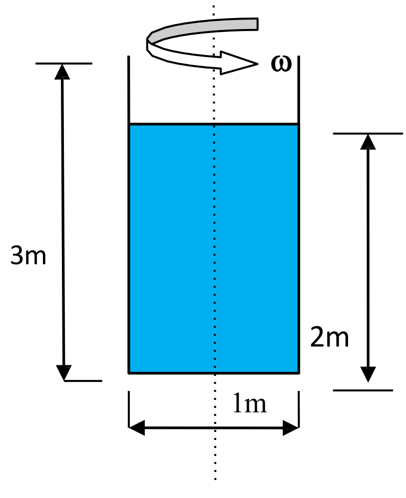
Solution

tgϑ=a/g

Donc : $a = g * tg\,\theta = 9.81 * tg\ 30° = 9.81 * 0.5 = 4.9\ m/s^2$

Exercice 9 : Un récipient en partie rempli d'eau et soumis à une accélération horizontale constante. Calculer cette accélération si on : L=3m H_1 =1.8m H_2 =1.2m g = 9.81 m/s^2

Exercice 10 : Un réservoir cylindrique de 3m de haut, 1m de diamètre contient 2m d'eau et tournant autour de son axe. Quelle vitesse angulaire ω constante peut-on atteindre sans renverser l'eau. Quelle est la pression au fond du réservoir en A (axe) et B paroi) quand ω = 10rad/s



Chapitre IV

Dynamique des fluides parfaits incompressibles

IV.1. Introduction

Dans la dynamique des fluide l'étude faite sur un liquide en mouvement ou la pression a les mèmes propriétés que dans un liquide en repos, pour simplifier la problème liquide parfait est un liquide non visqueux ou on néglige les frottement

La dynamique étudie les fluides en mouvement pour simplifier le problème, on néglige les frottements. Dans un liquide non visqueux ou parfait en mouvement, la pression a les mêmes propriétés que dans un liquide au repos.

On s'intéresse dans ce chapitre aux équations fondamentales qui régissent la dynamique des fluides parfaits incompressibles à savoir :

- L'équation d'Euler (Conservation de la quantité de mouvement)

- L'équation de continuité (conservation de la masse)

- Le théorème de Bernoulli (conservation de l'énergie)

IV. 2. Equations générales de la dynamique des fluides parfaits

De la même manière que dans la section (§III) , sauf que dans cette section on ajoutent la force d'inertie (accélération du mouvement)

Les forces qui agissent sur cet élément de volume (dSdz) sont :

1. **La force de volume :** $\rho Z\,(dSdz)\,\partial P$

2. **Les forces de pression : pdS et** $\left(P + \frac{\partial P}{\partial z} dz\right) ds$

3. **La force d'inertie (accélération) :** $\rho dsdz \frac{\partial w}{\partial t}$

$$\begin{cases} a_x - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ a_y - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ a_z - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \Rightarrow \vec{F} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

$\rho\vec{F}$: Force de volume par unité de volume.

$\vec{\nabla}p$: Force de pression par unité de volume.

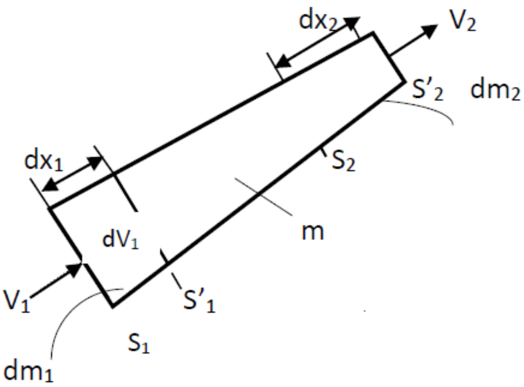
$\rho\frac{d\vec{V}}{dt}$: Force d'inertie par unité de volume.

Ces équations sont appelées équations générales de la dynamique des fluides parfaits ou **équations d'Euler**

En introduisant les expressions des composantes de l'accélération pour un écoulement tridimensionnel, les équations **(3.1)** s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} a_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} \\ a_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} \\ a_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} + v\frac{\partial w}{\partial x} + u\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \Rightarrow \vec{F} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{V} \otimes \vec{V}$$

IV.3. Equation de continuité



Considérant un fluide parfait incompressible circule par un écoulement permanant dans une veine ou ;

S_1 et S_2 respectivement les sections d'entrée et la section de sortie du fluide à l'instant t

S'_1 et S'_2 respectivement les sections d'entrée et la section de sortie du fluide à l'instant *t' (t+dt)*

