

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique & Populaire



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique

*Université Ahmed ZABANA de Relizane*

*Faculté des Sciences de la nature et de la vie*

*Département des Sciences Agronomiques.*

# Physique 1, cours et exemples d'applications (Hydrostatique et Hydrodynamique)

Destiné aux étudiants de la 1<sup>ère</sup> année ingénieur  
sciences agronomiques (Semestre1)

Préparé par :

D<sup>r</sup>. SIDI ADDA Mustapha

Maitre de Conférences classe B

Département de sciences agronomiques

-2025 -

## **Avant –propos**

Ce polycopié de cours de Physique I répond au programme officiel du ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique. Il est destiné aux étudiants de la première année ingénieur sciences agronomique (1<sup>er</sup> semestre) du domaine Sciences de la nature et de la vie. Il constitue une initiation à la physique pour les étudiants de sciences agronomique.

Ce document couvre l'essentiel des aspects de la mécanique des fluides. Il est constitué de cinq chapitres qui s'enchainent comme suit :

Dans le premier chapitre, on étudie l'analyse dimensionnelle, calcul d'erreur et incertitude en deuxième chapitre et la dynamique des fluides parfaits incompressibles en troisième chapitre, le dernier et quatrième chapitre est réservé à la dynamique des fluides parfaits incompressibles pour qu'on se termine par la dynamique des fluides réels en dernier chapitre.

Ces cinq chapitres sont illustrés par des exercices résolus qui peuvent aider le lecteur à mieux comprendre le cours.

La rédaction de ce polycopié a été tirée de la documentation existante au niveau de toutes les bibliothèques et les sites Internet.

D<sup>r</sup>. SIDI ADDA. Mustapha

## Sommaire

<b>Chapitre I. Analyse dimensionnelle</b>	<b>1</b>
<b>I.1. Introduction</b>	<b>2</b>
<b>I.2. Grandeur physiques</b>	<b>2</b>
<b>I.3. Unités</b>	<b>2</b>
<b>I.4. Equations aux dimensions</b>	<b>3</b>
<b>I.4. Homogénéité des équations aux dimensions</b>	<b>4</b>
<b>Chapitre II. Les incertitudes</b>	<b>5</b>
<b>II.1. Introduction</b>	<b>6</b>
<b>II.1.1 La mesure</b>	<b>6</b>
<b>II.1.2 L'erreur</b>	<b>6</b>
<b>II.2. L'incertitude absolue</b>	<b>6</b>
<b>II.3. L'incertitude relative</b>	<b>7</b>
<b>II.4. Les chiffres significatifs</b>	<b>7</b>
<b>II.5. Additions et soustractions</b>	<b>7</b>
<b>II.6. Multiplications et divisions</b>	<b>8</b>
<b>II.6.1. Multiplications et divisions par une constante</b>	<b>8</b>
<b>II.6.2. Multiplications et divisions</b>	<b>9</b>
<b>II.7. Autres calculs</b>	<b>10</b>
<b>II.8. Multiplications et divisions</b>	<b>11</b>
<b>II.9. Fonctions particulières</b>	<b>11</b>
<b>II.10. Les chiffres significatifs</b>	<b>13</b>
<b>II.10.1. Additions et soustractions</b>	<b>13</b>
<b>II.10.2. Multiplications et divisions</b>	<b>13</b>
<b>II.9. Exercices</b>	<b>14</b>
<b>Chapitre III. Hydrostatique</b>	<b>16</b>
<b>III.1. Définition et caractéristiques d'un fluide</b>	<b>17</b>
<b>III.1.1 Définition d'un fluide</b>	<b>17</b>
<b>III.2. Propriétés des fluides</b>	<b>17</b>

<b>III.2.1. Compressibilité</b>	<b>17</b>
<b>III.2.2. Masse volumique et densité</b>	<b>17</b>
<b>III.2.3. Poids volumique</b>	<b>18</b>
<b>III.2.4. Volume massique</b>	<b>18</b>
	<b>19</b>
<b>III.2.4. Viscosité</b>	
<b>III.3. Statique des fluides</b>	<b>20</b>
<b>III.3.1. Introduction</b>	<b>20</b>
	<b>20</b>
<b>III.3.2. La pression</b>	
<b>III.3.3. Pression en un point d'un fluide au repos</b>	<b>21</b>
<b>III.3.4. Principe fondamental de l'hydrostatique</b>	<b>21</b>
<b>III.4. Transmission des pressions dans les liquides</b>	<b>23</b>
	<b>24</b>
<b>III.5. Equilibre des fluides non miscibles</b>	
<b>III.6. Poussée d'Archimède</b>	<b>25</b>
<b>III.7. Equations de l'hydrostatique</b>	<b>26</b>
<b>III.8. Champ de pesanteur avec accélération horizontale constante</b>	<b>27</b>
<b>III.9. Champ de pesanteur avec rotation uniforme</b>	<b>28</b>
<b>Chapitre IV. Hydrodynamique des fluides parfaits incompressibles</b>	<b>30</b>
<b>IV.1. Introduction</b>	<b>31</b>
<b>IV. 2. Equations générales de la dynamique des fluides parfaits</b>	<b>31</b>
<b>IV.3. Equation de continuité</b>	<b>32</b>
<b>IV. 4. Théorème de Bernoulli</b>	<b>34</b>
<b>IV.4.1. Ecoulement à travers les orifices</b>	<b>35</b>
<b>IV.4.2. Application du théorème de Bernoulli sur quelques exemples</b>	<b>36</b>
<i>a- Vidange d'un réservoir</i>	<b>36</b>
<i>b- Tube de venturi</i>	<b>37</b>
<i>c- Tube de Pitot 3</i>	<b>38</b>
<b>IV.5. Applications</b>	<b>39</b>
<b>Chapitre V. Dynamique des fluides réels</b>	<b>41</b>

<b>V.1. Introduction</b>	<b>42</b>
<b>V.2. Nombre de Reynolds et régime d'écoulement</b>	<b>42</b>
<b>V.3. Théorème de BERNOULLI pour fluides réels</b>	<b>42</b>
<b>V.4 Application</b>	<b>45</b>
<b>Références bibliographiques</b>	<b>48</b>

# Chapitre I

# Analyse dimensionnelle

## I.1. Introduction

L'étude des phénomènes physiques est incomplète si elle ne conduit pas à des interprétations quantitatives c'est-à-dire la mesure concrète des grandeurs.

Pour étudier un phénomène physique, il faut étudier les variables importantes liées à ce problème, la relation mathématique entre ces variables constitue une loi physique. Peut se faire par l'analyse dimensionnelle.

L'analyse dimensionnelle est un outil théorique permettant d'interpréter les problèmes en fonction des dimensions des grandeurs physiques impliquées, telles que la longueur, le temps et la masse. Elle a plusieurs utilités :

- Vérifier la validité dimensionnelle des équations.
- Identifier la nature des grandeurs physiques.
- Assurer l'homogénéité des lois physiques.
- Déterminer l'unité d'une grandeur physique à partir des unités fondamentales (mètre, seconde, kilogramme, etc.).

## I.2. Grandeurs physiques

Une grandeur physique est mesurable, ce qui signifie qu'elle peut varier (augmenter ou diminuer). Par exemple, la longueur, le temps et la masse sont considérées comme des grandeurs fondamentales en mécanique. Les autres grandeurs, telles que la vitesse, l'accélération ou la force, s'expriment en fonction de ces trois grandeurs fondamentales.

## I.3. Unités

La valeur d'une grandeur physique est exprimée en fonction d'un étalon appelé « unité ». Les unités des grandeurs dérivées sont définies à partir des unités des grandeurs fondamentales.

Grandeurs fondamentales	Symbole	Dimension	Unité (Système international)
Longueur	l	$[l]=L$	Mètre (m)
Masse	m	$[m]=M$	Kilogramme (kg)
Temps	t	$[t]=T$	Seconde (s)
Intensité	i	$[i]=I$	Ampère (A)

Il y a des unités particulières comme N (Newton) pour la force, Hz (Hertz) pour la fréquence, Watt pour la puissance, Pascal pour la pression... Chaque unité représente une combinaison des unités fondamentales.

Il y a deux types d'unités :

- Système international SI MKSA (mètre, kilogramme, seconde, ampère), c'est le système le plus utilisé
- Système CGSA (centimètre, gramme, seconde, ampère), il est moins utilisé.

Grandeur physique	Symbol	Formule	Dimension	Unité (SI)
Surface	$S$	$l \times l$	$L^2$	$m^2$
Volume	$V$	$l \times l \times l$	$L^3$	$m^3$
Masse volumique	$\rho$	$m/V$	$ML^{-3}$	$Kg/m^3$
Fréquence	$f$	$1/t$	$T^{-1}$	$s^{-1}$ ou hertz
Vitesse linéaire	$v$	$dx/dt$	$LT^{-1}$	$m/s$
Vitesse angulaire	$\omega$	$d\theta/dt$	$T^{-1}$	$Rd/s$
Accélération linéaire	$a$	$dv/dt$	$LT^{-2}$	$m/s^2$
Accélération angulaire	$\alpha$	$d\theta./dt$	$T^{-2}$	$Rd/s^2$
Force	$F$	$m.a$	$MLT^{-2}$	Newton
Travail et Energie	$W$ ou $E$	$F.d$	$ML^2 T^{-2}$	Joule
Puissance	$P$	$W/t$	$ML^2 T^{-3}$	Watt
Pression	$P$	$F/S$	$ML^{-1} T^{-2}$	Pascal (Pa)

#### I.4. Equations aux dimensions

En utilisant M, L et T pour représenter les dimensions des grandeurs fondamentales que sont la masse, la longueur et le temps, il est possible d'exprimer les dimensions des grandeurs dérivées en fonction de ces trois paramètres. Les relations obtenues de cette manière sont appelées les équations dimensionnelles de ces grandeurs.

$$[\text{Vitesse}] = [v] = [\text{Longueur}]/[\text{Temps}] = [l]/[t] = L/T = LT^{-1} \text{ (unité m/s)}$$

$$[\text{Accélération}] = [a] = [\text{Vitesse}]/[\text{Temps}] = LT^{-1}/T = LT^{-2} \text{ (unité m/s}^2)$$

$$[\text{Force}] = [F] = [\text{Masse}] [\text{Accélération}] = [m] [a] = M LT^{-2} \text{ (unité kg m/s}^2 = \text{Newton}).$$

#### I.4. Homogénéité des équations aux dimensions

Les deux membres d'une équation aux dimensions doivent avoir les mêmes dimensions puisqu'ils représentent des grandeurs de même nature.

$$C=A+B \dots [C]=[A]=[B]$$

$$C=A \cdot B \dots [C]=[A].[B]$$

$$C=A / B \dots [C]=[A] / [B]$$

$$C=A^n \dots [C]=[A]^n$$

**Exemple:**

$$v = at + v_0$$

$$\text{On a : } [v] = [v_0] = L \text{ et } [at] = [a][t] = LT^{-1}T = L$$

$$[v] = [at] = [v_0].$$

#### Les constantes n'ont pas de dimensions

$$[angle] = [cos \alpha] = [sin \alpha] = [tg \alpha] = [cotg \alpha] = [ln x] = [e^x] = 1$$

Souvent les équations aux dimensions sont homogènes.

Cette propriété est utilisée pour définir les lois physiques par la connaissance des facteurs influencent la grandeur physique en question .

