جامعة غليزان

كلية العلوم الإقتصادية، التجارية وعلوم التسيير

قسم العلوم الاقتصادية

مطبوعة بيداغوجية بعنوان :

دروس في نماذج التنبؤ

موجهة لطلبة ميدان السنة الثالثة علوم اقتصادية وتجارية، وعلوم التسيير

من إعداد

د. تواتي خديجة

السنة الجامعية:2021-2022

تمهيد

يندرج مقياس نماذج التنبؤ ضمن الاقتصاد القياسي، كونه يعتمد على كل من الاقتصاد والاحصاء والرياضيات لبناء نماذج قياس اقتصادي، تساعد على تمثيل مختلف الظواهر الاقتصادية ومحاولة معرفة اتجاهها وسلوكها المستقبلي، اعتمادا على سلوكها في الماضي.

يهم مقياس نماذج التنبؤ طلبة السنة ثالثة ليسانس ميدان العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، وهو تكملة لما تم التعرف عليه طول مسارهم الدراسي، ويقوم على أساس مكتسباتهم العلمية في السنوات الأولى في الميدان، خاصة في مقياسي الاحصاء والرياضيات، لأنها تعتبر قاعدة المقياس وأساسه، حيث أن المقياس يساعد الطالب على تمثيل الظواهر الاقتصادية رياضيا في شكل معادلة أو مجموعة من المعادلات الرياضية، وذلك بعد جمع المعلومات وتصنيفها وتحليلها اعتمادا على الاحصاء، من أجل تبسيط الظاهرة وفهمها، والتوصل إلى معلومات واضحة ودقيقة، يمكن اعتمادها في عملية اتخاذ القرارات، سواء على المستوى الكلي أو المستوى الجزئي.

حيث يقسم المقياس إلى 4 محاور، يتعرف الطالب في المحور الأول على ماهية عملية التنبؤ والهدف منها، ومختلف المراحل التي تمر بها العملية، حتى تكون نتائجها في الأخير صحيحة ودقيقة، إلى جانب عرض أنواع نماذج القياس الاقتصادي، الفرق بينها، والهدف من كل نوع منها.

يتم التركيز في المحور الثاني على نماذج السلاسل الزمنية، باعتبارها نماذج تسهل عملية التنبؤ، ويتم التعريف بسالسلة الزمنية، والتطرق إلى مركباتها كل على حدا، حتى يتمكن الطالب من فهم أهميتها وكيفية التعامل معها في المحاور اللاحقة، وكيفية ارتباطها سواء حسب النموذج الجدائي أو النموذج التجميعي.

في المحور الثالث يتم التعرض لأهم الاختبارات الاحصائية التي تساعد على الكشف على المركبة النظامية في السلسلة الزمنية وهي مركبة الاتجاه العام، إلى جانب نماذج التنبؤ بهذه المركبة والمتمثلة في نموذج الاتجاه العام الخطي، النموذج الأسي، ونموذج القطع المكافئ.

خصص المحور الرابع لنماذج تمهيد السلسلة الزمنية، أي نماذج تهذيب السلسلة من المتغيرات الفصلية والعشوائية. كما أنه تم إرفاق كل محور بمجموعة من التمارين المحلولة، من أجل تعميق فهم المقترحات والنماذج النظرية، ومحاولة تعويد الطالب على تطبيق نماذج من الواقع باسقاط مكتسباته في المقياس.

الفهرس العام

1-عموميات حول التنبؤ

يعتبر التنبؤ من الطرق العلمية المهمة المستخدمة في عمليات التخطيط والرقابة ومجالات اتخاذ القرارات.

1-1-تعريف عملية التنبؤ

يقصد بالتنبؤ تقدير المجهول، أي التعرف على مسار الظاهرة محل الدراسة في المستقبل، وهو يعني وضع التقديرات حول ظاهرة اقتصادية معينة، باستخدام تقنيات رياضية إحصائية ، ويعرف بأنه محاولة تقدير المتغيرات المستقبلية المحتملة من خلال معرفة المتغيرات السلوكية وغير السلوكية لتلك الظاهرة. (هادي كاظم، 2009، صفحة 86)

تعيش المؤسسات في بيئات تتميز بالديناميكية، مما يفرض عليها استعمال تقنيات كمية في اتخاذ قراراتها، وهنا تظهر أهمية التنبؤ في :

- ضمان فعالية المؤسسة من خلال المرونة مع البيئة الخارجية؛
- معرفة احتياجات المؤسسة في المدى القصير والمتوسط؛
- الحد من المخاطر التي قد تواجه المؤسسة؛
- إعطاء صورة واضحة عن التوجه المستقبلي للمؤسسة؛
- المساهمة بقدر كبير في اتخاذ القرارات ومراقبة آثارها المستقبلية.

2-1-مراحل عملية التنبؤ

تمر عملية التنبؤ بالمراحل التالية: (بخيث، 2018، الصفحات 14-15)

أولا: مرحلة صياغة النموذج: وتعد من أهم مراحل بناء النموذج وأصعبها، حيث يتم تحديد الهدف من التنبؤ، وتجميع البيانات اللازمة للظاهرة المدروسة ، وفي هذه المرحلة يتم الاعتماد على النظرية الاقتصادية لتحديد المتغيرات التي يجب أن يشتمل عليها النموذج، وكذا تحديد طبيعة النموذج الذي يجب اعتماده لتمثيل العلاقة بين المتغيرات تمثيلا صحيحا؛

ثانيا: مرحلة التقدير: يتم في هذه المرحلة تقدير معالم النموذج التي تم صياغتها رياضيا في المرحلة الأولى، أي اعطاء قيم رقمية للمعالم المقدرة من النواحي الاقتصادية والاحصائية والقياسية؛

ثالثا: مرحلة الاختبار: حيث يتم اختبار معنوية النموذج المقدر اعتمادا على طرق إحصائية، للتأكد من صلاحية النموذج وقدرته على التنبؤ؛

رابعا: مرحلة التنبؤ: وفيها يتم اعداد تقديرات مستقبلية للمتغيرات المدروسة، وبعدها يمكن تطبيق النتائج المتوصل إليها على الواقع واستخدامها في عملية اتخاذ القرار.

3-1- نماذج القياس الاقتصادي

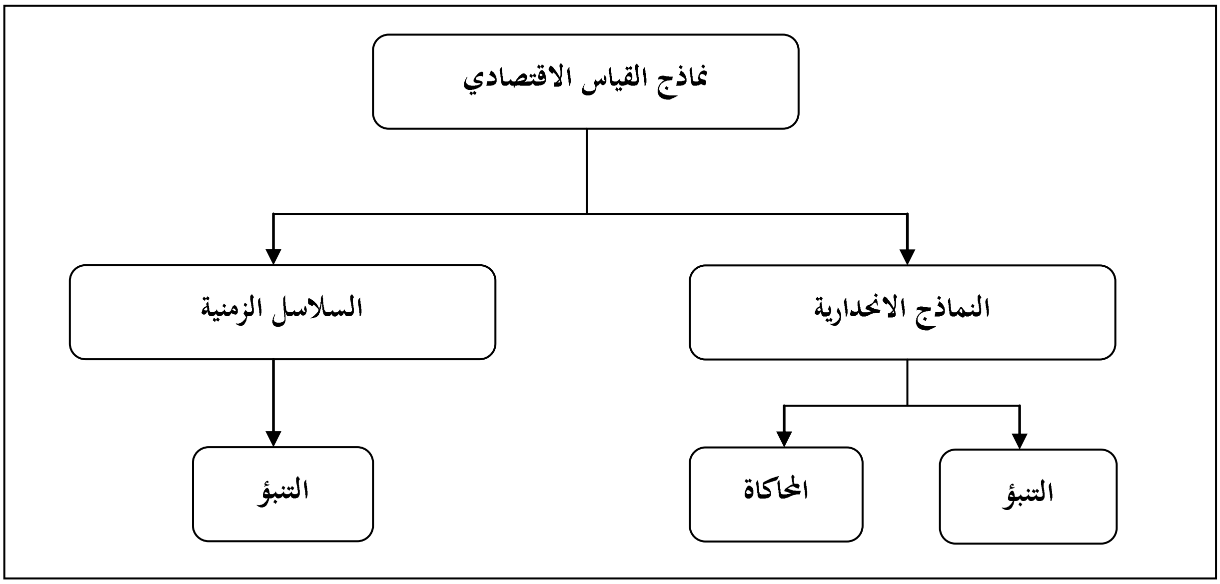
تعتبر نماذج القياس الاقتصادي وسيلة ذات أهمية بالغة في تفسير الظواهر الاقتصادية والتنبؤ بسلوكها المستقبلي، لأغراض أهمها البرمجة والتخطيط الاقتصادي، وهي عبارة عن معادلة أو مجموعة من المعادلات تتكون من ***متغيرات تابعة*** (داخلية) وأخرى ***مستقلة*** (خارجية)، بالإضافة إلى مجموعة من ***المعلمات والمتغيرات العشوائية*** ، وتشكل هذه المعادلات نظاما كاملا لتشبيه (تمثيل) مختلف نشاطات الاقتصاد.

ويتم بناء نموذج قياس اقتصادي لهدف تعليمي، أو علمي بحثي، بهدف التنبؤ، تحليل السياسة الاقتصادية واتخاذ القرار، وذلك اعتمادا على: (علي بخيث و فتح الله، 2018)

- **النظرية الاقتصادية :** يفيد في وضع هيكل النموذج النظري من خلال النظرية الاقتصادية "مبدأ أو مجموعة مبادئ معقولة ومتفق عليها لشرح أو تفسير ظاهرة اقتصادية معينة"، وعليه، لفهم ظاهرة ما يقوم الباحث الاقتصادي بالبحث عن القوانين التي تسيرها، ومعرفة المتغيرات التي تحدد اتجاه مسارها المستقبلي؛
- **الرياضيات:** يتمثل دورها في صياغة النظرية الاقتصادية في شكل رياضي "معادلة أو مجموعة معادلات"، وتفيد في مرحلة لاحقة لبناء نموذج القياس الاقتصادي في البحث عن خصائص النموذج؛
- **الإحصاء:** يتم من خلاله توفير المعطيات الضرورية لعملية النمذجة، ويسمح بتبسيطها للاستعمال والتحليل.

تفيد نماذج القياس الاقتصادي في معرفة ورصد السلوك الماضي للمتغيرات ثم التنبؤ بسلوكها في المستقبل، كما تفيد أيضا في تحليل السياسة الاقتصادية للدولة واتخاذ القرار على المستويين الكلي والجزئي، فمثلا نماذج القياس الاقتصادي تساهم في تحضير مخططات وبرامج توقع حجم الطلب بالنسبة للمؤسسة الاقتصادية، حيث يضع تحت تصرف المسيرين حقائق كمية عن الوضع الحقيقي للمؤسسة وذلك لتفادي القرارات الخاطئة. (حشمان، 2010، الصفحات 13-14)

شكل (01): أنواع نماذج القياس الاقتصادي وأهدافها



المصدر: مولود حشمان، *السلاسل الزمنية وتقنيات التنبؤ القصير المدى* ، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2010، ص.17.

يوضح الشكل أنواع نماذج القياس الاقتصادي والمتمثلة في: (حشمان، 2010، الصفحات 17-20)

1-3-1-النماذج الانحدارية

تشرح هذه المتغيرات متغير تابع بواسطة متغير أو مجموعة من المتغيرات المستقلة، ويمكن صياغتها في أبسط أشكالها كالتالي:

$$y_t = f(x_t)$$

النظرية الاقتصادية تعجز عن تحديد شكل الدالة وعدد معادلات النموذج، ويتم التخلص من هذا الإشكال بواسطة رسم بياني مزدوج بين المتغير التابع والمتغير المستقل.

بافتراض أن العلاقة التي تربط بين المتغيرين علاقة خطية بسيطة، يتم صياغتها من الشكل:

$$y_t = \alpha + \beta x_t$$

حيث أن:

y: المتغير التابع؛

x: المتغير المستقل؛

α، β: معلمات النموذج

حيث يتحدد المتغير الأول بمعرفة المتغير الثاني، هدف هذه النماذج هو التنبؤ الذي يفيد في تحديد قيم المتغيرات ذات الأهمية بالنسبة لمتخذ القرار مستقبليا، كما تساعد على تحليل السياسة الاقتصادية من خلال قيام الجهة المعنية باتخاذ القرار، بعد تجريب سياستها المستهدفة عن طريق المحاكاة من خلال توجيه وتحديد المتغيرات القرارية قبل تنفيذها ميدانيا، ومنه تجنب الأضرار الجانبية غير المتوقعة.

1-3-2-نماذج السلاسل الزمنية

هذه النماذج عبارة عن معلومات رقمية خاصة بالظاهرة الاقتصادية المدروسة، تغطي السلسلة الزمنية فترة محددة من الزمن في شكل بيانات قابلة للمقارنة كالسنة، الفصل، الشهر، الأسبوع، اليوم، ونماذج السلاسل الزمنية تقوم بتفسير المتغير التابع بواسطة الزمن أو عبر السلوك الماضي لذلك المتغير.

يتم اعتماد السلاسل الزمنية في حالة تعذر تحديد محددات المتغير محل الدراسة والعوامل المؤثرة فيه، **مثلا**: إذا كان V_t تمثل حجم المبيعات لسلعة معينة، فإنه لا يمكن بالاعتماد على النظرية الاقتصادية معرفة أسباب التغيرات الحاصلة في حجم المبيعات بدقة، لأنه يمكن أن تكون هذه التقلبات استجابة لتغير الأسعار، الدخل المتاح، أو نتيجة لتأثير عوامل أخرى غير قابلة للقياس كالطقس، تغير الأذواق، عيد معين، إذا يمكن في هذه الحالة تفسير المبيعات اعتمادا:

- **الزمن:** من خلال مركبة الاتجاه العام $V_t = f(t,\varepsilon_t)$؛
- **السلوك الماضي للمتغير:** أي تفسير المتغير اعتمادا على سلوكه في الماضي $V_t = f(V_{t-1},V_{t-2},...,\varepsilon_t)$، حيث:

V_t, V_{T-1}: تمثل المبيعات في الفترة t والفترة التي قبلها t-1 حسب درجة التأخير المرغوبة والتي لا تحدد عشوائيا وإنما إحصائيا باستخدام اختبارات مناسبة؛

ε_t : الخطأ العشوائي المعبر عن التغيرات التي لا يمكن قياسها والأخطاء الواردة أثناء عملية جمع المعلومات.

ومن أهم أسباب اعتماد نماذج السلاسل الزمنية:

- غياب العلاقة السببية بين المتغيرات (التابع والمستقل) وصعوبة قياسها؛
- عدم توفر معطيات كافية حول المتغيرات المستقلة؛
- بساطة تركيب هذه النماذج وسهولة تفسير نتائجها بالنسبة للمسيرين.

2-مركبات السلسلة الزمنية

أي ظاهرة اقتصادية يمكن تمثيلها قياسيا بنموذج قياس اقتصادي عبر الزمن، تعتبر سلسلة زمنية، تخضع هذه السلسلة على طول فترة الدراسة لمجموعة من التغيرات والتأثيرات تتحكم في مسارها وسلوكها، تسمة بمركبات السلسلة الزمنية.

1-2-تعريف السلسلة الزمنية

السلسلة الزمنية هي مجموعة من المشاهدات المسجلة لمتغير ما، مرتبة وفق حدوثها في الزمن، وتعطي قيم ظاهرة محددة:(bachioua, 2011)

$$y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots y_n$$

فهي عبارة عن متغير مستمر عبر الزمن، ويكون الزمن t المتغير المستقل والظاهرة محل الدراسة المتغير التابع y ، أي أن y تكون دالة تابعة في الزمن:

$$y_t = f(t, \varepsilon_t)$$

مثلا: السلاسل الزمنية الخاصة بالمؤشرات الاقتصادية، الدخل الوطني، الناتج المحلي الإجمالي، والمبيعات السنوية للشركات، رقم الأعمال، حجم السكان، عدد الطلبة، ...إلخ

مثال

يمكن عرض السلسلة الزمنية في جدول كما هو موضح في الجدول التالي الذي يمثل مؤشر حجم الصادرات في الجزائر من سنة 2005 إلى سنة 2019

الجدول (01): مؤشر حجم الصادرات في الجزائر "2005-2019" سنة الأساس: 2000

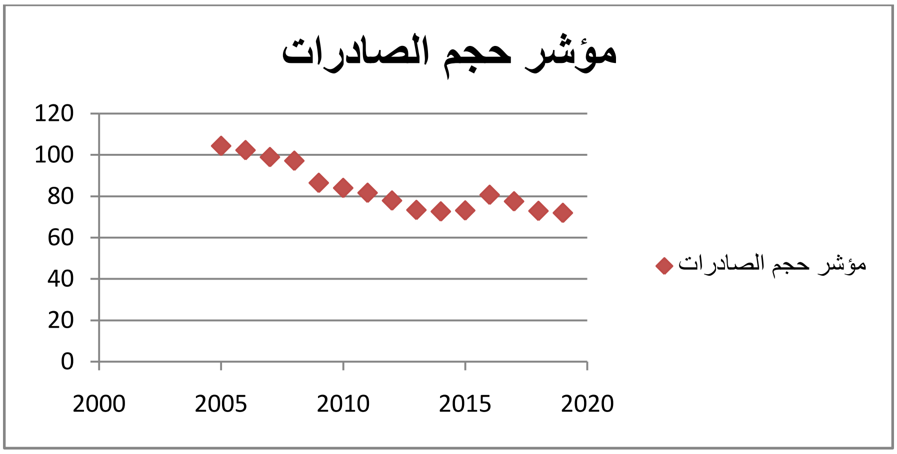
السنة	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	
م.ح.ص	104,31	102,25	98,90	97,13	86,46	84,00	81,66	
السنة	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
م.ح.ص	77,91	73,37	72,65	73,13	80,68	77,53	72,91	71,96

المصدر: البنك الدولي

https://data.albankaldawli.org/indicator/TX.QTY.MRCH.XD.WD?locations=DZ

كما يتم عرض السلسلة الزمنية في شكل تمثيل بياني:

الشكل (02): مؤشر حجم الصادرات في الجزائر "2005-2019" سنة الأساس: 2000



المصدر: من إعداد الباحثة اعتمادا على معطيات البنك الدولي

https://data.albankaldawli.org/indicator/TX.QTY.MRCH.XD.WD?locations=DZ

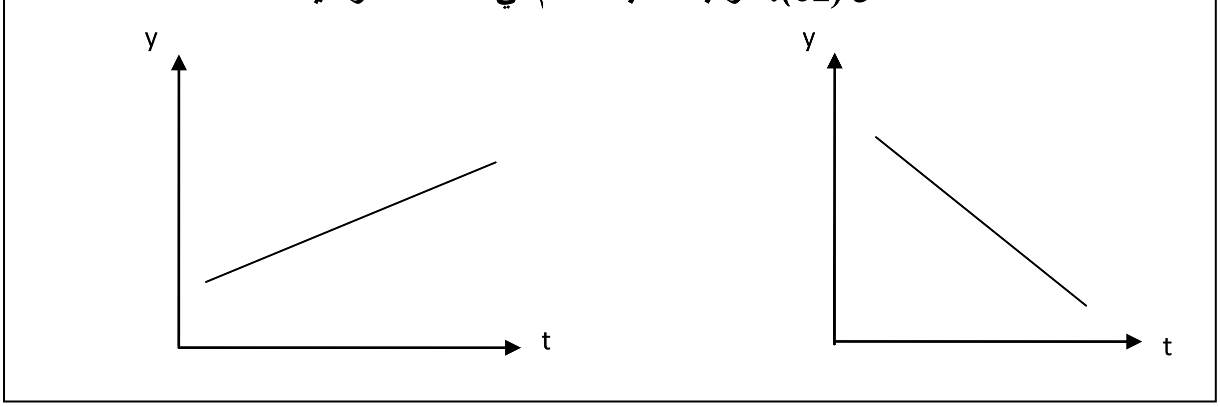
الشكل (01) يوضح أن السلسلة لها ميل سالب، ممل يدل على تناقص مؤشر حجم الصادرات في الجزائر على فترة الدراسة 2005-.2019

2-2-مكونات السلسلة الزمنية

يمكن تقسيم السلسلة الزمنية إلى أربعة عناصر تفيد في تحديد سلوكها في الماضي وأيضا في المستقبل، وتتمثل في: (أبو عمه و هندي، 1995، الصفحات 194-197)

2-2-1-مركبة الاتجاه العام T: تعبر عن التطور بميل موجب أو سالب لمتغير اقتصادي عبر الزمن، و هو أهم مركبة في السلسلة الزمنية.

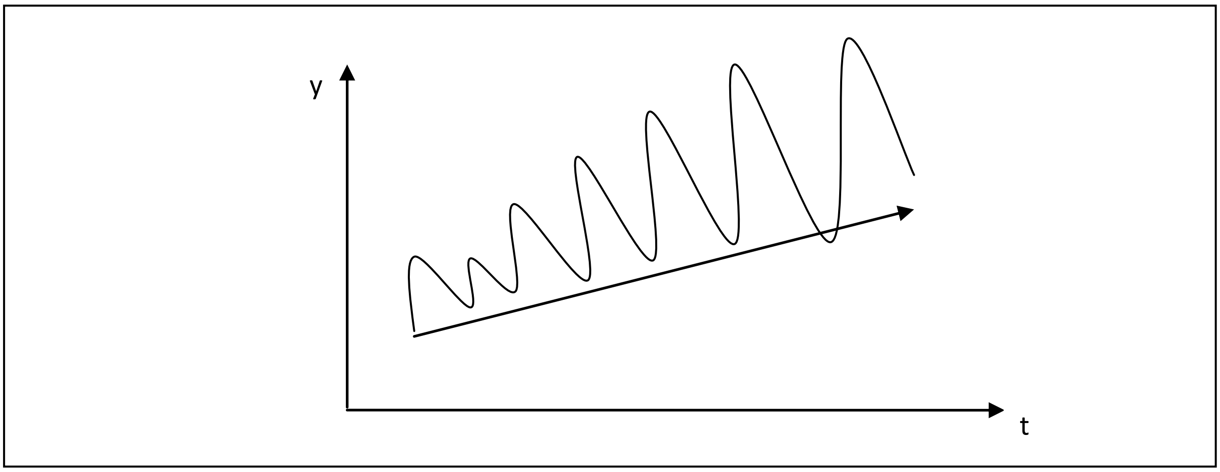
الشكل (02): مركبة الاتجاه العام في السلسلة الزمنية



المصدر: من إعداد الباحثة

2-2-مركبة التغيرات الموسمية S: عبارة عن تأثيرات خارجية تطرأ على السلسلة الزمنية بطريقة منتظمة، وهي من أبسط المركبات من حيث التعامل معها وتحديد فترات وقوعها، وعملية التنبؤ في هذه الحالات تعتمد على حجم المؤشر الموسمي وليس على فترة الحدوث.