V_1 et V_2 les vecteurs vitesses d'écoulement respectivement à travers les sections S_1 et S_2 de la veine

dx_1 et dx_2 respectivement les déplacements des sections S_1 et S_2 pendant l'intervalle de temps dt

dm_1 : masse élémentaire entrante comprise entre les sections S_1 et S'_1

dm_2 : masse élémentaire sortante comprise entre les sections S_2 et S'_2

m : masse comprise entre S_1 et S_2

dV_1 : volume élémentaire entrant compris entre les sections S_1 et S'_1

dV_2 : volume élémentaire sortant compris entre les sections S_2 et S'_2

A l'instant *t* : le fluide compris entre S_1 et S_2 a une masse égale à (dm_1+m)

A l'instant *t'* : le fluide compris entre S'_1 et S'_2 a une masse égale à $(m+dm_2)$

La masse déplacée étant conservée, on écrit alors : $dm_1+m = m+dm_2$; soit $dm_1 = dm_2$

Alors : $\rho_1 dV_1 = \rho_2\, dV_2$ ou encore :

$$\rho_1\, S_1 dx_1 = \rho_2\, S_2 dx_2 \Rightarrow \rho_1\, S_1 \frac{dx_1}{dt} = \rho_2\, S_2 \frac{dx_2}{dt}$$

Le fluide est incompressible donc $\rho_1 = \rho_2$

$\frac{dx_1}{dt} = V_1$ et $\frac{dx_2}{dt} = V_2$

On obtient $\boxed{\boldsymbol{S_1 V_1 = S_2 V_2}}$

Cette relation représente l'équation de continuité du débit et aussi l'équation de la conservation de la masse liquide.

D'une manière générale et avec des apports ou des pertes latéraux (*q*) l'équation s'écrite comme suit ;

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = q$$

Ou *Q* est le débit volumique

$$Q = \frac{dW}{dt} = \frac{S\, dx}{dt} = SV$$

Avec ;

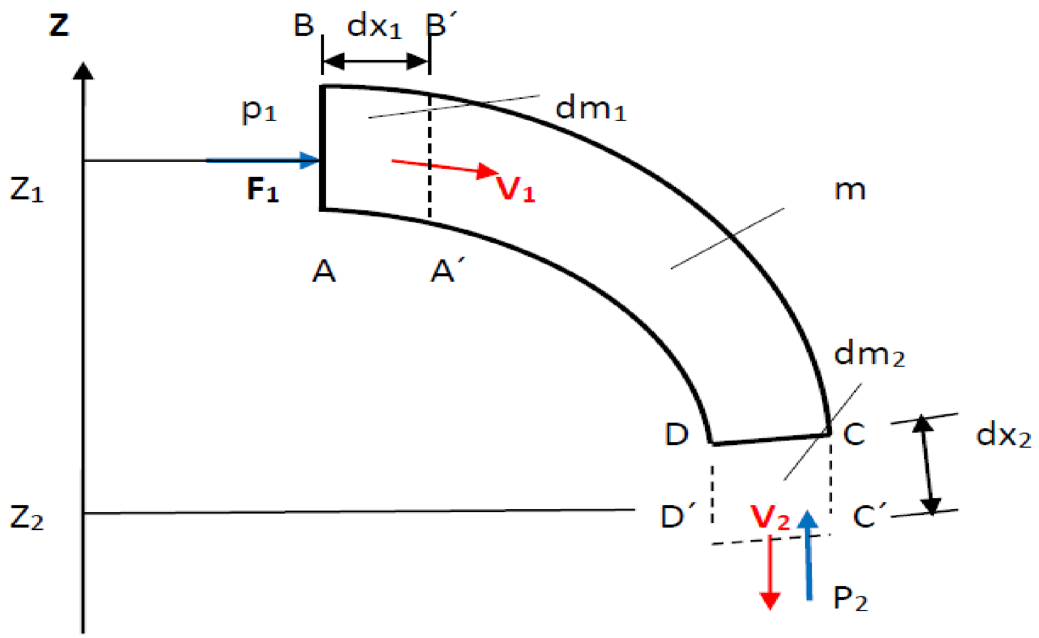
W : Le volume de fluide écoulé dans l'instant *dt*.

S : La section transversale de l'écoulement.

V : La vitesse moyenne d'écoulement à travers la section *S*.

IV. 4. Théorème de Bernoulli

Ce théorème ce base sur le principe de conservation de l'énergie d'un fluide dans l'espace.



Considérant que ;

- Le fluide est parfait et incompressible, l'écoulement est permanent et la conduite est lisse.