**Exemple :**

La vitesse à la sortie d'un orifice est donnée en fonction de la hauteur et l'accélération de la pesanteur par la relation suivante

$$v = \sqrt{2} g^x h^y$$

Pour définir cette loi donner il faut déterminer x et y

On suppose que l'équation est homogène donc

$$[v] = [2][g]^x[h]^y$$

$$[h] = L, [\sqrt{2}] = 1, v \text{ est une vitesse } [v] = LT^{-1} \text{ et } g \text{ est une accélération donc } [g] = LT^{-2}$$

$$LT^{-1} = 1 \cdot (LT^{-2})^x L^y \Rightarrow L^1 T^{-1} = L^{x+y} T^{-2x}$$

Donc ;

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -2x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Soit ; } v = \sqrt{2} g^{1/2} h^{1/2} = \sqrt{2gh}$$

# Chapitre II

## Les incertitudes

## II.1. Introduction

### II.1.1 La mesure

Lorsqu'une mesure est effectuée, il est impossible d'affirmer qu'elle reflète exactement la valeur réelle de la grandeur observée. Qu'il s'agisse de mesurer une longueur, une masse, un volume ou une durée, il faut admettre que le résultat obtenu n'est qu'une approximation plus ou moins fidèle de la réalité.

### II.1.2 L'erreur

L'erreur, c'est l'écart entre la mesure et la valeur exacte. Puisque la valeur exacte est souvent inaccessible, l'erreur est inconnue.

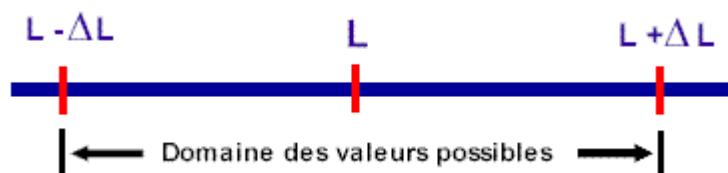
## II.2. L'incertitude absolue

L'incertitude absolue représente une estimation de l'erreur commise par l'expérimentateur. Elle correspond à l'écart maximal susceptible de séparer la valeur mesurée de la valeur réelle. Ensemble, la mesure et son incertitude définissent une plage de valeurs probables au sein de laquelle se situe la valeur exacte.

$L$  : la mesure d'une longueur

$\Delta L$  : l'incertitude absolue associée à la mesure de la longueur

La valeur exacte se trouverait donc à l'intérieur du domaine délimité par  $L \pm \Delta L$



L'incertitude absolue est influencée par divers facteurs tels que la précision de l'instrument de mesure, les conditions dans lesquelles la mesure est effectuée, ainsi que la dextérité de l'expérimentateur. En évaluer correctement la valeur requiert à la fois du discernement et de l'expérience.

L'incertitude absolue s'exprime généralement avec un seul chiffre en utilisant les mêmes unités que celles associées à la mesure.

Exemple :  $125,5 \pm 0,3$  g

Puisque l'incertitude est estimée à 3 dg, la mesure est arrondie (si nécessaire) au plus décigramme proche.

L'incertitude absolue est de la grandeur  $x$  est mentionné  $\Delta x$

Le calcul de l'incertitude se fait comme suit :

$$\text{La moyenne ou la valeur exacte } \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} = \frac{x_1+x_2+\dots+x_k}{N}$$

$x_1, x_2, x_3, \dots$  : Sont les mesures effectuées.

N : Le nombre des mesures

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_k - \bar{x})^2}{N-1}} \sigma_e : \text{Ecart type estimé}$$

$$\text{L'incertitude absolue est } \Delta x = \frac{1}{\sqrt{N}} \sigma_e$$

### II.3. L'incertitude relative

L'incertitude relative correspond au rapport entre l'incertitude absolue et la valeur mesurée, généralement exprimé en pourcentage. Elle permet de comparer la précision de plusieurs mesures : plus l'incertitude relative est faible, plus la mesure est considérée comme précise.

Exemple :  $125,5 \pm 0,3$  g

L'incertitude relative égale  $0,3/125,5 = 0,24\%$

L'incertitude absolue est de la grandeur x est mentionné  $\frac{\Delta x}{x}$

### II.4. Les chiffres significatifs.

Lorsqu'on exprime une mesure directe ou le résultat d'un calcul, l'incertitude absolue associée au résultat est exprimée avec un seul chiffre significatif. La mesure ou le résultat du calcul sera donc arrondi afin de ne comporter qu'un seul chiffre incertain.

Les chiffres significatifs sont : tous les chiffres certains plus le premier chiffre incertain.

Exemple : le résultat d'un calcul donne  $125,483 \pm 0,342$  cm.

Ce résultat devrait s'écrire, en tenant compte des chiffres significatifs,  $125,5 \pm 0,3$  cm. L'incertitude a été arrondie pour ne comporter qu'un seul chiffre significatif et le résultat a été arrondi pour ne comporter qu'un seul chiffre incertain

### II.5. Additions et soustractions

#### L'incertitude absolue

Si  $Z = X + Y$  ou  $Z = X - Y$

$$\Delta Z = \Delta X + \Delta Y$$

## Exemple 1

si  $x = 102 \pm 4$  et  $y = 55 \pm 3$

**A. Calculez  $z \pm \Delta z$  si  $z = x + y$**

La valeur la plus probable pour  $z$  est :  $102 + 55 = 157$

la valeur maximale possible est :  $(102 + 4) + (55 + 3) = 164$

la valeur minimale :  $(102 - 4) + (55 - 3) = 150$

Le résultat :  $z = 157 \pm 7$

L'incertitude absolue sur le résultat de cette somme est la somme des incertitudes de chacun des termes de l'addition.

**B. Calculez  $w \pm \Delta w$  si  $w = x - y$**

La valeur la plus probable :  $102 - 55 = 47$

la valeur maximale possible :  $(102 + 4) - (55 - 3) = 54$

la valeur minimale :  $(102 - 4) - (55 + 3) = 40$

Le résultat :  $w = 47 \pm 7$

L'incertitude absolue sur le résultat de cette soustraction est la somme des incertitudes de chacun des termes de la soustraction.

Les exemples précédents nous mènent à la règle suivante :

**Lors d'une addition ou d'une soustraction, les incertitudes absolues s'additionnent pour donner l'incertitude absolue du résultat de la somme ou de la soustraction.**

## II.6. Multiplications et divisions

### II.6.1. Multiplications et divisions par une constante

Le produit par une valeur constante ;

Si  $z = \lambda \cdot x$        $\Delta z = \lambda \cdot \Delta x$

### Exemple 1

si  $x = 108 \pm 6$

#### A. Calculez $z \pm \Delta z$ si $z = 3x$

La valeur la plus probable pour  $z$  est :  $108 (3) = 324$

la valeur maximale possible est :  $(108 + 6) (3) = 342$

Le résultat :  $z = 324 \pm 18$  ou  $z = 320 \pm 20$

L'incertitude absolue sur le résultat de la multiplication par 3 correspond à trois fois l'incertitude absolue associée à  $x$ .

#### B. Calculez $w \pm \Delta w$ si $w = \frac{1}{2}x$

La valeur la plus probable :  $108/2 = 54$

la valeur maximale possible :  $(108 + 6)/2 = 57$

$\Delta w = 1/2 \cdot \Delta x = 1/2 \cdot 6 = 3$

Le résultat :  $w = 54 \pm 3$

Les exemples précédents nous permettent de conclure que lors d'une multiplication par une constante ne possédant pas d'incertitude, l'incertitude absolue résultante s'obtient en multipliant l'incertitude absolue initiale par cette constante. Cette propriété est particulièrement utile lors des changements d'unités. Il est important de réaliser que même si l'incertitude absolue résultante est inférieure à l'incertitude absolue initiale, l'incertitude relative est restée la même.

### II.6.2. Multiplications et divisions (situation générale)

Dans ce cas le calcul débutera par l'incertitude relative ou ;

Si  $z = x \cdot y$  donc

$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$$

### Exemple 2

si  $x = 76 \pm 2$  et  $y = 35 \pm 3$

#### A. Calculez $z \pm \Delta z$ si $z = x \cdot y$

En utilisant les valeurs extrêmes...

la valeur la plus probable (exacte) :  $76 (35) = 2660$

$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} \Rightarrow \frac{\Delta z}{z} = \frac{2}{76} + \frac{3}{35}$$

$$\frac{\Delta z}{z} = 0,112 \Rightarrow \Delta z = 0,112 \cdot 2660 = 298$$

L'incertitude relative résultante est de 11,2 %. Elle était de 2,4 % sur  $x$  et de 5,2 % sur  $y$ .

donc :  $z = 2660 \pm 298$  ou **2700 ± 300 ou (49 ± 4) X 10<sup>2</sup>**

**B.** Calculez  $w \pm \Delta w$  si  $w = x / y$

La valeur la plus probable : **1,171**

donc  $w = 1,448 \pm 0,116$  que nous écrivons **1,4 ± 0,1**

$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} = 0,112$$

L'incertitude relative résultante est aussi de 11,2 % pour ce calcul.

Les deux calculs précédents nous mènent à la règle suivante :

**Lors d'une multiplication ou d'une division, de termes possédant chacun leur incertitude, l'incertitude relative résultante est donnée par la somme des incertitudes relatives des termes de la multiplication ou de la division.**

## II.7. Autres calculs

### Exemple 1

si  $x = 98 \pm 3$  ( $\pm 3 \%$ )

**A.** Calculez  $z \pm \Delta z$  si  $z = x^2$

La valeur la plus probable pour  $z$  est : **9604**

$$\frac{\Delta z}{z} = 2 \cdot \frac{\Delta x}{x} = 2 \cdot \frac{3}{98} = 0,061$$

$$\Delta z = 0,061 \cdot z = 0,061 \cdot 9604 = 585 = 600$$

$$z = 9600 \pm 600$$

**B.** Calculez  $z \pm \Delta z$  si  $z = x^{1/2}$

La valeur la plus probable : **9,899**

$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{98} = 0,015$$

$$\Delta z = 0,015 \cdot z = 0,015 \cdot 9,899 = 0,148$$

$$z = 9,9 \pm 0,1$$

L'incertitude absolue sur ce résultat n'est que la moitié de l'incertitude relative initiale. Ce résultat est tout de même conforme à la règle énoncée pour l'incertitude relative des multiplications et des divisions.

## II.8. Multiplications et divisions (plus que deux termes)

Dans cette section on doit exposer le cas générale qui est donné comme suit ;

Si  $f = x^\alpha \cdot y^\beta \cdot z^\lambda$  donc

$$\frac{\Delta f}{f} = |\alpha| \frac{\Delta x}{x} + |\beta| \frac{\Delta y}{y} + |\lambda| \frac{\Delta z}{z}$$

### Exemple 2

si  $x = 84 \pm 2$  ( $\pm 2,3\%$ ),  $y = 58 \pm 3$  ( $\pm 5,2\%$ ) et  $z = 23 \pm 1$  ( $\pm 4,3\%$ )

Calculez  $f \pm \Delta f$  si  $f = x \cdot y \cdot z$

En utilisant les valeurs extrêmes...

La valeur la plus probable :  $84 \cdot 58 \cdot 23 = 211,83$

$$\frac{\Delta f}{f} = |\alpha| \frac{\Delta x}{x} + |\beta| \frac{\Delta y}{y} + |\lambda| \frac{\Delta z}{z}$$

$\alpha=1, \beta=1, \lambda=1$

$$\frac{\Delta f}{f} = 1 \frac{\Delta x}{x} + 1 \frac{\Delta y}{y} + 1 \frac{\Delta z}{z} \Rightarrow \frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z}$$

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{2}{84} + \frac{3}{58} + \frac{1}{23} = 0,12 \Rightarrow \Delta f = 0,12 \cdot 211,83 = 25,42$$

donc :  $w = 211,83 \pm 25,42$  ( $\pm 12,6\%$ ) ou  $210 \pm 30$

Ce résultat est conforme à la règle énoncée pour l'incertitude relative des multiplications et des divisions. Cette règle est valable pour n'importe quel nombre de termes multipliés et/ou divisés entre eux.

On peut utiliser les deux règles énoncées précédemment dans de nombreuses situations. Cependant certains calculs faisant intervenir des fonctions particulières nécessitent l'usage de la méthode des extrêmes.