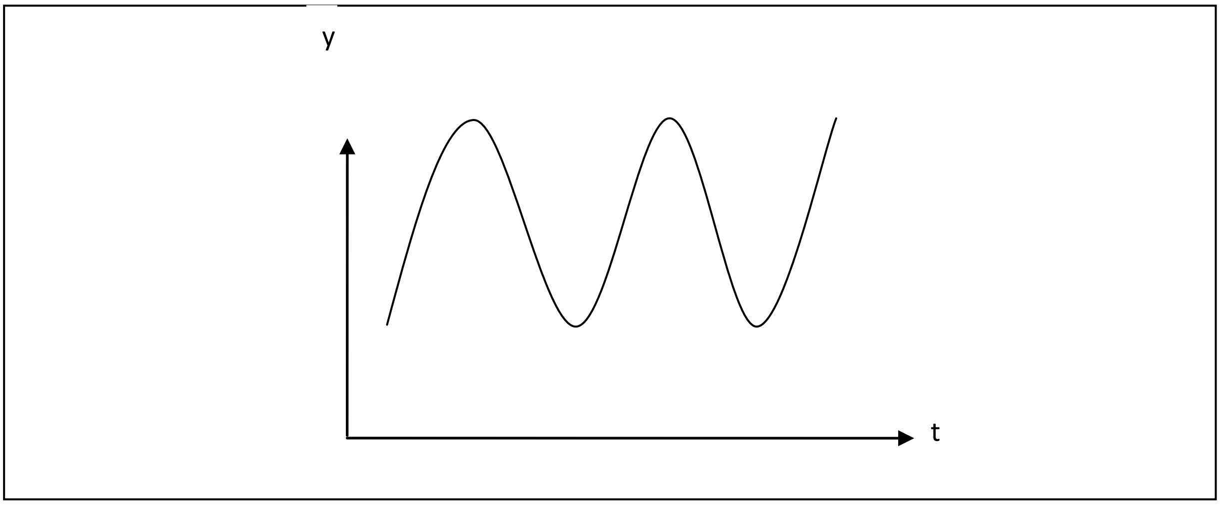
الشكل (03): المركبة الموسمية في السلسلة الزمنية



المصدر: من إعداد الباحثة.

3-2-مركبة التغيرات الدورية C: تظهر هذه المركبة في السلاسل الزمنية طويلة الأجل، وهي تعكس تأثير العوامل الخارجية على السلسلة الزمنية بشكل منتظم، مثل فترات الانتعاش والركود في الاقتصاد، النمو والانكماش، وقد تمتد طول الدورة الكاملة من 8 إلى 10 سنوات، وترتجع لعوامل عدة، مثل سياسة الحكومة، العلاقات الدولية، ...، وتقاس طول الدورة بالفترة الزمنية بين مرحلتي ازدهار متتاليتين أو مرحلتي ركود متتاليتين.

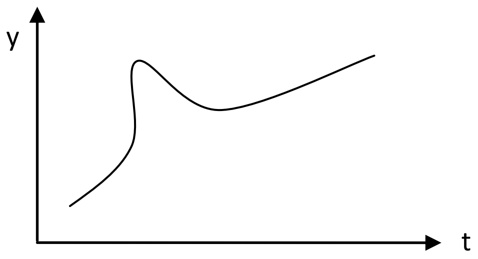
الشكل (04): المركبة الدورية في السلسلة الزمنية



المصدر: من إعداد الباحثة

2-4-مركبة التغيرات العشوائية R: تنشأ هذه التغيرات نتيجة العوامل التي لا يمكن التحكم فيها، كالكوارث الطبيعية، الإفلاس، الأزمات المالية العالمية، الحروب، ...، ولا يمكن التنبؤ بها لعدم انتظامها من جهة، والفترة الزمنية الصغيرة التي تحدث فيها من جهة أخرى.

الشكل (05): المركبة العشزائية في السلسلة الزمنية



المصدر: من إعداد الباحثة.

3-العلاقة بين مركبات السلسلة الزمنية

يوجد نوعان من العلاقات التي تربط بين مركبات السلسلة الزمنية: (العزاوي، 2018، صفحة 343)

- **نموذج الضرب " الحالة الجدائية ":** وفيه يفترض أن الظاهرة المدروسة تساوي حاصل ضرب المكونات:

$$y_t = T.C.S.R$$

- نموذج الجمع " الحالة التجميعية": وهو الأسهل في إجراء الحسابات، ويفترض أن الظاهرة المدروسة تساوي حاصل جمع المركبات:

$$y_t = T + C + S + R$$

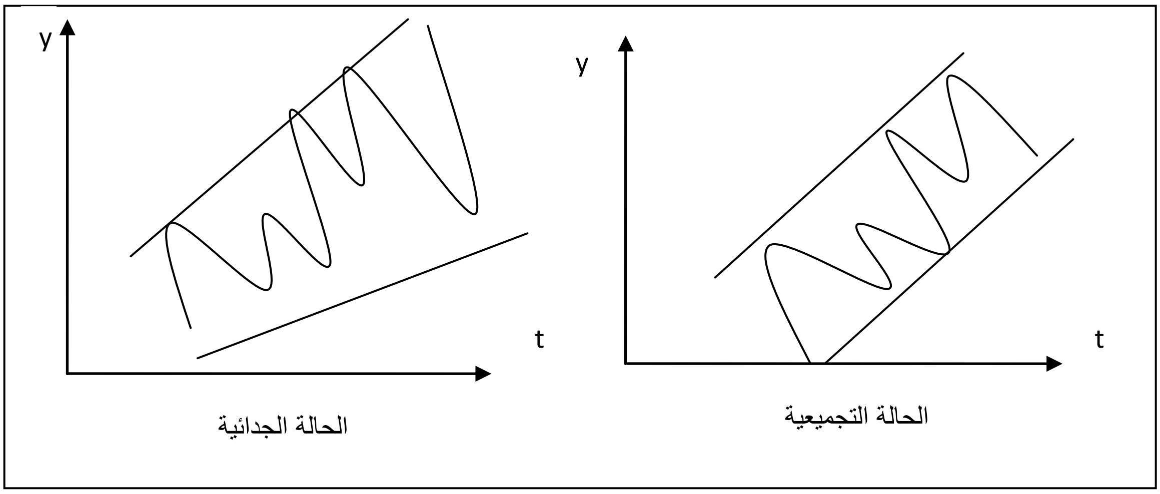
ولمعرفة أي حالة ترتبط بين المركبات يتم اعتماد أسلوبين:

3-1-الأسلوب البياني

حسب هذه الطريقة تكون السلسلة الزمنية ذات: (حشمان، 2010، صفحة 53)

- **عناصر تجميعية:** في حالة كانت ذبذباتها تنحصر بين خطين متوازيين؛
- **عناصر جدائية:** عندما تكون ذبذبات السلسلة غير ثابتة الشدة (تباين متزايد)، وبالتالي تقع بين خطين منفرجين.

الشكل (06): أنواع نماذج ربط عناصر السلسلة الزمنية



المصدر: مولود حشمان، *السلاسل الزمنية وتقنيات التنبؤ القصير المدى* ، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2010، ص.53.

3-2-الأسلوب الانحداري

يتم عن طريق تقدير معلمة معامل الانحدار في المعادلة: (حشمان، 2010، الصفحات 53-54)

$$\sigma_i = a + b\bar{y}_i$$
$$i = 1,\ldots,n$$

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p}\left(y_{ij} - \bar{y}_i\right)^2}$$

$$\bar{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^{P} y_{ij}}{P}$$
$$j = 1,\ldots,p$$

i : السنوات؛

j : الفصول؛

$\bar{y}_i$: متوسط الفصول "المتوسط الحسابي لكل سنة"

ويتم تقدير المعلمة b بواسطة المربعات الصغرى:

$$\hat{b} = \frac{n\sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i\sigma_i - \sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i\sum_{i=1}^{n}\sigma_i}{n\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{y}_i^{\,2}\right) - \left(\sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i\right)^2}$$

فإذا كان:

- $\hat{b} \prec 0{,}05$: السلسلة تجميعية
- $0{,}05 \le \hat{b} \le 0{,}10$: السلسلة مختلطة
- $\hat{b} \succ 0{,}10$: السلسلة جدائية

مثال (01)

لدينا المعطيات التالية حول الاستهلاك الموسمي خلال الفترة 2017-2019

السنة	2017				2018				2019			
الفصل	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
الاستهلاك	155	158	163	171	153	156	162	172	162	164	173	181

المطلوب

- **تحديد العلاقة بين مركبات السلسلة الزمنية**

تقدير معامل الانحدار من المعادلة الخطية البسيطة:

$$\sigma_i = a + b\bar{y}_i$$

$\bar{y}_i^{\,2}$	$\bar{y}_i.\sigma_i$	σ_i	$\bar{y}_i$	4	3	2	1	السنة / الفصل
26163,06	979,72	6,06	161,75	171	163	158	155	2017
25840,56	1166,82	7,26	160,75	172	162	156	153	2018
28900	1289,09	7,58	170	181	173	164	162	2019
80903,62	3435,63	20,9	492,5	Σ				

$$\bar{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^{P} y_{ij}}{p} = \frac{155+158+163+171}{4} = 161,75$$

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p}\left(y_{ij}-\bar{y}_i\right)^2} = \sqrt{\frac{\left[(155-161,75)^2+(158-161,75)^2+(163-161,75)^2+(171-161,75)^2\right]}{4}}$$

$$\sqrt{\frac{\left[45,5625+14,0625+1,5625+85,5625\right]}{4}} = \sqrt{\frac{146,75}{4}} = \sqrt{36,6875} = 6,057 \approx 6,06$$

$$\hat{b} = \frac{n\sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i\sigma_i - \sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i\sum_{i=1}^{n}\sigma_i}{n\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{y}_i^{\,2}\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i\right)^2} = \frac{(3.3435,63)-(492,5.20,9)}{(3.80903,62)-(492,5)^2}$$

$$\hat{b} = 0,093$$

بما أن: $0,05 \le \left(\hat{b} = 0,093\right) \le 0,10$ فإن: السلسلة مختلطة

تمارين محلولة

تمرين 01

تعطي البيانات التالية كمية الصادرات ربع السنوية بالطن من أحد المحاصيل الزراعية خلال الثلاث السنوات الأخيرة:

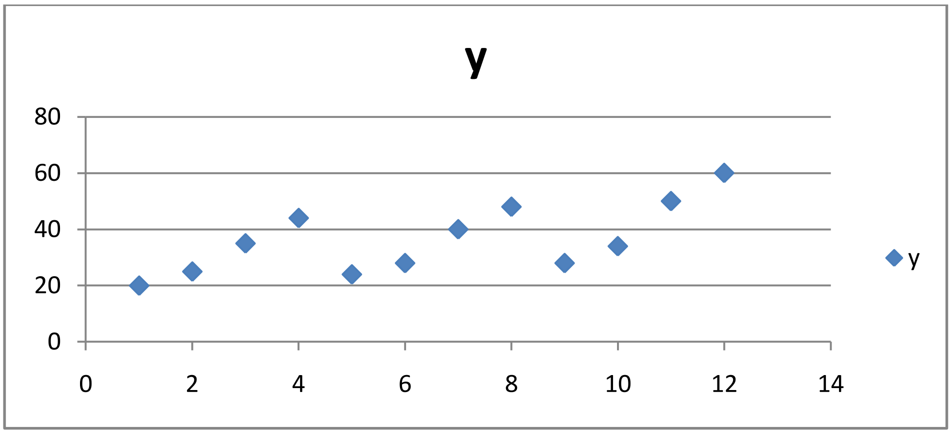
السنة \ الفصل	1	2	3	4
2019	20	25	35	44
2020	24	28	40	48
2021	28	34	50	60

1 - مثل بيانيا معطيات الجدول؛

2 - ما هي طبيعة العلاقة بين مركبات السلسلة الزمنية؟

الحل

1 - التمثيل البياني:



2 - طبيعة العلاقة بين مركبات السلسلة الزمنية

تقدير معامل الانحدار من المعادلة الخطية البسيطة:

$$\sigma_i = a + b\bar{y}_i$$

السنة	الفصل1	الفصل2	الفصل3	الفصل4	$\bar{y}_i$	σ_i	$\sigma_i\bar{y}_i$	$\bar{y}_i^{\,2}$
2010	20	25	35	44	31	9,25	286,65	961
2011	24	28	40	48	35	9,54	333,88	1225

2012	28	34	50	60	43	12,69	545,61	1849
					109	31,48	1166,13	4035

لدينا:

$$\sum \bar{y}_i = 109, \sum \sigma_i = 31,48, \sum \bar{y}_i \sigma_i = 1166,13, \sum \bar{y}_i^{\,2} = 4035$$

$$\bar{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^{P} y_{ij}}{p} = \frac{20+25+35+44}{4} = 31$$

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p}\left(y_{ij} - \bar{y}_i\right)^2} = \sqrt{\frac{\left[(20-31)^2 + (25-31)^2 + (35-31)^2 + (44-31)^2\right]}{4}}$$

$$\sqrt{\frac{[121+36+16+169]}{4}} = \sqrt{\frac{342}{4}} = \sqrt{85,5} = 9,246 \approx 9,25$$

$$\hat{b} = \frac{n\sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i\sigma_i - \sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i\sum_{i=1}^{n}\sigma_i}{n\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{y}_i^{\,2}\right) - \left(\sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i\right)^2} = \frac{(3.1166,13) - (31,48.109)}{(3.4035) - (109)^2} = \frac{67,07}{224}$$

$$\hat{b} = 0,3$$

بما أن: $\left(\hat{b} = 0,3\right) \succ 0,10$ فإن: السلسلة جدائية (مركبات السلسلة الزمنية ترتبط بالنموذج الضربي)

تمرين 02

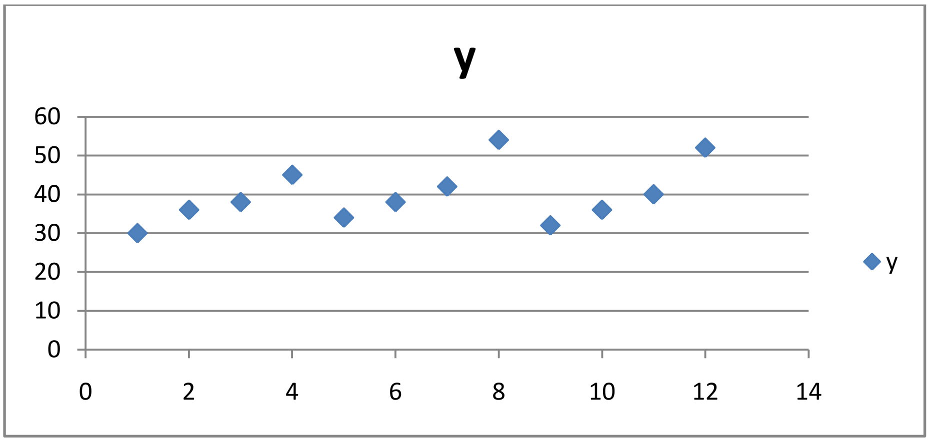
البيانات التالية تمثل متوسط الدخل الفصلي بالألف دولار للعاملين في إحدى الشركات السياحية:

4	3	2	1	السنة / الفصل
44	38	36	30	2019
54	42	38	34	2020
52	40	36	32	2021

1 - ما هو النموذج المناسب لهذه السلسلة؟ النموذج التجميعي أو النموذج الجدائي؟

الحل

- **بيانيا:** لتحديد طبيعة النموذج نرسم معطيات السلسلة الزمنية ونلاحظ



من التمثيل البياني نلاحظ أن قيم السلسلة محصورة بين خطين غير متوازيين ذوا زاوية منفرجة، ومنه نستنتج أن مركبات السلسلة الزمنية ترتبط بنموذج الضرب

-**حسابيا**: لتحديد النموذج نقوم بتقدير معامل الانحدار من المعادلة الخطية البسيطة:

$$\sigma_i = a + b\bar{y}_i$$

T	1	2	3	4	$\bar{y}_i$	σ_i	$\bar{y}_i\sigma_i$	$\bar{y}_i{}^2$
2010	30	36	38	44	37	5,00	185,00	1369
2011	34	38	42	54	42	7,48	314,30	1764
2012	32	36	40	52	40	7,48	299,33	1600
					119	19,96	798,63	4733

لدينا:

$$\sum \bar{y}_i = 119, \sum \sigma_i = 11{,}7, \sum \bar{y}_i\sigma_i = 798{,}63, \sum \bar{y}_i{}^2 = 4733$$

$$\bar{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^{P} y_{ij}}{p} = \frac{30+36+38+44}{4} = 37$$

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p}\left(y_{ij}-\bar{y}_i\right)^2} = \sqrt{\frac{\left[(30-37)^2+(36-37)^2+(38-37)^2+(44-37)^2\right]}{4}}$$

$$\sqrt{\frac{[49+1+1+49]}{4}} = \sqrt{\frac{100}{4}} = \sqrt{25} = 5$$

$$\hat{b} = \frac{n\sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i\sigma_i - \sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i\sum_{i=1}^{n}\sigma_i}{n\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{y}_i^{\,2}\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i\right)^2} = \frac{(3.798,63)-(19,96.119)}{(3.4733)-(119)^2} = \frac{20,65}{38}$$

$$\hat{b} = 0,54$$

بما أن: $\left(\hat{b} = 0,54\right) \succ 0,10$ فإن: السلسلة جدائية (مركبات السلسلة الزمنية ترتبط بالنموذج الضربي)

تمرين 03

تعطي البيانات التالية قيمة المبيعات ثلث السنوية بالمليون للألعاب في أحد المحلات خلال الثلاث السنوات الأخيرة:

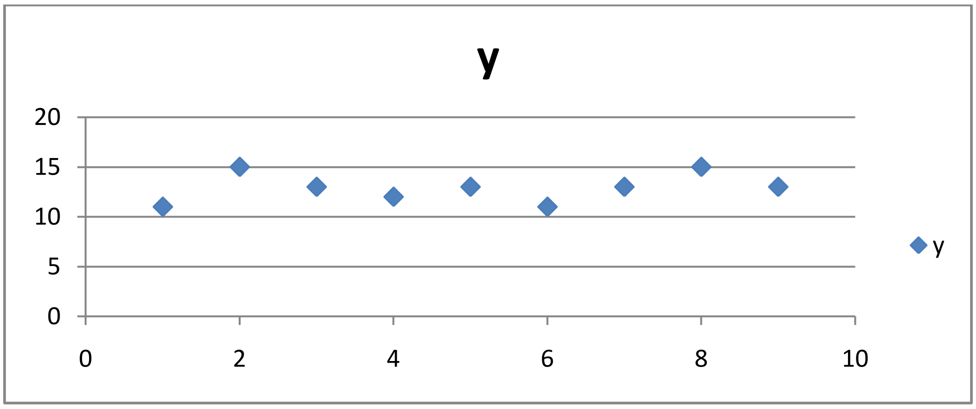
الفصل / السنة	1	2	3
2019	11	15	13
2020	12	13	11
2021	13	15	13

1 - مثل بيانيا معطيات الجدول؛

2 - ما هو النموذج المناسب للربط بين مركبات السلسلة الزمنية؟

الحل

1 - التمثيل البياني



2 - تحديد النموذج المناسب

لتحديد النموذج نقوم بتقدير معامل الانحدار من المعادلة الخطية البسيطة:

$$\sigma_i = a + b\bar{y}_i$$

T	1	2	3	$\bar{y}_i$	σ_i	$\bar{y}_i\sigma_i$	$\bar{y}_i^{\,2}$
2010	11	15	13	13	1,63	21,23	169
2011	12	13	11	12	21,01	252,14	144
2012	13	15	14	14	19,01	266,18	196
				39	41,65	539,56	509

لدينا:

$$\sum \bar{y}_i = 39, \sum \sigma_i = 41{,}65, \sum \bar{y}_i\sigma_i = 539{,}56, \sum \bar{y}_i^{\,2} = 509$$

$$\bar{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^{P} y_{ij}}{p} = \frac{11+15+13}{3} = 13$$

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p}\left(y_{ij}-\bar{y}_i\right)^2} = \sqrt{\frac{\left[(11-13)^2+(15-13)^2+(13-13)^2\right]}{3}}$$

$$\sqrt{\frac{[4+4+0]}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}} = \sqrt{2{,}67} = 1{,}63$$

$$\hat{b} = \frac{n\sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i\sigma_i - \sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i\sum_{i=1}^{n}\sigma_i}{n\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{y}_i^{\,2}\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i\right)^2} = \frac{(3.539{,}5)-(41{,}65.39)}{(3.509)-(39)^2} = \frac{-5{,}85}{6}$$

$$\hat{b} = -0{,}98$$

بما أن: $\left(|\hat{b}| = 0{,}98\right) \succ 0{,}10$ فإن: السلسلة جدائية (مركبات السلسلة الزمنية ترتبط بالنموذج الضربي)

تمرين 4

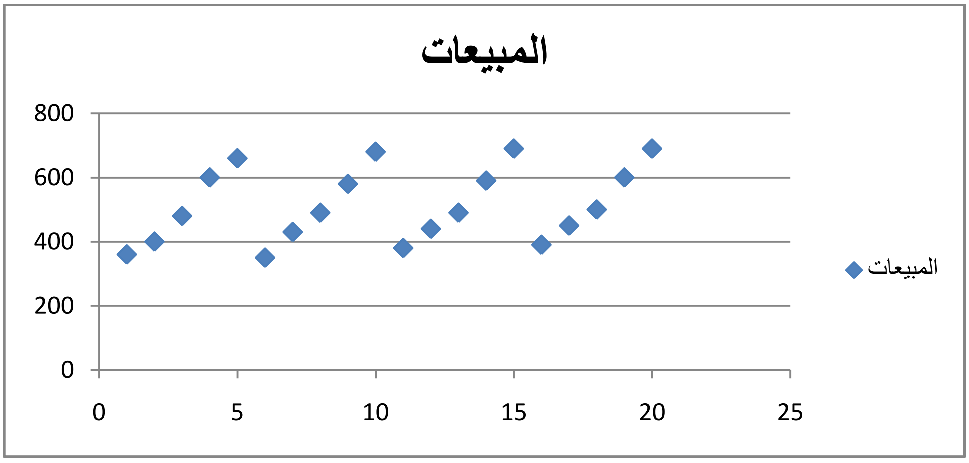
البيانات التالية تمثل مبيعات أحد المتاجر خلال شهر:

الأسبوع	1					2				
اليوم	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5

المبيعات	360	400	480	600	660	350	430	490	580	680
الأسبوع	3					4				
اليوم	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
المبيعات	380	440	490	590	690	390	450	500	600	690

1 - تحديد طبيعة النموذج المناسب للسلسلة الزمنية بيانيا وحسابيا

الحل



	1	2	3	4	5	$\bar{y}_i$	σ_i	$\sigma_i\ \bar{y}_i$	$\bar{y}_i^{\ 2}$
1	36	40	48	60	66	50	11,45	572,71	2500
2	38	43	47	59	68	51	10,97	559,61	2601
3	37	43	49	62	69	52	11,87	617,03	2704
4	38	46	50	60	71	53	11,45	607,08	2809
						206	45,75	2356,42	10614

لدينا:

$$\sum \bar{y}_i = 206, \sum \sigma_i = 45{,}75, \sum \bar{y}_i \sigma_i = 2356{,}42, \sum \bar{y}_i^{\ 2} = 10614$$

$$\bar{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^{P} y_{ij}}{p} = \frac{36+40+48+60+66}{5} = 50$$

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p}\left(y_{ij} - \bar{y}_i\right)^2} = \sqrt{\frac{\left[(36-50)^2 + (40-50)^2 + (48-50)^2 + (60-50)^2 + (66-50)^2\right]}{5}}$$

$$\sqrt{\frac{[196+100+4+100+256]}{5}} = \sqrt{\frac{656}{5}} = \sqrt{131{,}2} = 11{,}45$$

$$\hat{b} = \frac{n\sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i\sigma_i - \sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i\sum_{i=1}^{n}\sigma}{n\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{y}_i^{\,2}\right) - \left(\sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i\right)^2} = \frac{(3.798{,}63)-(19{,}96.119)}{(3.4733)-(119)^2} = \frac{20{,}65}{38}$$

$$\hat{b} = 0{,}54$$

بما أن: $0{,}05 \leq \left(\hat{b} = 0{,}54\right) \leq 0{,}10$ فإن: السلسلة مختلطة (مركبات السلسلة الزمنية ترتبط بالنموذج المختلط)

3- الكشف والتنبؤ بمركبة الاتجاه العام

قبل الشروع في عملية التنبؤ بمركبة الاتجاه العام يجب أولا التأكد من أن السلسلة الزمنية تحتوي على هذه المركبة

3-1- طرق الكشف عن مركبة الاتجاه العام

يوجد نوعان من الطرق للكشف من وجود المركبة النظامية في السلسلة الزمنية، تتمثل في الطريقة البيانية، والطريقة الحسابية.