- Appliquons le principe de conservation de l'énergie entre les instants t et t+Δt. La variation de l'énergie ΔE est égale à la somme des travaux des forces extérieures (poids de l'élément fluide, forces de pression).

$$\frac{1}{2}dm_1V_1^2 + dm_1\, g\, Z_1 + P_1S_1dx_1 = \frac{1}{2}dm_2V_2^2 + dm_2\, g\, Z_2 + P_2S_2dx_2$$

$$\frac{1}{2}dm_1V_1^2 + dm_1\, g\, Z_1 + P_1dW_1 = \frac{1}{2}dm_2V_2^2 + dm_2\, g\, Z_2 + P_2dW_2$$

$$\frac{1}{2}dm_1V_1^2 + dm_1\, g\, Z_1 + P_1dm_1/\rho = \frac{1}{2}dm_2V_2^2 + dm_2\, g\, Z_2 + P_2dm_2/\rho$$

$$dm_1 = dm_2 = dm$$

$$\frac{1}{2}dm\ \ V_1^2 + dm\ \ \ g\, Z_1 + P_1dm\ \ /\rho = \frac{1}{2}dm\ \ V_2^2 + dm\ \ \ g\, Z_2 + P_2dm\ \ /\rho$$

$$\frac{1}{2}V_1^2 +\ g\, Z_1 + P_1/\rho = \frac{1}{2}V_2^2 +\ g\, Z_2 + P_2/\rho$$

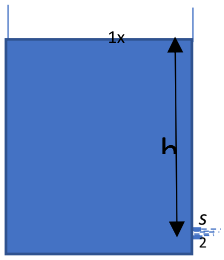
$$\frac{V_1^2}{2g}+\frac{P_1}{\rho g}+\ Z_1=\frac{V_2^2}{2g}+\frac{P_2}{\rho g}+\ Z_2\quad (m)$$

Cette équation est de forme de hauteur de fluide peut s'écrite en forme de pression de la forme suivante ;

$$\boxed{\frac{\rho V_1^2}{2}+\ \rho g\, Z_1+P_1=\frac{\rho V_2^2}{2}+\ \rho g\, Z_2+P_2\quad (Pa)}$$

IV.4.1. Ecoulement à travers les orifices

i posant un réservoir de surface transversale S rempli d'un liquide de masse volumique ρ percé d'un orifice de section s situé à une hauteur h sous la surface libre.



Appliquant le théorème de Bernoulli entre les points 1 et 2 comme suit ;

$$\frac{V_1^2}{2g}+\frac{P_1}{\rho g}+\ Z_1=\frac{V_2^2}{2g}+\frac{P_2}{\rho g}+\ Z_2$$

$P_1=P_2=P_{atm}$

$$\begin{cases} V_2=Q/S_2 \\ \text{S} >>> \text{s} \end{cases} \Rightarrow V_2 \lll (on\ va\ la\ néglig\acute{e})$$

La relation sera comme suit ;

$$\cancel{\frac{V_1^2}{2g}}+\cancel{\frac{P_{atm}}{\rho g}}+\ Z_1=\frac{V_2^2}{2g}+\cancel{\frac{P_{atm}}{\rho g}}+\ Z_2$$

$$Z_1=\frac{V_2^2}{2g}+\ Z_2\ \ \Rightarrow V_2=\sqrt{2g(Z_1-Z_2)}$$

$$V_2=\sqrt{2gh}$$

Cette vitesse est une vitesse soi-disant parfaite ou théorique (V_t) dont la vitesse réelle $V_r=\varphi_v V_{th}$ ($\varphi_v<1$) c.a.d $V_r<V_{th}$ et ça a cause de la perte d'énergie entre la surface libre et la sortie de l'orifice.

Aussi la section de l'écoulement à la sortie $s_r<s_{th}$ ou $s_r=\varphi_s\, s_{th}$

Avec $s_{th}=\pi D^2/4$

D : diamètre de l'orifice

Le débit d'écoulement est donné en fonction de la vitesse par ;

$Q_{th} = V_{th}s_{th} = \frac{V_r}{\varphi_v}\frac{s_r}{\varphi_s} = V_r s_r \frac{1}{\varphi_v \varphi_s}$

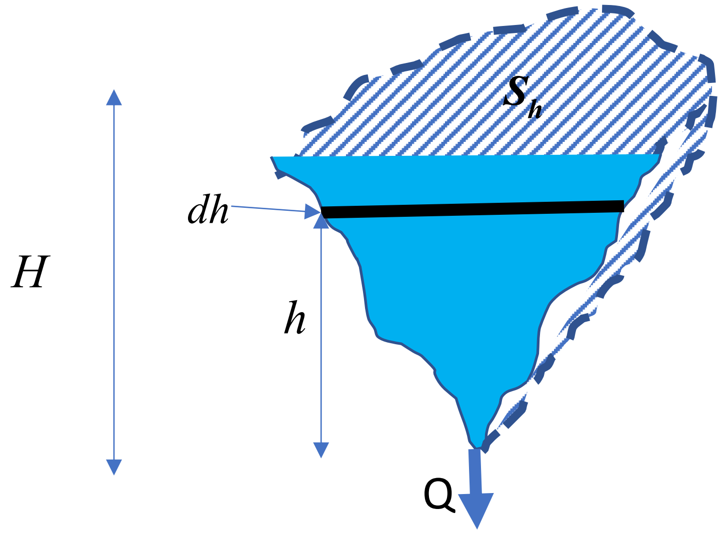
On mit $\varphi_v\ \varphi_s = \varphi_q$ on obtient ;

$Q_{th} = \frac{Q_r}{\varphi_q} \Rightarrow Q_r = \varphi_q Q_{th}$

IV.4.2. Application du théorème de Bernoulli sur quelques exemples

***d-* Vidange d'un réservoir.**

La figure présentée au-dessous démontre le vidange d'un réservoir d'une section transversal générale .