## II.9. Fonctions particulières.

S'il existe des fonctions particulières dans le calcul dont il est préférable qu'on se réfère à la forme générale décrite comme suit ;

Si la grandeur physique  $f$  est en fonction des paramètres  $x, y, z\dots$  donc la différentielle de  $f$  est donnée par ;

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \dots$$

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z \dots$$

### Exemple 3

si  $\alpha = 45 \pm 2^\circ$  Calculez  $w \pm \Delta w$  si  $w = \tan \alpha$

La valeur la plus probable est : **1,000**

L'angle  $\alpha$  est pris en radian  $2^\circ = 0,035$  rd

$$\Delta w = \frac{\partial \tan}{\partial \alpha} \Delta \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \cdot 0,035 = \frac{1}{(\sqrt{2}/2)^2} \cdot 0,035 = 0,07$$

Le résultat :  $w = 1,000 \pm 0,07$  ou  **$w = 1,00 \pm 0,07$**

### Exemple 4

si  $x = 38 \pm 3$  Calculez  $w \pm \Delta w$  si  $w = \ln x$

$w_{\text{prob}} = 3,638$

$$\Delta w = \frac{\partial \ln}{\partial x} \Delta x = \frac{1}{x} \cdot 3 = \frac{1}{(38)} \cdot 3 = 0,08$$

Le résultat :  **$w = 3,64 \pm 0,08$**

### Conclusion.

La méthode de la différentielle est la méthode la plus généralisée dans les cas complexes

Les méthodes de calcul des incertitudes dans le cas d'une addition, produit ou division sont extraites de cette méthode générale de différentielle.

## II.10. Les chiffres significatifs

Lorsqu'on exprime une mesure directe ou le résultat d'un calcul, l'incertitude absolue associée au nombre est exprimée avec un seul chiffre significatif. La mesure ou le résultat du calcul sera alors arrondi afin de ne comporter qu'un seul chiffre incertain.

Il arrive parfois que l'on désire, sans faire le calcul de l'incertitude, conserver le bon nombre de chiffres significatifs lors d'un calcul. Pour ces situations, nous allons, à l'aide de quelques exemples, formuler quelques règles valables pour les opérations mathématiques de base (addition, soustraction, multiplication et division).

### **II.10.1. Additions et soustractions**

#### **Exemple 1**

$$a = 131,12 \pm 0,07 \quad \text{et} \quad b = 12,213 \pm 0,007$$

la somme...

$$\begin{array}{r} 131,12 \\ + 012,213 \\ \hline 143,33(3) \end{array}$$

il faudrait donc écrire pour le résultat de la somme  $a + b = 143,33$  car nous devons conserver qu'un seul chiffre incertain.

#### **Exemple 2**

$$a - b = ?$$

$$\begin{array}{r} 131,12 \\ - 012,213 \\ \hline 118,90(7) \end{array}$$

le résultat est donc  $a - b = 118,91$

**Le résultat d'une addition ou d'une soustraction possède autant de décimales que le terme de l'addition ou de la soustraction qui en possède le moins.**

### **II.10.2. Multiplications et divisions**

#### **Règle 2 :**

Les deux exemples qui suivent sont des applications de cette deuxième règle.

#### **Exemple 3**

$$a = 12,5 \pm 0,7 \quad (3 \text{ chiffres significatifs}) \text{ et } b = 2,3 \pm 0,1 \quad (2 \text{ chiffres significatifs})$$

La multiplication  $a \cdot b$  donne 28,75 que l'on doit écrire avec deux chiffres significatifs.

$$a \cdot b = 29 \quad (2 \text{ chiffres significatifs})$$

#### Exemple 4

$c = 1238 \pm ?$  (4 chiffres significatifs) et  $d = 33,9 \pm 0,?$  (3 chiffres significatifs)

la division  $c / d$  donne  $36.519\dots$  que l'on doit écrire avec 3 chiffres significatifs.

$c / d = 36,5$  (3 chiffres significatifs)

#### Remarque importante

La deuxième règle constitue une façon plus ou moins précise d'obtenir le bon nombre de chiffres significatifs pour le résultat d'un produit ou d'un quotient. Ce n'est pas une règle absolue (voir l'exemple suivant).

Ces règles s'appliquent aux opérations mathématiques de base énumérées précédemment. C'est toujours le calcul des incertitudes par la méthode des extrêmes qui donne le bon résultat.

#### Exemple

$c = 94 \pm 1$  (2 chiffres significatifs) et  $d = 2,10 \pm 0,02$  (3 chiffres significatifs)

la division  $c / d$  donne  $44,762\dots$

En faisant le calcul des valeurs extrêmes

$$(c / d)_{\max} = 95 / 2,08 = 45,673 (+0,911)$$

$$(c / d)_{\min} = 93 / 2,12 = 43,868 (-0,894)$$

Le résultat de ce calcul

**44,8 ± 0,9** (trois chiffres significatifs)

### II.9. Exercices

Écrivez les résultats suivants ainsi que les incertitudes absolues avec le bon nombre de chiffres significatifs (indiquez aussi le nombre de chiffres significatifs que possède le résultat).

**1.** (a)  $845,33 \pm 2,65$    (b)  $11\ 675 \pm 94,4$    (c)  $1,851 \times 10^3 \pm 158,3$    (d)  $0,01863 \pm 0,00023$    (e)  $1,567 \times 10^{-3} \pm 0,00049$

**2.** Les côtés d'un rectangle sont  
 $a = 5,35 \pm 0,05$  cm et  $b = 3,45 \pm 0,04$  cm

(a) Calculez le périmètre du rectangle  
(b) Calculez l'aire du rectangle

**3.** Le rayon d'une sphère est  $r = 10,00 \pm 0,08$  cm

**(a)** Calculez l'aire de sa surface  
**(b)** Calculez son volume

**4.** Les côtés opposé et adjacent à l'angle  $\alpha$  d'un triangle rectangle sont respectivement

$$a = 12,1 \pm 0,1 \text{ cm} \text{ et } b = 23,3 \pm 0,2 \text{ cm.}$$

**(a)** Calculez l'angle  $\alpha$   
**(b)** Calculez la longueur de l'hypoténuse

**5.** Un volume cylindrique de diamètre  $1,62 \pm 0,03 \text{ cm}$  et de hauteur  $3,44 \pm 0,05 \text{ cm}$  a une masse de  $23,2 \pm 0,1 \text{ g}$ .

**(a)** Calculez son volume  
**(b)** Calculez sa masse volumique

**6.** Un véhicule consomme  $48,6 \pm 0,5$  litres de carburant en parcourant  $530 \pm 20 \text{ km}$

Calculez sa consommation moyenne en litres par 100 km

**7.** Suite à une série d'essais, on obtient comme résultats qu'un véhicule roulant à  $100 \pm 5 \text{ km/h}$  s'immobilise en  $3,3 \pm 0,1 \text{ s}$ .

Calculez la décélération moyenne (en  $\text{m/s}^2$ ) de ce véhicule.

Réponses aux exercices

**1.** **(a)**  $845 \pm 3$  (3 C.S.)   **(b)**  $11\ 680 \pm 90$  (4 C.S.)   **(c)**  $1900 \pm 200$  (2 C.S.)   **(d)**  $(1,86 \pm 0,02) \cdot 10^{-2}$  (3 C.S.)

**(e)**  $(1,6 \pm 0,5) \times 10^{-3}$  (2 C.S.)

**2.** **(a)**  $17,6 \pm 0,2 \text{ cm}$    **(b)**  $18,5 \pm 0,4 \text{ cm}$

**3.** **(a)**  $1260 \pm 20 \text{ cm}^2$    **(b)**  $(42 \pm 1) \cdot 10^2 \text{ cm}^3$

**4.** **(a)**  $27,4 \pm 0,4^\circ$    **(b)**  $26,3 \pm 0,2 \text{ cm}$

**5.** **(a)**  $7,1 \pm 0,4 \text{ cm}^3$    **(b)**  $3,3 \pm 0,2 \text{ g/cm}^3$

**6.**  $9,2 \pm 0,5 \text{ l/100km}$

**7.**  $8,4 \pm 0,7 \text{ m/s}^2$

# Chapitre III

# Hydrostatique

## III.1. Définition et caractéristiques d'un fluide

### III.1.1 Définition d'un fluide

On appelle fluide un corps qui n'a pas de forme propre et qui est facilement déformable. Les liquides et les gaz sont des fluides, ainsi que des corps plus complexes tels que les polymères ou les fluides alimentaires. Ils se déforment et s'écoulent facilement. Un fluide englobe principalement deux états physiques : l'état gazeux et l'état liquide.

## III.2. Propriétés des fluides

Tous les fluides possèdent des caractéristiques permettant de décrire leurs conditions physiques dans un état donné. Parmi ces caractéristiques qu'on appelle propriétés des fluides on a :

- Compressibilité
- Masse volumique et densité
- Poids volumique
- Volume massique
- Viscosité

### III.2.1. Compressibilité

La compressibilité est le caractère de variation de volume de fluide avec une variation de pression ( $dp$ ), le volume de fluide subit une diminution de volume ( $dV$ ).

L'augmentation de pression entraîne une diminution de volume.

Le coefficient de compressibilité est :

$$\beta = \frac{-\frac{dV}{V}}{dp} \text{ (Pa}^{-1}\text{)}$$

$\beta$  : Coefficient de compressibilité (Pa<sup>-1</sup> ou m<sup>2</sup>/N).

$V$  : Volume de fluide (m<sup>3</sup>).

$dV$  : Variation de volume (m<sup>3</sup>).

$dp$  : Variation de pression (N/m<sup>2</sup>)

### III.2.2. Masse volumique et densité

**a- Masse volumique :** La masse volumique  $\rho$  d'un fluide est la masse de l'unité de volume de ce fluide. Elle s'exprime en **kg/m<sup>3</sup>**

Les fluides sont caractérisés par leur masse volumique  $\rho$

$$\rho = \frac{M}{V}$$

M: Masse du fluide (kg)

V : Volume du fluide (m<sup>3</sup>)

$\rho$  : Masse volumique (kg/m<sup>3</sup>)

Fluides	mercure	eau de mer	eau pure	huile	essence	butane	air
$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	13 600	1030	1000	900	700	2	1.293

Pour les gaz, la masse volumique dépend de la température et de la pression à cause de leur compressibilité.

### b- Densité

La densité est le rapport de la masse volumique du fluide rapportée à un autre fluide de

Référence, c'est une grandeur sans unité définie par :

$$d = \frac{\rho}{\rho_f}$$

Exemple : la densité du mercure par rapport à l'eau est de

$$d_{mer} = \frac{\rho_{mer}}{\rho_e} = \frac{13600}{1000} = 13,6$$

### III.2.3. Poids volumique (poids spécifique) :

Il représente la force d'attraction exercée par la terre sur l'unité de volume, c'est-à-dire le poids de l'unité de volume.

$$W = \frac{G}{V} = \frac{Mg}{V} = \rho g (N/m^3)$$

### III.2.4. Volume massique (volume spécifique)

C'est le volume qu'occupe l'unité de masse d'une substance, c'est l'inverse de la masse volumique

$$\omega = \frac{V}{M} (m^3/kg)$$

#### Exemple :

a- Soit un volume d'huile V= 5 m<sup>3</sup> qui pèse 4,25 t . Calculer la masse volumique, le poids spécifique et la densité de cette huile avec g= 9.81 m/s<sup>2</sup>.

b- Calculer le poids  $G$  d'un volume  $V = 0,5$  litres de liquide ayant une densité égale à  $0,75$

*Solution :*

### a- Masse volumique

$$\rho_h = \frac{M}{V} = \frac{4250}{5} = \frac{850 \text{ kg}}{\text{m}^3}.$$

$$\text{Poids spécifique (Volumique)} W_h = \rho \cdot g = 850 \cdot 9,81 = 8338,5 \frac{N}{m^3}$$

### b- Densité

$$d_h = \frac{\rho_h}{\rho_e} = \frac{850}{1000} = 0,85$$

$$c- G = M \cdot g = \rho_l \cdot V \cdot g = d_l \rho_e V g = 0,75 \cdot 1000 \cdot 0,5 \cdot 9,81 = 3678,75 N = 3,679 \text{ kN}$$

### III.2.5. Viscosité

La viscosité d'un fluide est la propriété de résister aux efforts tangentiels qui tendent à faire déplacer les couches de fluide les unes par rapport aux autres. Lorsque le fluide se déplace en couches parallèles ; le facteur de proportionnalité est le coefficient de viscosité dynamique, ( $\mu$ ) et on écrit alors :

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

La viscosité cinématique,  $\nu$ , est définie comme étant le rapport entre la viscosité dynamique et la masse volumique.