3-1-1- الطريقة البيانية

إن استعمال هذه الطريقة لتحديد وكشف مركبات السلسلة الزمنية يطلب دقة كبيرة في عرض بيانات السلسلة المدروسة، وذلك نظرا للصعوبة الكبيرة التي يتلقاها الباحث في طشف مركباتها في كثير من الحالات (محمود، 2019، صفحة 385)، ويتم في هذه الحالة دراسة وتحليل الظروف التي تولدت عنها هذه السلسلة الزمنية، فإذا كان المحيد مستقرا تكون السلسلة كذلك، والعكس صحيح.

يتم تمثيل المعلومات الرقمية في شكل بياني يعكس مركبات السلسلة الزمنية بشكل أوضح، فيتمثل الاتجاه العام الذي يدفع المنحنى نحو الزيادة إذا كان ميل موجب، أو النقصان إذا كان ميل سالب.

كما تظهر المركبة الفصلية على شكل نتوءات بشكل منتظم، مما يسمح بتحديد فترات حدوث هذه الظاهرة، بينما تظهر المركبة العشوائية في تلك الذبذبات الشاذة التي تشوش على سلوك المركبات المنتظمة وتضفي عليها صبغة عشوائية.

3-1-2- الاختبارات الإحصائية (غير المعلمية)

هذه الاختبارات لا تخضع بالضرورة لأي توزيع إحصائي، أي أنها حرة التوزيع، ولا تتطلب أي فرضية حول التوزيع الاحتمالي للخطأ العشوائي.

3-1-2-1- اختبار التوالي "تعاقب الإشارات"

يستخدم للتحقق من وجود مركبة الاتجاه العام في السلسلة الزمنية، كما يستخدم في حالات أخرى لاختبار عنصر العشوائية في وقوع الحزادث المختلفة، ويتم بناءه اعتمادا على الفرضيات التالية:

H_0: السلسلة عشوائية

H_1: السلسلة ذات اتجاه عام

ويتم تكوين الاختبار كما يلي: (حشمان، 2010، صفحة 31)

1 - ترتيب المشاهدات ترتيبا تصاعديا؛

2 - حساب الوسيط، وهو المشاهدة المقابلة للمرتبة m في السلسلة المرتبة ترتيبا تصاعديا، و m تعبر عن القيمة الوسطى:

$$M = \frac{n+1}{2}$$ (عدد المشاهدات فردي)

$$M = \frac{n}{2}$$ (عدد المشاهدات زوجي)

والوسيط يحسب بالعلاقة التالية:

$$M_d = y_M$$ (عدد المشاهدات فردي)

$$M_d = \frac{y_M + y_{M+1}}{2}$$ (عدد المشاهدات زوجي)

y : شعاع المشاهدات مرتبة تصاعديا ويصبح m دليلها؛

3 - إعطاء الإشارة السالبة (-) للقيم الأصغر من الوسيط، والإشارة الموجبة (+) للقيم الأكبر من الوسيط، والتي تتشكل في مجموعة إشارات؛

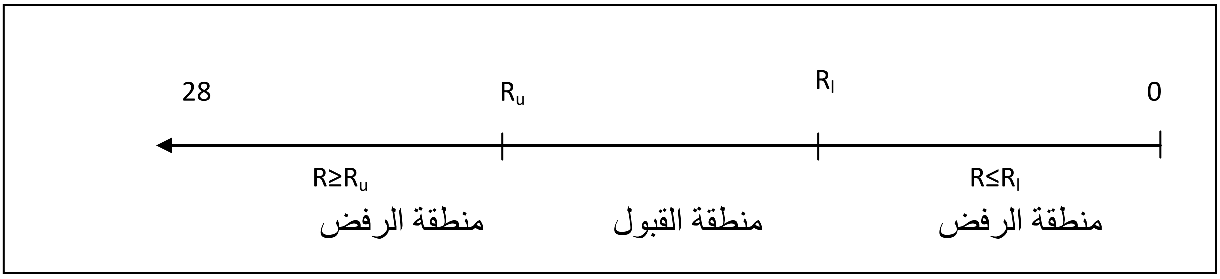
4 - حساب R الممثل لعدد مرات توالي الإشارة من موجب إلى سالب أو العكس؛

5 - اتخاذ القرار برفض أو قبول فرضية العدم

أولا: حالة العينات الصغيرة $M \leq 20$

في هذه الحالة يتم اتخاذ القرار اعتمادا على مخطط التوالي:

الشكل (07): مخطط التوالي



المصدر: مولود حشمان، السلاسل الزمنية وتقنيات التنبؤ القصير المدى، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2010، ص.32.

R_l ،R_u: القيم الحرجة المجدولة الدنيا والعليا على الترتيب، وتستخرج من الجداول الإحصائية.

ثانيا: حالة العينات الكبيرة $M \succ 20$

في هذه الحالة يتم اتخاذ القرار اعتمادا على قانون التوزيع الطبيعي، حيث يتم رفض فرضية

العدم إذا كان:

$$|z| \succ z_{\frac{\alpha+1}{2}}$$

$$|z| = \frac{R-\mu_R}{\sigma_R}$$
$$\mu_R = M+1$$
$$\sigma_R = \sqrt{\frac{M(M+1)}{2M-1}}$$

وقيمة $z_{\frac{\alpha+1}{2}}$ تستخرج من جدول التوزيع الطبيعي

$$\alpha = 10\% \to z_{\frac{\alpha+1}{2}} = 1{,}64$$
$$\alpha = 5\% \to z_{\frac{\alpha+1}{2}} = 1{,}96$$
$$\alpha = 1\% \to z_{\frac{\alpha+1}{2}} = 2{,}57$$

مثال (02)

إذا كانت لدينا البيانات التالية حول حجم السكان بالمليون في الجزائر ما خلال الفترة 1980-2007:

السنة	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989
Y	18,66	19,24	19,86	20,51	21,17	22,20	22,8	23,4	24,1	24,1
الإشارة	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
السنة	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
Y	25,2	25,64	26,27	26,89	27,49	28,06	28,56	29,04	29,50	29,96
الإشارة	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-
السنة	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007		
Y	30,41	30,87	31,35	31,84	32,84	32,9	33,49	33,99		
الإشارة	-	-	-	-	-	-	-	-		

للتأكد من وجود مركبة اتجاه عام لهذه السلسلة باستعمال اختبار التوالي، نتبع الخطوات التالية:

1 ـ صياغة الفرضيات:

H_0: السلسلة عشوائية

H_1: السلسلة ذات اتجاه عام

2 ـ الترتيب التصاعدي للمشاهدات: لا يوجد فرق بين الترتيب السنوي والترتيب التصاعدي، لأن المشاهدات متزايدة عبر الزمن حسب الجدول؛

3 ـ حساب القيمة الوسطى: بما أن عدد المشاهدات زوجي:

$$M = \frac{n}{2} = \frac{28}{2} = 14$$

$$M_d = \frac{y_M + y_{M+1}}{2} = \frac{26,89 + 27,49}{2} = 27,19$$

4 ـ إعطاء الإشارات: في الجدول السابق

5 ـ حساب R: R=2

6 ـ اتخاذ القرار: بما أن m=14≤20، فإننا في حالة العينات الصغيرة، وعليه يتم الاعتماد على مخطط التوالي، ومن الجدول الإحصائي نجد $R_l = 9$ و $R_u = 20$

وبمان أن $R \prec R_l$:نرفض فرضية العدم ونقبل الفرضية البديلة، أي أن السلسلة الزمنية تحتوي على اتجاه عام.

مثال (03)

لدينا معطيات الاستهلاك الفصلية التالية:

السنة	2019				2020				2021			
الفصل	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
الاستهلاك	155	158	163	171	153	156	162	172	162	164	173	181
الإشارات	-	-	+	+	-	-	-	+	-	+	+	+

للكشف عن مركبة الاتجاه العام باستعمال اختبار التوالي، نتبع الخطوات التالية:

1 ـ صياغة الفرضيات:

H_0: السلسلة عشوائية

H_1: السلسلة ذات اتجاه عام

2 - الترتيب التصاعدي للمشاهدات:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
الترتيب التصاعدي	153	155	156	158	162	162	163	164	171	172	173	181

3 - حساب القيمة الوسطى: بما أن عدد المشاهدات زوجي:

$$M = \frac{n}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$M_d = \frac{y_M + y_{M+1}}{2} = \frac{162 + 163}{2} = 162{,}5$$

4 - إعطاء الإشارات: في الجدول الأول

5 - حساب R: R=6

6 - اتخاذ القرار: بما أن m=6≤20، فإننا في حالة العينات الصغيرة، وعليه يتم الاعتماد على مخطط التوالي، ومن الجدول الإحصائي نجد $R_l = 3$ و $R_u = 11$

وبمان أن $R_u \succ R \succ R_l$: نقبل فرضية العدم، أي أن السلسلة الزمنية عشوائية لا تحتوي على اتجاه عام.

3-1-2-2- اختبار نقاط الانعطاف

الاختبار في تكوينه لا يهتم بنقاط الانعطاف بحد ذاتها التي تعطس تغير اتجاه السلسلة الزمنية، وانما بعدد مرات تغير المنحنى نحو الأعلى أو الأسفل، حيث الإشارة الموجبة تعني الصعود، والسالبة تعني النزول في تلك الفترة.

وحسب هذا الاختبار، نقطة الانعطاف هي الفترة التي تكون فيها الإشارة مختلفة عن إشارة الفترة السابقة لها، فإذا كانت السلسلة الزمنية عشوائية بدون اتجاه عام، فإن توزيع عدد مرات تغير الإشارة يكون تقريبا طبيعيا حتى بالنسبة للعينات الصغيرة، ما يعني الاعتماد على جدول التوزيع الطبيعي لاستخراج القيم الحرجة، وتكوين الاختبار يكون من خلال حساب الفروق من الدرجة الأولى Δy_t: (حشمان، 2010، صفحة 37)

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$$

يرمز لهذا الاختبار بالرمز ،وهو عدد مرات تغير الإشارة في Δy_t ، ويستعمل في الحالات التي تكون فيها عدد المشاهدات أكبر من 10، يصاغ الاختبار كما يلي:

H_0: السلسلة عشوائية

H_1: السلسلة ذات اتجاه عام

ويتم تكوين الاختبار كما يلي:

1 - حساب الفروق من الدرجة الأولى للسلسلة الزمنية؛

2 - إعطاء إشارة موجبة للفروق الموجبة وسالبة للفروق السالبة؛

3 - اتخاذ القرار برفض أو قبول فرضية العدم، حيث يتم رفض فرضية العدم إذا كان:

$$|z| \succ z_{\frac{\alpha+1}{2}}$$

حيث أن z تعطى بالعلاقة التالية:

$$z = \frac{\mu - \mu_\mu}{\sigma_\mu}$$
$$\mu_\mu = \frac{2(n-2)}{3}$$
$$\sigma_\mu = \sqrt{\frac{16n-29}{90}}$$

وقيمة $z_{\frac{\alpha+1}{2}}$ تستخرج من جدول التوزيع الطبيعي.

مثال (05)

باستخدام معطيات المثال (04)، الكشف عن اتجاه السلسلة العام اعتمادا على اختبار نقاط الانعطاف:

السنة	2019				2020				2021			
الفصل	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
الاستهلاك	155	158	163	171	153	156	162	172	162	164	173	181
Δy_t	/	3	5	8	18-	3	6	10	10-	2	9	8
الإشارات	/	+	+	+	-	+	+	+	-	+	+	+

لدينا عدد المشاهدات أكثر من 10، وقيمة $\mu = 5$ ، نحسب قيمة z :

$$z = \frac{\mu - \mu_\mu}{\sigma_\mu}$$
$$\mu_\mu = \frac{2(n-2)}{3} = \frac{2(12-2)}{3} = 6{,}67$$
$$\sigma_\mu = \sqrt{\frac{16n-29}{90}} = \sqrt{\frac{(16.10)-29}{90}} = 1{,}35$$
$$z = \frac{\mu - \mu_\mu}{\sigma_\mu} = z = \frac{5-6{,}67}{1{,}35} = -1{,}24$$

ومن جدول التوزيع الطبيعي عند نجد:

$$z_{\frac{\alpha+1}{2}} = 1{,}96$$

$$|z| \prec z_{\frac{\alpha+1}{2}}$$

وبالتالي: نقبل فرضية العدم، أي أن السلسلة عشوائية لا تحتوي على اتجاه عام.

3-2-1-3- اختبار الإشارة

يعتمد اختبار الإشارة V على إشارات الفروق من الدرجة الأولى Δy_t الموجبة والسالبة، ويفترض التوزيع العشوائي للمعطيات، يستعمل الاختبار عند $W \geq 20$ ويتم صياغته من الشكل:

H_0: السلسلة عشوائية

H_1: السلسلة ذات اتجاه عام

ويتم تكوين الاختبار كما يلي: (حشمان، 2010، صفحة 39)

1 ـ تحديد عدد الفروق الموجبة V،وعدد الفروق غير الصفرية W؛

2 ـ اتخاذ القرار، حيث يتم رفض فرضية العدم إذا كان:

$$|z| \succ z_{\frac{\alpha+1}{2}}$$

حيث أن z تعطى بالعلاقة التالية:

$$z = \frac{V - \mu_V}{\sigma_V}$$
$$\mu_V = \frac{W}{2}$$
$$\sigma_V = \sqrt{\frac{W}{4}}$$

وقيمة $z_{\frac{\alpha+1}{2}}$ تستخرج من جدول التوزيع الطبيعي.

مثال (06)

الجدول التلي يمثل متغير اقتصادي ما:

الفصل	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
y_t	10	19	64	32	12	12	68	29	7	18	60	36
Δy_t	/	9	45	-32	-20	0	56	-39	-22	11	42	-24
الفصل	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
y_t	6	11	64	50	11	19	69	20	9	20	54	30
Δy_t	-30	5	53	-14	-39	8	50	-49	-11	11	34	-24

للكشف عن وجود مركبة اتجاه عام في السلسلة الزمنية اعتمادا على اختبار الإشارة، نقوم بما يلي:

لدينا عدد الفروق الموجبة $V = 11$، وعدد الفروق غير الصفرية $W = 22$، نحسب قيمة z :

$$z = \frac{V - \mu_V}{\sigma_V}$$
$$\mu_V = \frac{22}{2} = 11$$
$$\sigma_V = \sqrt{\frac{22}{4}} = 2,35$$
$$z = \frac{11 - 11}{2,35} = 0$$

ومن جدول التوزيع الطبيعي عند نجد:

$$z_{\frac{\alpha+1}{2}} = 1{,}96$$

$$|z| \prec z_{\frac{\alpha+1}{2}}$$

وبالتالي: نقبل فرضية العدم، أي أن السلسلة عشوائية لا تحتوي على اتجاه عام.

4-2-1-3- اختبار دانيال

يعتبر أقوى اختبار للكشف عن مركبة الاتجاه العام، ويعتمد على معامل الارتباط سبيرمان الرتبي، أي على قياس الارتباط الخطي بين ترتيبتين، الترتيب التصاعدي R_t والزمني t، ويتم صياغته من الشكل: (حشمان، 2010، صفحة 42)

H_0: السلسلة عشوائية

H_1: السلسلة ذات اتجاه عام

ويعبر عنه رياضيا بالصيغة التالية:

$$R_t = f(t)$$
$$t = 1, n$$
$$R_t = 1, n$$

ومعامل الارتباط المبسط يعطى بالعلاقة التالية:

$$r = 1 - \frac{6\sum_{t=1}^{n} d_t^{\,2}}{n(n^2-1)}$$
$$d_t^{\,2} = (t - R_t)^2$$
$$-1 \le r \le 1$$

r : معامل الارتباط الرتبي سبيرمان

$\sum_{t=1}^{n} d_t^{\,2}$: مجموع مربعات الفروق بين الترتيب الزمني t والترتيب التصاعدي R_t

n : عدد المشاهدات

ملاحظة

في حالة سلسلة مكررة المشاهدات، نعوض الرتب المكررة بوسطها الحسابي.

- **في حالة العينات الصغيرة** $n \prec 30$

نرفض الفرضية الصفرية في حالة

$$|r| \succ r_{\frac{\alpha}{2}}$$

- **في حالة العينات الكبيرة** $n \geq 30$

نرفض الفرضية الصفرية في حالة

$$|z| \succ z_{\frac{\alpha}{2}}$$

$$\begin{cases} z = \dfrac{r-\mu_r}{\sigma_r} \\ \mu_r = 0 \\ \sigma_r = \dfrac{1}{\sqrt{n-1}} \end{cases} \Rightarrow z = r\sqrt{n-1}$$

مثال (07)

لدينا الجدول التالي من المثال (04):

السنة	2019				2020				2021			
الفصل	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
الاستهلاك	155	158	163	171	153	156	162	172	162	164	173	181
t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
R_t	2	4	7	9	1	3	5,5	10	5,5	8	11	12
$d_t^{\,2}$	1	4	16	25	16	9	2,25	4	12,25	4	0	0

تحديد مركبة الاتجاه العام اعتمادا على اختبار دانيال علما أن $r_{\frac{\alpha}{2}} = 0{,}5804$:

$$\sum_{t=1}^{n} d_t^{\,2} = 93{,}5$$

$$r = 1 - \frac{6.93,5}{12(12^2 - 1)} = 0,67$$

بما أن $|r| \succ r_{\frac{\alpha}{2}}$، يتم رفض الفرضية الصفرية وبالتالي السلسلة تحتوي على اتجاه عام.

تمارين محلولة

تمرين 01

لدينا المعطيات التالية حول تطور متوسط الأجور بالآلاف لفئة معينة من العمال في إحدى المؤسسات الخاصة خلال السنوات 20010-2017:

2017	2016	2015	2014	2013	2012	2011	2010	السنة
32	24	28	30	20	25	18	22	الأجور

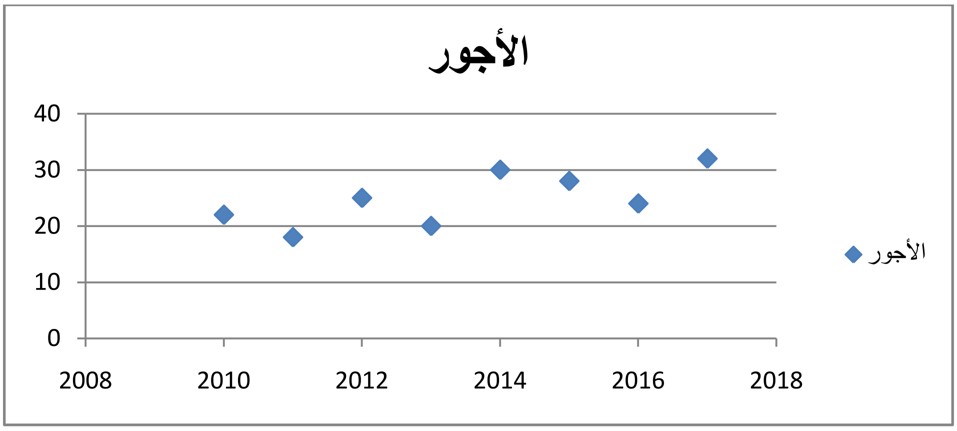
1.مثل السلسلة الزمنية بيانيا

2.ما هي الاختبارات الممكن استعمالها للكشف عن مركبة الاتجاه العام، علل؟

3.اعتمادا على الاختبارات الممكن استعمالها، حدد ما إذا كانت السلسلة الزمنية تحتوي على مركبة اتجاه عام علما أن $\alpha=5\%$

الحل

1.التمثيل البياني



2.الاختبارات الممكنة

1 ـ اختبار التوالي

$$m=\frac{T}{2}=\frac{8}{2}=4\prec 5$$

غير ممكن

2 ـ اختبار نقاط الانعطاف

$$T = 8 \prec 10$$

غير ممكن

3 - اختبار الإشارة

$$n \succ 20$$

غير ممكن

4 - اختبار دانيال: ممكن

3.الكشف عن مركبة الاتجاه العام

بما أن اختبار دانيال هو الاختبار الوحيد الممكن، نقوم باعتماده للكشف عن مركبة الاتجاه العام:

$$r = 1 - \frac{6\sum_{t=1}^{n} d_t^{\,2}}{n(n^2 - 1)}$$

$$d_t^{\,2} = (t - R_t)^2$$

السنة	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
الأجور	22	18	25	20	30	28	24	32
t	1	2	3	4	5	6	7	8
R_t	3	1	5	2	7	6	4	8
$d_t^{\,2}$	4	1	4	4	4	0	9	0

$$r = 1 - \frac{6 * 26}{8 * (8^2 - 1)} = 0{,}69$$

لدينا $T = 8 \prec 30$ نعتمد على القيمة المعيارية لـ r عند $\alpha = 5\%$

$$(r = 0{,}69) \prec (r_t = 0{,}7143)$$

ومنه: نقبل الفرضية الصفرية: أي أن السلسلة عشوائية ليس لها اتجاه عام

تمرين 02

البيانات الممثلة في الجدول التالي، تعبر عن قيمة استهلاك الماء السنوية (مائة دج) لأسرة معينة خلال الفترة 2000-2006:

السنة	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
الاستهلاك	17	22	20	19	25	22	21	25	23

1.مثل السلسلة الزمنية بيانيا

2.حدد مركبة الاتجاه العام باستخدام:

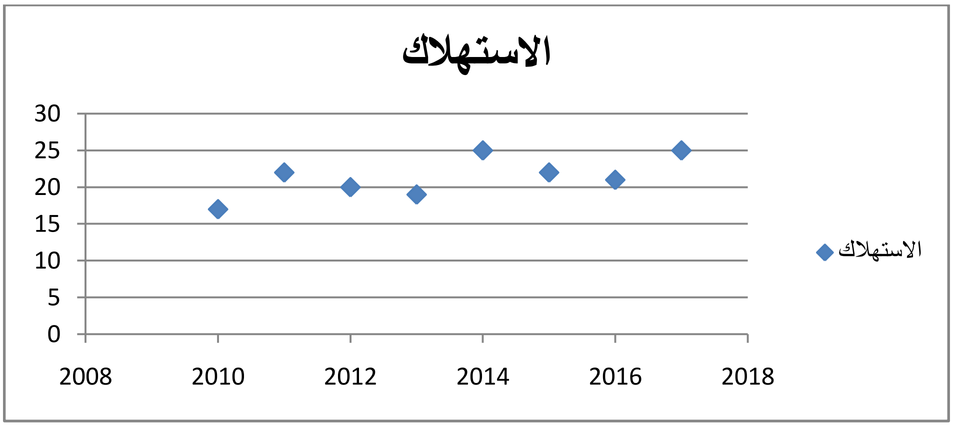
-اختبار التوالي

- اختبار دانيال علما أن α=5%

3.ما هو أقوى اختبار، ولماذا؟

الحل

1.التمثيل البياني



2.الكشف عن مركبة الاتجاه العام

أولا: اختبار التوالي

للتأكد من وجود مركبة اتجاه عام لهذه السلسلة باستعمال اختبار التوالي، نتبع الخطوات التالية:

1 -صياغة الفرضيات:

H_0: السلسلة عشوائية

H_1: السلسلة ذات اتجاه عام

2 - الترتيب التصاعدي للمشاهدات:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
17	19	20	21	22	22	23	25	25
-	+	-	-	+	+	-	+	+

3 - حساب القيمة الوسطى: بما أن عدد المشاهدات فردي:

$$M = \frac{n+1}{2} = \frac{9+1}{2} = 5$$

$$M_d = y_M = y_5 = 22$$

4 - إعطاء الإشارات: في الجدول السابق

5 - حساب R: R=6

6 - اتخاذ القرار: بما أن $m=5\leq 20$، فإننا في حالة العينات الصغيرة، وعليه يتم الاعتماد على مخطط التوالي، ومن الجدول الإحصائي نجد $R_l = 2$ و $R_u = 10$

وبمان أن $R_l \prec R \prec R_u$:نقبل فرضية العدم، أي أن السلسلة الزمنية لا تحتوي على اتجاه عام.