Calcul du temps de vidange

A un instant t donné, on a :

$$Q = \varphi_q S_2 \sqrt{2gh} = -\frac{dV}{dt}$$

dV: Volume infiniment petit qui sort du réservoir dans une instant dt

$$dt = -\frac{dV}{\varphi_q S_0 \sqrt{2gh}} = -\frac{S_h dh}{\varphi_q S_0 \sqrt{2gh}} \Rightarrow \int_0^t dt = -\int_0^h \frac{S_h dh}{\varphi_q S_0 \sqrt{2gh}}$$

S_h: Section horizontale au niveau h

Pour un réservoir qu'a une section S_h variable en fonction de la hauteur h le temps de vidange est donnés par la formule:

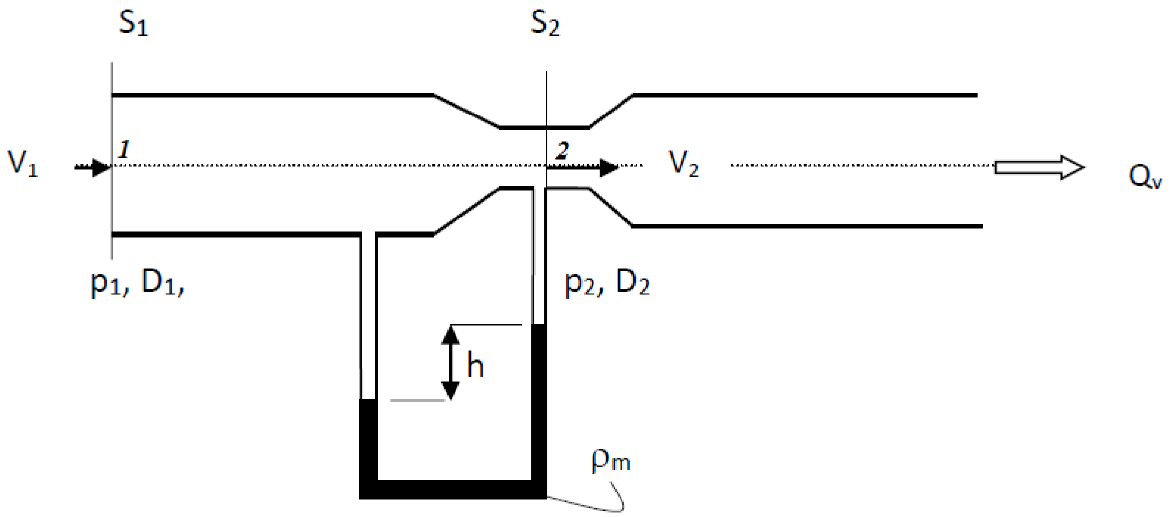
$$t = -\int_H^0 \frac{S_h dh}{\varphi S_0 \sqrt{2gh}} = \int_0^H \frac{S_h dh}{\varphi S_0 \sqrt{2gh}}$$

Pour une section S du réservoir constante le temps de vidange est données par

$$t = \frac{2S\sqrt{H}}{\varphi S_0\sqrt{2g}}$$

***e*- Tube de venturi**

Tube de venturi est une conduite avec rétrécissement ou étranglement comme démontré dans la figure. Généralement cette appareil est utilisé pour de calculer le débit en fonction de la différence de pression *(Δp)* ou la dénivellation *(h)*.



Par l'application du théorème de Bernoulli entre le point 1 et 2

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} + Z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + Z_2$$

$Z_1 = Z_2$

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} \Rightarrow \frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g}$$

Le débit est condtant le long de la conduite donc Q=cst

$$\Rightarrow V_1 S_1 = V_2 S_2 \Rightarrow V_2 = V_1 \frac{S_1}{S_2} \Rightarrow V_2 = V_1 \frac{\pi D_1^2/4}{\pi D_2^2/4}$$

$$V_2 = V_1 \frac{D_1^2}{D_2^2}$$

$$\Rightarrow \frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \frac{V_1^2 \frac{D_1^4}{D_2^4} - V_1^2}{2g} \Rightarrow \frac{P_1 - P_2}{\rho} = \frac{V_1^2 \left(\frac{D_1^4}{D_2^4} - 1\right)}{2}$$

