République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Ahmed Zabana Relizane

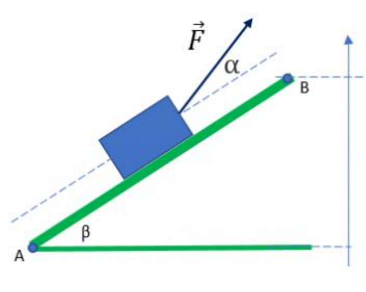
Faculté des Science et Technologies

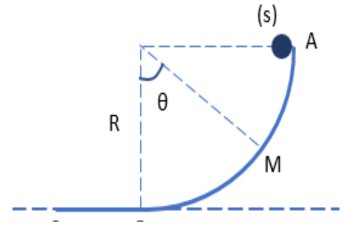
Polycopié
Travaux Dirigés Corrigés
Mécanique du point matériel

1 er Année (L.M.D), Sciences et Technologie (S.T) et Sciences de la Matière (SM)

Élaboré par :

Dr: Fethi BOUDAHRI





Année Universitaire : 2021/2022

AVANT–PROPOS

Ce polycopié est destiné aux étudiants de première année du système Licence-Master-Doctorat (L.M.D), spécialité : Sciences de la Matière (SM) et Sciences et Technologie (S.T). Il comporte des exercices résolus sur les différents chapitres du module de Physique 1 (Mécanique du point). Les sujets des examens finaux, qui ont été faits entre 2012 et 2019 au centre universitaire de Relizane avec les corrections respectives, sont disposés. Ces exercices couvrent les quatre chapitres du programme de cours de la mécanique du point matériel :

- Outil mathématique : vecteurs et systèmes de coordonnées.
- Cinématique du point matériel.
- Dynamique du point matériel.
- Travail et énergie.

L'ensemble des exercices et examens résolus devrait permettre aux étudiants :

- De consolider leurs connaissances,
- Un entrainement efficace afin de s'assurer que le cours est bien assimilé,
- D'acquérir les outils et techniques nécessaires à leur formation,
- D'initier leurs cultures scientifiques en mécanique du point matériel.

Chaque chapitre s'ouvre par la précision des objectifs visés et des prérequis nécessaires. Pour se mettre en situation d'épreuves, de nombreux exercices et problèmes d'examens supplémentaires sont proposés à la fin de chaque chapitre.

Je dois souligner que ce document ne remplace en aucun cas le TD en présentiel. Comme pour tous les exercices auto-correctifs, les solutions profitent plus aux étudiants qui fournissent l'effort nécessaire pour réfléchir et essayer de résoudre les exercices proposés.

Je souhaite que ce recueil d'exercices et problèmes examens résolus de mécanique du point matériel puisse aider de manière efficace la majorité d'étudiants.

F.BOUDAHRI

Sommaire

CHAPITRE : I

RAPPEL MATHEMATIQUE ET DIMENSION

Objectifs :

- L'analyse dimensionnelle permet de vérifier l'homogénéité d'une formule.
- L'analyse dimensionnelle permet de passer d'un système d'unités à un autre.

Prérequis :

- L'analyse dimensionnelle permet de déterminer la structure des lois physiques compatible avec les grandeurs décrivant le phénomène étudié (longueur, vitesse, force, résistance électrique, champ électrique …)

Série de TD n° 01

Exercice 1 :

Les dimensions et les unités des grandeurs physiques fondamentales sont données dans le tableau suivant :

Grandeurs physique	longueur	masse	temps	Intensité électrique	température	Quantité de matière	Intensité lumineuse
Symbole	l	m	t	i	*T*	n	j
Dimension	L	M	T	I	Θ	N	J
Nom de l'unité	mètre	kilogramme	seconde	ampère	Degré Kelvin	mole	Candela
Symbole de l'unité	m	kg	s	A	K	mol	Cd

En utilisant les lois physiques faisant intervenir les grandeurs demandées, donner la dimension et l'unité correspondante dans le système international (SI).

D'une vitesse linéaire et angulaire – d'une accélération – d'une force – d'une pression – d'un travail – d'une énergie – d'une puissance électrique - d'une charge électrique – d'un champ électrique - d'une résistance – d'une tension électrique.

Exercice n°2 :

En utilisant les dimensions des grandeurs de base, compléter le tableau suivant :

Grandeur physique	Symbole	Formule utilisée	Dimension	Unité (SI)
Vitesse linéaire	v			
Vitesse angulaire	ω			
Accélération	γ			
Force	F			
Pression	p			
Travail	W			
Energie	E			
Charge électrique	q			
Champ électrique	E			
Différence de potentiel	u			
Résistance électrique	R			
Puissance électrique	P_e			

Exercice n° 3 :

Un étudiant a constaté, dans un laboratoire de physique, que la position **x** d'un électron en fonction de son accélération **a** et du temps **t** s'écrit sous la forme $x = K.a^{\alpha}.t^{\beta}$, k étant une constante sans dimension.

1. Déterminer l'expression exacte de la position en calculant α et β.

2. En utilisant la méthode logarithmique, trouver l'incertitude relative sur la position x en fonction de Δa et Δt.

Exercice n°4 :

1. Trouver les dimensions des grandeurs physiques suivantes :

La constante universelle de gravitation G, la permittivité du vide ε_0 et la perméabilité magnétique du vide μ_0 , en sachant que ces trois constantes apparaissent dans les équations suivantes :

$F = -G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}$, $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$, $F = \frac{\mu_0}{2\pi}\,\frac{L\,I^2}{r}$

Où F est une force, m_1 et m_2 des masses, q_1 et q_2 des charges électriques, L et r des distances et I l'intensité du courant électrique.

2. La vitesse de la lumière c est fonction de ces trois constantes : $c = kG^{\alpha}\varepsilon_0^{\beta}\mu_0^{\gamma}$

Trouver l'expression de c .