ثانيا: اختبار دانيال

$$r = 1 - \frac{6\sum_{t=1}^{n} {d_t}^2}{n(n^2-1)}$$

$${d_t}^2 = (t - R_t)^2$$

السنة	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
الأجور	17	22	20	19	25	22	21	25	23
t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
R_t	1	5,5	3	2	8,5	5,5	4	8,5	7
${d_t}^2$	0	12,25	0	4	12,25	0,25	9	0,25	4

$$r = 1 - \frac{6*42}{9*(9^2 - 1)} = 0,65$$

لدينا $T = 9 \prec 30$ نعتمد على القيمة المعيارية لـ r عند $\alpha = 5\%$

$$(r = 0,65) \prec (r_t = 0,6833)$$

ومنه: نقبل الفرضية الصفرية: أي أن السلسلة عشوائية ليس لها اتجاه عام

تمرين 03

حجم الإنتاج بالطن من سلعة معينة في إحدى المؤسسات خلال الفترة 2009-2019 قدر كما يلي:

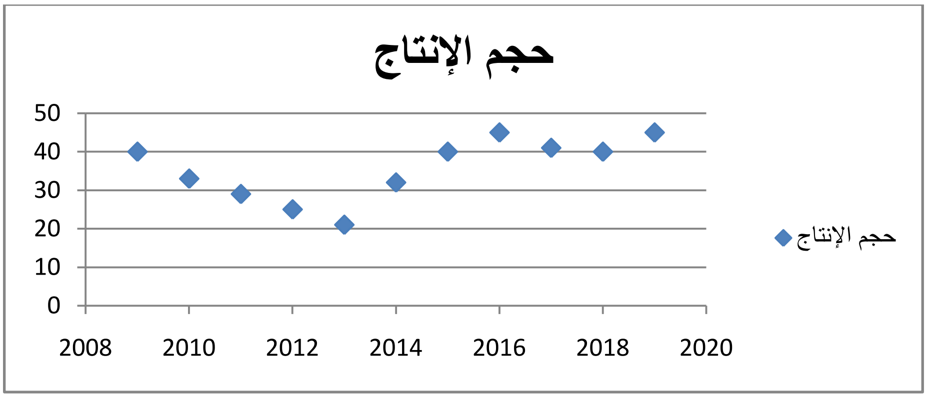
السنة	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
ح.الإنتاج	40	33	29	25	21	32	40	45	41	40	45

1.الكشف عن مركبة الاتجاه العام بيانيا

2.الكشف عن مركبة الاتجاه العام باستخدام اختبار نقاط الانعطاف

الحل

1. الكشف عن مركبة الاتجاه العام بيانيا



من التمثيل البياني نلاحظ أن السلسلة الومنية عشوائية، ليس لها اتجاه عام محدد

2. الكشرف عن مركبة الاتجاه العام باستخدام اختبار نقاط الانعطاف

للكشف عن وجود مركبة اتجاه عام في السلسلة الزمنية اعتمادا على اختبار نقاط الانعطاف، نقوم بما يلي:

-حساب الفروق من الدرجة الأولى:

جحكظالسنة	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Y	40	33	29	25	21	32	40	45	41	40	45
Δy		-7	-4	-4	-4	11	8	5	-4	-1	5
الاشارة		-	-	-	-	+	+	+	-	-	+

لدينا عدد المشاهدات أكثر من 10، وقيمة $\mu = 4$ ، نحسب قيمة z :

$$z = \frac{\mu - \mu_\mu}{\sigma_\mu}$$

$$\mu_\mu = \frac{2(n-2)}{3} = \frac{2(11-2)}{3} = 6$$

$$\sigma_\mu = \sqrt{\frac{16n-29}{90}} = \sqrt{\frac{(16*11)-29}{90}} = 1{,}28$$

$$z = \frac{\mu - \mu_\mu}{\sigma_\mu} = z = \frac{4-6}{1{,}28} = -1{,}56$$

ومن جدول التوزيع الطبيعي عند نجد:

$$z_{\frac{\alpha+1}{2}} = 1{,}96$$

$$|z| \prec z_{\frac{\alpha+1}{2}}$$

وبالتالي: نقبل فرضية العدم، أي أن السلسلة عشوائية لا تحتوي على اتجاه عام.

تمرين 04

تعطي البيانات التالية كمية الصادرات ربع السنوية بالطن لأحد المحاصيل الزراعية خلال 6 سنوات:

السنة	2010				2011				2012			
الفصل	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
الصادرات	20	23	44	26	25	28	49	31	30	33	54	36
السنة	2013				2014				2015			
الفصل	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4

الصادرات	32	35	56	38	34	37	58	40	36	39	60	42

1.حدد مركبة الاتجاه العام اعتمادا على:

-الطريقة البيانية

- اختبار الإشارة

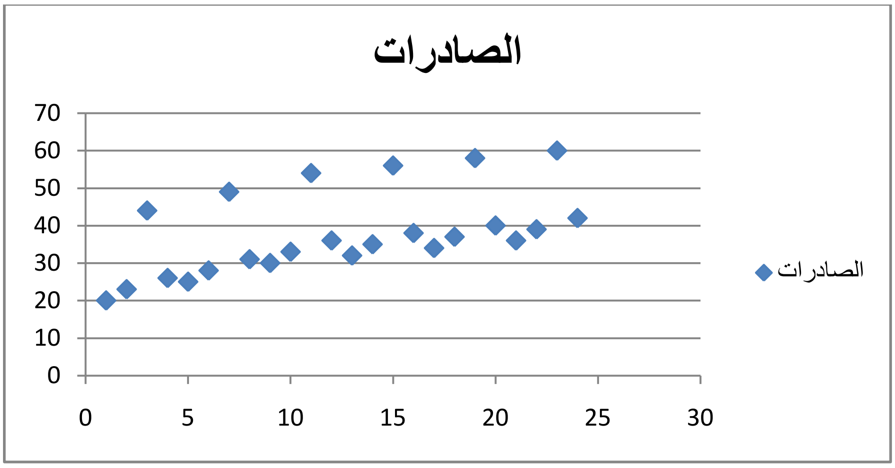
-اختبار نقاط الانعطاف

-اختبار دانيال علما أن $\alpha=5\%$

الحل

1.تحديد مركبة الاتجاه العام اعتمادا على:

أولا: الطريقة البيانية



ثانيا: اختبار الإشارة

للكشف عن وجود مركبة اتجاه عام في السلسلة الزمنية اعتمادا على اختبار الإشارة، نقوم بما يلي:

-حساب الفروق من الدرجة الأولى:

الفصل	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Y	20	23	44	26	25	28	49	31	30	33	54	36
Δy		3	21	-18	-1	3	21	-8	-1	3	21	-18

4	3	2	1	4	3	2	1	4	3	2	1	الفصل
42	60	39	36	40	58	37	34	38	56	35	32	Y
-18	21	3	-4	-18	21	3	-4	-18	21	3	-4	Δy

لدينا عدد الفروق الموجبة $V=12$، وعدد الفروق غير الصفرية $W=23$، نحسب قيمة z :

$$z=\frac{V-\mu_V}{\sigma_V}$$

$$\mu_V=\frac{23}{2}=11{,}5$$

$$\sigma_V=\sqrt{\frac{23}{4}}=2{,}3979$$

$$z=\frac{12-11{,}5}{2{,}39}=0{,}21$$

ومن جدول التوزيع الطبيعي عند نجد:

$$z_{\frac{\alpha+1}{2}}=1{,}96$$

$$|z|\prec z_{\frac{\alpha+1}{2}}$$

وبالتالي: نقبل فرضية العدم، أي أن السلسلة عشوائية لا تحتوي على اتجاه عام.

ثالثا: اختبار نقاط الانعطاف

للكشف عن وجود مركبة اتجاه عام في السلسلة الزمنية اعتمادا على اختبار نقاط الانعطاف، نقوم بما يلي:

-حساب الفروق من الدرجة الأولى:

4	3	2	1	4	3	2	1	4	3	2	1	الفصل
36	54	33	30	31	49	28	25	26	44	23	20	Y
-18	21	3	-1	-8	21	3	-1	-18	21	3		Δy
-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+		الاشارة

الفصل	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Y	32	35	56	38	34	37	58	40	36	39	60	42
Δy	-4	3	21	-18	-4	3	21	-18	-4	3	21	-18
الاشارة	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-

لدينا عدد المشاهدات أكثر من 10، وقيمة $\mu = 12$ ، نحسب قيمة z :

$$z = \frac{\mu - \mu_{\mu}}{\sigma_{\mu}}$$

$$\mu_{\mu} = \frac{2(n-2)}{3} = \frac{2(24-2)}{3} = 14{,}67$$

$$\sigma_{\mu} = \sqrt{\frac{16n-29}{90}} = \sqrt{\frac{(16*24)-29}{90}} = 1{,}99$$

$$z = \frac{\mu - \mu_{\mu}}{\sigma_{\mu}} = z = \frac{12-14{,}67}{1{,}99} = -1{,}34$$

ومن جدول التوزيع الطبيعي عند نجد:

$$z_{\frac{\alpha+1}{2}} = 1{,}96$$

$$|z| \prec z_{\frac{\alpha+1}{2}}$$

وبالتالي: نقبل فرضية العدم، أي أن السلسلة عشوائية لا تحتوي على اتجاه عام.

رابعا: اختبار دانيال

$$r = 1 - \frac{6\sum_{t=1}^{n} d_t^{\,2}}{n(n^2-1)}$$

$$d_t^{\,2} = (t - R_t)^2$$

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y	20	23	44	26	25	28	49	31	30	33	54	36
R	1	2	19	4	3	5	20	7	6	9	21	12,5
d^2	0	0	256	0	4	1	169	1	9	1	100	0,25

t	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
y	32	35	56	38	34	37	58	40	36	39	60	42
R	8	11	22	15	10	14	23	17	12,5	16	24	18
d^2	25	9	49	1	49	16	16	9	72,25	36	1	36

$$r = 1 - \frac{6*860,5}{24*(24^2-1)} = 0,62$$

لدينا $T = 9 \prec 30$ نعتمد على القيمة المعيارية لـ r عند $\alpha = 5\%$

$$(r = 0,65) \prec (r_t = 0,40)$$

ومنه: نرفض الفرضية الصفرية ونقبل الفرضية البديلة: أي أن السلسلة غير عشوائية لها اتجاه عام

تمرين 05

المعطيات التالية تمثل عدد السكان في الجزائر من 1980 إلى 2009

الوحدة: مليون نسمة

السنة	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989
ع.السكان	18.66	19.24	19.86	20.51	21.17	22.20	22.80	23.40	24.10	24.70
السنة	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
ع.السكان	25.02	25.64	26.27	26.89	27.49	28.06	28.56	29.04	29.50	29.96
السنة	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
ع.السكان	30.41	30.87	31.35	31.84	32.36	32.90	33.49	33.99	34.86	35.47

1.الكشف عن مركبة الاتجاه العام بيانيا

2.الكشف عن مركبة الاتجاه العام باستخدام:

-اختبار التوالي

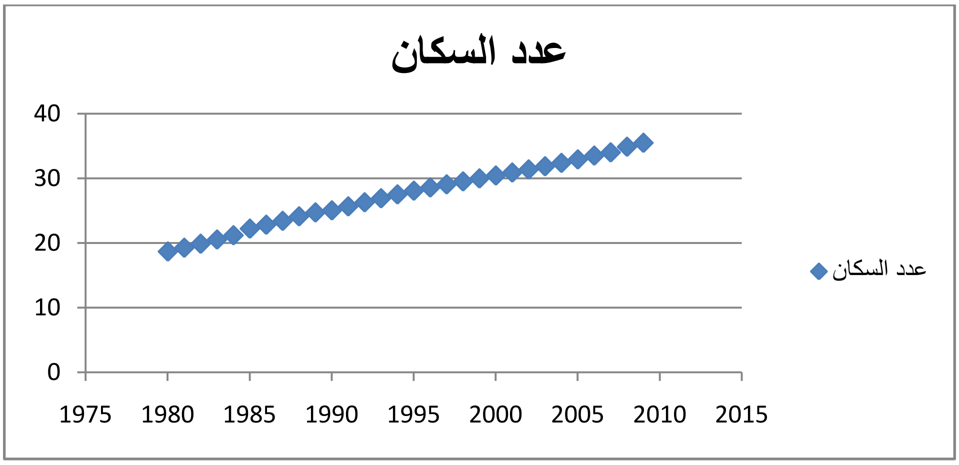
-اختبار نقاط الانعطاف

-اختبار الإشارة

-اختبار دانيال

الحل

1.الكشف عن مركبة الاتجاه العام بيانيا



من التمثيل البياني نلاحظ أن السلسلة الزمنية متزايدة مع الزمن، وبالتالي نستنتج أن لها اتجاه عام موجب.

2.الكشف عن مركبة الاتجاه العام باستخدام

أولا: اختبار التوالي

للتأكد من وجود مركبة اتجاه عام لهذه السلسلة باستعمال اختبار التوالي، نتبع الخطوات التالية:

صياغة الفرضيات:

H_0: السلسلة عشوائية

H_1: السلسلة ذات اتجاه عام

الترتيب التصاعدي للمشاهدات: القيم متزايدة في الجدول، وبالتالي هي مرتبة ترتيب تصاعدي.

السنة	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989
ع.السكان	18.66	19.24	19.86	20.51	21.17	22.20	22.80	23.40	24.10	24.70
الاشارة	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
السنة	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999

ع.السكان	25.02	25.64	26.27	26.89	27.49	28.06	28.56	29.04	29.50	29.96
الاشارة	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+
السنة	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
ع.السكان	30.41	30.87	31.35	31.84	32.36	32.90	33.49	33.99	34.86	35.47
الاشارة	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

حساب القيمة الوسطى: بما أن عدد المشاهدات زوجي:

$$M=\frac{n}{2}=\frac{30}{2}=15$$

$$M_d=\frac{y_M+y_{M+1}}{2}=\frac{27,49+28,06}{2}=27,775$$

إعطاء الإشارات: في الجدول السابق

حساب R: R=2

اتخاذ القرار: بما أن M=15≤20، فإننا في حالة العينات الصغيرة، وعليه يتم الاعتماد على مخطط التوالي، ومن الجدول الإحصائي نجد $R_l=10$ و $R_u=22$

وبمان أن $R \prec R_l$:نرفض فرضية العدم ونقبل الفرضية البديلة، أي أن السلسلة الزمنية تحتوي على اتجاه عام.

ثانيا: اختبار نقاط الانعطاف

للكشف عن وجود مركبة اتجاه عام في السلسلة الزمنية اعتمادا على اختبار نقاط الانعطاف، نقوم بما يلي:

-حساب الفروق من الدرجة الأولى:

السنة	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989
ع.السكان	18.66	19.24	19.86	20.51	21.17	22.20	22.80	23.40	24.10	24.70
Δy		0,58	0,62	0,65	0,66	1,03	0,6	0,6	0,7	0,6

الإشارة		+	+	+	+	+	+	+	+	+
السنة	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
ع.السكان	25.02	25.64	26.27	26.89	27.49	28.06	28.56	29.04	29.50	29.96
Δy	0,32	0,62	0,63	0,62	0,6	0,57	0,5	0,48	0,46	0,46
الإشارة	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
السنة	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
ع.السكان	30.41	30.87	31.35	31.84	32.36	32.90	33.49	33.99	34.86	35.47
Δy	0,45	0,46	0,48	0,49	0,52	0,54	0,59	0,5	0,87	0,61
الاشارة	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

لدينا عدد المشاهدات أكثر من 10، وقيمة $\mu = 1$ ، نحسب قيمة z :

$$z = \frac{\mu - \mu_\mu}{\sigma_\mu}$$

$$\mu_\mu = \frac{2(n-2)}{3} = \frac{2(30-2)}{3} = \frac{56}{3} = 18{,}67$$

$$\sigma_\mu = \sqrt{\frac{16n-29}{90}} = \sqrt{\frac{(16*30)-29}{90}} = \frac{451}{90} = \sqrt{5{,}01} = 2{,}24$$

$$z = \frac{\mu - \mu_\mu}{\sigma_\mu} = z = \frac{1-18{,}67}{2{,}24} = -7{,}88$$

ومن جدول التوزيع الطبيعي عند نجد:

$$z_{\frac{\alpha+1}{2}} = 1{,}96$$

$$|z| \succ z_{\frac{\alpha+1}{2}}$$

وبالتالي: نرفض فرضية العدم ونقبل الفرضية البديلة، أي أن السلسلة تحتوي على اتجاه عام.

ثالثا: اختبار الإشارة

للكشف عن وجود مركبة اتجاه عام في السلسلة الزمنية اعتمادا على اختبار الإشارة، نقوم بما يلي:

-حساب الفروق من الدرجة الأولى:

السنة	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989
ع.السكان	18.66	19.24	19.86	20.51	21.17	22.20	22.80	23.40	24.10	24.70
Δy		0,58	0,62	0,65	0,66	1,03	0,6	0,6	0,7	0,6
السنة	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
ع.السكان	25.02	25.64	26.27	26.89	27.49	28.06	28.56	29.04	29.50	29.96
	0,32	0,62	0,63	0,62	0,6	0,57	0,5	0,48	0,46	0,46
السنة	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
ع.السكان	30.41	30.87	31.35	31.84	32.36	32.90	33.49	33.99	34.86	35.47
Δy	0,45	0,46	0,48	0,49	0,52	0,54	0,59	0,5	0,87	0,61

لدينا عدد الفروق الموجبة $V = 29$، وعدد الفروق غير الصفرية $W = 29$، نحسب قيمة z :

$$z = \frac{V - \mu_V}{\sigma_V}$$

$$\mu_V = \frac{29}{2} = 14,5$$

$$\sigma_V = \sqrt{\frac{29}{4}} = 2,69$$

$$z = \frac{29 - 14,5}{2,69} = 5,39$$

ومن جدول التوزيع الطبيعي عند نجد:

$$z_{\frac{\alpha+1}{2}} = 1,96$$

$$|z| \succ z_{\frac{\alpha+1}{2}}$$

وبالتالي: نرفض فرضية العدم ونقبل الفرضية البديلة، أي أن السلسلة تحتوي على اتجاه عام.

رابعا: اختبار دانيال

$$r = 1 - \frac{6\sum_{t=1}^{n} d_t^{\ 2}}{n(n^2-1)}$$

$$d_t^{\ 2} = (t - R_t)^2$$

السنة	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989
ع.السكان	18.66	19.24	19.86	20.51	21.17	22.20	22.80	23.40	24.10	24.70
t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
السنة	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
ع.السكان	25.02	25.64	26.27	26.89	27.49	28.06	28.56	29.04	29.50	29.96
t	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
R	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
d^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
السنة	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
ع.السكان	30.41	30.87	31.35	31.84	32.36	32.90	33.49	33.99	34.86	35.47
t	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
R	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
d^2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$$r = 1 - \frac{6*0}{30*(30^2-1)} = 1$$

لدينا $T = 30$ نعتمد على القيمة المعيارية لـ r عند $\alpha = 5\%$

$$(r = 1) \succ (r_t = 0{,}36)$$

ومنه: نرفض الفرضية الصفرية ونقبل الفرضية البديلة: أي أن السلسلة غير عشوائية لها اتجاه عام

2-3-نماذج التنبؤ بمركبة الاتجاه العام

تهتم هذه النماذج بالمركبة النظامية في السلسلة الزمنية والمتمثلة في مركبة الاتجاه العام، وقد تكون ممثلة بدالة خطية، أسية، لوغاريتيمية، أو غيرها من النماذج.

1-2-3-نموذج الاتجاه العام الخطي

يتم التعبير عن السلسلة الزمنية التي تنمو (أو تنقص) بمقدار مطلق ثابت عبر الزمن بعلاقة خطية، يكون فيها الزمن المتغير المستقل، وقيم السلسلة المتغير التابع (bachioua, 2011, p. 184)، يعبر عنها رياضيا كما يلي:

$$y_t = f(t, \varepsilon_t)$$

وعند التمثيل البياني لهذه العلاقة تظهر على الشكل الخطي الذي يعبر عنه رياضيا بـ: (جوجاراتي، 2010، صفحة 418)

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t$$

يعكس المنحنى الممثل لهذه الدالة مركبة الاتجاه العام على السلسلة الزمنية، إضافة إلى المركبة العشوائية ضعيفة الذبذبة، مما يسهل عملية التنبؤ.

y_t : المتغير التابع "الظاهرة محل الدراسة"؛

ε_t : حد الخطأ العشوائي، ويمثل الفرق بين القيم الفعلية والقيم المقدرة:(bourbonnais, 2005, p. 27)

$$\varepsilon_t = \left| y_t - \hat{y}_t \right|$$

β_0 : ثابت الانحدار، ويتم حسابه كما يلي:

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \beta_1 \bar{t} = \frac{\sum y_t}{n} - \beta_1 \frac{\sum t}{n}$$

β_1 : معامل الانحدار، ويتم حسابه كما يلي:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{n\sum_{t=1}^{n} y_t t - \sum y_t \sum t}{n\sum t^2 - \left(\sum t\right)^2}$$

أو

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n} y_t t - n.\bar{y}.\bar{t}}{\sum t^2 - \bar{t}^2}$$

t : المتغير المستقل "الزمن"، ويتم تقديره اعتمادا على الطريقة التالية:

$$M = \frac{n+1}{2}$$

$t = \vec{n} - M$ في حالة سلسلة فردية

$t = (\vec{n} - M) * 2$ في حالة سلسلة زوجية

$\vec{n}$: الترتيب التصاعدي

M : القيمة الوسطى

كما يمكن حسابه مباشرة باعتباره ترتيب تصاعدي عبر فترة الدراسة.