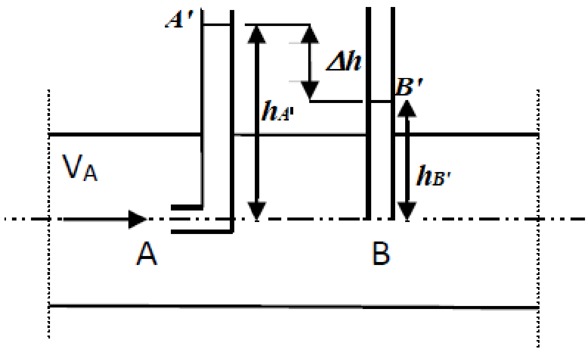
$$V_1 = \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho\left(\frac{D_1^4}{D_2^4} - 1\right)}}$$

En sachant la section S_1 nous pouvons calculer le débit par la relation

$$Q = V_1 \frac{\pi D_1^2}{4}$$

***f-* Tube de Pitot.**

le tube de Pitot a pour bute de mesurer la vitesse d'écoulement dans un point a l'aide de la différence de hauteurs d'eau comme le montre la figure.



Appliquant le théorème de Bernoulli entre A et A'

$$\frac{V_A^2}{2g} + \frac{P_A}{\rho g} + Z_A = \frac{V_{A'}^2}{2g} + \frac{P_{A'}}{\rho g} + Z_{A'}$$

De l'hydrostatique on a ;

$$\frac{P_A}{\rho g} = \frac{P_B}{\rho g} = \frac{P_{atm} + \rho g h_B}{\rho g}$$

Donc

$$\frac{V_A^2}{2g} + \frac{\cancel{P_{atm}} + \rho g h_B}{\rho g} + Z_A = \cancel{\frac{V_{A'}^2}{2g}} + \frac{\cancel{P_{atm}}}{\rho g} + Z_{A'} \Rightarrow \frac{V_A^2}{2g} = Z_{A'} - Z_A - h_B$$

$$\Rightarrow \frac{V_A^2}{2g} = h_{A'} - h_B \Rightarrow \frac{V_A^2}{2g} = \Delta h$$

Soit ;

$$V_A = \sqrt{2g\Delta h}$$

IV.5. Application.

Exercice 1 :

Soit un fluide supposé incompressible (eau) qui s'écoule à travers un tube de venturi représenté par la figure 1.

Données : $\rho_m = 13.6\ 10^3$ kg/m3 $\rho_{eau} = 10^3$ kg/m^3 V_1= 6m/s D_1= 25 cm

-On demande de calculer le diamètre D_2 si $p_1 = p_2$

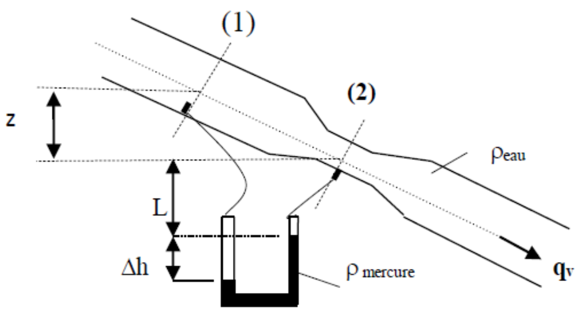
-Si cette pression (p_2) est de 12N/cm2, quelle est la valeur de Δh ?

Exercice 2 :

Un tube de venturi est disposé sur une conduite d'eau incliné. Les tubes de liaison au manomètre sont remplis d'eau.

1) Calculer la dénivellation Δh du manomètre en fonction de V_1, S_1, S_2, ρ_{eau}, ρ_m

2) Calculer le débit volumique si Δh = 90mm et D_1= 200mm et D_2= 90mm .



$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} + Z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + Z_2$$

$$\Rightarrow \frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + Z_2 - Z_1$$

Le débit est condtant le long de la conduite donc Q=cst

$$\Rightarrow V_1 S_1 = V_2 S_2 \Rightarrow V_2 = V_1 \frac{S_1}{S_2} \Rightarrow V_2 = V_1 \frac{\pi D_1^2/4}{\pi D_2^2/4}$$

$$V_2 = V_1 \frac{D_1^2}{D_2^2}$$

$$\Rightarrow \frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \frac{V_1^2 \frac{D_1^4}{D_2^4} - V_1^2}{2g} + Z_2 - Z_1$$

$$\Rightarrow P_1 - P_2 = \rho \frac{V_1^2\left(\frac{D_1^4}{D_2^4}-1\right)}{2} + \rho g(Z_2 - Z_1) \text{..........I}$$