Exercice n°5 :

Un ressort est caractérisé par sa constante de raideur (k) et sa longueur au repos (l_0). Lorsqu'il subit une déformation, l_0 devient alors l = l_0, et il existe une force de rappel de module

$$F = k.\left|l - l_0\right|$$

1- Quelle est la dimension de k ?

2- Montrer que l'expression $\frac{1}{2}k\left(l - l_0\right)^2$ est homogène à une énergie.

Exercice n°6 :

Donner l'expression de la période T d'un pendule formé d'une boule de rayon R et de masse m, sachant qu'elle dépend du coefficient de viscosité de l'air η, du rayon de la boule R et de sa masse volumique ρ. [On peut écrire $T = f(\eta, R, \rho)$]

On donne la force de viscosité de Stocks par: $f_s = -6\pi.\eta.R.v$;

avec v est la vitesse linéaire de la boule.

Exercice n°7:

On suspend un solide de masse m à un ressort de raideur K. L'expérience montre que la période T est donnée par la relation :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

1. Trouver la dimension de K. Quelle est son unité dans le SI ?
2. Trouver l'expression de l'accélération de la pesanteur g en la supposant de la forme :

$$g = Cm^{\alpha}d^{\beta}k^{\gamma}$$

Où

C : est une constante sans dimension, d : est l'allongement du ressort à l'équilibre.

3. Déterminer l'incertitude relative sur g en fonction de $\Delta m, \Delta k$ et Δd.

Exercice n°8 :

L'équation d'état d'un gaz parfait est (p.V=n.R.T), où p est la pression du gaz, V le volume qu'il occupe, n le nombre de moles de gaz et T sa température.

a- Quelle est la dimension de la constante universelle des gaz parfait R ? Quelle est son unité dans le système international ?

b- L'équation d'état d'une molécule de gaz réel est donnée par :

$$p = \left(\frac{R.T}{V - b}\right).\exp\left(\frac{-a}{R.T.V}\right)$$

Dans cette expression a et b sont des coefficients tels que a=3,5 .10^{-3} SI et b=2,5 .10^{-5} SI.

- Donner les équations aux dimensions de a et b.

Exercice 9:

1) La période **T** d'un pendule, formé d'une boule de rayon **R**, attachée par un fil de longueur **L**, est donnée par la relation : $T = K.\frac{R^2.\rho}{\eta}$

Où **η**: coefficient de viscosité de l'air dont l'unité est (**kg.m^{-1} s^{-1}**), ρ: masse volumique de la boule et **K**: constante sans dimension.

- Trouver la dimension de **T**. Quelle est son unité dans le système international (MKSA) ?

2) La période **T** d'un pendule simple de masse **m** et de longueur **L** peut se mettre sous la forme: (**T= A.g^x.L^y.m^z**), **g** étant l'accélération de la pesanteur et **A** une constante sans dimension. Déduire l'expression de **T**.

Exercice n°10:

a- Les résultats de différentes mesures sont exprimés de la façon suivante:

t=23 s, m=0,5 kg, R= 534 Ω avec une précision de 10% et L=$\left(36,0\pm0,3\right)$m .

Pour chacune de ces grandeurs, donner l'intervalle de variation de la grandeur mesurée.

b- Les longueurs a, b, c et d ont été mesurées avec différents protocoles. Pour chacune, l'écriture des résultats proposée ici vous parait-elle cohérente? Donner la bonne écriture de ces grandeurs.

$a=\left(27\pm0,02\right)cm$, $b=\left(5,337\pm0,04\right)m$, $c=\left(1234,1\pm2,3\right)km$, $d=\left(50,17\pm6\right)mm$

Exercice n°11:

Afin de trouver la vitesse moyenne v d'un mobile sur une table à coussin d'air, un étudiant mesure la distance d parcourue durant un intervalle de temps t. il trouve d=(5.10±0.01)m et t=(6.02±0.02)s. les incertitudes sont indépendantes.

1- Que vaut la vitesse v ainsi que son incertitude absolue Δv ?

2- Quelle est la valeur réelle de la quantité de mouvement du mobile (p=m.v), sachant que sa masse vaut : m = (0.711±0.002) kg ?

Exercice n°12:

On cherche à déterminer l'accélération de la pesanteur (g) à partir d'un pendule simple, en utilisant la relation de la période (T) donnée par :

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ Ou l est longueur du pendule.

On mesure l=15cm à 2% prés et T=0,8s à 3% prés. (π^2 =10).

Calculer la valeur de g ainsi que précision et écrire sous forme : G=g_0+Δg

Exercice n°13:

Soit la fonction suivante :

g= $\frac{3u^2+v^2}{6u}$

Donnez l'incertitude sur la grandeur g en utilisant :

a- La méthode de la différentielle totale.

b- La méthode logarithmique.

Exercice n°14:

Une grandeur physique G s'écrit sous la forme suivante :

c- $G = \frac{t^2 lg}{4\pi} - l^2$

Où *t* : désigne le temps, *l : une* longueur et g *:* l'accélération de la pesanteur.

1. Trouver l'équation aux dimensions de G. En déduire son unité.

2. Δt et Δl représentent, respectivement, les incertitudes absolues sur t et *l*. Déterminer la relation qui donne l'incertitude absolue ΔG.

Exercice n°15 :

La hauteur H d'un liquide de masse M contenu dans un cylindre de rayon R est donnée par la relation :

d- $H = \frac{2\sigma cos\alpha}{\rho gR}$

Où α est l'angle de contact liquide-cylindre et représente la masse volumique du liquide et g l'accélération de la pesanteur.

1. Trouver la dimension de la grandeurσ.

2. Trouver l'expression de l'incertitude relative sur σ en fonction de ΔR; Δg; ΔM et $\Delta\alpha$.

Exercice n°16:

Dans un gaz, une particule de masse **m** animée d'une vitesse v, enfermée dans une boite cubique de côté **a** et une énergie cinétique **E**, telle que :

$$\mathbf{E}=\frac{\boldsymbol{h^2.n^2}}{\boldsymbol{32.\pi^2.m.a^2}}$$

Où **n** représente un nombre entier sans dimension.