مثال (08)

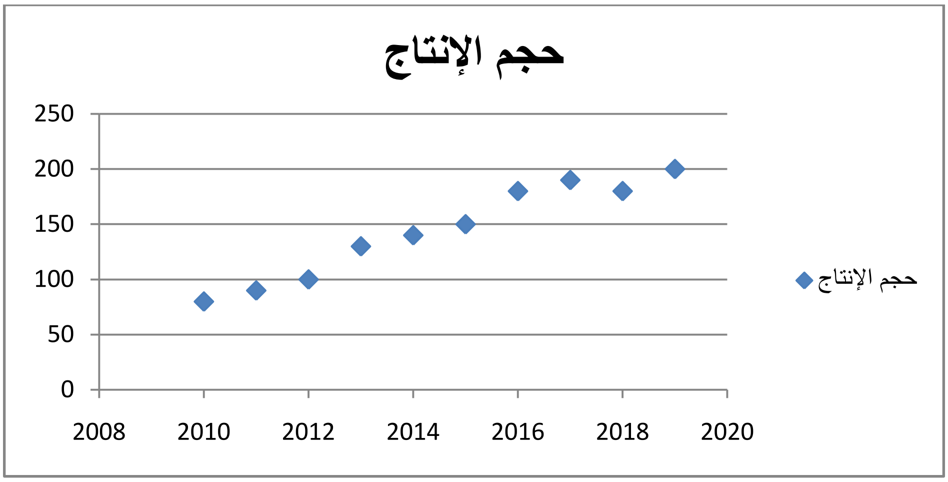
لدينا الجدول التالي يمثل حجم الإنتاج في إحدى المؤسسات:

السنة	y_t	t	$y_t.t$	t^2	$\hat{y}_t$	ε_t
2010	80	-9	-720	81	80,73	0.73
2011	90	-7	-630	49	94,79	4.79
2012	100	-5	-500	25	108,85	8.85
2013	130	-3	-390	9	122,91	7.09
2014	140	-1	-140	1	136.97	3.03
2015	150	1	150	1	151,03	14.91
2016	180	3	540	9	16.09	10.85
2017	190	5	950	25	179.15	13.21
2018	180	7	1260	49	193.21	7.27
2019	200	9	1800	81	207.27	

$\sum$	1440	0	2320	330		

المطلوب

1 - التمثيل البياني



من خلال التمثيل البياني تظهر النقط منتشرة حول خط مستقيم متزايد، وهذا يدل على أن العلاقة خطية طردية بين الإنتاج والزمن.

2 - تحديد معادلة الاتجاه العام

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t$$

أولا: تحديد قيمة t

$$M = \frac{n+1}{2} = \frac{10+1}{2} = 5{,}5$$

$$t = (\vec{n} - M)*2 = (1-5{,}5)*2 = -9$$

ثانيا: تحديد قيم المعاملات

$$\beta_1 = \frac{n\sum_{t=1}^{n} y_t t - \sum y_t \sum t}{n\sum t^2 - \left(\sum t\right)^2} = \frac{(10.2320)-(1440.0)}{(10.330)-0} = \frac{23200}{3300} = 7{,}03$$

$$\beta_0 = \bar{y} - \beta_1 \bar{t} = \frac{\sum y_t}{n} - \beta_1 \frac{\sum t}{n} = \frac{1440}{10} - 7.03\frac{0}{10} = 144$$

ثالثا: تحديد معادلة الاتجاه العام

$$\hat{y}_t = 144 + 7{,}03t$$

3 - حساب القيم الاتجاهية

نقوم بتعويض قيم t في معادلة الاتجاه العام المتحصل عليها $\left(\hat{y}_t = 144 + 7{,}03t\right)$ ونضع القيم في الجدول:

$$\hat{y}_{2010} = 144 + \left(7{,}03. - 9\right) = 80{,}73$$

4 - حساب قيم حد الخطأ العشوائي

$$\varepsilon_t = \left|\hat{y}_t - y_t\right| = 80{,}73 - 80 = 0{,}73$$

5 - التنبؤ بقيمة الإنتاج لسنة 2020

$$\begin{cases} \hat{y}_t = 144 + 7{,}03t \\ t = \left(\vec{n} - M\right) * 2 = \left(11 - 5{,}5\right) * 2 = 11 \end{cases} \Rightarrow \hat{y}_{2020} = 144 + \left(7{,}03.11\right) = 221{,}33$$

ملاحظة هامة:

توجد مرحلة هامة بين عملية التقدير وعملية التنبؤ، وهي دراسة صلاحية النموذج ومدى قدرته على التنبؤ.

2-2-3-نموذج الاتجاه العام الأسي

يتم التعبير عن السلسلة الزمنية التي تنمو بنسبة مئوية ثابتة مقدارها r بالعلاقة التالية: (حشمان، 2010، صفحة 71)

$$y_t = \alpha . e^{r.t + \varepsilon_T}$$

تتميز هذه العلاقة بأنها غير خطية، وحتى تسهل عملية التقدير اعتمادا على هذا النموذج، يتم تحويلها إلى علاقة خطية عن طريق اللوغاريتم، فتصبح كما يلي: (عبد المجيد البلداوي، 2009، صفحة 269)

$$\ln\left(y_t\right) = \ln\left(\alpha\right) + r.t + \varepsilon_T$$

بتعويض رموز المعلمات $\ln\left(y_t\right)$ و$\ln\left(\alpha\right)$ بـz_t و β على التوالي تصبح المعادلة على الشكل:

$$z_t = \beta + r.t + \varepsilon_T$$

واعتمادا على طريقة المربعات الصغرى، يتم حساب المعلمات كما يلي: (حشمان، 2010، صفحة 73)

$$\hat{\beta} = \bar{z} - r\bar{t} = \frac{\sum z_t}{n} - r\frac{\sum t}{n}$$

$$\hat{r} = \frac{n\sum z_t t - \sum z_t \sum t}{n\sum t^2 - \left(\sum t\right)^2}$$

أو

$$\hat{r} = \frac{\sum z_t t - n.\bar{z}.\bar{t}}{\sum t^2 - \bar{t}^2}$$

ويتم التنبؤ بـ في الفترة اللاحقة اعتمادا على العلاقة اللوغاريتمية:

$$\hat{z}_t = \hat{\beta} + \hat{r}.t$$

أو اعتمادا على العلاقة الأسية:

$$\hat{y}_t = \hat{\alpha}.e^{\hat{r}.t}$$

حيث أن:

$$\hat{y}_t = e^{\hat{z}_t}$$
$$\hat{\alpha} = e^{\hat{\beta}}$$

مثال (09)

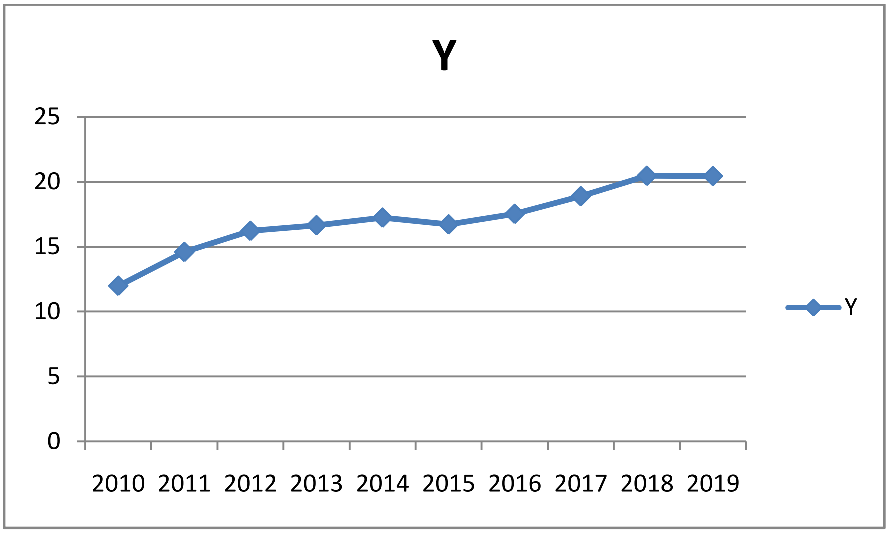
المعطيات التالية تمثل الناتج المحلي الإجمالي بالأسعار الجارية للعملة المحلية في الجزائر بالتريليون دينار جزائري من الفترة 2010 إلى 2019:

السنة	y_t	t	z_t	t^2	$t.z_t$
2010	11,99	-9	2,48	81	-22,36
2011	14,59	-7	2,68	49	-18,76
2012	16,21	-5	2,79	25	-13,93
2013	16,65	-3	2,81	9	-8,44
2014	17,23	-1	2,85	1	-2,85

2015	16,71	1	2,82	1	2,82
2016	17,52	3	2,86	9	8,59
2017	18,88	5	2,94	25	14,69
2018	20,45	7	3,02	49	21,13
2019	20,43	9	3,02	81	27,15
$\sum$		0	28,26	330	8,04

المطلوب

1 - التمثيل البياني



2 - تقدير دالة الاتجاه العام بافتراض أنها دالة أسية

$$y_t = \alpha . e^{r.t+\varepsilon_T}$$

$$\ln(y_t) = \ln(\alpha) + r.t + \varepsilon_T$$

$$z_t = \beta + r.t + \varepsilon_T$$

أولا: تحديد قيمة t

$$M = \frac{n+1}{2} = \frac{10+1}{2} = 5{,}5$$

$$t = (\vec{n} - M) * 2 = (1 - 5{,}5) * 2 = -9$$

ثانيا: تحديد قيم المعاملات

$$r=\frac{n\sum z_t t-\sum z_t\sum t}{n\sum t^2-\left(\sum t\right)^2}=\frac{(10.8,04)-(28,26.0)}{(10.330)-0}=\frac{80,4}{3300}=0,024$$

$$\beta=\bar{z}-r\bar{t}=\frac{\sum z_t}{n}-r\frac{\sum t}{n}=\frac{28,26}{10}-0,024\frac{0}{10}=2,826\approx 2,83$$

ثالثا: تحديد معادلة الاتجاه العام

$$\hat{z}_t=2,83+0,024t$$

3 - التنبؤ بقيمة الناتج المحلي الإجمالي للسنوات 2020-2022

$$\begin{cases}\hat{z}_{2020}=2,83+0,024t\\ 2020\Rightarrow t=(11-5,5)*2=11\end{cases}\Rightarrow \hat{z}_{2020}=2,83+0,024.11=3,098$$
$$\hat{y}_{2020}=e^{\hat{z}_{2020}}=e^{3,098}=22,15$$

$$\begin{cases}\hat{z}_{2021}=2,83+0,024t\\ 2021\Rightarrow t=(12-5,5)*2=13\end{cases}\Rightarrow \hat{z}_{2020}=2,83+0,024.13=3,15$$
$$\hat{y}_{2021}=e^{\hat{z}_{2021}}=e^{3,15}=23,26$$

$$\begin{cases}\hat{z}_{2022}=2,83+0,024t\\ 2022\Rightarrow t=(12-5,5)*2=15\end{cases}\Rightarrow \hat{z}_{2022}=2,83+0,024.15=3,19$$
$$\hat{y}_{2022}=e^{\hat{z}_{2022}}=e^{3,19}=24,42$$

3-2-3-دالة القطع المكافئ

في بعض الأحيان يكون الشكل الخطي البسيك غير ملائم لتمثيل ظاهرة معينة، ويكون من الأفضل تمثيلها بكثير حدود من الدرجة الثانية الذي يمثل بالعلاقة التالية: (عياد شاكر و قتاوي، 2006، صفحة 61)

$$y_t=\beta_0+\beta_1 t+\beta_2 t^2+\varepsilon_t$$

ويتم استعمال طريقة المربعات الصغرى لتحديد معلمات نموذج الانحدار الخطي المتعدد لقيم السلسلة الزمنية: (عياد شاكر و قتاوي، 2006، صفحة 66)

$$\hat{\beta}=\begin{bmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n & \sum t & \sum t^2\\ \sum t & \sum t^2 & \sum t^3\\ \sum t^2 & \sum t^3 & \sum t^4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sum y_t\\ \sum ty_t\\ \sum t^2 y_t\end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta}=(X'X)^{-1}(X'Y)$$

تذكير بالمصفوفات

1 - **شرط ضرب مصفوفتان: عدد أعمدة المصفوفة الأولى=عدد أسطر المصفوفة الثانية**

سطر المصفوفة الأولى جداء عمود المصفوفة الثانية

2 - **معكوس المصفوفة:**

- **حساب المحدد** $|D|$؛
- **تحديد المدور** $(X'X)'$ **"قلب الأعمدة أسطر، والأسطر أعمدة"**
- **تحديد مصفوفة المرافقات** $X'X^m$ **مع احترام الإشارات** $\pm$؛
- **ضرب مصفوفة المرافقات في مقلوب المحدد** $\frac{1}{|D|}$

مثال (10)

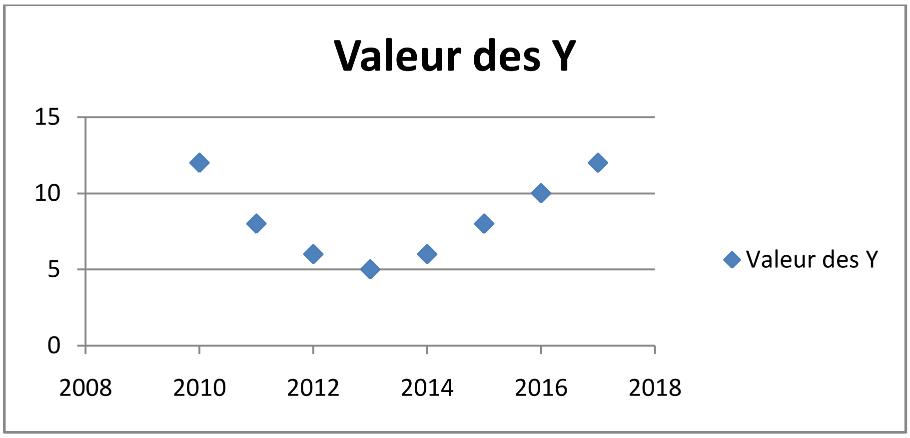
الجدول التالي يمثل قيمة المبيعات بمليون دينار لإحدى السلع المنتجة من طرف أحد المصانع سنويا:

السنة	y_t	t	$t.y_t$	t^2	t^3	t^4	$t.^2 y_t$
2010	12	-7	-84	49	-343	2401	588
2011	8	-5	-40	25	-)12(	625	200
2012	6	-3	-18	9	-27	81	54
2013	5	-1	-5	1	-1	1	5
2014	6	1	6	1	1	1	6
2015	8	3	24	9	27	81	72
2016	10	5	50	25	125	625	250
2017	12	7	84	49	343	2401	588

$\sum$	67	0	17	168	0	6216	1763

المطلوب

1 - التمثيل البياني



2 - تقدير معادلة الاتجاه العام بافتراض أنها دالة قطع مكافئ

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \varepsilon_t$$

أولا: تحديد قيمة t

$$M = \frac{n+1}{2} = \frac{8+1}{2} = 4{,}5$$

$$t = (\vec{n} - M) * 2 = (1 - 4{,}5) * 2 = -7$$

ثانيا: تحديد قيم المعاملات

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum t & \sum t^2 \\ \sum t & \sum t^2 & \sum t^3 \\ \sum t^2 & \sum t^3 & \sum t^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum y_t \\ \sum t y_t \\ \sum t^2 y_t \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 168 \\ 0 & 168 & 0 \\ 168 & 0 & 6216 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 67 \\ 17 \\ 1763 \end{bmatrix}$$

$$|D| = \begin{vmatrix} 8 & 0 & 168 \\ 0 & 168 & 0 \\ 168 & 0 & 6216 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 168 \\ 168 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|D| = [(8.168.6216) + (0.0.168) + (168.0.0)] - [(0.0.6216) + (10.0.0) + (168.168.168)]$$

$$|D| = 8354304 - 4741632 = 3612672$$

$$(X'X)' = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 168 \\ 0 & 168 & 0 \\ 168 & 0 & 6216 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^m = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 168 & 0 \\ 0 & 6216 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 168 & 6216 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 168 \\ 168 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 168 \\ 0 & 6216 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 8 & 168 \\ 168 & 6216 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 168 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 168 \\ 168 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 8 & 168 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 168 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^m = \begin{bmatrix} 1044288 & 0 & -28224 \\ 0 & 21504 & 0 \\ -28224 & 0 & 1344 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 1044288 & 0 & -28224 \\ 0 & 21504 & 0 \\ -28224 & 0 & 1344 \end{bmatrix} . \frac{1}{3612672}$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,29 & 0 & -0,008 \\ 0 & 0,006 & 0 \\ -0,008 & 0 & 0,0004 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}(X'Y)$$

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,29 & 0 & -0,008 \\ 0 & 0,006 & 0 \\ -0,008 & 0 & 0,0004 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 67 \\ 17 \\ 1763 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0,29.67) + (0.17) + (-0,008.1763) \\ (0.67) + (0,006.17) + (0.1763) \\ (-0,008.67) + (0.17) + (0,0004.1763) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,32 \\ 0,102 \\ 0,17 \end{bmatrix}$$

ثالثا: تحديد معادلة الاتجاه العام

$$\hat{y}_t = 3,245 + 0,102t + 0,370t^2$$

3 - التنبؤ بالإنتاج للسنوات 2018-2021

$$2018 = (\vec{n} - M) * 2 = (9 - 4{,}5) * 2 = 9$$

$$\hat{y}_{2018} = 3{,}245 + (0{,}102.9) + (0{,}370.9^2) = 34{,}133$$

$$2019 = (\vec{n} - M) * 2 = (10 - 4{,}5) * 2 = 11$$

$$\hat{y}_{2019} = 3{,}245 + (0{,}102.11) + (0{,}370.11^2) = 49{,}14$$

$$2020 = (\vec{n} - M) * 2 = (11 - 4{,}5) * 2 = 13$$

$$\hat{y}_{2020} = 3{,}245 + (0{,}102.13) + (0{,}370.13^2) = 67{,}10$$

$$2021 = (\vec{n} - M) * 2 = (12 - 4{,}5) * 2 = 15$$

$$\hat{y}_{2021} = 3{,}245 + (0{,}102.15) + (0{,}370.15^2) = 88{,}025$$

تمارين محلولة

تمرين 01

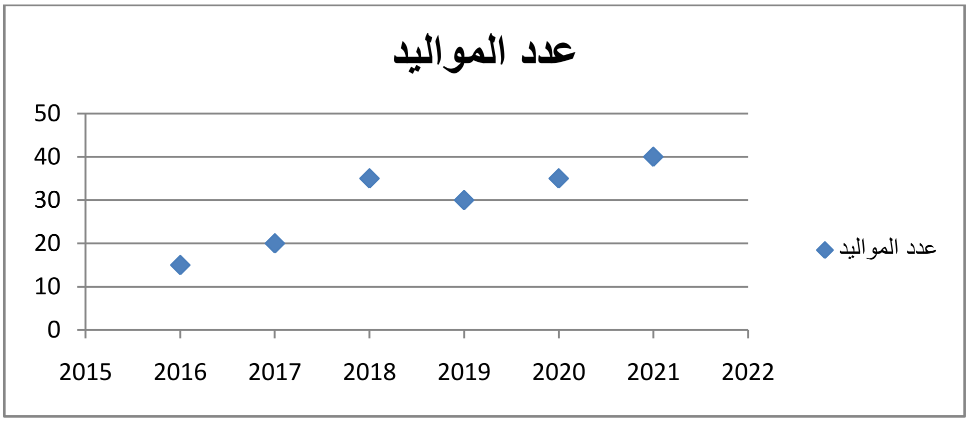
فيما يلي بيانات عن عدد المواليد بالآلاف في إحدى الدول خلال السنوات الست الأخيرة:

السنة	2016	2017	2018	2019	2020	2021
المواليد	15	20	35	30	35	40

1 - مثل بيانيا السلسلة الزمنية المعطاة في الجدول، واستنتج طبيعة نموذج الاتجاه العام المناسب؛
2 - أوجد تقدير معادلة الاتجاه العام؛
3 - أوجد القيم الاتجاهية والأخطاء المقدرة؛
4 - أوجد القيمة التنبؤية للسنتين المواليتين.

الحل

1-التمثيل البياني



من خلال التمثيل البياني نلاحظ أن النقط منتشرة حول خط مستقيم، ومنه نستنتج أن النموذج المناسب لتمثيل الاتجاه العام هو النموذج الخطي البسيط

2-تقدير معادلة الاتجاه العام

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t$$

أولا: تحديد قيمة t

$$M = \frac{n+1}{2} = \frac{6+1}{2} = 3{,}5$$

$$t=(\vec{n}-M)*2=(1-3{,}5)*2=-5$$

السنة	y_t	t	t*y	t²	$\hat{y}_t$	ε_t
2016	15	-5	-75	25	17,37	2,37
2017	20	-3	-60	9	22,09	2,09
2018	35	-1	-35	1	26,81	8,19
2019	30	1	30	1	31,53	1,53
2020	35	3	105	9	36,25	1,25
2021	40	5	200	25	40,97	0,97
	175	0	165	70		

ثانيا: تحديد قيم المعاملات

$$\beta_1=\frac{n\sum_{t=1}^{n}y_t t-\sum y_t\sum t}{n\sum t^2-\left(\sum t\right)^2}=\frac{(6*165)-(175*0)}{(6*70)-0}=\frac{990}{420}=2.357$$

$$\beta_0=\bar{y}-\beta_1\bar{t}=\frac{\sum y_t}{n}-\beta_1\frac{\sum t}{n}=\frac{175}{6}-2{,}36*\frac{0}{6}=29.166$$

ثالثا: تحديد معادلة الاتجاه العام

$$\hat{y}_t=29{,}17+2{,}36t$$

3-حساب القيم الاتجاهية والأخطاء المقدرة

نقوم بتعويض قيم في معادلة الاتجاه العام المتحصل عليها $\hat{y}_t=29{,}17+2{,}36t$ ونضع القيم في الجدول (السابق):

$$\hat{y}_t=29{,}17+(2{,}36*-5)=17{,}37$$

$$\varepsilon_t=\left|\hat{y}_t-y_t\right|=17{,}37-15=2{,}37$$

4-التنبؤ بمواليد السنتين المواليتين

$$\begin{cases}\hat{y}_t=29.17+2{,}36t\\ t=(\vec{n}-M)*2=(7-3{,}5)*2=7\end{cases}\Rightarrow \hat{y}_{2020}=29{,}17+(2{,}36*7)=45{,}69$$

$$\begin{cases}\hat{y}_t=29.17+2{,}36t\\ t=(\vec{n}-M)*2=(8-3{,}5)*2=9\end{cases}\Rightarrow \hat{y}_{2021}=29{,}17+(2{,}36*9)=50{,}41$$

تمرين 02

تمثل البيانات التالية عدد حالات الزواج بالألف التي تمت في إحدى المدن خلال الفترة (2015-2021):

السنة	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
ع,ح,الزواج	45	55	60	63	65	70	72

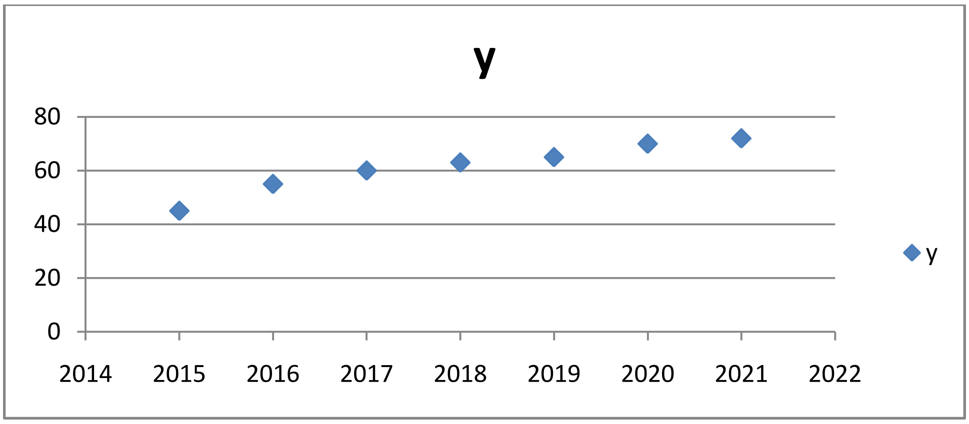
1 - مثل هذه البيانات، واختر النموذج المناسب للاتجاه العام؛

2 - قدر معادلة الاتجاه العام المناسب؛

3 - قدر عدد حالات الزواج المتوقعة للسنوات الثلاث القادمة.