$$P_a = P_1 + \rho g(L + z + \Delta h)$$

$$P_b = P_2 + \rho g L + \rho_m g \Delta h)$$

$$P_1 - P_2 = (\rho_m - \rho) g \Delta h - \rho g z$$

$$P_1 - P_2 = (\rho_m - \rho) g \Delta h - \rho g (Z_2 - Z_1) \dots\dots..II$$

$$De\ I\ \ et\ II\ \ (\rho_m - \rho) g \Delta h - \rho g (Z_2 - Z_1) \quad = \rho \frac{V_1^2\left(\frac{D_1^4}{D_2^4} - 1\right)}{2} + \rho g (Z_2 - Z_1)$$

$$\Delta h \quad = \frac{\rho V_1^2\left(\frac{D_1^4}{D_2^4} - 1\right)}{2g(\rho_m - \rho)}$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{2g(\rho_m - \rho).\Delta h}{\rho\left(\frac{D_1^4}{D_2^4} - 1\right)}}$$

V_1=0,97

$$Q = V_1 . S_1 = V_1 . \frac{\pi {D_1}^2}{4} = 0{,}97 . \frac{\pi 0{,}2^2}{4}$$

$$Q = 0{,}03 m^3/s = 30 l/s$$

Chapitre V

Dynamique des fluides réels

V.1. Introduction

Avant d'entamer ce sujet il faut prendre une idée sur la notion du turbulence **ce** phénomène est bien décrit par le physicien Osborne Reynolds.

V.2. Nombre de Reynolds et régime d'écoulement.

Le nombre de Reynolds est sans dimension et représente le rapport entre les force d'inertie et les forces de viscosité, ce nombre est définie par la relation suivante ;

$$Re = \frac{VD\rho}{\mu} = \frac{VD}{\nu}$$

D : Diamètre de la conduite.

V : Vitesse moyenne d'écoulement.

ρ : Masse volumique du liquide.

μ : Viscosité dynamique.

ν : Viscosité cinématique

Pour les dans les conduites trois régimes sont distingués ;

Régime laminaire : Les fils de courant sont en parallèles avec un mouvement calme.

Régime turbulent : apparition d'un mouvement turbulent agité.

Régime transitoire : Est un état de transition entre le régime laminaire et turbulent.

Régime laminaire ………..$R_e \leq 2000$

Régime turbulent ……….. $R_e \geq 3000$

Régime transitoire ……….$2000 < R_e < 3000$

V.3. Théorème de BERNOULLI pour fluides réels.

Le frottement des couches du fluide entre elles et avec les parois de la conduite engendre une perte d'énergie du fluide cette perte est appelé perte de charge d'où l'équation de Bernoulli s'écrire comme suit ;

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} + Z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + Z_2 + \Delta H_{1,2}$$

$\Delta H_{1,2}$: Perte de charge totale entre deux point 1 et 2

La perte de charge dans une conduite est proportionnelle a la longueur de cette conduite, cette proportionnalité est exprimée par le coefficient de perte de charge noté par la lettre grec λ.

Avec ;

$$\frac{\Delta P_{1,2}}{\rho g} = \Delta H_{1,2} = \lambda \frac{V^2}{2g} \frac{L}{D}$$

λ : Coefficient de perte de charge.

L : Longueur entre les deux points considérés.

V : Vitesse moyenne d'écoulement.

D : Diamètre de la conduite.

Le coéfficient de perte de charge λ est calculé par les formules suivantes ;

Loi de Poiseuille $\lambda = \frac{64}{R_e}$ Pour un régime laminaire.

La loi de Blasius $\lambda = 0,316\ R_e^{-1/4}$ Pour régime turbulent et conduite lisse.

La loi de Blench $\lambda = 0,79\sqrt{\frac{\varepsilon}{D}}$ Pour régime turbulent et conduite rugueuse

ε : Rugosité.

D'une façon plus généralisée et pour tous les cas possibles, on peut définir λ par le diagramme de Moody.