1) Trouver la dimension de h en utilisant les équations aux dimensions.
2) Calculer l'incertitude relative sur **E** en fonction $\Delta\boldsymbol{h}, \Delta\boldsymbol{m}\ et\ \Delta\boldsymbol{a}$.

Exercice n°17 :

Dans un pendule conique, la période est donnée par la relation :

$$T = 2.K.\sqrt{\frac{L.\cos(\theta)}{\sigma}}$$

1. Trouvez la dimension et l'unité SI de σ, sachant que k est une grandeur sans dimension, L est la longueur du fil et θ est l'angle de déviation du fil.
2. Trouvez l'expression de l'incertitude relative sur σ en fonction $\Delta T, \Delta K\ et\ \Delta L$.

Exercice n°18 :

La troisième loi de Kepler, qui relie la période (T) et le demi-grand axe (a) de l'orbite d'une planète autour du soleil, s'écrit sous forme : $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G.M_S}$

Où (G) est la constante de gravitation universelle et (M_S) la masse du soleil.

Pour la planète terre, T=(365,25636567±0,00000001)jours et a=(1,4960±0,0003).10^{+11} m.

Nous donnons également G=(6,668±0,005).10^{+11} SI .

1. Déterminer la dimension et l'unité de G.
2. Calculer la masse du soleil et l'erreur absolue de cette masse (ΔM_S) en utilisant la différentielle totale.
3. **Vérifier** de l'homogénéité de l'expression suivante : $T_0 = 2\pi.\sqrt{\frac{l}{g}}$ (période d'un pendule simple).

Corrigés : série TD N° 01

Exercice n°01

Grandeur physique	**Symbole**	Formule utilisée	**Dimension**	**Unité (SI)**
Vitesse linéaire	v	$v = x/t$	$[v] = L.T^{-1}$	$m.s^{-1}$
Vitesse angulaire	ω	$v = \omega.r$	$[\omega] = T^{-1}$	$rd.s^{-1}$
Accélération	γ	$\gamma = v/t$	$[\gamma] = L.T^{-2}$	$m.s^{-2}$
Force	F	$F = m.\gamma$	$[F] = M.L.T^{-2}$	kg m s^{-2} Newton (N)
Pression	P	$p = F/s$	$[p] = M.L^{-1}.T^{-2}$	kg $m^{-1}s^{-2}$ Pascal (Pa)
Travail	W	$W = F.l$	$[W] = M.L^{2}.T^{-2}$	kg m^2 s^{-2} Joule (J)
Energie	E	$E = \frac{1}{2}.m.v^2$	$[E] = M.L^{2}.T^{-2}$	kg m^2 s^{-2} Joule (J)
Puissance électrique	Pe	$P_e = E/t$	$[P] = M.L^{2}.T^{-3}$	Watt
Charge électrique	q	$dq = i.dt$	$[q] = I.T$	Coulomb
Champ électrique	E	F=q.E	$[E] = M.L.T^{-3}.I^{-1}$	Volt/m
Résistance électrique	R	$R = P_e/t^2$	$[R] = M.L^{2}.T^{-3}.I^{-2}$	Ohm
Différence de potentiel (Tension électrique)	u	$u = R.I$	$[u]=M. L^2 .T^{-3} I^{-1}$	Volt

Exercice n°02 :

Grandeur physique	Symbole	Formule utilisée	Dimension	Unité (SI)
Vitesse linéaire	v	$v = x/t$	$[v] = L.T^{-1}$	$m.s^{-1}$
Vitesse angulaire	ω	$v = \omega.r$	$[\omega] = T^{-1}$	$rd.s^{-1}$
Accélération	γ	$\gamma = v/t$	$[\gamma] = L.T^{-2}$	$m.s^{-2}$
Force	F	$F = m.a$	$[F] = M.L.T^{-2}$	kg m s^{-2} Newton (N)
Pression	P	$p = F/s$	$[p] = M.L^{-1}.T^{-2}$	kg $m^{-1}s^{-2}$ Pascal (Pa)
Travail	W	$W = F.l$	$[W] = M.L^{2}.T^{-2}$	kg m^{2} s^{-2} Joule (J)
Energie	E	$E = \frac{1}{2}.m.v^{2}$	$[E] = M.L^{2}.T^{-2}$	
Charge électrique	q	$dq = i.dt$	$[q] = I.T$	Coulomb
Champ électrique	E	F=q.E	$[E] = M.L.T^{-3}.I^{-1}$	Volt/m
Différence de potentiel	u	u=r.E	$[u]=M.L^{2}.T^{-3}I^{-1}$	Volt
Résistance électrique	R	R=u/i	$[R] = M.L^{2}.T^{-3}.I^{-2}$	Ohm
Puissance électrique	P	$P = R.i^{2}$	$[P] = M.L^{2}.T^{-3}$	Watt

Exercice n°03

1. Expression de (x):

On a :

x

$x = K.a^{\alpha}.t^{\beta} \Rightarrow [x] = [K].[a]^{\alpha}.[t]^{\beta}$

Avec, x : longueur $\Rightarrow [x] = L$;

a: accélération $\Rightarrow [a] = LT^{-2}$;

t : temps $\Rightarrow [t] = T$

$k: constante \Rightarrow [K] = 1$

donc

$[x] = [K].[a]^{\alpha}.[t]^{\beta}$

$$L = 1.(LT^{-2})^{\alpha}.(T)^{\beta}$$

$L = L^{\alpha}T^{-2\alpha+\beta}$

Par identification: α=1 et β=-2

Enfin $x = K.a^1.t^2 \Rightarrow x = K.a.t^2$

$$x = K.a.t^2$$

$x = K.a.t^2 \Rightarrow \log(x) = \log(K.a.t^2)$

$\log(x) = \log(k) + \log(a) + 2\log(t)$

Dérivons cette expression :

$[\log(x)]' = [\log(K)]' + [\log(a)]' + 2[\log(t)]'$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dK}{K} + \frac{da}{a} + 2\frac{dt}{t}$$

$$\Rightarrow \frac{dg}{g} = \frac{da}{a} + 2\frac{dt}{t} \quad car\ dK = 0\ , K: constant$$