الحل

1-التمثيل البياني



من التمثيل البياني نلاحظ أن النقط منتشرة حول خط مستقيم، ومنه نستنتج أن دالة الاتجاه العام من الشكل الخطي البسيط

2-تقدير معادلة الاتجاه العا

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t$$

أولا: تحديد قيمة t

$$M = \frac{n+1}{2} = \frac{7+1}{2} = 4$$

$$t = (\vec{n} - M) * 2 = (1-4) = -3$$

السنة	y	t	t*y	t^2
2015	45	-3	-135	9
2016	55	-2	-110	4

2017	60	-1	-60	1
2018	63	0	0	0
2019	65	1	65	1
2020	70	2	140	4
2021	72	3	216	9
	430	0	116	28

ثانيا: تحديد قيم المعاملات

$$\beta_1 = \frac{n\sum_{t=1}^{n} y_t t - \sum y_t \sum t}{n\sum t^2 - \left(\sum t\right)^2} = \frac{(7*116)-(430*0)}{(7*28)-0} = \frac{812}{196} = 4{,}14$$

$$\beta_0 = \bar{y} - \beta_1 \bar{t} = \frac{\sum y_t}{n} - \beta_1 \frac{\sum t}{n} = \frac{430}{7} - 4{,}14 * \frac{0}{6} = 61{,}428$$

ثالثا: تحديد معادلة الاتجاه العام

$$\hat{y}_t = 61{,}43 + 4{,}14t$$

3-تقدير حالات الزواج المتوقعة للسنوات الثلاث القادمة

$$\begin{cases} \hat{y}_t = 61{,}43 + 4{,}14t \\ t = (\vec{n} - M) = (8-4) = 4 \end{cases} \Rightarrow \hat{y}_{2022} = 61{,}43 + 4{,}14 * 4 = 77{,}99$$

$$\begin{cases} \hat{y}_t = 61{,}43 + 4{,}14t \\ t = (\vec{n} - M) = (9-4) = 5 \end{cases} \Rightarrow \hat{y}_{2023} = 61{,}43 + 4{,}14 * 5 = 82{,}13$$

$$\begin{cases} \hat{y}_t = 61{,}43 + 4{,}14t \\ t = (\vec{n} - M) = (10-4) = 6 \end{cases} \Rightarrow \hat{y}_{2024} = 61{,}43 + 4{,}14 * 6 = 86{,}27$$

تمرين 03

تمثل البيانات التالية عدد السيارات بالمليون التي تم استيرادها من إحدى الدول خلال الخمس سنوات الأخيرة:

السنة	2017	2018	2019	2020	2021
ع.السيارات	60	58	55	40	50

1 - قدر معادلة الاتجاه العام الخطية لعدد السيارات المستوردة؛
2 - أحسب القيم الاتجاهية المناظرة للقيم الفعلية؛
3 - تنبأ بعدد السيارات التي سوف يتم استيرادها لسنة 2022

الحل

1-تقدير معادلة الاتجاه العام الخطية لعدد السايارات المستوردة

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t$$

أولا: تحديد قيمة t

$$M = \frac{n+1}{2} = \frac{5+1}{2} = 3$$

$$t = (\vec{n} - M)*2 = (1-3) = -2$$

السنة	y	t	t*y	t^2	$\hat{y}_t$
2017	60	-2	-120	4	60,2
2018	58	-1	-58	1	56,4
2019	55	0	0	0	52,6
2020	40	1	40	1	48,8
2021	50	2	100	4	45
	263	0	-38	10	

ثانيا: تحديد قيم المعاملات

$$\beta_1 = \frac{n\sum_{t=1}^{n} y_t t - \sum y_t \sum t}{n\sum t^2 - \left(\sum t\right)^2} = \frac{(5*-38)-(263*0)}{(5*10)-0} = \frac{-190}{50} = -3{,}8$$

$$\beta_0 = \bar{y} - \beta_1 \bar{t} = \frac{\sum y_t}{n} - \beta_1 \frac{\sum t}{n} = \frac{263}{5} - 3{,}8*\frac{0}{5} = 52{,}6$$

ثالثا: تحديد معادلة الاتجاه العام

$$\hat{y}_t = 52{,}6 - 3{,}8t$$

2-حساب القيم الاتجاهية

نقوم بتعويض قيم في معادلة الاتجاه العام المتحصل عليها ونضع القيم في الجدول (السابق):

$$\hat{y}_t = 52{,}6 - 3{,}8*-2 = 60{,}2$$

3-التنبؤ بعدد السيارات التي سيتم استيرادها سنة 2022

$$\begin{cases} \hat{y}_t = 52{,}6 - 3{,}8t \\ t = (\vec{n} - M) = (6-3) = 3 \end{cases} \Rightarrow \hat{y}_{2022} = 52{,}6 - 3{,}8*3 = 41{,}2$$

تمرين 04

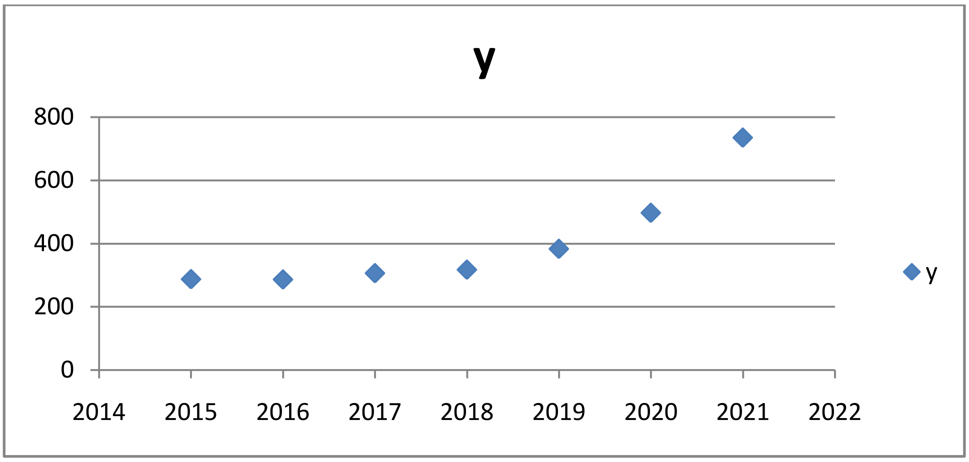
لدينا المعطيات التالية الممثلة للناتج الوطني الإجمالي بالأرقام الاسمية خلال الفترة (2015-2021):

السنة	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
الناتج الأجمالي	287	286	306	317	383	497	735

- التنبؤ بهذا المتغير للسنوات الثلاث اللاحقة باستعمال النموذج المناسب.

الحل

لتحديد النموذج المناسب نقوم بتمثيل بيانات السلسلة بيانيا:



من خلال التمثيل البياني نلاحظ أن النقط منتشرة حول منحنى، ومنه نستنتج أن النموذج المناسب هو النموذج الأسي:

$$y_t = \alpha . e^{r.t+\varepsilon_T}$$

$$\ln(y_t) = \ln(\alpha) + r.t + \varepsilon_T$$

$$z_t = \beta + r.t + \varepsilon_T$$

أولا: تحديد قيمة t

$$M = \frac{n+1}{2} = \frac{7+1}{2} = 4$$

$$t = (\vec{n} - M) * 2 = (1-4) = -3$$

السنة	y	t	z	t*z	t²
2015	287	-3	5,66	-16,98	9
2016	286	-2	5,66	-11,31	4
2017	306	-1	5,72	-5,72	1
2018	317	0	5,76	0,00	0
2019	383	1	5,95	5,95	1
2020	497	2	6,21	12,42	4
2021	735	3	6,60	19,80	9
			41,55	4,15	28

ثانيا: تحديد قيم المعاملات

$$r=\frac{n\sum z_t t-\sum z_t\sum t}{n\sum t^2-\left(\sum t\right)^2}=\frac{(7*4{,}15)-(41{,}55*0)}{(7*28)-0}=\frac{29{,}05}{196}=0{,}148$$

$$\beta=\bar{z}-r\bar{t}=\frac{\sum z_t}{n}-r\frac{\sum t}{n}=\frac{41{,}55}{7}-0{,}15*\frac{0}{7}=5{,}9357\approx 5{,}94$$

ثالثا: تحديد معادلة الاتجاه العام

$$\hat{z}_t=5{,}94+0{,}15t$$

تمرين 05

فيما يلي بيانات عن قيمة المبيعات بالمليون دينار لأحدى السلع التي ينتجها أحد المصانع:

السنة	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
ق.المبيعات	12	8	6	5	6	8	7	10

1 - قدر معادلة الاتجاه العام بافتراض أنها من الدرجة الثانية؛
2 - أوجد القيم الإتجاهية والأخطاء المقدرة؛
3 - أوجد قيمة المبيعات للسنوات الثلاث اللاحقة.

الحل

1-تقدير معادلة الاتجاه العام بافتراض أنها من الدرجة الثانية

السنة	Y	t	t²	t3	t4	t*y	t²*y	$\hat{y}_t$	E
2014	12	-7	49	-343	2401	-84	588	12,62	0,62
2015	8	-5	25	-125	625	-40	200	9,12	1,12
2016	6	-3	9	-27	81	-18	54	6,74	0,74
2017	5	-1	1	-1	1	-5	5	5,47	0,47
2018	6	1	1	1	1	6	6	5,33	0,67

2019	8	3	9	27	81	24	72	6,30	1,70
2020	7	5	25	125	625	35	175	8,40	1,40
2021	10	7	49	343	2401	70	490	11,62	1,62
	62	0	168	0	6216	-12	1590		

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \varepsilon_t$$

أولا: تحديد قيمة t

$$M = \frac{n+1}{2} = \frac{8+1}{2} = 4{,}5$$

$$t = (\vec{n} - M) * 2 = (1 - 4{,}5) * 2 = -7$$

ثانيا: تحديد قيم المعاملات

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum t & \sum t^2 \\ \sum t & \sum t^2 & \sum t^3 \\ \sum t^2 & \sum t^3 & \sum t^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum y_t \\ \sum t y_t \\ \sum t^2 y_t \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 168 \\ 0 & 168 & 0 \\ 168 & 0 & 6216 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 62 \\ -12 \\ 1590 \end{bmatrix}$$

$$|D| = \begin{vmatrix} 8 & 0 & 168 \\ 0 & 168 & 0 \\ 168 & 0 & 6216 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 168 \\ 168 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|D| = [(8.168.6216) + (0.0.168) + (168.0.0)] - [(0.0.6216) + (10.0.0) + (168.168.168)]$$

$$|D| = 8354304 - 4741632 = 3612672$$

$$(X'X)' = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 168 \\ 0 & 168 & 0 \\ 168 & 0 & 6216 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^m = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 168 & 0 \\ 0 & 6216 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 168 & 6216 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 168 \\ 168 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 168 \\ 0 & 6216 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 8 & 168 \\ 168 & 6216 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 168 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 168 \\ 168 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 8 & 168 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 168 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^m = \begin{bmatrix} 1044288 & 0 & -28224 \\ 0 & 21504 & 0 \\ -28224 & 0 & 1344 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 1044288 & 0 & -28224 \\ 0 & 21504 & 0 \\ -28224 & 0 & 1344 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3612672}$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}29 & 0 & -0{,}008 \\ 0 & 0{,}006 & 0 \\ -0{,}008 & 0 & 0{,}0004 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}(X'Y)$$

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}29 & 0 & -0{,}008 \\ 0 & 0{,}006 & 0 \\ -0{,}008 & 0 & 0{,}0004 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 62 \\ -12 \\ 1590 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0{,}29 * 62) + (0 * -12) + (-0{,}008 * 1590) \\ (0 * 62) + (0{,}006 * -12) + (0 * 1590) \\ (-0{,}008 * 62) + (0 * -12) + (0{,}0004 * 1590) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}26 \\ -0{,}072 \\ 0{,}14 \end{bmatrix}$$

ثالثا: تحديد معادلة الاتجاه العام

$$\hat{y}_t = 5{,}26 - 0{,}072t + 0{,}14t^2$$

2-حساب القيم الإتجاهية والأخطاء المقدرة

$$\hat{y}_t = 5{,}26 - 0{,}072t + 0{,}14t^2$$

$$\hat{y}_t = 5{,}26 - 0{,}072(-7) + 0{,}14(-7)^2 = 12{,}62$$

$$e = |y - \hat{y}_t| = |12 - 12{,}62| = 0{,}62$$

3-حساب قيمة المبيعات للسنوات الثلاث اللاحقة

$$2022 = (\bar{n} - M) * 2 = (9 - 4{,}5) * 2 = 9$$

$$\hat{y}_{2022} = 5,26 - 0,072 * 9 + 0,14 * 9^2 = 15,95$$

$$2023 = (\bar{n} - M) * 2 = (10 - 4,5) * 2 = 11$$

$$\hat{y}_{2023} = 5,26 - 0,072 * 11 + 0,14 * 11^2 = 21,41$$

$$2024 = (\bar{n} - M) * 2 = (11 - 4,5) * 2 = 13$$

$$\hat{y}_{2024} = 5,26 - 0,072 * 13 + 0,14 * 13^2 = 27,98$$

تمرين 06

في إحدى العمليات الكيميائية رصدت درجة الحرارة الناتجة كل 5 دقائق، وتم الحصول على المعلومات التالية:

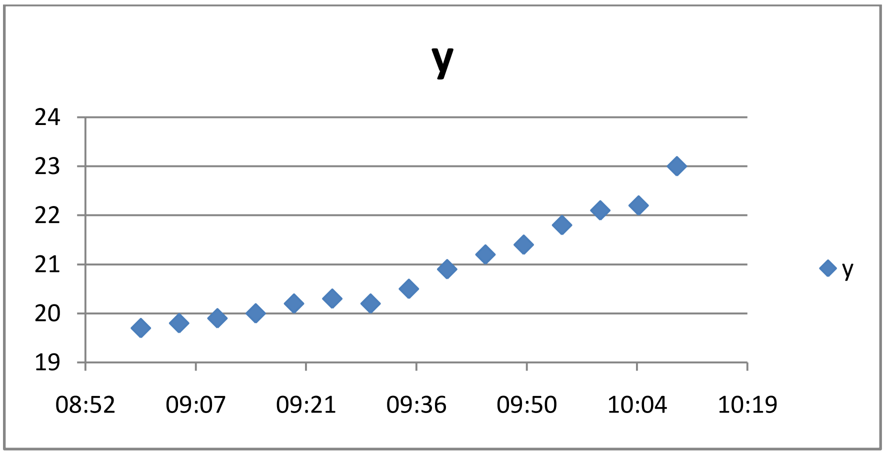
الساعة	09:00	09:05	09:10	09:15	09:20	09:25	09:30	09:35
د.الحرارة	19,7	19,8	19,9	20	20,2	20,3	20,2	20,5
الساعة	09:40	09:45	09:50	09:55	10:00	10:05	10:10	
د.الحرارة	20,9	21,2	21,4	21,8	22,1	22,2	23,8	

1 ـ قدر معادلة الاتجاه العام المناسبة لهذه السلسلة؛
2 ـ أحسب القيم الاتجاهية وقيمة الأخطاء؛
3 ـ أحسب القيمة المتوقعة اللاحقة.

الحل

1-تقدير معادلة الاتجاه العام المناسبة لهذه السلسلة

لتحديد معادلة الاتجاه العام المناسبة نقوم بتمثيل السلسلة بيانيا:



من الشكل نستنتج أن المعادلة المناسبة هي المعادلة الخطية البسيطة

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t$$

أولا: تحديد قيمة t

$$M = \frac{n+1}{2} = \frac{15+1}{2} = 8$$

$$t = (\vec{n} - M) = (1-8) = -7$$

الساعة	y	t	t*y	t^2	$\hat{y}_t$	e
09:00	19,7	-7	-137,9	49	19,34	0,36
09:05	19,8	-6	-118,8	36	19,56	0,24
09:10	19,9	-5	-99,5	25	19,78	0,12
09:15	20	-4	-80	16	20	0
09:20	20,2	-3	-60,6	9	20,22	0,02
09:25	20,3	-2	-40,6	4	20,44	0,14
09:30	20,2	-1	-20,2	1	20,66	0,46
09:35	20,5	0	0	0	20,88	0,38
09:40	20,9	1	20,9	1	21,1	0,2
09:45	21,2	2	42,4	4	21,32	0,12
09:50	21,4	3	64,2	9	21,54	0,14
09:55	21,8	4	87,2	16	21,76	0,04
10:00	22,1	5	110,5	25	21,98	0,12
10:05	22,2	6	133,2	36	22,2	0
10:10	23	7	161	49	22,42	0,58
	313,2	0	61,8	280		

ثانيا: تحديد قيم المعاملات

$$\beta_1 = \frac{n\sum_{t=1}^{n} y_t t - \sum y_t \sum t}{n\sum t^2 - \left(\sum t\right)^2} = \frac{(15*61{,}8) - (313{,}2*0)}{(15*280) - 0} = \frac{927}{4200} = 0{,}22$$

$$\beta_0 = \bar{y} - \beta_1 \bar{t} = \frac{\sum y_t}{n} - \beta_1 \frac{\sum t}{n} = \frac{313{,}2}{15} - 0{,}22 * \frac{0}{15} = 20{,}88$$

ثالثا: تحديد معادلة الاتجاه العام

$$\hat{y}_t = 20{,}88 + 0{,}22t$$

2-حساب القيم الاتجاهية والاخطاء المقدرة

نقوم بتعويض قيم   في معادلة الاتجاه العام المتحصل عليها   ونضع القيم في الجدول (السابق):

$$\hat{y}_t = 20{,}88 + 0{,}22 * -7 = 19{,}34$$

$$e = |\hat{y}_t - y_t| = 19{,}34 - 19{,}7 = 0{,}36$$

3-التنبؤ بدرجة الحرارة المتوقعة لاحقا

$$\begin{cases} \hat{y}_t = 20{,}88 + 0{,}22t \\ t = (\vec{n} - M) = (16-8) = 8 \end{cases} \Rightarrow \hat{y}_{10:15} = 20{,}88 + 0{,}22 * 8 = 22{,}64$$

تمرين 07

فيما يلي بيانات عن قيمة المبيعات (بالمليون) من إحدى السلع التي ينتجها أحد المصانع في السنوات 2020-2013:

السنة	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
المبيعات	22	18	16	12	10	12	16	20	24

المطلوب

1-التمثيل البياني للسلسلة الزمنية، حدد طبيعة الاتجاه العام

2-تقدير معادلة الاتجاه العام بافتراض أنها من الدرجة الثانية

3-تحديد القيم الاتجاهية والأخطاء المقدرة

4-تقدير معادلة الاتجاه العام بافتراض أنها دالة أسية

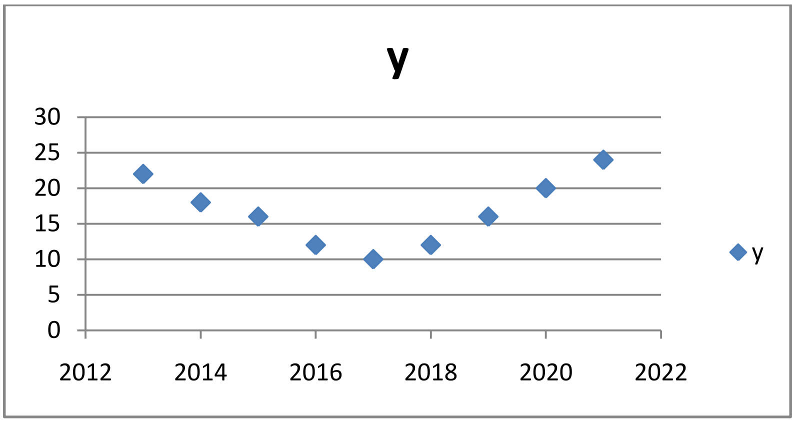
5-التنبؤ بمبيعات 2021 و2022 اعتمادا على:

-نموذج القطع المكافئ

-النموذج الأسي

الحل

1-التمثيل البياني للسلسلة الزمنية، وتحديد طبيعة الاتجاه العام



من خلال التمثيل البياني، نلاحظ أن النقط منتشرة حول قطع مكافئ، ومنه نستنتج أن النموذج المناسب هو المعادلة من الدرجة الثانية

2-تقدير معادلة الاتجاه العام بافتراض أنها من الدرجة الثانية

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \varepsilon_t$$

أولا: تحديد قيمة t

$$M = \frac{n+1}{2} = \frac{9+1}{2} = 5$$

$$t = (\vec{n} - M) = (1-5) = -4$$

السنة	y	t	t²	t3	t4	t*y	t²*y	$\hat{y}_t$	e
2013	22	-4	16	-64	256	-88	352	16,47	5,53
2014	18	-3	9	-27	81	-54	162	13,98	4,02
2015	16	-2	4	-8	16	-32	64	12,27	3,73
2016	12	-1	1	-1	1	-12	12	11,34	0,66
2017	10	0	0	0	0	0	0	11,19	1,19
2018	12	1	1	1	1	12	12	11,82	0,18
2019	16	2	4	8	16	32	64	13,23	2,77
2020	20	3	9	27	81	60	180	15,42	4,58
2021	24	4	16	64	256	96	384	18,39	5,61
	150	0	60	0	708	14	1230		