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Dans le système SI, l'unité de la viscosité dynamique est le (Pa.s) ou (kg/ms) ou Pl

Pa.s : Pascal seconde

Dans le système SI, l'unité de la viscosité cinématique,  $\nu$ , est le  $\text{m}^2/\text{s}$  ; dans le système CGS l'unité est le stockes où  $1 \text{ stokes} = 1 \text{ cm}^2/\text{s} = 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$

### Exemple :

Déterminer la viscosité dynamique d'une huile moteur de densité  $d = 0.8$  et de viscosité cinématique  $\nu = 1.3 \text{ St}$

$$\nu = 1.3 \text{ St} = 1.3 \text{ cm}^2/\text{s} = 130 \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\mu = \nu \rho = \nu d \rho_e = 130 \cdot 0.8 \cdot 1000 = 1,04 \frac{10^5 \text{ kg}}{\text{m} \cdot \text{s}} = 1,04 \cdot 10^5 \text{ Pl}$$

## III.3..Statique des fluides

### III.3.1. Introduction

La statique des fluides est la branche de la mécanique des fluides qui traite principalement les fluides au repos. L'étude des propriétés des fluides au repos constitue la statique des fluides.

### III.3.2. La pression

La pression est la quantité de la force exercée perpendiculairement sur une unité de surface :

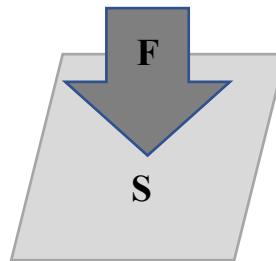


Figure 2.1

$$P(\text{Pa}) = \frac{F(\text{N})}{S(\text{m}^2)}$$

L'unité de la pression en système SI est le Pascal (Pa=1N/m<sup>2</sup>)

Autres unités :

- Le bar  $1\text{bar} = 10^5 \text{ Pa} = 10^5 \text{ N/m}^2$
- L'atmosphère  $1\text{atm} = 101325 \text{ Pa} \approx 1,0133 \text{ bar}$

	<b>Pascal (Pa)</b>	<b>Bar</b>	<b>Atmosphère</b>
<b>Pascal</b>	1	$10^{-5}$	$9,869 \cdot 10^{-6}$
<b>Bar</b>	$10^5$	1	0,987167
<b>Kgf/cm<sup>2</sup></b>	98039	0.9803	0,968

<b>Atmosphère</b>	101325	1,0133	1
<b>cm d'eau</b>	98.04	9,80 10 <sup>-4</sup>	9,68 10 <sup>-4</sup>
<b>mm de Hg</b>	133	1,333 10 <sup>-3</sup>	1,316 10 <sup>-3</sup>
<b>mbar</b>	10 <sup>2</sup>	10 <sup>-3</sup>	9,87 10 <sup>-4</sup>

### III.3.3. Pression en un point d'un fluide au repos

#### Théorème de Pascal

- 1- La pression hydrostatique en un point donné d'un fluide au repos est la même (agit de façon égale) dans toutes les directions
- 2- Toute variation de pression en un point d'un liquide au repos est transmise intégralement à tous les autres points du liquide.

On peut vérifier que la pression exercée au sein d'un liquide en équilibre,

- est constante en tous points d'un même plan horizontal.
- est indépendante de la direction considérée.
- croît au fur et à mesure que l'on s'éloigne de sa surface libre.

### III.3.4. Principe fondamental de l'hydrostatique

#### 3.1 Principe fondamental de l'hydrostatique

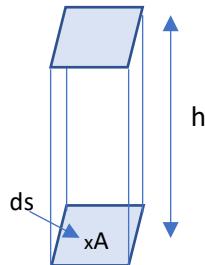


Figure 2.2

La pression exercée en une section élémentaire  $ds$  horizontale du fluide sous une auteur est comme suit ;

$$p_A = \frac{F_p}{ds} = m \cdot \frac{g}{ds} = \frac{\rho V g}{ds} = \frac{\rho ds h g}{ds} = \rho g h$$

$P_A$  est la pression au point A

$F_p$  est la force de pesanteur.

$\rho$  est la masse volumique du fluide en (kg/m<sup>3</sup>).

$h$  est la profondeur de la section élémentaire (m)

$g$  est l'accélération de la pesanteur.

## Application

**Exercice 1 :** Une plaque métallique de dimension (20x10x0,5) cm pèse 5 kg. Quelle pression exerce-t-elle sur le sol suivant la face sur laquelle on la pose ?

**Solution**

$$\text{On a } P_1 = \frac{F}{S} = \frac{mg}{S} = \frac{5 \cdot 9,81}{0,2 \cdot 0,1} = 2452,5 \text{ N/m}^2 (\text{pa})$$

$$P_2 = \frac{F}{S_2} = \frac{mg}{S_2} = \frac{5 \cdot 9,81}{0,2 \cdot 0,005} = 49050 \text{ N/m}^2 (\text{pa})$$

$$P_3 = \frac{F}{S_3} = \frac{mg}{S_3} = \frac{5 \cdot 9,81}{0,1 \cdot 0,005} = 98100 \text{ N/m}^2 (\text{pa})$$

**Exercice 2 :** On enfonce une punaise métallique dans une planche en exerçant sur sa tête une force de 3 kgf avec le pouce ; la tête a 1cm de diamètre et la pointe 0.5mm

Quelles sont les pressions exercées sur le pouce ensuite sur la planche ?

**Solution**

Pression sur le pouce :

$$P_{pc} = \frac{F}{S} = \frac{F}{\frac{\pi d_p^2}{4}} = \frac{2 \cdot 9,81}{\frac{\pi 0,01^2}{4}} = 2,5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$P_{pl} = \frac{F}{S} = \frac{F}{\frac{\pi d_p^2}{4}} = \frac{2 \cdot 9,81}{\frac{\pi \cdot (5 \cdot 10^{-4})^2}{4}} \cong 10^8 \text{ Pa}$$

**Exercice 3 :** Combien faut-il de mètres d'eau pour avoir une différence de pression de 1bar?

**Solution**

$$\begin{cases} \Delta P = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ N/m}^2 \\ \Delta P = \rho gh \end{cases} \Rightarrow \rho gh = 10^5$$

$$h = \frac{10^5}{\rho g} = \frac{10^5}{9810} \cong 10,19m$$

**Exercice 4 :** Calculer la pression relative et la pression absolue auquel est soumis un plongeur en piscine à une profondeur de 5,5 m. On donne la masse volumique de l'eau  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$

Solution

Pression relative

$$P_r = \rho g h = 1000 \cdot 9.81 \cdot 5,5 = 53\,955 \text{ Pa} = 0,54 \text{ bar}$$

Pression absolue

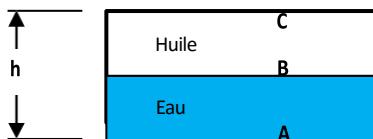
$$P_{ab} = P_r + P_{\text{atmosphérique}}$$

Soit

$$P_{ab} = 53\,955 + 101\,325 = 155\,280 \text{ Pa} = 1,55 \text{ bar}$$

**Exercice 5 :** La cuve ci-contre est à moitié pleine d'eau et l'autre pleine de huile . Calculez la différence de pression entre les points A et B, puis entre les points B et C. Comparer ces résultats et conclure !

On donne :  $h = 2,5 \text{ m}$  , masse volumique de l'eau  $103 \text{ kg/m}^3$  et celle de l'huile est  $900 \text{ kg/m}^3$



Solution

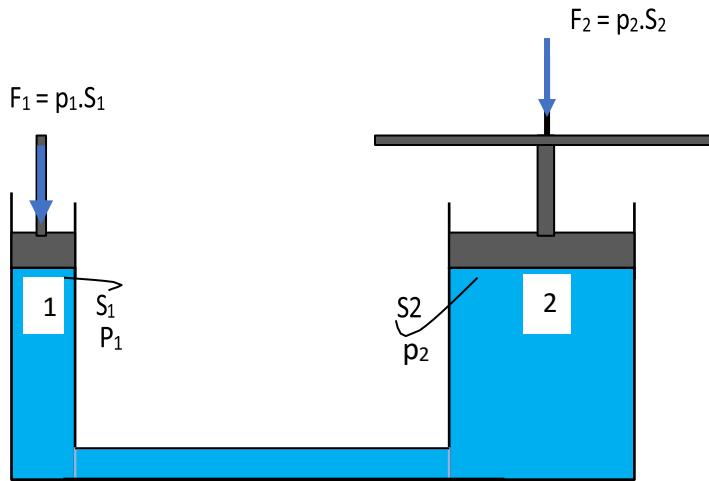
$$\Delta P_{AB} = \rho_{\text{eau}} g (h_A - h_B) = \rho_{\text{eau}} g h/2 \quad \text{soit} \quad \Delta P_{AB} = 10^3 \cdot 9.81 \cdot 1,25 = 12\,262,5 \text{ Pa}$$

$$\Delta P_{BC} = \rho_{\text{air}} g (h_B - h_C) = \rho_{\text{air}} g h/2 \quad \text{soit} \quad \Delta P_{BC} = 900 \cdot 9.81 \cdot 1,25 = 11\,036,25 \text{ Pa}$$

**Conclusion :** la pression dans l'eau est importante par rapport à la pression dans l'huile à cause de la masse volumique .

### III.4. Transmission des pressions dans les liquides

Soit le schéma de principe d'une presse hydraulique (Fig.2.3). On y produit une force considérable à partir d'une force relativement peu importante, en considérant la surface d'un piston à la sortie 2 plus large que celui à l'entrée 1.



**Figure.2.3** : Principe d'une presse hydraulique

Lorsque les deux pistons 1 et 2 sont sur le même niveau, on a :

$$P_1 = P_2 \Rightarrow \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \Rightarrow F_1 S_2 = F_2 S_1$$

$S_1$  et  $S_2$  sont respectivement inversement proportionnelles aux  $F_1$  et  $F_2$ .

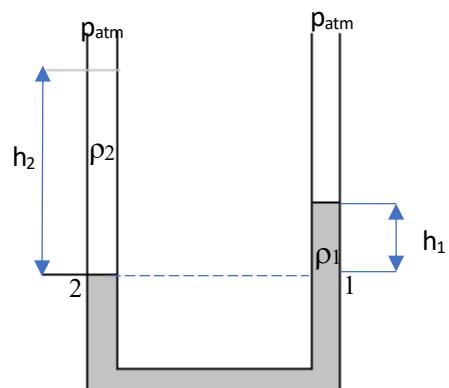
### III.5. Equilibre des fluides non miscibles

Un tube en U rempli d'un liquide de masse volumique ( $\rho_1$ ), si dans l'une des branches un autre liquide non miscible au premier et de masse volumique ( $\rho_2$ ) est versé, il est observé une dénivellation  $h = (h_2 - h_1)$  entre les deux liquides. Les deux surfaces libres étant à la pression atmosphérique. D'après le principe de Pascal, il est possible d'écrire les équations suivantes :

$$P_1 = p_{atm} + \rho_1 g h_1$$

$$P_2 = p_{atm} + \rho_2 g h_2$$

$$p_{atm} + \rho_1 g h_1 = p_{atm} + \rho_2 g h_2 \Rightarrow h_1 = \frac{\rho_2}{\rho_1} h_2$$



La simple mesure des hauteurs des deux fluides  $h_1$  et  $h_2$  permet de déterminer la masse volumique d'un fluide. De même ce concept est utilisé pour la mesure des pressions avec les manomètres à colonne de liquide ou manomètre différentiel.