Passons à la notation absolue :

$$\Rightarrow \frac{\Delta \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}} = \frac{\Delta \boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}} + 2\frac{\Delta \boldsymbol{t}}{\boldsymbol{t}}$$

Exercice n°04:

On a $F = k|l - l_0| \Rightarrow k = \frac{F}{||l-l_0||} = \frac{F}{\Delta l}$

Donc $[k] = \frac{[F]}{[\Delta l]} = \frac{MLT^{-2}}{L} = MT^{-2}$

Energie $[E] = ML^2T^{-2}$ Voir exercice n°1

D'autre part on a :

$$\left[\frac{1}{2}k(l-l_0)^2\right] = \left[\frac{1}{2}\right][k][(l-l_0)^2] = 1.MT^{-2}.L^2 = ML^2T^{-2} = [E]$$

Exercice n°05:

1)

a) [G]= ?

$$G = \frac{-F.r^2}{m_1.m_2} \quad \Rightarrow [G] = \frac{[-1].[F].[r^2]}{[m_1].[m_2]} \quad \Rightarrow [G] = \mathrm{M}^{-1}.\mathrm{L}^3.\mathrm{T}^{-2}$$

b) $[\varepsilon_0] = ?$

$$\mathrm{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{q_1.q_2}{r^2} \Rightarrow \varepsilon_0 = \frac{q_1.q_2}{4\pi.F.r^2} \Rightarrow [\varepsilon_0] = \frac{[q_1].[q_2]}{[4\pi].[F].[r]^2} \Rightarrow [\varepsilon_0] = \mathrm{M}^{-1}.\mathrm{L}^{-3}.\mathrm{T}^{4}.\mathrm{I}^{2}$$

c) $[\mu_0] = ?$

$$F=\frac{\mu_0}{2\pi}.\frac{L.I^2}{r} \Rightarrow \mu_0=\frac{2\pi.F.r}{L.I^2} \Rightarrow [\mu_0]=\frac{[F].[2\pi].[r]}{[L].[I]^2} \Rightarrow [\mu_0]=M.L.T^{-2}.I^{-2}$$

2) Expression de (c):

$$c=k.G^{\alpha}.\varepsilon_0^{\beta}.\mu_0^{\gamma} \Rightarrow [c]=[k].[G]^{\alpha}.[\varepsilon_0]^{\beta}.[\mu_0]^{\gamma}$$

Avec, c : vitesse $\Rightarrow [c]=L.T^{-1}$

Par identification: $\alpha=0$ et $\beta=\gamma=-\frac{1}{2}$

Enfin $c=k.G^{\alpha}.\varepsilon_0^{\beta}.\mu_0^{\gamma}=k.G^{0}.\varepsilon_0^{-1/2}.\mu_0^{-1/2}=k.\frac{1}{\varepsilon_0^{+1/2}.\mu_0^{+1/2}} \Rightarrow c=k.\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0.\mu_0}}$

Exercice n°06:

La période (T) dépend de η, R et ρ, on peut écrire : $T=k.\eta^a.R^b.\rho^c$

Avec η : coefficient de viscosité donné par la relation :

$$f_s=-6\pi.\eta.R.v \Rightarrow \eta=\frac{-f_s}{6\pi.R.v} \Rightarrow [\eta]=\frac{[f_s]}{[-6\pi].[R].[v]}=ML^{-1}T^{-1}$$

ρ : est la masse volumique $\Rightarrow [\rho]=\frac{[m]}{[V]}=\frac{M}{L^3}=M.L^{-3} \Rightarrow [\rho]=M.L^{-3}$

L'équation $T=k.\eta^a.R^b.\rho^c$ étant homogène on peut écrire:

$$[T]=[k].[\eta]^a.[R]^b.[\rho]^c$$

$$\begin{cases}[T]=T & (T:\text{période})\\ [k]=1 & (k:\text{constante})\end{cases}$$

Par identification: a=-1 , b=2 et C=1

On trouve : $T = k.\eta^{-1}.R^{2}.\rho^{1}$ ou encore $T = k.\dfrac{\rho.R^{2}}{\eta}$

Exercice n°07:

1) $\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}}$

[K]= ?

K= $\frac{4\pi^2 m}{T}$ $\Rightarrow$[K] = $\frac{[4][\pi^2][m]}{[T^2]}$

$[4] = 1;\ [\pi] = 1;\ [m] = M;\ [T] = T$

Donc **[K]**= $\frac{1.1.M}{T^2}$=**M**$\boldsymbol{T^{-2}}$

L'unité en SI est kg/$\boldsymbol{s^2}$

2) $g = Cm^{\alpha}d^{\beta}k^{\gamma}$

$[g] = [C][m]^{\alpha}[d]^{\beta}[k]^{\gamma}$

On a : $[g] = \mathrm{L}T^{-2}; [C] = 1; [m] = M; [d] = L; [k] = \ \mathrm{M}T^{-2}$

Donc : $\mathrm{L}T^{-2} = 1. M^{\alpha}. L^{\beta}. (\mathrm{M}T^{-2})^{\gamma} = L^{\beta}\ . T^{-2\gamma}. M^{\alpha+\gamma}$

Par identification on obtient :

$$\begin{cases} \beta = 1 \\ -2\gamma = -2 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \gamma = 1 \\ \alpha = -1 \end{cases}$$

Donc :

$$g = C\frac{d.K}{m}$$

$g = C\frac{d.K}{m}$ $\Rightarrow$log (g) = log $(C\frac{d.K}{m})$

$\log(g) = \log(C) + \log(d) + \log(K) - \log(m))$

Dérivons cette expression :

$$[\log(g)]' = [\log(C)]' + [\log(d)]' + [\log(K)]' - [\log(m)]'$$

$$\Rightarrow \frac{dg}{g} = \frac{dC}{C} + \frac{dd}{d} + \frac{dK}{K} - \frac{dm}{m}$$

$$\Rightarrow \frac{dg}{g} = \frac{dd}{d} + \frac{dK}{K} - \frac{dm}{m} \quad car\ dC = 0\ , C : constant$$