ثانيا: تحديد قيم المعاملات

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum t & \sum t^2 \\ \sum t & \sum t^2 & \sum t^3 \\ \sum t^2 & \sum t^3 & \sum t^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum y_t \\ \sum t y_t \\ \sum t^2 y_t \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta}=\begin{bmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 0 & 60\\ 0 & 60 & 0\\ 60 & 0 & 708\end{bmatrix}\begin{bmatrix}150\\ 14\\ 1230\end{bmatrix}$$

$$|D|=\begin{vmatrix}9 & 0 & 60\\ 0 & 60 & 0\\ 60 & 0 & 708\end{vmatrix}\begin{vmatrix}9 & 0\\ 0 & 60\\ 60 & 0\end{vmatrix}$$

$$|D|=[(9*60*708)+(0*0*60)+(60*0*0)]-[(0*0*708)+(9*0*0)+(60*60*60)]$$

$$|D|=382320-216000=166320$$

$$(X'X)'=\begin{bmatrix}9 & 0 & 60\\ 0 & 60 & 0\\ 60 & 0 & 708\end{bmatrix}$$

$$(X'X)^m=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}60 & 0\\ 0 & 708\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 0\\ 60 & 708\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 60\\ 60 & 0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0 & 60\\ 0 & 708\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}9 & 60\\ 60 & 708\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}9 & 0\\ 60 & 0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0 & 60\\ 60 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}9 & 60\\ 0 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}9 & 0\\ 0 & 60\end{vmatrix}\end{bmatrix}$$

$$(X'X)^m=\begin{bmatrix}42480 & 0 & -3600\\ 0 & 2772 & 0\\ -3600 & 0 & 540\end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1}=\begin{bmatrix}42480 & 0 & -3600\\ 0 & 2772 & 0\\ -3600 & 0 & 540\end{bmatrix}.\frac{1}{166320}$$

$$(X'X)^{-1}=\begin{bmatrix}0,255 & 0 & -0,022\\ 0 & 0,017 & 0\\ -0,022 & 0 & 0,003\end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta}=(X'X)^{-1}(X'Y)$$

$$\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0,255 & 0 & -0,022\\ 0 & 0,017 & 0\\ -0,022 & 0 & 0,003\end{bmatrix}\begin{bmatrix}150\\ 14\\ 1230\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(0,255*150)+(0*14)+(-0,022*1230)\\ (0*150)+(0,017*14)+(0*1230)\\ (-0,022*150)+(0*14)+(0,003*1230)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11,19\\ 0,24\\ 0,39\end{bmatrix}$$

ثالثا: تحديد معادلة الاتجاه العام

$$\hat{y}_t = 11{,}19 + 0{,}24t + 0{,}39t^2$$

3-تحديد القيم الاتجاهية والأخطاء المقدرة

$$\hat{y}_t = 11{,}19 + 0{,}24t + 0{,}39t^2$$

$$\hat{y}_t = 11{,}19 + (0{,}24 * -4) + (0{,}39 * -4^2) =$$

$$e = \left|y - \hat{y}_t\right| = |16{,}47 - 22| = 5{,}53$$

4-تقدير معادلة الاتجاه العام بافتراض أنها دالة أسية

$$y_t = \alpha . e^{r.t + \varepsilon_T}$$

$$\ln(y_t) = \ln(\alpha) + r.t + \varepsilon_T$$

$$z_t = \beta + r.t + \varepsilon_T$$

أولا: تحديد قيمة t

$$M = \frac{n+1}{2} = \frac{9+1}{2} = 5$$

$$t = (\vec{n} - M) = (1-5) = -4$$

السنة	y	t	z	t*z	t^2
2013	22	-4	3,09	-12,36	16
2014	18	-3	2,89	-8,67	9
2015	16	-2	2,77	-5,55	4
2016	12	-1	2,48	-2,48	1
2017	10	0	2,30	0,00	0
2018	12	1	2,48	2,48	1
2019	16	2	2,77	5,55	4
2020	20	3	3,00	8,99	9
2021	24	4	3,18	12,71	16
	150	0	24,97	0,66	60

ثانيا: تحديد قيم المعاملات

$$r=\frac{n\sum z_t t-\sum z_t\sum t}{n\sum t^2-\left(\sum t\right)^2}=\frac{(9*0{,}66)-(24{,}97*0)}{(9*60)-0}=\frac{5{,}94}{540}=0{,}011$$

$$\beta=\bar{z}-r\bar{t}=\frac{\sum z_t}{n}-r\frac{\sum t}{n}=\frac{24{,}97}{9}-0{,}011*\frac{0}{9}=2{,}77$$

ثالثا: تحديد معادلة الاتجاه العام

$$\hat{z}_t=2{,}77+0{,}011t$$

5-التنبؤ بمبيعات 2021 و2022 اعتمادا على:

-نموذج القطع المكافئ

$$2022=(\vec{n}-M)=(10-5)=5$$

$$\hat{y}_{2022}=11{,}19+0{,}24*5+0{,}39*5^2=22{,}14$$

-النموذج الأسي

$$2022=(\vec{n}-M)=(10-5)=5$$

$$\hat{z}_{2022}=2{,}77+0{,}011*5=2{,}83$$
$$\hat{y}_{2022}=e^{2{,}83}=16{,}84$$

تمرين 08

فيما يلي بيانات عن قيمة الإنتاج (بالمليون) من إحدى السلع التي ينتجها أحد المصانع في السنوات 2013-2020:

السنة	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
المبيعات	22	18	16	12	10	12	16	20	24

المطلوب

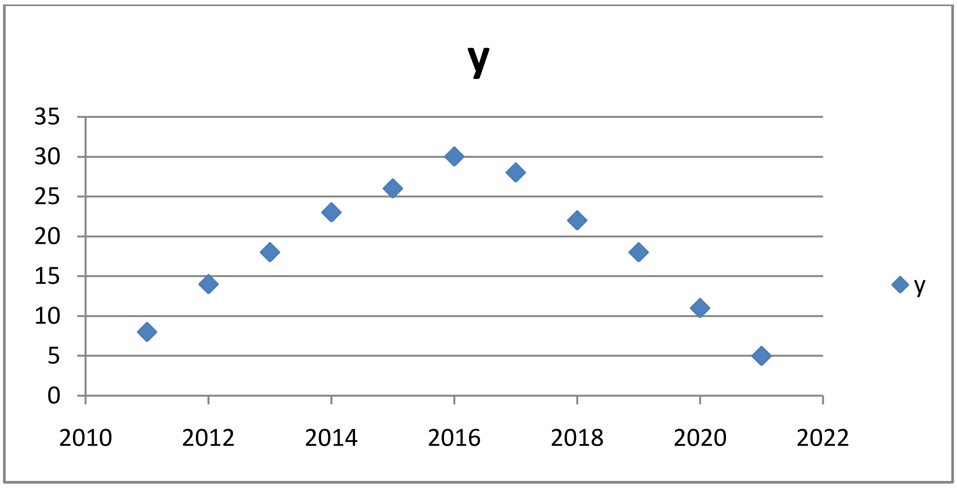
1-التمثيل البياني للسلسلة الزمنية، حدد طبيعة الاتجاه العام؛

2-حساب معلمات النموذج، وصياغة معادلة الاتجاه العام المناسبة؛

3-التنبؤ بالإنتاج للفترة اللاحقة (2022-2025)

الحل

1-التمثيل البياني



من التمثيل المبياني نلاحظ أن النقط منتشرة حول قطع مكافئ، ومنه نستنتج أن معادلة الاتجاه العام يمكن تمثيلها بمعادلة من الدرجة الثانية.

2-حساب معلمات النموذج، وصياغة معادلة الاتجاه العام المناسبة

تكتب معادلة النموذج من الشكل:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \varepsilon_t$$

أولا: تحديد قيمة t

$$M = \frac{n+1}{2} = \frac{11+1}{2} = 6$$

$$t = (\vec{n} - M) = (1-6) = -5$$

السنة	y	t	t^2	t^3	t^4	y*t	y*t^2
2011	8	-5	25	-125	625	-40	200
2012	14	-4	16	-64	256	-56	224
2013	18	-3	9	-27	81	-54	162
2014	23	-2	4	-8	16	-46	92
2015	26	-1	1	-1	1	-26	26
2016	30	0	0	0	0	0	0
2017	28	1	1	1	1	28	28
2018	22	2	4	8	16	44	88
2019	18	3	9	27	81	54	162
2020	11	4	16	64	256	44	176
2021	5	5	25	125	625	25	125

	203	0	110	0	1958	-27	1283

ثانيا: تحديد قيم المعاملات

$$\hat{\beta}=\begin{bmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n & \sum t & \sum t^2\\ \sum t & \sum t^2 & \sum t^3\\ \sum t^2 & \sum t^3 & \sum t^4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sum y_t\\ \sum ty_t\\ \sum t^2 y_t\end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta}=\begin{bmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 0 & 168\\ 0 & 168 & 0\\ 168 & 0 & 6216\end{bmatrix}\begin{bmatrix}67\\ 17\\ 1763\end{bmatrix}$$

$$|D|=\begin{vmatrix}8 & 0 & 168\\ 0 & 168 & 0\\ 168 & 0 & 6216\end{vmatrix}\begin{vmatrix}10 & 0\\ 0 & 168\\ 168 & 0\end{vmatrix}$$

$$|D|=[(8.168.6216)+(0.0.168)+(168.0.0)]-[(0.0.6216)+(10.0.0)+(168.168.168)]$$

$$|D|=8354304-4741632=3612672$$

$$(X'X)'=\begin{bmatrix}8 & 0 & 168\\ 0 & 168 & 0\\ 168 & 0 & 6216\end{bmatrix}$$

$$(X'X)^m=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}168 & 0\\ 0 & 6216\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 0\\ 168 & 6216\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 168\\ 168 & 0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0 & 168\\ 0 & 6216\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}8 & 168\\ 168 & 6216\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}8 & 0\\ 168 & 0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0 & 168\\ 168 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}8 & 168\\ 0 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}8 & 0\\ 0 & 168\end{vmatrix}\end{bmatrix}$$

$$(X'X)^m=\begin{bmatrix}1044288 & 0 & -28224\\ 0 & 21504 & 0\\ -28224 & 0 & 1344\end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1}=\begin{bmatrix}1044288 & 0 & -28224\\ 0 & 21504 & 0\\ -28224 & 0 & 1344\end{bmatrix}.\frac{1}{3612672}$$

$$(X'X)^{-1}=\begin{bmatrix}0,29 & 0 & -0,008\\ 0 & 0,006 & 0\\ -0,008 & 0 & 0,0004\end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta}=(X'X)^{-1}(X'Y)$$

$$\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0,29 & 0 & -0,008\\ 0 & 0,006 & 0\\ -0,008 & 0 & 0,0004\end{bmatrix}\begin{bmatrix}67\\ 17\\ 1763\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(0,29.67)+(0.17)+(-0,008.1763)\\ (0.67)+(0,006.17)+(0.1763)\\ (-0,008.67)+(0.17)+(0,0004.1763)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5,32\\ 0,102\\ 0,17\end{bmatrix}$$

ثالثا: تحديد معادلة الاتجاه العام

$$\hat{y}_t=3,245+0,102t+0,370t^2$$

1 - التنبؤ بالإنتاج للسنوات 2018-2021

$$2018=(\vec{n}-M)*2=(9-4,5)*2=9$$

$$\hat{y}_{2018}=3,245+(0,102.9)+(0,370.9^2)=34,133$$

$$2019=(\vec{n}-M)*2=(10-4,5)*2=11$$

$$\hat{y}_{2019}=3,245+(0,102.11)+(0,370.11^2)=49,14$$

$$2020=(\vec{n}-M)*2=(11-4,5)*2=13$$

$$\hat{y}_{2020}=3,245+(0,102.13)+(0,370.13^2)=67,10$$

$$2021=(\vec{n}-M)*2=(12-4,5)*2=15$$

$$\hat{y}_{2021}=3,245+(0,102.15)+(0,370.15^2)=88,025$$

4-نماذج تمهيد السلسلة الزمنية

التمهيد يعني تهذيب السلسلة من خلال إزالة الذبذبات الحادة والعشوائية عنها، لتسهيل عملية التحليل، ومن أهم طرق التمهيد، طريقة المتوسطات المتحركة البسيطة، وطريقة التمهيد الأسي البسيطة

4-1-طريقة المتوسطات المتحركة البسيطة

طريقة المتوسطات المتحركة تستخدم عندما يغلب الطابع العشوائي على بيانات السلسلة، وتكون البيانات تتأرجح بشكل غير نمطي حول متوسط ثابت يمثل مستوى السلسلة الزمنية على طول فترة الدراسة، وتستخدم k مشاهدة من قيم السلسلة للتنبؤ بالقيمة التالية، وذلك بحساب متوسط هذه القيم:

$$\hat{y}_t = \frac{1}{k}\left(y_{t-1} + y_{t-2} + \ldots + y_{t-k}\right)$$

ولحساب المتوسط المتحرك البسيط اللاحق، نستخدم نفس القيم التي استخدمت في حساب المتوسط السابق له مباشرة، بإحلال القيمة الأحدث مكان القيمة الأقدم، ومعنى التحرك أن المتوسط يتم تحديثه دائما عن طريق حذف مشاهدة أقدم وتعويضها بالمشاهدة التالية:

$$\hat{y}_{t+1} = \frac{1}{k}\left(y_t + y_{t-1} + \ldots + y_{t-k-1}\right)$$

اختيار طول الدورة k يكون حسب المعطيات (4 في المعطيات الفصلية، 5 في المعطيات الأسبوعية، 2 في المعطيات السداسية، 4 في المعطيات الثلاثية، ويكون اختياريا في الحالات الأخرى).

ويتم الاعتماد على المتوسطات المتحركة الممركزة، حيث يتم حسابها بطريقتين مختلفين باختلاف طول الفترة (فردي/ زوجي)

أولا: حالة طول الفترة k فردي

يتم حساب المتوسطات المتحركة إدا كان k فرديا كما يلي: (شعراوي، 2005، صفحة 64)

- حساب متوسط أول k مشاهدات في البيانات وهي $y_1, y_2, \ldots, y_k$ ؛
- إحلال القيمة التالية y_{k+1} مكان القيمة الأولى في البيانات التي حسبت لها المتوسك في الخطوة السابقة، ثم حساب المتوسط الحسابي لمجموعة اليانات الجديدة $y_2, y_3, \ldots, y_{k+1}$ ، وهكذا يمكن حساب باقي المتوسطات المتحركة؛
- يوضع كل متوسط متحرك $\hat{y}_{\frac{k+1}{2}}$ أمام القيمة الفعلية المقابلة له $y_{\frac{k+1}{2}}$ ،وهكذا، وتمثل هذه المتوسطات تقديرات الاتجاه العام المناظرة للقيم الفعلية.

ثانيا: حالة طول الفترة k زوجي

إذا كان طول الدورة زوجيا، فإن المتوسط المتحرك لا يمكن وضعه أمام إحدى قيم المشاهدات، وإنما يوضع بين قيمتين معينتين، ومن ثم لابد من مركزة المتوسطات المتحركة، حتى يكون بالإمكان وضعها مقابل القيم الفعلية، ومنه يتم حساب المتوسط المتحرك الممركز في حالة طول الفترة الزوجي كما يلي: (شعراوي، 2005، صفحة 69)

- حساب المتوسط الحسابي للمشاهدات حسب طول الدورة لنحصل على $\hat{y}_{t1}$؛
- حساب المتوسط الحسابي لنفس المشاهدات بعد إحلال القيمة التالية مكان القيمة الأولى لنحصل على $\hat{y}_{t2}$؛
- حساب المتوسط الحسابي للمتوسطين $\hat{y}_{t1}$ و $\hat{y}_{t2}$، لنحصل على المتوسط المقابل للقيمة الفعلية y_t.

مثال (11)

الجدول التالي يوضح قيمة المبيعات السنوية من إحدى السلع بمليون دينار جزائري من سنة 2019-2011

السنة	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
المبيعات	9	11	10	12	11	9	13	11	9

المطلوب

1 - التنبؤ بمبيعات سنة 2020 اعتمادا على طريقة المتوسطات المتحركة البسيطة باستخدام $k=2$، و $k=3$

<table>
<tr><th>السنة</th><th>y_t</th><th>$\hat{y}_t$ $k=2$</th><th>$\hat{y}_{tc}$</th><th>ε^2 $k=2$</th><th>$\hat{y}_{tc}$ $k=3$</th><th>ε^2 $k=3$</th></tr>
<tr><td rowspan="2">2011</td><td rowspan="2">9</td><td></td><td rowspan="2">-</td><td rowspan="2">-</td><td rowspan="2">-</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">10</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2012</td><td rowspan="2">11</td><td rowspan="2">10,25</td><td rowspan="2">0,5625</td><td rowspan="2">10</td><td rowspan="2">1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">10,5</td></tr>
<tr><td>2013</td><td>10</td><td>10,75</td><td>0,5625</td><td>11</td><td>1</td></tr>
</table>

				11		
1	11	0,5625	11,25		12	2014
				11,5		
0,1089	10,67	0,0625	10,75		11	2015
				10		
4	11	2,25	10,5		9	2016
				11		
4	11	1,5	11,5		13	2017
				12		
0	11	0	11		11	2018
				10		
-	-	-	-		9	2019
$\sum \varepsilon^2 = 11{,}1089$		$\sum \varepsilon^2 = 5{,}5$				

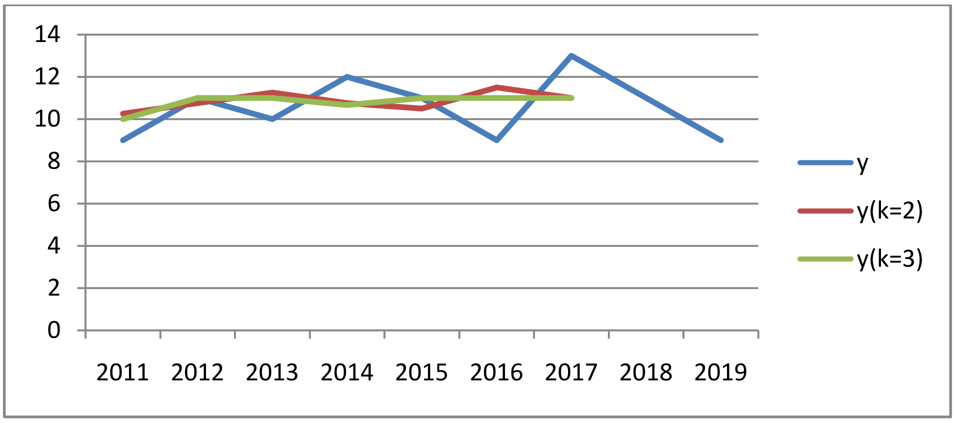
2 - أي التنبؤات أفضل ولماذا؟

عند $k = 2$: $\sum \varepsilon^2 = 5{,}5$

وعند $k = 3$: $\sum \varepsilon^2 = 11{,}1089$

وبالتالي التنبؤات اعتمادا على المتوسط الحسابي لمشاهدتين أفضل لأنها تدني مجموع مربعات الأخطاء العشوائية.

3 - التمثيل البياني للسلسلة الزمنية



2-طريقة المتوسطات المتحركة المرجحة

يختلف المتوسط المتحرك المرجح عن المتوسط المتحرك البسيط، كونه يعطي وزن ترجيحي أكبر لأحدث مشاهدة، وأوزان ترجيحية متناقصة للمشاهدات الأقدم، أي أن القيمة المقدرة تتأثر بسلوك أحدث مشاهدة، عكس المتوسط المتحرك البسيط الذي يعتبر كل المشاهدات بنفس الوزن والأهمية، ويحسب المتوسط المتحرك المرجح بالعلاقة التالية:

$$\hat{y}_t = \frac{\sum_{n=1}^{k} w_n y_{t-n}}{\sum_{n=1}^{k} w_n}$$

$\sum_{n=1}^{k} w_n$: مجموع الأوزان الترجيحية ومجموعها يعادل 100% أي 1صحيح، أي أن العلاقة تعادل:

$$\hat{y}_t = \sum_{n=1}^{k} w_n y_{t-n}$$

مثال (12)

البيانات التالية تمثل كمية الطلب بالآلاف وحدة على أحد المنتجات لشركة معينة خلال أشهر السنة 2020:

الشهر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
الطلب	25	30	32	40	48	58	65	75	70	45	40	35

المطلوب

- القيام بعملية التنبؤ بالطلب للفترة اللاحقة باستخدام متوسط متحرك طوله 4 أشهر بإعطاء أوزان ترجيحية بـ 0,4 قبل شهر، 0,3 قبل شهرين، 0,2 قبل ثلاثة أشهر، 0,1 قبل أربعة أشهر
- القيام بعملية التنبؤ بالطلب للفترة اللاحقة باستخدام متوسط متحرك طوله 3 أشهر بإعطاء أوزان ترجيحية بـ 0,5 قبل شهر، 0,33 قبل شهرين، 0,17 قبل ثلاثة أشهر، 0,1 قبل أربعة أشهر

$$\hat{y}_t = \frac{(0,4*40)+(0,3*32)+(0,2*30)+(0,1*25)}{1} = 16+9.6+6+2.5 = 34.1$$

الشهر	y_t	$\hat{y}_t \; k=4$	$\hat{y}_{tc} \; k=4$	$\varepsilon_t^{\,2}$	$\hat{y}_{tc} \; k=3$	$\varepsilon_t^{\,2}$
1	25		-	-	-	-
2	30		-	-	30,15	0,0225
3	32	34,1	37,35	28,6225	35,66	13,395
4	40	40, 6	44,7	20,09	42,64	22,09
5	48	48,8	52,9	24,01	51,64	13,2496
6	58	57	61,45	11,9025	59,8	3,24
7	65	65,9	67,6	6,76	68,81	6,76
		69,3				

8	75		67,6	54,76	70,8	17,64
		60,5				
9	70		55,75	203,0625	58,35	135,7225
		51				
10	45		46,5	2,25	46,75	3,0625
		42				
11	40		-	-	38,35	2,7225
12	35		-	-	-	-
				$\varepsilon_t^2 = 351,4575$		$\varepsilon_t^2 = 217,9046$

- أفضل التنبؤات هي التنبؤات اعتمادا على طول الدورة 3 أشهر لأنها تعطي أقل قيمة لمربعات البواقي

تتميز طريقة المتوسطات المتحركة بما يلي: (شعراوي، 2005، صفحة 71)

- البساطة وسهولة إجراء العمليات الحسابية؛
- لا تفترض شكل رياضي معين لمنحنى الاتجاه العام؛
- لا تتطلب إعادة الحسابات إذا توفرت مشاهدات جديدة.

ومن جهة أخرى لطريقة المتوسكات المتحركة عيوب، أهمها: (شعراوي، 2005، صفحة 72)

- لا يمكن معرفة القيم الاتجاهية لكل القيم المشاهدة؛
- لا يمكن معرفة الشكل الرياضي لمنحنى الاتجاه العام المقدر بالضبط، ومن ثم عدم إمكانية استخدامه بشكل مباشر في التنبؤ بالقيم الاتجاهية؛
- تتأثر المتوسطات الحسابية بالقيم الشاذة والمتطرفة، مما يجعل منحنى الاتجاه العام مجذوبا لهذه القيم؛
- اختيار طول الدورة يختلف من باحث لآخر، لأنه يعتمد على الخبرة العلمية والحكم الشخصي في حالات كثيرة، ولا يعتمد على طريقة رياضية إحصائية موحدة.