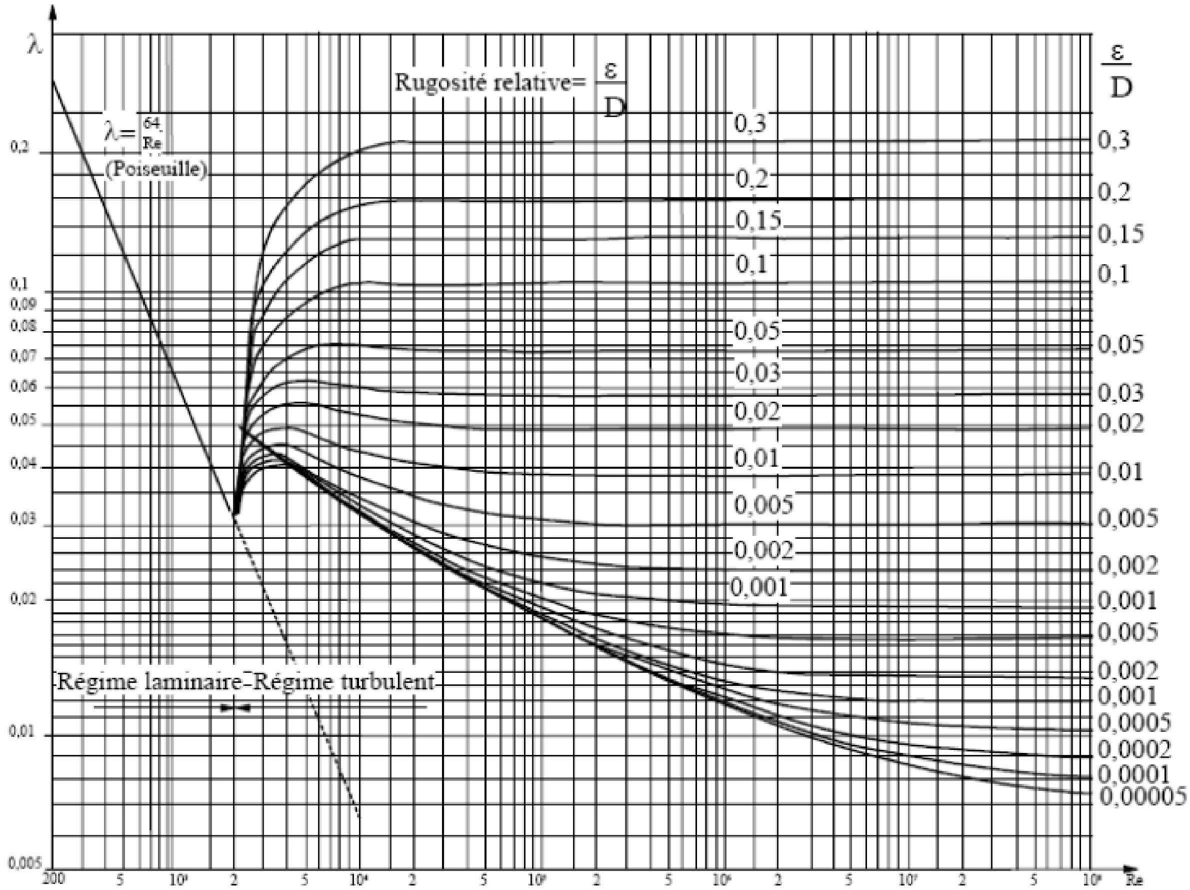


Diagramme de Moody

On distingue deux types de perte de charge

Perte de charge linéaire *(ΔH_l),* présentées précédemment.

Perte de charge singulière *(ΔH_s)* liées au singularité trouvées dans la trajectoire de l'écoulement (Coude, divergence, convergence, vanne…) , sont données par la relation suivante ;

$$\Delta H_s = K\frac{V^2}{2g}$$

K : Coefficient de perte de charge singulière dépend de caractéristiques de la singularité.

V.4. Application

Exercice 1 :

Du pétrole de viscosité μ=0.11 Pa.s et de densité 0.9 circule dans une conduite de longueur 1650m et de diamètre 25cm à un débit volumique 19.7 l/s.

- Déterminer la viscosité cinématique du pétrole dans le système SI et le système CGS
- Calculer la vitesse de l'écoulement.
- Calculer le nombre de Reynolds et en déduire la nature de l'écoulement.
- Déterminer le coefficient de perte de charge linéaire et calculer la perte de charge dans la conduite

Solution

- La viscosité cinématique

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{0{,}11}{900} = 1{,}22\,.\,10^{-4}\;st$$

- La vitesse de l'écoulement

$$V = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\pi D^2/4} = \frac{4\,.\,19{,}7\;\;10^{-3}}{\pi\;0{,}25^2} = 0{,}40\;m\;\;\;/s$$

- Le nombre de Reynolds

$R_e = \frac{VD}{\nu} = \frac{0{,}40\;.\;0{,}25}{1{,}22\;.\;10^{-4}}$=819,67

$R_e = 819{,}67 < 2000$ donc le régime est laminaire

$$\lambda = \frac{64}{R_e} = \frac{64}{819{,}67} = 0{,}078$$

$$\Delta H = \frac{\lambda L\,V^2}{2gD} = \frac{0{,}078\,.\,1650\,.\,0{,}4^2}{2\,.\,9{,}81\,.\;0{,}25} = 4{,}20m$$

Exercice 2 :

Déterminer la perte de charge et la perte de pression d'une huile de densité 0.8 et de viscosité 9 cSt s'écoulant dans une conduite de 20 cm de diamètre et de rugosité absolue ε = 0.25mm

et de longueur 300m si le débit est de 120 litres par seconde.