### III.6. Poussée d'Archimède

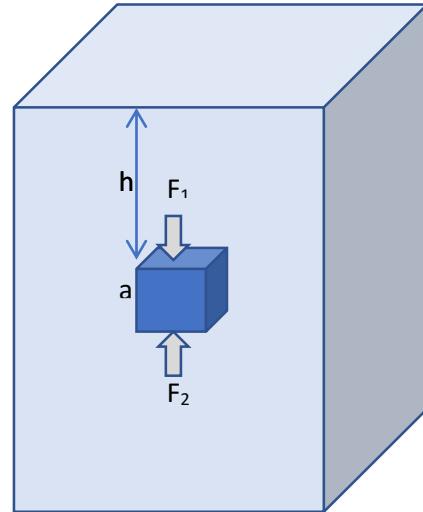
Supposons un cube d'arête  $a$  entièrement immergé dans un liquide, sa face du haut étant horizontale et située à une profondeur  $z_1 > 0$  (le sens positif est vers le bas). On notera le vecteur unitaire dirigé selon l'axe des  $z$  croissants (donc orienté vers le bas).

Dans le cas d'un liquide incompressible au repos soumis à un champ de pesanteur uniforme, la pression absolue  $p$  à une profondeur  $z$  vaut :

$$P_1 = Pat + \rho gh \Rightarrow F_1 = (Pat + \rho gh)s$$

$$P_2 = Pat + \rho g(h + a) \Rightarrow F_2 = (Pat + \rho g(h + a))s$$

Les forces  $F_1$  et  $F_2$ , exercées par le liquide sur les faces supérieures (d'aire  $s = a^2$ ) du cube



Sur la verticale

$$\vec{F}_A = \sum \vec{F} \Rightarrow F_A = F_2 - F_1 \Rightarrow F_A = (Pat + \rho g(h + a))s - (Pat + \rho gh)s$$

$$F_A = \rho g a s = \rho g V$$

- $\rho$  est la masse volumique du liquide ;
- $V$  est le volume de corps (cube) ;
- $g$  est l'accélération de la pesanteur.
- Tout corps totalement immergé dans un liquide est soumis à une poussée dirigée du bas vers le haut et égale au poids du liquide déplacé, c'est-à-dire correspondant au volume du corps immergé cette poussée s'appelle la poussée d'Archimède est dirigée dans le sens inverse du champ de pesanteur.

- $F_A - P_d > 0$ , le corps s'élève dans le fluide et cette ascension aboutit à une flottaison du solide.
- $F_A - P_d = 0$ , le corps est immobile dans le fluide, puisque la poussée d'Archimède équilibre le poids du solide.
- $F_A - P_d < 0$ , le corps s'enfonce dans le fluide, c'est le type de chute qui est rencontrée dans la décantation des solides.
- $P_d$ : Poids du corps immergée.

Donc en conclusion la poussée d'Archimède est exprimée comme une force dirigée vers le haut et exercée par un fluide sur un corps immergé, la valeur de cette force est calculée par la relation suivante ;

$$F_A = \rho g V$$

### III.7. Equations de l'hydrostatique

L'élément de fluide est en équilibre statique sous l'influence de trois forces de volume et de forces de pression hydrostatique. Les forces qui agissent sur cet élément de volume ( $dx dy dz$ ) dans la direction  $z$  sont :

1. Les forces de volume :  $\rho Z (dx dy dz)$

2. Les forces de surface (de pression) :  $\left(P - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{dz}{2}\right) dx dy$  et  $\left(P + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{dz}{2}\right) dx dy$

Dans un état d'équilibre on obtient les équations d'équilibre dans toutes les autres directions :

$$\begin{cases} \rho a_x - \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ \rho a_y - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \rho a_z - \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \rho \vec{F} - \overrightarrow{\text{grad}} P = \vec{0}$$

$a_x, a_y, a_z$  : Les accélérations dans les trois directions

Les équations (2.6) sont appelées équations fondamentales de l'hydrostatique (équations d'Euler). Ces équations montrent que la pression hydrostatique en un point donné d'un fluide au repos dépend des coordonnées du point dans le volume du liquide et de la masse volumique, c'est-à-dire

$$P = f(x, y, z, \rho).$$

Dans le cas où la force massique est seulement la force de pesanteur, les composantes de la force massique unitaire sont :  $a_x = 0$     $a_y = 0$     $a_z = -g$

$$\rho a_z - \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \Rightarrow dP = \rho a_z dz$$

$$\Rightarrow dP = \rho a_z dz \Rightarrow P = -\rho g z + c$$

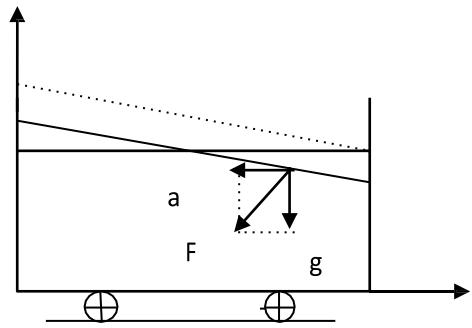
Il y a d'autres cas où les forces au d'autres directions sont pris en compte

### III.8. Champ de pesanteur avec accélération horizontale constante

Soit un liquide homogène soumis à une accélération horizontale constante  $\mathbf{a}$ , donc :

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ g \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = -\rho a \\ \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \end{cases}$$



La pression est fonction uniquement de  $x$  et de  $z$ . La variation totale de la pression est définie comme suit

D'où la pression est :

$$dp = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz$$

$$P = \int \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz = -\rho a x - \rho g z + c$$

$$\Rightarrow P + \rho a x + \rho g z = c$$

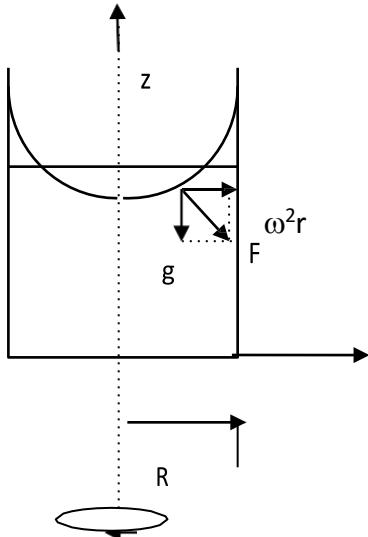
Sur les lignes égale pression  $dp = 0$  soit  $P = \text{cst}$  donc

$$\rho a x + \rho g z = c \Rightarrow z = -\frac{a}{g} x + c'$$

$$c' = \frac{c}{\rho g}$$

### III.9. Champ de pesanteur avec rotation uniforme

Considérons un réservoir cylindrique qui tourne à une vitesse angulaire  $\omega$  constante.



$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^2 r \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial r} = -\rho \omega^2 r \\ \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g + \rho \omega^2 r \Rightarrow P = -\rho g z + \rho \omega^2 \frac{r^2}{2} + c$$

Sur les lignes égale pression  $dp = 0$  soit  $P = \text{cst}$  donc

$$-\rho g z + \rho \omega^2 \frac{r^2}{2} = c' \Rightarrow z = \omega^2 \frac{r^2}{2g} + c'$$

**Exercice 6 :** On donne  $F_1 = 100 \text{ N}$  et  $D_1 = 10\text{cm}$  (diamètre du petit piston) Le petit piston descend d'une hauteur  $h_1 = 1\text{m}$

1. Si le diamètre du grand piston est  $D_2 = 1\text{m}$ , quelle est l'intensité de la force  $F_2$  exercée sur le grand piston ?
2. De quelle hauteur  $h_2$  monte le grand piston ?

**Exercice 7 :** Un récipient contient de l'eau sur 20cm et de l'huile sur 50cm. La pression au point A

est égale à la pression atmosphérique. Calculer la pression aux points B et C ; sachant que  $\rho_{\text{eau}} = 10^3 \text{ kg/m}^3$  et  $\rho_{\text{huile}} = 900 \text{ kg/m}^3$

**Solution :**

Soit  $P_A = P_{\text{atm}} = 10^5 \text{ Pa}$

$$P_B = P_A + \rho h g H_2 = 10^5 + 900 \cdot 9.81 \cdot 0.5 = 104500 \text{ Pa}$$

$$P_C = P_B + \rho_e g H_1 = 104500 + 1000 \cdot 9.81 \cdot 0.2 = 106482 \text{ Pa}$$

**Exercice 8 :** Un récipient en partie rempli d'eau et soumis à une accélération horizontale constante. L'inclinaison de la surface de l'eau est de  $30^\circ$ . Quelle est l'accélération du récipient ?

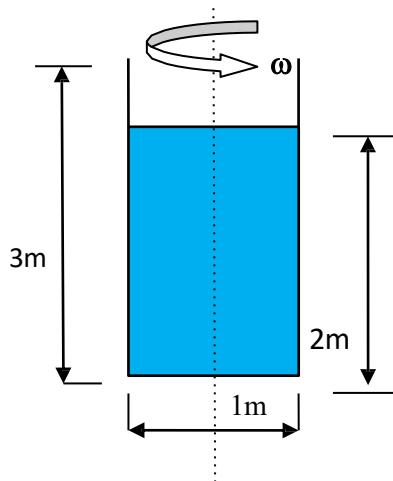
**Solution**

$$\tan \theta = a/g$$

$$\text{Donc : } a = g \cdot \tan 30^\circ = 9.81 \cdot 0.5 = 4.9 \text{ m/s}^2$$

**Exercice 9 :** Un récipient en partie rempli d'eau et soumis à une accélération horizontale constante. Calculer cette accélération si on :  $L=3\text{m}$   $H_1=1.8\text{m}$   $H_2=1.2\text{m}$   $g=9.81 \text{ m/s}^2$

**Exercice 10 :** Un réservoir cylindrique de 3m de haut, 1m de diamètre contient 2m d'eau et tournant autour de son axe. Quelle vitesse angulaire  $\omega$  constante peut-on atteindre sans renverser l'eau. Quelle est la pression au fond du réservoir en A (axe) et B (paroi) quand  $\omega = 1 \text{ rad/s}$



# Chapitre IV

## Dynamique des fluides

## parfaits incompressibles

## IV.1. Introduction

Dans la dynamique des fluides l'étude faite sur un liquide en mouvement ou la pression a les mêmes propriétés que dans un liquide en repos, pour simplifier la problème liquide parfait est un liquide non visqueux ou on néglige les frottements

La dynamique étudie les fluides en mouvement pour simplifier le problème, on néglige les frottements. Dans un liquide non visqueux ou parfait en mouvement, la pression a les mêmes propriétés que dans un liquide au repos.

On s'intéresse dans ce chapitre aux équations fondamentales qui régissent la dynamique des fluides parfaits incompressibles à savoir :

- L'équation d'Euler (Conservation de la quantité de mouvement)
- L'équation de continuité (conservation de la masse)
- Le théorème de Bernoulli (conservation de l'énergie)

## IV. 2. Equations générales de la dynamique des fluides parfaits

De la même manière que dans la section ( §III ), sauf que dans cette section on ajoutent la force d'inertie (accélération du mouvement)

Les forces qui agissent sur cet élément de volume ( $dSdz$ ) sont :

1. **La force de volume :**  $\rho \mathbf{Z} (dSdz) \partial P$
2. **Les forces de pression :**  $\mathbf{p} dS$  et  $(P + \frac{\partial P}{\partial z} dz) ds$
3. **La force d'inertie (accélération) :**  $\rho dS dz \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}$

$$\begin{cases} a_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} \\ a_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow \vec{F} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \\ a_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases}$$

$\rho \vec{F}$  : Force de volume par unité de volume.