3-طريقة التمهيد الأسي البسيطة

تستعمل هذه الطريقة إذا كانت بيانات السلسلة الزمنية تتأرجح حول متوسط حسابي يتغير ببطء على فترة الدراسة، وفي هذه الحالة يتم إعطاء وزن أكبر لأحدث مشاهدة عند التنبؤ وأوزان متناقصة مع زيادة الفاصل الزمني بين زمن المشاهدة والزمن المتنبأ عنده، وتعتمد فكرة التنبؤ الأسي على إعطاء وزن ترجيح كبير لأحدث مشاهدة w عند الزمن المتنبأ عنده، وإعطاء أوزان ترجيحية تتناقص بشكل أسي مع زيادة الفاصل الزمني بين زمن التنبؤ وزمن المشاهدات السابقة، ويكتب النموذج وفق العلاقة التالية:

$$\tilde{y}_t = wy_t + w(1-w)y_{t-1} + w(1-w)^2 y_{t-2} + \ldots + w(1-w)^n y_{t-n}$$

لتبسيط هذه العلاقة يتم:

- تأخير المعادلة بفترة زمنية واحدة وضربها في المقدار $(w-1)$:

$$\begin{aligned}
&\tilde{y}_{t-1} = wy_{t-1} + w(1-w)y_{t-2} + \ldots + w(1-w)^{n-1} y_{t-n} \\
&\left(\tilde{y}_{t-1} = wy_{t-1} + w(1-w)y_{t-2} + \ldots + w(1-w)^{n-1} y_{t-n}\right) * (1-w) \\
&(1-w)\tilde{y}_{t-1} = w(1-w)y_{t-1} + w(1-w)^2 y_{t-2} + \ldots + w(1-w)^n y_{t-n}
\end{aligned}$$

- طرح المعادلة الأخيرة 2 من المعادلة الأصلية 1:

$$\begin{aligned}
&\left[\tilde{y}_t = wy_t + w(1-w)y_{t-1} + w(1-w)^2 y_{t-2} + \ldots + w(1-w)^n y_{t-n}\right] - \\
&\left[(1-w)\tilde{y}_{t-1} = w(1-w)y_{t-1} + w(1-w)^2 y_{t-2} + \ldots + w(1-w)^{n+1} y_{t-n}\right] \Rightarrow \\
&\tilde{y}_t - (1-w)\tilde{y}_{t-1} = wy_t
\end{aligned}$$

- إعادة الترتيب للحصول على العلاقة النهاية:

$$\tilde{y}_t = wy_t + (1-w)\tilde{y}_{t-1}$$

تطبيق هذه الطريقة تحتاج إلى قيمة الانطلاق لبدء عملية التمهيد، ومن أهم طرق تحديدها:

- استخدام الوسط الحسابي لقيم السلسلة كتقدير لقيمة الانطلاق؛
- استخدام المشاهدة الأولى كقيمة للانطلاق؛
- استخدام الوسط الحسابي لبعض المشاهدات الأولى لتقدير قيمة الانطلاق.

مثال (13)

البيانات التالية تمثل عدد الأجهزة المباعة بالآلاف التي سجلت شهريا في دفاتر إحدى المؤسسات

الشهر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ع.أ.م	14	16	18	14	15	14	15	13	14	12	12	11

المطلوب

1 - تقدير القيم الابتدائية باستخدام الوسط الحسابي لقيم السلسلة الزمنية كقيمة للانطلاق علما أن $w = 0,9$ / $w = 0,7$

الشهر	y_t	$\tilde{y}_t \quad w=0,7$	$\tilde{y}_t \quad w=0,9$	$\varepsilon^2 \quad w=0,7$	$\varepsilon^2 \quad w=0,9$
1	14	$\hat{y}_1 = 14$	$\hat{y}_1 = 14$	0	0
2	16	15,4	15,80	0,36	0,04
3	18	17,22	17,78	1,44	0,05
4	14	14,97	14,38	0,18	0,14
5	15	14,99	14,94	0,44	0,00
6	14	14,30	14,09	0,08	0,01
7	15	14,79	14,91	0,00	0,01
8	13	13,54	13,19	0,15	0,04
9	14	13,86	13,92	0,06	0,01
10	12	12,5	12,19	0,21	0,04
11	12	12,17	12,02	0,31	0,00
12	11	11,35	11,10	0,22	0,01
	$\bar{y} = 14$			$\sum \varepsilon^2 = 3,45$	$\sum \varepsilon^2 = 0,34$

2 - التنبؤ بقيم الفترة اللاحقة باستخدام معامل التناقص $w = 0,7$ **و** $w = 0,9$

$$\tilde{y}_t = wy_t + (1-w)\hat{y}_{t-1}$$
$$\tilde{y}_1 = \bar{y} = 14$$
$$\tilde{y}_2 = wy_2 + (1-w)\tilde{y}_1$$
$$\tilde{y}_2 = (0{,}7*16) + ((1-0{,}7)*14) = 15{,}40$$

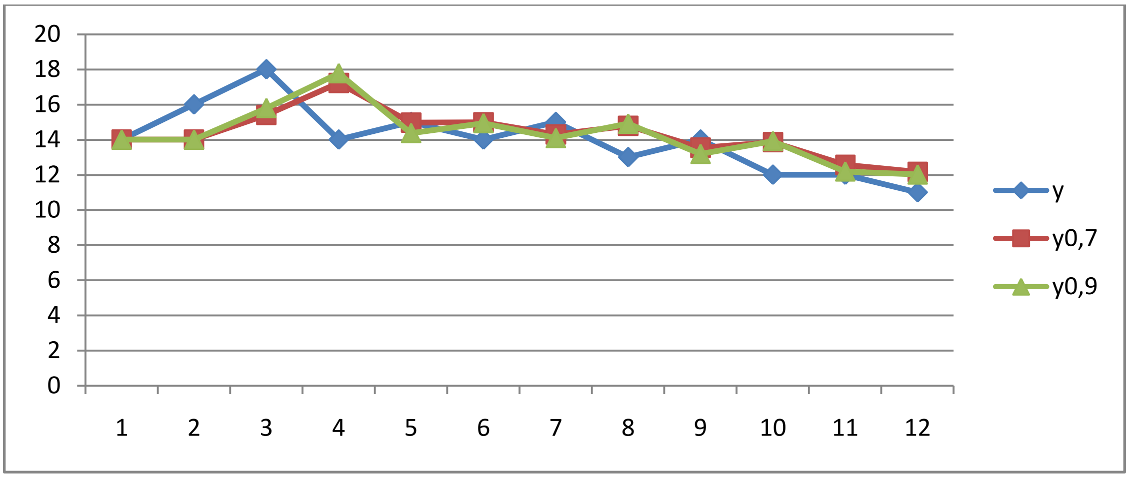
3 - أي التنبؤات أفضل ولماذا؟

عند $w = 0{,}7$: $\sum \varepsilon^2 = 3{,}45$

و عند $w = 0{,}9$: $\sum \varepsilon^2 = 0{,}34$

وبالتالي التنبؤات اعتمادا على معامل التناقص $w = 0{,}9$ أفضل لأنها تدني مجموع الأخطاء العشوائية.

4 - التمثيل الباني للسلسلة الزمنية الأصلية والممهدة



3-طريقة التمهيد الأسي المزدوج

يتم استعمال التمهيد الأسي المزدوج إذا كانت السلسلة الزمنية تحتوي على مركبة الاتجاه العام بالإضافة إلى المركبة العشوائية، ويتم التعبير عنها رياضيا بالعلاقة الانحدارية التالية:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + e_t$$
$$y_t = T + R$$

$\beta_0 + \beta_1 t$: مركبة الاتجاه العام؛

e_t : المركبة العشوائية

ويتم تمهيد السلسلة الزمنية على مرحلتين متتاليتين:

المرحلة الأولى: تمهيد السلسلة للمرة الأولى

$$\tilde{y}_t = wy_t + (1-w)\tilde{y}_{t-1}$$

المرحلة الثانية: تمهيد السلسلة للمرة الثانية

$$\tilde{\tilde{y}}_t = w\tilde{y}_t + (1-w)\tilde{\tilde{y}}_{t-1}$$

ويتم حساب المعلمتين كما يلي:

$$\beta_0 = 2\tilde{y}_t - \tilde{\tilde{y}}_t$$

$$\beta_1 = \frac{w}{1-w}\left(\tilde{y}_t - \tilde{\tilde{y}}_t\right)$$

مثال (14)

لدينا السلسلة الزمنية التالية التي تعبر عن قيم ظاهرة معينة خلال الفترة 2009-2020

السنة	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Y	23	27	33	35	40	42	45	50	52	55	52	55

المطلوب:

- **تمهيد السلسلة الزمنية باستعمال التمهيد الأسي المزدوج علما أن** $w = 0,3$

أولا: تمهيد السلسلة الزمنية على المرحلة الأولى؛

$$\tilde{y}_t = wy_t + (1-w)\tilde{y}_{t-1}$$
$$\tilde{y}_2 = wy_2 + (1-w)\tilde{y}_1$$
$$\tilde{y}_2 = (0,3*27) + (0,7*23 = 24,20$$

ثانيا: تمهيد السلسلة الزمنية على المرحلة الثانية

$$\tilde{\tilde{y}}_t = w\tilde{y}_t + (1-w)\tilde{\tilde{y}}_{t-1}$$
$$\tilde{\tilde{y}}_2 = w\tilde{y}_2 + (1-w)\tilde{\tilde{y}}_1$$
$$\tilde{\tilde{y}}_2 = (0,3*24,20) + (0,7*23) = 23,36$$

ثالثا: حساب المعلمتين β_0

$$\beta_0 = 2\tilde{y}_t - \tilde{\tilde{y}}_t$$
$$\beta_0 = 2\tilde{y}_2 - \tilde{\tilde{y}}_2$$
$$\beta_0 = (2*24{,}20) - 23{,}36 = 25{,}04$$

$$\beta_1 = \frac{w}{1-w}\left(\tilde{y}_t - \tilde{\tilde{y}}_t\right)$$
$$\beta_1 = \frac{0{,}3}{1-0{,}3}\left(\tilde{y}_2 - \tilde{\tilde{y}}_2\right)$$
$$\beta_1 = \frac{0{,}3}{1-0{,}3}\left(24{,}20 - 23{,}36\right) = 1{,}04$$

رابعا: حساب القيم الاتجاهية

$$\hat{y}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t$$
$$\hat{y}_2 = 25{,}04 + (0{,}36 * -11) =$$

السنة	t	y_t	$\tilde{y}_t$	$\tilde{\tilde{y}}_t$	β_0	β_1	$\hat{y}_t$	$\hat{\varepsilon}_t$
2009	-11	23	23	23	23	0,00	23	0
2010	-9	27	24,20	23,36	25,04	0,36	21,80	27
2011	-7	33	26,84	24,40	29,28	1,04	21,97	121,7
2012	-5	35	29,29	25,87	32,71	1,47	25,38	92,5
2013	-3	40	32,50	27,86	37,14	1,99	31,18	77,9
2014	-1	42	35,35	30,11	40,60	2,25	38,35	13,3
2015	1	45	38,25	32,55	43,94	2,44	56,53	1,9
2016	3	50	41,77	35,32	48,23	2,77	65,80	42,6
2017	5	52	44,84	38,17	51,51	2,86	65,80	190,3
2018	7	55	47,89	41,09	54,69	2,91	75,09	403,7
2019	9	52	49,12	43,50	54,75	2,41	76,44	597,2
2020	11	55	50,89	45,71	5,06	2,22	80,44	646,9

تمارين محلولة

تمرين 01

لدينا البيانات الشهرية التالية المتعلقة بالطلب على أحد الخدمات المقدمة من طرف احدة المؤسسات المالية خلال سنة 2021:

الشهر	جانفي	فبراير	مارس	أفريل	ماي	جوان	جويلية	أوت	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
الطلب	20	25	18	22	25	30	33	27	35	28	25	30

المطلوب

1 - حساب المتوسطات المتحركة لبيانات السلسلة بافتراض أن طول الدورة يساوي 5؛

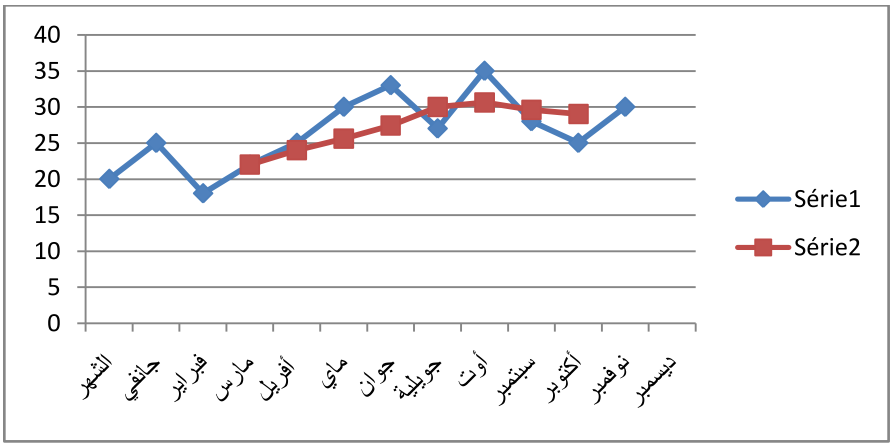
2 - التمثيل البياني للقيم الاتجاهية والقيم الحقيقية في معلم واحد، ماذا تلاحظ؟

الحل

1-حساب المتوسطات المتحركة لبيانات السلسلة بافتراض أن طول الدورة يساوي 5

الشهر	جانفي	فبراير	مارس	أفريل	ماي	جوان	جويلية	أوت	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
y_t	20	25	18	22	25	30	33	27	35	28	25	30
$\hat{y}_t$			22	24	25,6	27,4	30	30,6	29,6	29		

2-التمثيل البياني للقيم الاتجاهية والقيم الحقيقية في معلم واحد، ماذا تلاحظ؟



تمرين 02

تمثل البيانات التالية القروض ربع السنوية بالألف دينار التي مولتها أحد البنوك خلال الثلاث سنوات الأخيرة

السنة \ الفصل	1	2	3	4
2019	19	24	34	43
2020	23	28	38	47
2021	23	32	38	43

المطلوب

1 - حساب المتوسطات المتحركة لهذه البيانات بافتراض طول دورة 4؛

2 - تمثيل القيم الاتجاهية مقابل القيم الحقيقية في معلم واحد.

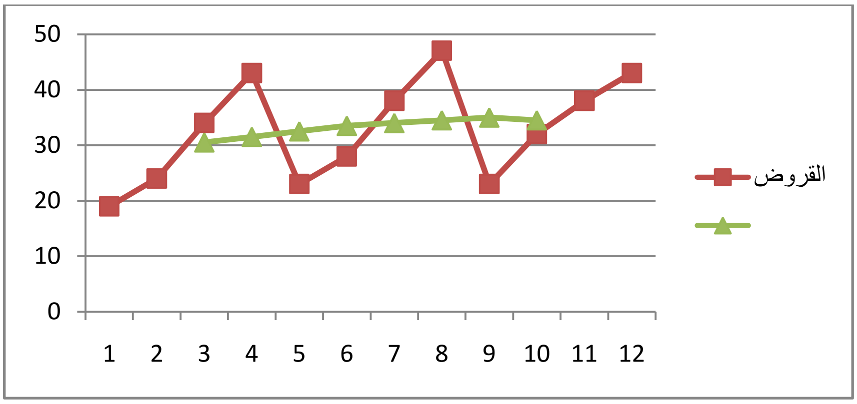
الحل

1 - حساب المتوسطات المتحركة لهذه البيانات بافتراض طول دورة 4

الفصل	y_t	$\widehat{y}_t$	$\widehat{y}_{tC}$
1	19		
2	24		
		30	
3	34		30,5
		31	
4	43		31,5
		32	
5	23		32,5
		33	
6	28		33,5
		34	
7	38		34
		34	
8	47		34,5
		35	
9	23		35
		35	
10	32		34,5
		34	
11	38		

		43	12

2-تمثيل القيم الاتجاهية مقابل القيم الحقيقية في معلم واحد



تمرين 03

لتكن لدينا البيانات التالية:

السنة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_t	20	25	18	22	25	30	33	27	35	28	25	30

المطلوب

1-تحديد قيم الاتجاه العام اعتمادا على طريقة المتوسطات المتحركة البسيطة بافتراض أن طول الدورة يساوي 3

2-تحديد قيم الاتجاه العام اعتمادا على طريقة المتوسطات المتحركة البسيطة بافتراض أن طول الدورة يساوي 5

3-اعتمادا على إجابة السؤالين السابقين، أي من طول الفترة أحسن، دعم إجابتك حسابيا؟

2-رسم القيم الاتجاهية المقدرة والقيم الفعلية في معلم واحد

الحل

1و2- تحديد قيم الاتجاه العام اعتمادا على طريقة المتوسطات المتحركة البسيطة بافتراض أن طول الدورة يساوي 3، ثم بافتراض أن طول الدورة يساوي 5

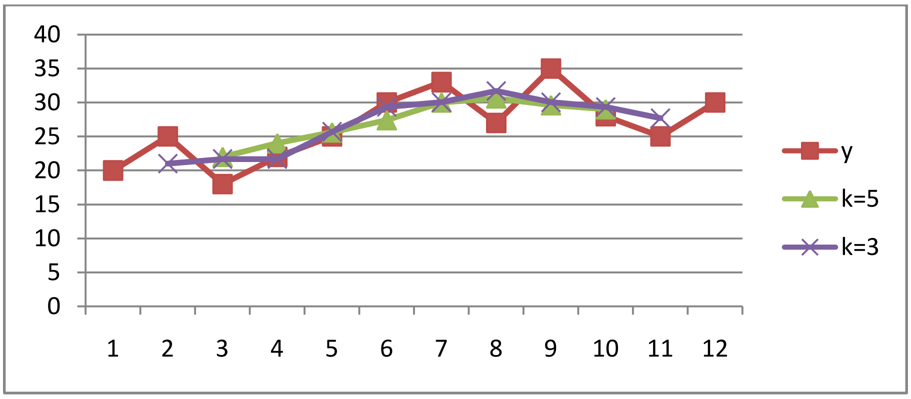
السنة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_t	20	25	18	22	25	30	33	27	35	28	25	30
$\widehat{y}_t$			22	24	25,6	27,4	30	30,6	29,6	29		
$\varepsilon_t^{\ 2}$			16	4	0,36	6,76	9	12,96	29,16	1		
$\widehat{y}_t$		21	21,67	21,67	25,67	29,33	30	31,67	30	29,33	27,67	
$\varepsilon_t^{\ 2}$		16	13.44	0,11	0,44	0,44	9	21,78	25	1,78	7,11	

3-أحسن طول فترة هو 5 لأنه يعطي أقل مجموع مربعات أخطاء

$$\sum \varepsilon_t^{\ 2}(k=5)=79,24$$

$$\sum \varepsilon_t^{\ 2}(k=3)=95,11$$

4-التمثيل البياني



تمرين 04

البيانات التالية تمثل عدد الأجهزة (بالمائة) المباعة شهريا، والتي سجلت في دفاتر إحدى الشركات خلال سنة:

الشهر	جانفي	فبراير	مارس	أفريل	ماي	جوان	جويلية	أوت	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
المبيعات	11	12	12	14	13	15	14	15	13	17	16	14

المطلوب

1-التنبؤ بعدد الأجهزة المباعة في الفترة اللاحقة اعتمادا على طريقة التمهيد الأسي البسيط باستخدام 0.7=α

2- التنبؤ بعدد الأجهزة المباعة في الفترة اللاحقة اعتمادا على طريقة التمهيد الأسي البسيط باستخدام 0.9=α

3-أي التنبؤات أفضل، علل.

4-التمثيل البياني لقيم السلسلة الفعلية والقيم الممهدة في معلم واحد، ماذا تلاحظ؟

الحل

1و2- التنبؤ بعدد الأجهزة المباعة في الفترة اللاحقة اعتمادا على طريقة التمهيد الأسي البسيط باستخدام α=0.7وα=0.9

$$\tilde{y}_t = wy_t + (1-w)\tilde{y}_{t-1}$$

$$\tilde{y}_t = 0{,}7y_t + (1-0{,}7)\tilde{y}_{t-1}$$

$$\tilde{y}_t = 0{,}9y_t + (1-0{,}9)\tilde{y}_{t-1}$$

الشهر	المبيعات	$\tilde{y}_t . w = 0{,}7$	$\varepsilon_t^{\ 2}$	$\tilde{y}_t . w = 0{,}9$	$\varepsilon_t^{\ 2}$
جانفي	11	11	0,00	11	0,00
فبراير	12	11,70	0,09	11,90	0,01
مارس	12	11,91	0,01	11,99	0,00
أفريل	14	13,37	0,39	13,80	0,04
ماي	13	13,11	0,01	13,08	0,01
جوان	15	14,43	0,32	14,81	0,04
جويلية	14	14,13	0,02	14,08	0,01
أوت	15	14,74	0,07	14,91	0,01
سبتمبر	13	13,52	0,27	13,19	0,04
أكتوبر	17	15,96	1,09	16,62	0,15
نوفمبر	16	15,99	0,00	16,06	0,00
ديسمبر	14	14,60	0,36	14,21	0,04
			2,63		0,34

3-التنبؤات عند استخدام $w = 0{,}9$ أحسن، أنها تعطي أقل مجموع من مربعات الأخطاء

$$\sum \varepsilon_t^{\ 2}(w = 0{,}7) = 2{,}63$$

$$\sum \varepsilon_t^{\ 2}(w = 0{,}9) = 0{,}34$$

قائمة المراجع

1. أموري هادي كاظم. (2009). *مقدمة في القياس الاقتصادي*. القاهرة: زهران للنشر.
2. حسين بخيث. (2018). *الاقتصاد القياسي*. الأردن: دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع.
3. حسين علي بخيث، و سحر فتح الله. (2018). *الاقتصاد القياسي*. الأردن: دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع.
4. خالد أحمد علي محمود. (2019). *اقتصاد المعرفة وإدارة الأزمات المالية في إطار الأزمات الاقتصادية*. الاسكندرية: دار الفكر الجامعي.
5. دامودار جوجاراتي. (2010). *الاقتصاد القياسي بالأمثلة*. مصر: دار حميثرا للنشر.
6. سمير مصطفى شعراوي. (2005). *مقدمة في التحليل الحديث للسلاسل الزمنية*. لمملكة العربية السعودية: مركز النشر العلمي جامعة الملك عبد العزيز.
7. عبد الحميد عبد المجيد البلداوي. (2009). *أساليب الإحصاء للعلوم الإقتصادية وإدارة الأعمال مع استخدام برنامج SPSS*. الأردن: دار وائل للنشر.
8. عبد الرحمن بن محمد سليمان أبو عمه، و محمد محمود ابراهيم هندي. (1995). *الإحصاء التطبيقي*. المملكة العربية السعودية: جامعة الملك سعود.
9. علي العزاوي. (2018). *الأساليب الكمية الإحصائية في الجغرافية*. الأردن: دار اليازوري العلمية للنشر والطباعة والتوزيع.
10. فارس عياد شاكر، و عزت قناوي. (2006). *مبادئ الاقتصاد القياسي والرياضي*. مصر: دار العلم للنشر والتوزيع بالفيوم.
11. مولود حشمان. (2010). *السلاسل الزمنية وتقنيات التنبؤ القصير المدى*. الجزائر: الديوان الوطني للمطبوعات الجامعية.
12. bachioua, l. a. (2011). Fundamentals of Statistics Concepts and Applications An Arabic Text. Phillips Publishing.
13. bourbonnais, r. (2005). économétrie (éd. 6eme edition). paris: DUNOD.

سيرة مختصرة عن المؤلف

Photo

د.تواتي خديجة

أستاذة محاضرة "ب"، جامعة غليزان

ليسانس علوم التسيير، جامعة عبد الحميد بن باديس مستغانم (2011)

ماجيستار علوم اقتصادية، تخصص تحليل اقتصادي وتقنيات كمية، جامعة عبد الحميد بين باديس مستغانم (2014)

دكتوراه علوم اقتصادية، تخصص تحليل اقتصادي وتقنيات كمية، جامعة أبي بكر بلقياد تلمسان

الاميل: khadidja.touati@univ-relizane.dz