Passons à la notation absolue :

$$\Rightarrow \frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta K}{K} + \frac{\Delta m}{m}$$

Exercice n°08 :

a- $[R] = ?$

$$p.V = n.R.T \quad \Rightarrow \quad R = \frac{p.V}{n.T} \qquad .....(1)$$

L'équation (1) nous permet d'écrire $[R] = \frac{[p].[V]}{[n].[T]}$ .....(2)

Sachant que:

$$\begin{cases} p : \text{ pression} & \Rightarrow \quad [p] = M.L^{-1}.T^{-2} \\ V : \text{volume} & \Rightarrow \quad [V] = L^{3} \\ n : \text{ nombre de mole} & \Rightarrow \quad [n] = N \\ T : \text{ température} & \Rightarrow \quad [T] = \theta \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow [R] = \frac{(M.L^{-1}.T^{-2}).(L^{3})}{(N).(\theta)} = M.L^{2}.T^{-2}.N^{-1}.\theta^{-1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{[R] = M.L^{2}.T^{-2}.N^{-1}.\theta^{-1}}$$

- L'unité de (R) dans le (SI) est donc : $kg.m^{2}.K^{-1}.s^{-2}mol^{-1}$ ou $J.K^{-1}.mol^{-1}$.

b- $[a] = ?$ **et** $[b] = ?$

$$p = \left(\frac{RT}{V-b}\right).\exp\left(\frac{-a}{R.T.V}\right)$$

- On sait que deux grandeurs physiques ne s'additionnent que si elles ont la même dimension $\Rightarrow [V] = [b] = L^3 \Rightarrow \boxed{[b] = L^3}$

- On sait aussi que l'argument $f = \frac{-a}{R.T.V}$ de la fonction exponentielle est sans dimension :

$$\Rightarrow [f] = \left[\frac{-a}{R.T.V}\right] = 1 \Rightarrow [-a] = [R.T.V]$$

$$\Rightarrow [a] = [R].[T].[V] = (M.L^2.T^{-2}.N^{-1}.\theta^{-1}).(\theta).(L^3) \Rightarrow [a] = ML^5T^{-2}N^{-1}$$

Exercice n°09

1. Dimension de (T):

$$\boldsymbol{T = K.\frac{R^2.\rho}{\eta} \Rightarrow [T] = [K]\frac{[R]^2.[\rho]}{[\eta]}}$$

On a : R: longueur $\Rightarrow [R] = L$;

ρ: masse volumique $\Rightarrow [\rho] = ML^{-3}$;

η : Coefficient de viscosité $\Rightarrow [\eta] = ML^{-1}T^{-1}$

$k: constante \Rightarrow [K] = 1$

Donc $[\boldsymbol{T}] = 1.\frac{L^2.ML^{-3}}{ML^{-1}T^{-1}} = \mathbf{T}$

Son unité dans (SI) est **s (second)**

$T = A.g^x.L^y.m^z \Rightarrow [T] = [A].[g]^x.[L]^y.[m]^z$

On a : A : constante $\Rightarrow [A] = 1$

g : accélération de a pesanteur ⇒ $[g]=LT^{-2}$

L : longueur⇒ $[L] = L$; m: masse⇒ $[m] = M$; et T : période ⇒ $[T] = T$

$$T=1.(LT^{-2})^{x}.(L)^{y}.(M)^{z}=(L)^{x+y}.T^{-2x}.M^{z}$$

Par identification :

$$\begin{cases}-2x = 1\\ x + y = 0\\ z = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}\\ y = \frac{1}{2}\\ z = 0\end{cases}$$

Enfin $\boldsymbol{T = A.(g)^{-\frac{1}{2}}.(L)^{\frac{1}{2}} = A\sqrt{\frac{L}{g}}}$

Exercice n°10:

t= 23 s, m=0,5kg, R=534Ω, L_R=(36,0±0,3)m, $\frac{\Delta t}{t} = \frac{\Delta m}{m} = \frac{\Delta R}{R} = 10\%$

$(20,7 \le t_R \le 25,3)\,s$, $(0,45 \le m_R \le 0,55)\,kg$, $(480,6 \le R_R \le 587,4)\,\Omega$, $(35,7 \le L_R \le 36,3)\,m$

Compte tenu de ce qui précède, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
&a = (27 \pm 0,02)\quad cm \;\rightarrow\; a = (27,00 \pm 0,02)cm\\
&b = (5,337 \pm 0,04)m \;\rightarrow\; b = (5,337 \pm 0,040)m \; ou\, (5,34 \pm 0,04)m\\
&c = (1234,1 \pm 2,3)\,km \;\rightarrow\; c = (1234,1 \pm 2,3)km\\
&d = (50,17 \pm 6)\quad mm \;\rightarrow\; d = (50,17 \pm 6,00)mm \; ou\, (50 \pm 6)mm
\end{aligned}$$

Exercice n°11:

$$d = (5,10 \pm 0,01)\,m \rightarrow \begin{cases} d_0 = 5,10\,m\\ \Delta d = 0,01m\end{cases} \qquad b = (6,02 \pm 0,02)s \rightarrow \begin{cases} t_0 = 6,02\,s\\ \Delta t = 0,02\,s\end{cases}$$

a- Vitesse : v = ? $v = (v_0 \pm \Delta v)$

On sait que la vitesse est donnée par la relation suivante :

$$v = \frac{d}{t} \;\Rightarrow\; \log(v) = \log(d) + \log(t) \;\Rightarrow\; \frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta t}{t}$$

$$\begin{cases} v_0 = \dfrac{5,10}{6,02} = 0,847\,m.s^{-1} \quad \Rightarrow \quad v_0 = 0,847\,m.s^{-1} \\ \dfrac{\Delta v}{v_0} = \dfrac{0,01}{5,1} + \dfrac{0,02}{6,02} = 0,52\,\% \Rightarrow \Delta v = v_0 \times 5,2.10^{-3} = 0,847 \times 5,2.10^{-3} \Rightarrow \Delta v = 4,4.10^{-3}\,m.s^{-1} \end{cases}$$

$$v=(0,847\pm 0,0044)\text{ms}^{-1}$$

a- P= ?