$\vec{\nabla}p$  : Force de pression par unité de volume.

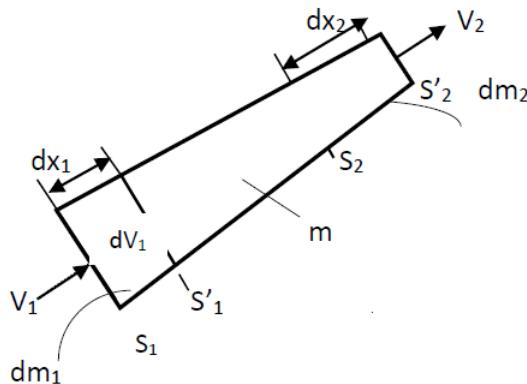
$\rho \frac{d\vec{V}}{dt}$  : Force d'inertie par unité de volume.

Ces équations sont appelées équations générales de la dynamique des fluides parfaits ou **équations d'Euler**

En introduisant les expressions des composantes de l'accélération pour un écoulement tridimensionnel, les équations (3.1) s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} a_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ a_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ a_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial x} + u \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \Rightarrow \vec{F} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla}p = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla} \vec{V} \otimes \vec{V}$$

### IV.3. Equation de continuité



Considérant un fluide parfait incompressible circule par un écoulement permanent dans une veine ou ;

$S_1$  et  $S_2$  respectivement les sections d'entrée et la section de sortie du fluide à l'instant  $t$

$S'_1$  et  $S'_2$  respectivement les sections d'entrée et la section de sortie du fluide à l'instant  $t' (t+dt)$

$V_1$  et  $V_2$  les vecteurs vitesses d'écoulement respectivement à travers les sections  $S_1$  et  $S_2$  de la veine

$dx_1$  et  $dx_2$  respectivement les déplacements des sections  $S_1$  et  $S_2$  pendant l'intervalle de temps  $dt$

$dm_1$  : masse élémentaire entrante comprise entre les sections  $S_1$  et  $S'_1$

$dm_2$  : masse élémentaire sortante comprise entre les sections  $S_2$  et  $S'_2$

$m$  : masse comprise entre  $S_1$  et  $S_2$

$dV_1$  : volume élémentaire entrant compris entre les sections  $S_1$  et  $S'_1$

$dV_2$  : volume élémentaire sortant compris entre les sections  $S_2$  et  $S'_2$

A l'instant  $t$  : le fluide compris entre  $S_1$  et  $S_2$  a une masse égale à  $(dm_1+m)$

A l'instant  $t'$  : le fluide compris entre  $S'_1$  et  $S'_2$  a une masse égale à  $(m+dm_2)$

La masse déplacée étant conservée, on écrit alors :  $dm_1+m = m+dm_2$  ; soit  $dm_1 = dm_2$

Alors :  $\rho_1 dV_1 = \rho_2 dV_2$  ou encore :

$$\rho_1 S_1 dx_1 = \rho_2 S_2 dx_2 \Rightarrow \rho_1 S_1 \frac{dx_1}{dt} = \rho_2 S_2 \frac{dx_2}{dt}$$

Le fluide est incompressible donc  $\rho_1 = \rho_2$

$$\frac{dx_1}{dt} = V_1 \text{ et } \frac{dx_2}{dt} = V_2$$

On obtient  $\boxed{S_1 V_1 = S_2 V_2}$

Cette relation représente l'équation de continuité du débit et aussi l'équation de la conservation de la masse liquide.

D'une manière générale et avec des apports ou des pertes latéraux ( $q$ ) l'équation s'écrit comme suit ;

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = q$$

Ou  $Q$  est le débit volumique

$$Q = \frac{dW}{dt} = \frac{S dx}{dt} = SV$$

Avec ;

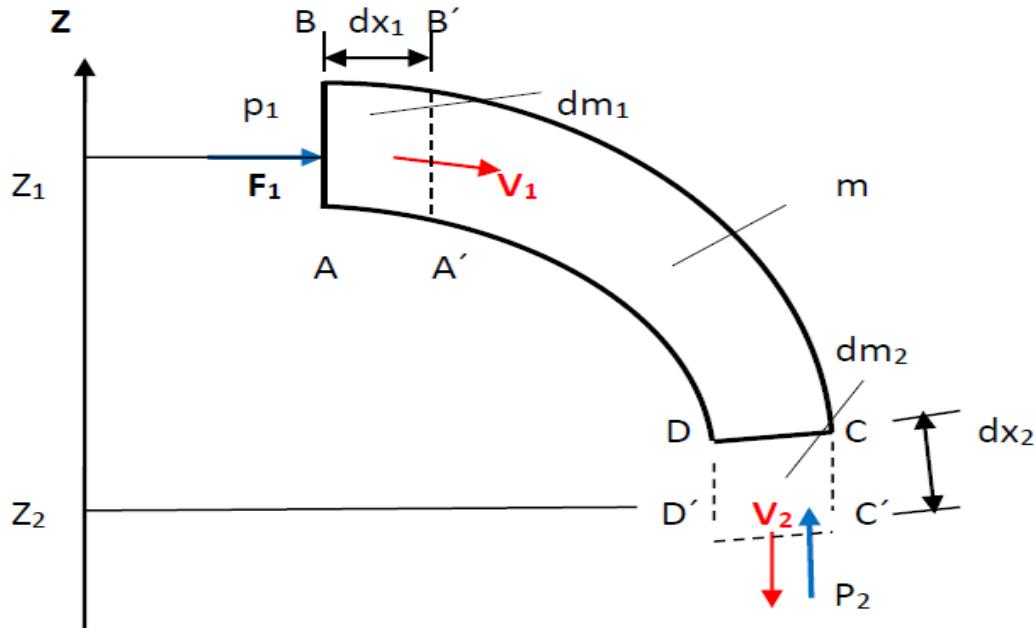
$W$  : Le volume de fluide écoulé dans l'instant  $dt$ .

$S$  : La section transversale de l'écoulement.

$V$  : La vitesse moyenne d'écoulement à travers la section  $S$ .

#### IV. 4. Théorème de Bernoulli

Ce théorème se base sur le principe de conservation de l'énergie d'un fluide dans l'espace.



Considérons que :

- Le fluide est parfait et incompressible, l'écoulement est permanent et la conduite est lisse.
- Appliquons le principe de conservation de l'énergie entre les instants  $t$  et  $t+\Delta t$ . La variation de l'énergie  $\Delta E$  est égale à la somme des travaux des forces extérieures (poids de l'élément fluide, forces de pression).

$$\frac{1}{2}dm_1V_1^2 + dm_1 g Z_1 + P_1S_1dx_1 = \frac{1}{2}dm_2V_2^2 + dm_2 g Z_2 + P_2S_2dx_2$$

$$\frac{1}{2}dm_1V_1^2 + dm_1 g Z_1 + P_1dW_1 = \frac{1}{2}dm_2V_2^2 + dm_2 g Z_2 + P_2dW_2$$

$$\frac{1}{2}dm_1V_1^2 + dm_1 g Z_1 + P_1dm_1/\rho = \frac{1}{2}dm_2V_2^2 + dm_2 g Z_2 + P_2dm_2/\rho$$

$$dm_1 = dm_2 = dm$$

$$\frac{1}{2}dm V_1^2 + dm g Z_1 + P_1dm / \rho = \frac{1}{2}dm V_2^2 + dm g Z_2 + P_2dm / \rho$$

$$\frac{1}{2}V_1^2 + g Z_1 + P_1/\rho = \frac{1}{2}V_2^2 + g Z_2 + P_2/\rho$$

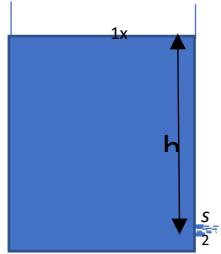
$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} + Z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + Z_2 \quad (m)$$

Cette équation est de forme de hauteur de fluide peut s'écrire en forme de pression de la forme suivante ;

$$\frac{\rho V_1^2}{2} + \rho g Z_1 + P_1 = \frac{\rho V_2^2}{2} + \rho g Z_2 + P_2 \quad (Pa)$$

#### IV.4.1. Ecoulement à travers les orifices

Posant un réservoir de surface transversale  $S$  rempli d'un liquide de masse volumique  $\rho$  percé d'un orifice de section  $s$  situé à une hauteur  $h$  sous la surface libre.



Appliquant le théorème de Bernoulli entre les points 1 et 2 comme suit ;

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} + Z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + Z_2$$

$$P_1 = P_2 = P_{atm}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_2 = Q/S_2 \Rightarrow V_2 \ll (on \ va \ la \ négligé) \\ S \ggg s \end{array} \right.$$

La relation sera comme suit ;

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_{atm}}{\rho g} + Z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_{atm}}{\rho g} + Z_2$$

$$Z_1 = \frac{V_1^2}{2g} + Z_2 \Rightarrow V_2 = \sqrt{2g(Z_1 - Z_2)}$$

$$V_2 = \sqrt{2gh}$$

Cette vitesse est une vitesse soi-disant parfaite ou théorique ( $V_t$ ) dont la vitesse réelle  $V_r = \varphi_v V_t$  ( $\varphi_v < 1$ ) c.a.d  $V_r < V_t$  et ça a cause de la perte d'énergie entre la surface libre et la sortie de l'orifice.

Aussi la section de l'écoulement à la sortie  $s_r < s_{th}$  ou  $s_r = \varphi_s s_{th}$

$$\text{Avec } s_{th} = \pi D^2/4$$

$D$  : diamètre de l'orifice

Le débit d'écoulement est donné en fonction de la vitesse par ;

$$Q_{th} = V_{th} S_{th} = \frac{V_r}{\varphi_v} \frac{S_r}{\varphi_s} = V_r S_r \frac{1}{\varphi_v \varphi_s}$$

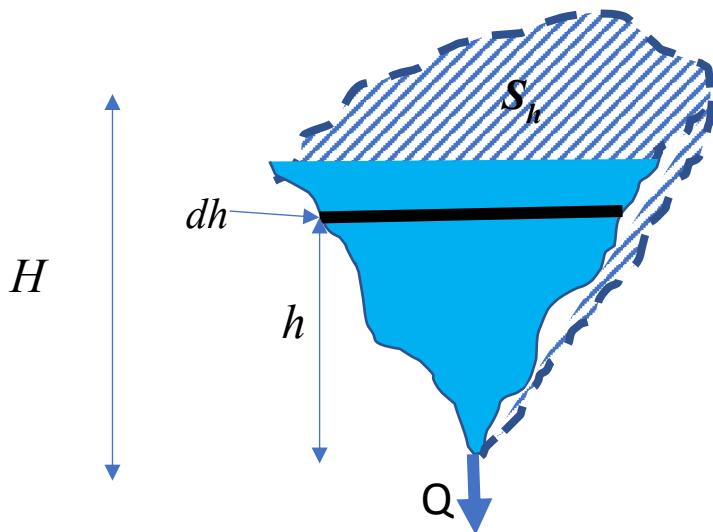
On mit  $\varphi_v \varphi_s = \varphi_q$  on obtient ;

$$Q_{th} = \frac{Q_r}{\varphi_q} \Rightarrow Q_r = \varphi_q Q_{th}$$

#### IV.4.2. Application du théorème de Bernoulli sur quelques exemples

##### d- Vidange d'un réservoir.

La figure présentée au-dessous démontre le vidange d'un réservoir d'une section transversal générale .