Solution.

$$\Delta H = \frac{\lambda L\,V^2}{2gD}$$

$$V = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\pi D^2/4} = \frac{0{,}12}{\pi 0{,}2^2/4} = 3{,}82\ m/s$$ Q=120 l/s=0,12m^3/s

$$R_e = \frac{VD}{\nu} = \frac{3{,}82\ .\ 0{,}2}{9\ .\ 10^{-6}} = 8{,}5\ .\ 10^4$$

$R_e = 8{,}5\ .\ 10^4 > 2000$ Donc le régime est turbulent

On a

$$\begin{cases} R_e = 8{,}5\ .\ 10^4 > 2000 \ \ \text{(régime est turbulent)} \\ La\ conduite\ est\ rugeuse\ \epsilon = 0{,}25\ mm \end{cases}$$

Donc on utilise le diagramme de Moody

R_e=8,5 . 10^4 et $\frac{\epsilon}{D} = \frac{0{,}25.10^{-3}}{0{,}2} = 1{,}25\ 10^{-3}$

Du diagramme on trouve $\lambda \approx 0{,}019$

$$\Delta H = \frac{\lambda L\, V^2}{2gD} = \frac{0{,}019\ .\ 300\ .\ 3{,}82^2}{2\ .\ 9{,}81\ .\ 0{,}20} = 21{,}20\ m$$

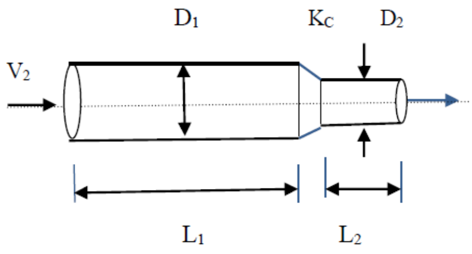
La perte de charge exprimé en pression ;

$$\Delta P = \rho g \Delta H = 800\ .\ 9{,}81\ .\ 21{,}20 = 166{,}38 kpa$$

Exercice 3 :

Une conduite constituée de deux tronçons (fig) de diamètres et de longueurs différentes transportant une huile de masse volumique ρ_h = 850 kg/m3 et de viscosité cinématique 10^{-5} m2/s

- Calculer la différence de pression entre l'entrée et la sortie de la conduite sachant que : L1= 5m L2 = 0.2m D1 = 20mm D2 = 5 mm V1 = 0.5 m/s Kc = 0



Exercice 4 :

Un jet d'eau est alimenté à parti d'un réservoir de grandes dimensions au moyen d'une pompe centrifuge de débit volumique de 2 l/s, à travers une conduite de longueur 15m et de diamètre intérieur de 3cm. La conduite présente un coude de 90° (K_c=0.3), $\mu_{\ eau} = 10^{-3}$ Pa.s

1) Calculer la vitesse de l'écoulement

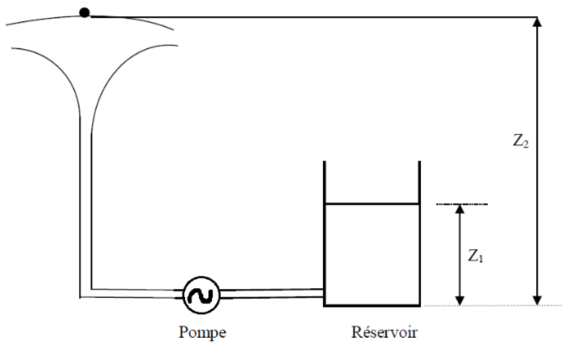
2) Calculer le nombre de Reynolds et préciser la nature de l'écoulement

3) Calculer le coefficient de perte de charge

4) Calculer la perte de charge totale dans le circuit

5) Calculer la puissance nette de la pompe

6) En déduire la puissance absorbée (Pa) par la pompe sachant que son rendement est de 75%



Réponse ; V=2,83 m/s , R_e= 84900, λ=0,018 , ΔH=3,8 , P_n=211,74 wat P_a=282,3 wat

Références bibliographiques

1. Candel S. Mécanique des fluides, Dunod, 1990

2. Comolet R. Mécanique expérimentales des fluides, Vol.1, 2 et 3, Masson, 1981

3. Ouziaux R., Perrier J. Mécanique des fluides appliquée, Dunod, paris, 1998

4. Nekrassov B. Cours d'hydraulique, éditions Mir, 1967

5. Lumbroso H. Problèmes résolus de mécanique des fluides, Dunod, 1989

6. Carlier M. Hydraulique générale et appliquée, éditions Eyrolles, Paris, 1986

7. Padet J. Fluides en écoulement, Masson, 1991

8. Douglas J.F. Solution of problems in fluid mechanics, Pitman, 1985

9. Youcefi A. Cours et Travaux Dirigés de mécanique des fluides, USTO-MB, 2016

10. Loukarfi L. Exercices résolus de mécanique des fluides, Dar El Oumma, 1999