$$p = m.v \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} p_0 = m_0 . v_0 \\ \dfrac{\Delta p}{p_0} = \dfrac{\Delta m}{m_0} + \dfrac{\Delta v}{v_0} \end{cases}$$

On trouve : $\text{p} = (0{,}6022 \pm 0{,}0048)\,\text{kg.m.s}^{-1}$ ou $(0{,}5974 \le \text{p} \le 0{,}6070)\,\text{kg.m.s}^{-1}$

Exercice n°12:

$$T = 2\pi . \sqrt{\frac{L}{g}} \quad \Rightarrow \text{g} = \frac{4\pi^2 L}{T^2} \quad (2)$$

$$\begin{cases} L_0 = 15cm = 0,15m \\ \dfrac{\Delta L}{L_0} = 2\% = 0,02 \end{cases} \qquad \begin{cases} T_0 = 0,8\,s \\ \dfrac{\Delta T}{T_0} = 3\% = 0,03 \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow \begin{cases} g_0 = \dfrac{4\pi^2 . L_0}{T_0^{\,2}} \\ \dfrac{\Delta g}{g_0} = \dfrac{\overbrace{\Delta\left(4\pi^2\right)}^{0}}{4\pi^2} + \dfrac{\Delta L}{L_0} + 2.\dfrac{\Delta T}{T_0} \end{cases}$$

$$g = (9,375 \pm 0,750)\ m.s^{-2} \quad ou \quad (8,625 \le g \le 10,125)\ m.s^{-2}$$

Exercice n°13:

$$\text{g} = \frac{3u^2 + v^2}{6u}$$

a) Méthode de dérivée partielle :

$$dg = \left|\frac{\partial g}{\partial u}\right| du + \left|\frac{\partial g}{\partial v}\right| dv$$

$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{1}{2} - \frac{v^2}{6u^2}$ et $\frac{\partial g}{\partial\, nnv} = \frac{v}{3u}$ $\Rightarrow \Delta g = \left|\frac{6u^2-v^2}{6u^2}\right| \Delta u + \left|\frac{v}{3u}\right| \Delta v$

Donc $\frac{\Delta g}{g} = \frac{1}{g}\left(\left|\frac{6u^2-v^2}{6u^2}\right| \Delta u + \left|\frac{v}{3u}\right| \Delta v\right) = \left|\frac{3u^2-v^2}{3u^2+v^2}\right| \Delta u + \left|\frac{2v}{3u^2+v^2}\right| \Delta v$

b) Méthode de dérivée logarithmique :

Log(g) =log ($\frac{3u^2+v^2}{6u}$))= log($3u^2 + v^2$) – log($6u$)

$$\frac{dg}{g} = \frac{d(3u^2+v^2)}{3u^2+v^2} - \frac{du}{u} = \frac{3du^2}{3u^2+v^2} + \frac{dv^2}{3u^2+v^2} - \frac{du}{u}$$

$$\frac{dg}{g} = \frac{6udu}{3u^2+v^2} + \frac{2vdv}{3u^2+v^2} - \frac{du}{u}$$

$$\frac{dg}{g} = \frac{3u^2-v^2}{3u^2+v^2} du + \frac{2v}{3u^2+v^2} dv$$

Donc $\frac{\Delta g}{g} = \left|\frac{3u^2-v^2}{3u^2+v^2}\right| \Delta u + \left|\frac{2v}{3u^2+v^2}\right| \Delta v$

Exercice N°14

$$G = \frac{t^2 . g . l}{4\pi} - l^2$$

1. Equation aux dimensions de G :

$$[\boldsymbol{G}] = \frac{[\boldsymbol{t}]^2 . [\boldsymbol{g}] . [\boldsymbol{l}]}{[\boldsymbol{4\pi}]} - [\boldsymbol{l}]^2 = \boldsymbol{L^2}$$

Unité : m^2 $\quad$ c'est une surface.

2. $\Delta G = ?$

On applique la méthode de la différentielle totale

$$g = f(t, g, l)$$

$$dG = \frac{df}{\partial t}dt + \frac{df}{\partial g}dg + \frac{df}{\partial l}dl$$

$\Rightarrow dG = \frac{df}{\partial t}dt + \frac{df}{\partial l}dl$ Où g : constant

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{d}{\partial t}(\frac{t^2.g.l}{4\pi} - l^2) = (\frac{2tgl}{4\pi} - 0)$$

$$\frac{\partial G}{\partial l} = \frac{d}{\partial l}(\frac{t^2.g.l}{4\pi} - l^2) = (\frac{t^2.g}{4\pi} - 2.l)$$

$$\Rightarrow dG = \frac{2tgl}{4\pi}.dt + (\frac{t^2.g}{4\pi} - 2.l).dl$$

$$\Rightarrow \Delta G = \frac{2tgl}{4\pi}.\Delta t + (\frac{t^2.g}{4\pi} - 2.l).\Delta l$$

Exercice N°15 :

1) Dimension de σ :

$$\sigma = \frac{H.\rho.g.R}{2.cos\alpha}$$

$\sigma = \frac{H.\rho.g.R}{2.cos\alpha} \Rightarrow [\sigma] = \frac{[\boldsymbol{H}].[\boldsymbol{\rho}].[\boldsymbol{g}].[\boldsymbol{R}]}{[\mathbf{2}].[\mathbf{2}.\boldsymbol{cos\alpha}]}$ donc $[\sigma] = \boldsymbol{M.T^{-2}}$

2) Incertitude relative sur σ:

$$\log(\sigma) = \log(H) + \log(M) + \log(g) + \log(R) - \log(2) - \log(cos\alpha)$$