##### Calcul du temps de vidange

À un instant  $t$  donné, on a :

$$Q = \varphi_q S_2 \sqrt{2gh} = -\frac{dV}{dt}$$

$dV$ : Volume infiniment petit qui sort du réservoir dans une instant  $dt$

$$dt = -\frac{dV}{\varphi_q S_0 \sqrt{2gh}} = -\frac{S_h dh}{\varphi_q S_0 \sqrt{2gh}} \Rightarrow \int_0^t dt = -\int_0^h \frac{S_h dh}{\varphi_q S_0 \sqrt{2gh}}$$

$S_h$ : Section horizontale au niveau  $h$

Pour un réservoir qu'a une section  $S_h$  variable en fonction de la hauteur  $h$  le temps de vidange est donnés par la formule:

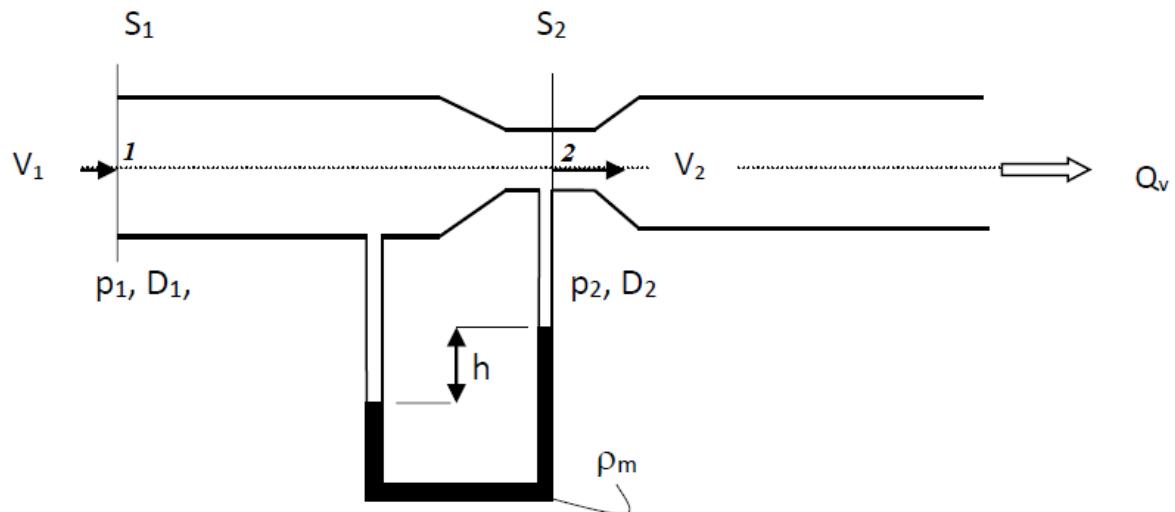
$$t = -\int_H^0 \frac{S_h dh}{\varphi S_0 \sqrt{2gh}} = \int_0^H \frac{S_h dh}{\varphi S_0 \sqrt{2gh}}$$

Pour une section S du réservoir constante le temps de vidange est données par

$$t = \frac{2S\sqrt{H}}{\varphi S_0 \sqrt{2g}}$$

#### e- Tube de venturi

Tube de venturi est une conduite avec rétrécissement ou étranglement comme démontré dans la figure. Généralement cette appareil est utilisé pour de calculer le débit en fonction de la différence de pression ( $\Delta p$ ) ou la dénivellation ( $h$ ).



Par l'application du théorème de Bernoulli entre le point 1 et 2

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} + Z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + Z_2$$

$$Z_1 = Z_2$$

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} \Rightarrow \frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g}$$

Le débit est constant le long de la conduite donc  $Q = \text{cst}$

$$\Rightarrow V_1 S_1 = V_2 S_2 \Rightarrow V_2 = V_1 \frac{S_1}{S_2} \Rightarrow V_2 = V_1 \frac{\pi D_1^2 / 4}{\pi D_2^2 / 4}$$

$$V_2 = V_1 \frac{D_1^2}{D_2^2}$$

$$\Rightarrow \frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \frac{V_1^2 \frac{D_1^4}{D_2^4} - V_1^2}{2g} \Rightarrow \frac{P_1 - P_2}{\rho} = \frac{V_1^2 \left( \frac{D_1^4}{D_2^4} - 1 \right)}{2}$$

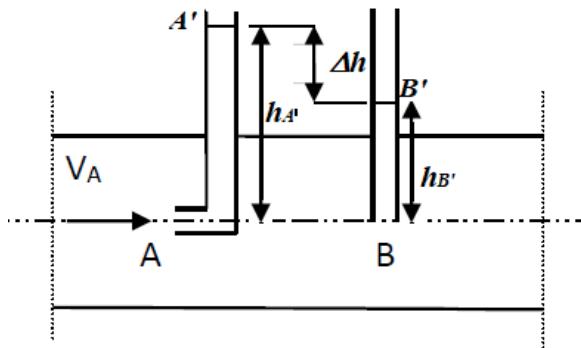
$$V_1 = \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho \left( \frac{D_1^4}{D_2^4} - 1 \right)}}$$

En sachant la section  $S_1$  nous pouvons calculer le débit par la relation

$$Q = V_1 \frac{\pi D_1^2}{4}$$

### f- Tube de Pitot.

le tube de Pitot a pour but de mesurer la vitesse d'écoulement dans un point a l'aide de la différence de hauteurs d'eau comme le montre la figure.



Appliquant le théorème de Bernoulli entre A et A'

$$\frac{V_A^2}{2g} + \frac{P_A}{\rho g} + Z_A = \frac{V_{A'}^2}{2g} + \frac{P_{A'}}{\rho g} + Z_{A'}$$

De l'hydrostatique on a ;

$$\frac{P_A}{\rho g} = \frac{P_B}{\rho g} = \frac{P_{atm} + \rho g h_B}{\rho g}$$

Donc

$$\frac{V_A^2}{2g} + \frac{P_{atm} + \rho g h_B}{\rho g} + Z_A = \frac{V_{A'}^2}{2g} + \frac{P_{atm}}{\rho g} + Z_{A'} \Rightarrow \frac{V_A^2}{2g} = Z_{A'} - Z_A - h_B$$

$$\Rightarrow \frac{V_A^2}{2g} = h_{A'} - h_B \Rightarrow \frac{V_A^2}{2g} = \Delta h$$

Soit ;

$$V_A = \sqrt{2g\Delta h}$$

#### IV.5. Application.

##### Exercice 1 :

Soit un fluide supposé incompressible (eau) qui s'écoule à travers un tube de venturi représenté par la figure 1.

Données :  $\rho_m = 13.6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$   $\rho_{\text{eau}} = 10^3 \text{ kg/m}^3$   $V_1 = 6 \text{ m/s}$   $D_1 = 25 \text{ cm}$

-On demande de calculer le diamètre  $D_2$  si  $p_1 = p_2$

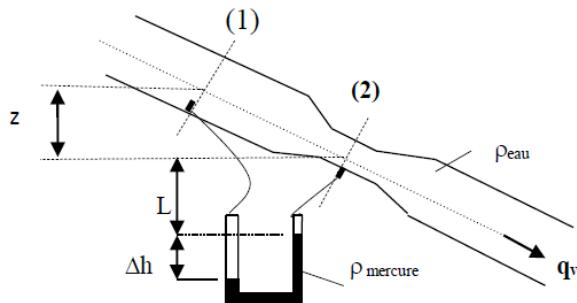
-Si cette pression ( $p_2$ ) est de  $12 \text{ N/cm}^2$ , quelle est la valeur de  $\Delta h$  ?

##### Exercice 2 :

Un tube de venturi est disposé sur une conduite d'eau incliné. Les tubes de liaison au manomètre sont remplis d'eau.

1) Calculer la dénivellation  $\Delta h$  du manomètre en fonction de  $V_1$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $\rho_{\text{eau}}$ ,  $\rho_m$

2) Calculer le débit volumique si  $\Delta h = 90 \text{ mm}$  et  $D_1 = 200 \text{ mm}$  et  $D_2 = 90 \text{ mm}$ .



$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} + Z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + Z_2$$

$$\Rightarrow \frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + Z_2 - Z_1$$

Le débit est constant le long de la conduite donc  $Q = \text{cst}$

$$\Rightarrow V_1 S_1 = V_2 S_2 \Rightarrow V_2 = V_1 \frac{S_1}{S_2} \Rightarrow V_2 = V_1 \frac{\pi D_1^2 / 4}{\pi D_2^2 / 4}$$

$$V_2 = V_1 \frac{D_1^2}{D_2^2}$$

$$\Rightarrow \frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \frac{V_1^2 \frac{D_1^4}{D_2^4} - V_1^2}{2g} + Z_2 - Z_1$$

$$\Rightarrow P_1 - P_2 = \rho \frac{V_1^2 \left( \frac{D_1^4}{D_2^4} - 1 \right)}{2} + \rho g (Z_2 - Z_1) \dots \dots \dots \text{I}$$

$$P_a = P_1 + \rho g (L + z + \Delta h)$$

$$P_b = P_2 + \rho g L + \rho_m g \Delta h)$$

$$P_1 - P_2 = (\rho_m - \rho) g \Delta h - \rho g z$$

$$P_1 - P_2 = (\rho_m - \rho) g \Delta h - \rho g (Z_2 - Z_1) \dots \dots \dots \text{II}$$

$$\text{De I et II } (\rho_m - \rho) g \Delta h - \rho g (Z_2 - Z_1) = \rho \frac{V_1^2 \left( \frac{D_1^4}{D_2^4} - 1 \right)}{2} + \rho g (Z_2 - Z_1)$$

$$\Delta h = \frac{\rho V_1^2 \left( \frac{D_1^4}{D_2^4} - 1 \right)}{2g(\rho_m - \rho)}$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{2g(\rho_m - \rho) \cdot \Delta h}{\rho \left( \frac{D_1^4}{D_2^4} - 1 \right)}}$$

$$V_1 = 0,97$$

$$Q = V_1 \cdot S_1 = V_1 \cdot \frac{\pi D_1^2}{4} = 0,97 \cdot \frac{\pi 0,2^2}{4}$$

$$Q = 0,03 m^3/s = 30 l/s$$

# Chapitre V

## Dynamique des fluides réels

## V.1. Introduction

Avant d'entamer ce sujet il faut prendre une idée sur la notion du turbulence ce phénomène est bien décrit par le physicien Osborne Reynolds.

## V.2. Nombre de Reynolds et régime d'écoulement.

Le nombre de Reynolds est sans dimension et représente le rapport entre les force d'inertie et les forces de viscosité, ce nombre est définie par la relation suivante ;

$$Re = \frac{VD\rho}{\mu} = \frac{VD}{\nu}$$

D : Diamètre de la conduite.

V : Vitesse moyenne d'écoulement.

$\rho$  : Masse volumique du liquide.

$\mu$  : Viscosité dynamique.

$\nu$  : Viscosité cinématique

Pour les dans les conduites trois régimes sont distingués ;

Régime laminaire : Les fils de courant sont en parallèles avec un mouvement calme.

Régime turbulent : apparition d'un mouvement turbulent agité.

Régime transitoire : Est un état de transition entre le régime laminaire et turbulent.

Régime laminaire .....  $Re \leq 2000$

Régime turbulent .....  $Re \geq 3000$

Régime transitoire .....  $2000 < Re < 3000$

## V.3. Théorème de BERNoulli pour fluides réels.

Le frottement des couches du fluide entre elles et avec les parois de la conduite engendre une perte d'énergie du fluide cette perte est appelé perte de charge d'où l'équation de Bernoulli s'écrire comme suit ;

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} + Z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + Z_2 + \Delta H_{1,2}$$

$\Delta H_{1,2}$  : Perte de charge totale entre deux point 1 et 2

La perte de charge dans une conduite est proportionnelle a la longueur de cette conduite, cette proportionnalité est exprimée par le coefficient de perte de charge noté par la lettre grec  $\lambda$ .