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{dM}{M} + \frac{dg}{g} + \frac{dR}{R} + \frac{dcos\alpha}{cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{dM}{M} + \frac{dg}{g} + \frac{dR}{R} - \frac{sin\alpha.d\alpha}{cos\alpha}$$

$$donc\ \frac{\Delta\sigma}{\sigma} = \frac{\Delta M}{M} + \frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta R}{R} - tg\alpha\Delta\alpha$$

Exercice n°16:

1. Dimension de (G) ?

on a :

E=$\frac{\boldsymbol{h}^2.\boldsymbol{n}^2}{32.\boldsymbol{\pi}^2.\boldsymbol{m}.\boldsymbol{a}^2}$

E=$\frac{\boldsymbol{h}^2.\boldsymbol{n}^2}{32.\boldsymbol{\pi}^2.\boldsymbol{m}.\boldsymbol{a}^2}$ $\Rightarrow [\boldsymbol{h}]^2 = \frac{[\boldsymbol{E}].[32][\boldsymbol{\pi}]^2[\boldsymbol{m}][\boldsymbol{a}]^2}{[\boldsymbol{n}]^2}$

On a : a: Longueur $\Rightarrow [a] = L$; m: Masse $\Rightarrow [m] = M$;

$\boldsymbol{n}$: Nombre entier $\Rightarrow [\boldsymbol{n}] = 1$

E : Énergie cinétique $\Rightarrow$ $[\boldsymbol{E}] = ML^2T^{-2}$ $32\ et\ \pi : constantes$ $\Rightarrow [32] = [\pi] = 1$; Donc

$[\boldsymbol{h}]^2 = \frac{[\boldsymbol{E}].[32][\boldsymbol{\pi}]^2[\boldsymbol{m}][\boldsymbol{a}]^2}{[\boldsymbol{n}]^2}$=$[\boldsymbol{h}]^2 = \frac{ML^2T^{-2}\mathbf{1.1}.\boldsymbol{ML}^2}{\mathbf{1}^2} = M^2L^4T^{-2}$

$[\boldsymbol{h}] = ML^2.T^{-1}$

2.

$\mathbf{E} = \frac{\boldsymbol{h}^2.\boldsymbol{n}^2}{32.\boldsymbol{\pi}^2.\boldsymbol{m}.\boldsymbol{a}^2}$

$\mathbf{E} = \frac{\boldsymbol{h}^2.\boldsymbol{n}^2}{32.\boldsymbol{\pi}^2.\boldsymbol{m}.\boldsymbol{a}^2}$ $\Rightarrow \log(E) = \log\left(\frac{\boldsymbol{h}^2.\boldsymbol{n}^2}{32.\boldsymbol{\pi}^2.\boldsymbol{m}.\boldsymbol{a}^2}\right)$

$$\log(E) = 2\log(h) + 2\log(n) - \log(32) - 2\log(\pi) - \log(m) - 2\log(a)$$

Dérivons cette expression :

$$[\log(E)]' = [2\log(h)]' + [2\log(n)]' - [\log(32)]' - 2[\log(\pi)]' - [\log(m)]' - [2\log(a)]'$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{E} = 2\frac{dh}{h} - \frac{dm}{m} - 2\frac{da}{a} \quad car \quad dn = d32 = d\pi = 0 \quad , n, 32, \pi: constants$$

Passons à la notation absolue :

$$\Rightarrow \frac{\Delta \boldsymbol{E}}{\boldsymbol{E}} = \mathbf{2}\frac{\Delta \boldsymbol{h}}{\boldsymbol{h}} + \frac{\Delta \boldsymbol{m}}{\boldsymbol{m}} + 2\frac{\Delta \boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}}$$

Exercice n°17:

1) $[\sigma]$ =?

On na :

$$T = 2.K.\sqrt{\frac{L.\cos(\theta)}{\sigma}} \quad \Rightarrow \sigma = \frac{4K^2.L.\cos(\theta)}{T^2} \quad \text{donc} \quad [\sigma] = \frac{[4][K]^2.[L].[\cos(\theta)]}{[T]^2} \quad \text{.....(1)}$$

On na :

$4\ et\ K\ et\ \cos(\theta) : constantes\ sans\ dimension \ \Rightarrow [4] = 1\ ;\ [K] = 1, [\cos(\theta)] = 1$

L: Longueur $\Rightarrow [L] = L$;

T: période $\Rightarrow [T] = T$;

Donc

(1) $\Rightarrow [\sigma] = \frac{1.1.L.1}{T^2} = L.T^{-2}$

Unité de σ est ms^{-2} donc σ présente une accélération.

2) $\frac{\Delta\sigma}{\sigma}$= ?

Méthode de différentielle totale

$$d\sigma = \left(\frac{\partial\sigma}{\partial L}\right) dL + \left(\frac{\partial\sigma}{\partial T}\right) dT$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial L} = \frac{4K^2\cos(\theta)}{T^2} \quad ; \quad \frac{\partial\sigma}{\partial T} = -\frac{2.T4K^2.L.\cos(\theta)}{T^4} = -\frac{8.K^2.L.\cos(\theta)}{T^3}$$

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = \left[\frac{4K^2\cos(\theta)}{T^2}.dL - \frac{8.K^2.L.\cos(\theta)}{T^3}.dT\right].\frac{T^2}{4K^2.L.\cos(\theta)}$$

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{dL}{L} - \frac{2dT}{T}$$

Donc

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{2\Delta T}{T}$$

Exercice n°18:

1. Dimension de (G) ?

on a : $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G.M_S}$

$$\boldsymbol{G} = \frac{\boldsymbol{a^3}.4\pi^2}{T^2.M_S} \Rightarrow [\boldsymbol{G}] = \frac{[\boldsymbol{a}]^3.[\boldsymbol{4}][\boldsymbol{\pi}]^2}{[\boldsymbol{T}]^2[\boldsymbol{M_s}]}$$

On a : a: longueur $\Rightarrow [a] = L$;

T: Période $\Rightarrow [T] = T$;

M_s : Masse de soleil $\Rightarrow [M_s] = M$

$4 \; et \; \pi : constantes \; \Rightarrow [4] = 1 \; ; \; [\pi] = 1$

Donc $[\boldsymbol{G}] = \frac{L^3.1.1}{M.T^2} = L^3.M^{-1}.T^{-2}$

Son unité dans (SI) est $m^3.kg^{-1}.S^{-2}$

$$M_S = \frac{a^3.4\pi^2}{T^2.G}$$

A .N : $M_S = \frac{a^3.4\pi^2}{T^2.G} = \frac{.(1{,}4960.10^{11})^3.4\pi^2}{(365{,}25636567.24.\ 3600)^2..6{,}668.10^{11}}$ =1,99.10^{+30}kg.