Avec ;

$$\frac{\Delta P_{1,2}}{\rho g} = \Delta H_{1,2} = \lambda \frac{V^2}{2g} \frac{L}{D}$$

$\lambda$  : Coefficient de perte de charge.

L : Longueur entre les deux points considérés.

V : Vitesse moyenne d'écoulement.

D : Diamètre de la conduite.

Le coéfficient de perte de charge  $\lambda$  est calculé par les formules suivantes ;

Loi de Poiseuille  $\lambda = \frac{64}{R_e}$  Pour un régime laminaire.

La loi de Blasius  $\lambda = 0,316 R_e^{-1/4}$  Pour régime turbulent et conduite lisse.

La loi de Blench  $\lambda = 0,79 \sqrt{\frac{\varepsilon}{D}}$  Pour régime turbulent et conduite rugueuse

$\varepsilon$  : Rugosité.

D'une façon plus généralisée et pour tous les cas possibles, on peut définir  $\lambda$  par le diagramme de Moody.

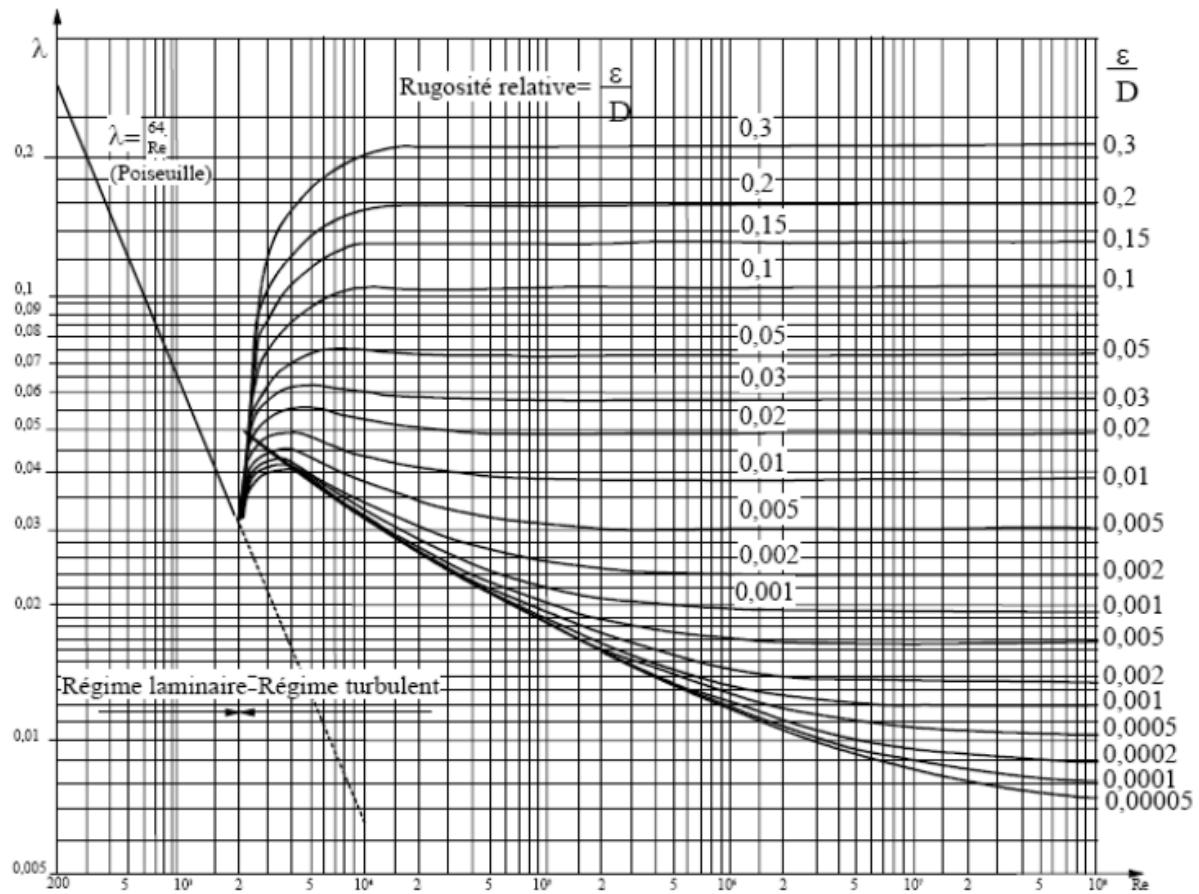


Diagramme de Moody

On distingue deux types de perte de charge

Perte de charge linéaire ( $\Delta H_l$ ), présentées précédemment.

Perte de charge singulière ( $\Delta H_s$ ) liées au singularité trouvées dans la trajectoire de l'écoulement (Coude, divergence, convergence, vanne...) , sont données par la relation suivante ;

$$\Delta H_s = K \frac{V^2}{2g}$$

K : Coefficient de perte de charge singulière dépend de caractéristiques de la singularité.

## V.4. Application

### Exercice 1 :

Du pétrole de viscosité  $\mu=0.11$  Pa.s et de densité 0.9 circule dans une conduite de longueur 1650m et de diamètre 25cm à un débit volumique 19.7 l/s.

- Déterminer la viscosité cinématique du pétrole dans le système SI et le système CGS
- Calculer la vitesse de l'écoulement.
- Calculer le nombre de Reynolds et en déduire la nature de l'écoulement.
- Déterminer le coefficient de perte de charge linéaire et calculer la perte de charge dans la conduite

### Solution

- La viscosité cinématique

$$v = \frac{\mu}{\rho} = \frac{0,11}{900} = 1,22 \cdot 10^{-4} \text{ st}$$

- La vitesse de l'écoulement

$$V = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\pi D^2/4} = \frac{4 \cdot 19,7 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0,25^2} = 0,40 \text{ m/s}$$

- Le nombre de Reynolds

$$R_e = \frac{VD}{v} = \frac{0,40 \cdot 0,25}{1,22 \cdot 10^{-4}} = 819,67$$

$R_e = 819,67 < 2000$  donc le régime est laminaire

$$\lambda = \frac{64}{R_e} = \frac{64}{819,67} = 0,078$$

$$\Delta H = \frac{\lambda L V^2}{2gD} = \frac{0,078 \cdot 1650 \cdot 0,4^2}{2 \cdot 9,81 \cdot 0,25} = 4,20 \text{ m}$$

### Exercice 2 :

Déterminer la perte de charge et la perte de pression d'une huile de densité 0.8 et de viscosité 9 cSt s'écoulant dans une conduite de 20 cm de diamètre et de rugosité absolue  $\varepsilon = 0.25$ mm et de longueur 300m si le débit est de 120 litres par seconde.

### Solution.

$$\Delta H = \frac{\lambda L V^2}{2gD}$$

$$V = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\pi D^2/4} = \frac{0,12}{\pi 0,2^2/4} = 3,82 \text{ m/s} \quad Q=120 \text{ l/s}=0,12 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$R_e = \frac{VD}{\nu} = \frac{3,82 \cdot 0,2}{9 \cdot 10^{-6}} = 8,5 \cdot 10^4$$

$R_e = 8,5 \cdot 10^4 > 2000$  Donc le régime est turbulent

On a

$$\begin{cases} R_e = 8,5 \cdot 10^4 > 2000 \text{ (régime est turbulent)} \\ \text{La conduite est rugeuse } \epsilon = 0,25 \text{ mm} \end{cases}$$

Donc on utilise le diagramme de Moody

$$R_e = 8,5 \cdot 10^4 \quad \text{et} \quad \frac{\epsilon}{D} = \frac{0,25 \cdot 10^{-3}}{0,2} = 1,25 \cdot 10^{-3}$$

Du diagramme on trouve  $\lambda \approx 0,019$

$$\Delta H = \frac{\lambda L V^2}{2gD} = \frac{0,019 \cdot 300 \cdot 3,82^2}{2 \cdot 9,81 \cdot 0,2} = 21,20 \text{ m}$$

La perte de charge exprimé en pression :

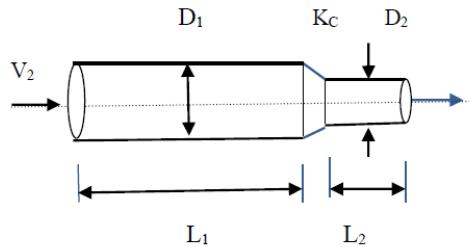
$$\Delta P = \rho g \Delta H = 800 \cdot 9,81 \cdot 21,20 = 166,38 \text{ kPa}$$

### Exercice 3 :

Une conduite constituée de deux tronçons (fig) de diamètres et de longueurs différentes transportant une huile de masse volumique  $\rho_h = 850 \text{ kg/m}^3$  et de viscosité cinétique  $10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$

- Calculer la différence de pression entre l'entrée et la sortie de la conduite sachant que :

$$L_1 = 5 \text{ m} \quad L_2 = 0,2 \text{ m} \quad D_1 = 20 \text{ mm} \quad D_2 = 5 \text{ mm} \quad V_1 = 0,5 \text{ m/s} \quad K_c = 0$$

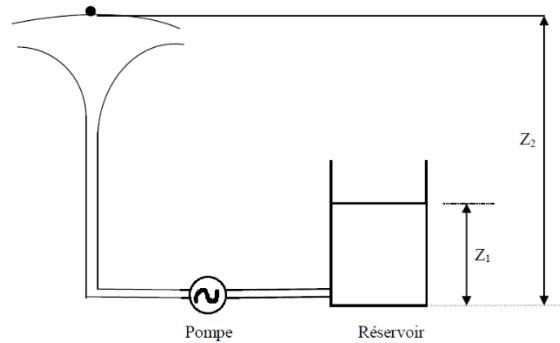


### Exercice 4 :

Un jet d'eau est alimenté à parti d'un réservoir de grandes dimensions au moyen d'une pompe centrifuge de débit volumique de 2 l/s, à travers une conduite de longueur 15m et de diamètre intérieur de 3cm. La conduite présente un coude de  $90^\circ$  ( $K_c=0.3$ ),  $\mu_{\text{eau}} = 10^{-3} \text{ Pa.s}$

1) Calculer la vitesse de l'écoulement

- 2) Calculer le nombre de Reynolds et préciser la nature de l'écoulement
- 3) Calculer le coefficient de perte de charge
- 4) Calculer la perte de charge totale dans le circuit
- 5) Calculer la puissance nette de la pompe
- 6) En déduire la puissance absorbée (Pa) par la pompe sachant que son rendement est de 75%



**Réponse ;  $V=2,83 \text{ m/s}$  ,  $Re= 84900$  ,  $\lambda=0,018$  ,  $\Delta H=3,8$  ,  $P_n=211,74 \text{ wat}$**   
 **$P_a=282,3 \text{ wat}$**

## **Références bibliographiques**

1. Candel S. Mécanique des fluides, Dunod, 1990
2. Comolet R. Mécanique expérimentales des fluides, Vol.1, 2 et 3, Masson, 1981
3. Ouziau R., Perrier J. Mécanique des fluides appliquée, Dunod, paris, 1998
4. Nekrassov B. Cours d'hydraulique, éditions Mir, 1967
5. Lumbroso H. Problèmes résolus de mécanique des fluides, Dunod, 1989
6. Carlier M. Hydraulique générale et appliquée, éditions Eyrolles, Paris, 1986
7. Padet J. Fluides en écoulement, Masson, 1991
8. Douglas J.F. Solution of problems in fluid mechanics, Pitman, 1985
9. Youcefí A. Cours et Travaux Dirigés de mécanique des fluides, USTO-MB, 2016
10. Loukarfi L. Exercices résolus de mécanique des fluides, Dar El Oumma, 1999