2. Calcul d'incertitude absolu de M_S par la Méthode de différentielle totale

$$dM_S(a, 4, \pi, T, G) = \left(\frac{\partial M_S}{\partial a}\right) da + \left(\frac{\partial M_S}{\partial 4}\right) d4 + \overset{\nearrow 0}{\left(\frac{\partial M_S}{\partial \pi}\right)} d\pi + \overset{\nearrow 0}{\left(\frac{\partial M_S}{\partial T}\right)} dT + \left(\frac{\partial M_S}{\partial G}\right) dG$$

Donc $dM_S = \left(\frac{\partial M_S}{\partial a}\right) da + \left(\frac{\partial M_S}{\partial T}\right) dT + \left(\frac{\partial M_S}{\partial G}\right) dG$

$\frac{\partial M_S}{\partial a}$ =?

$$M_S = \frac{\boldsymbol{a^3}.4\pi^2}{T^2.\boldsymbol{G}} \Rightarrow \frac{\partial M_S}{\partial a} = \frac{\boldsymbol{3.a^2}.4\pi^2}{T^2.\boldsymbol{G}}$$

$\frac{\partial M_s}{\partial T}$= ?

$$M_s = \frac{\boldsymbol{a^3}.4\pi^2}{T^2.\boldsymbol{G}} \Rightarrow \frac{\partial M_s}{\partial T} = \frac{-2\boldsymbol{a^3}.4\pi^2}{T^3.\boldsymbol{G}}$$

$\frac{\partial M_s}{\partial G}$= ?

$$M_s = \frac{\boldsymbol{a^3}.4\pi^2}{T^2.\boldsymbol{G}} \Rightarrow \frac{\partial M_s}{\partial G} = \frac{-\boldsymbol{a^3}.4\pi^2}{T^2.\boldsymbol{G^2}}$$

Donc $dM_s = \left(\frac{\boldsymbol{3.a^2.4\pi^2}}{T^2.\boldsymbol{G}}\right) da + \left(\frac{-2\boldsymbol{a^3}.4\pi^2}{T^3.\boldsymbol{G}}\right) dT + \left(\frac{-\boldsymbol{a^3}.4\pi^2}{T^2.\boldsymbol{G^2}}\right) dG$

$$\Delta M_s = \left|\frac{3.a^2.4\pi^2}{T^2.G}\right| \Delta a + \left|\frac{-2a^3.4\pi^2}{T^3.G}\right| \Delta T + \left|\frac{-a^3.4\pi^2}{T^2.G^2}\right| \Delta G$$

$$\Delta M_s = \frac{3.a^2.4\pi^2}{T^2.G} \Delta a + \frac{2a^3.4\pi^2}{T^3.G} \Delta T + \frac{a^3.4\pi^2}{T^2.G^2} \Delta G = M_s(3\frac{\Delta a}{a} + 2\frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta G}{G})$$

A.N :

$$\Delta M_S = 1{,}99.10^{+30}(3\frac{0{,}0003.10^{+11}}{1{,}4960.10^{+11}} + 2\frac{0{,}00000001}{365{,}25636567} + \frac{0{,}005}{6{,}668}) = 0{,}003.10^{+30} kg$$

3. Cette expression est dimensionnellement juste si :

$[T_0]$=[$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$]

La dimension du premier terme de l'expression est :

T_0 : Période → $[T_0]$= T

La dimension du deuxième terme de l'expression est :

2π : Constante → $[2\pi]$=1

l : longueur $\longrightarrow$ [l]=L

g : pesanteur $\longrightarrow$ [g]=LT^{-2}

On trouve alors :

$[\,2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}] = [2\pi].\,[l]^{1/2}[g]^{1/2} = 1(L)^{1/2}(LT^{-2})^{1/2} = L^{1/2}.L^{-1/2}T^{1} = \mathrm{T}$

Donc

$[\,2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}] = \mathrm{T}$

Donc les deux termes ont la même dimension, celle d'un temps.

On conclut que l'expression

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ et homogène.

CHAPITRE : II

CALCUL VECTORIEL

Objectifs :

- Comprendre la notion de base orthonormale directe ;
- Apprendre à utiliser les systèmes usuels de coordonnées ;
- Assimiler les notions du produit scalaire et vectoriel ;

Prérequis :

- Notions sur l'espace vectoriel ;
- Notions sur produit scalaire et vectoriel ;
- Notions sur les fonctions trigonométriques

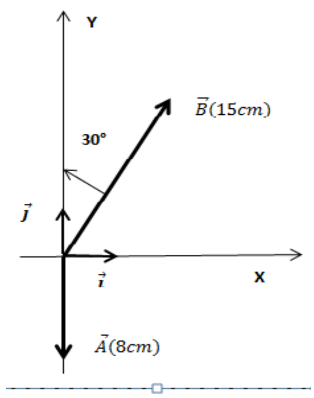
Série TD n° 02

Exercice n°1 :

En utilisant les composantes des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ (voir figure ci-contre), Calculer le module de :

1. $\vec{A} + \vec{B}$
2. $\vec{B} + \vec{A}$
3. $\vec{A} - \vec{B}$
4. $\vec{B} - \vec{A}$

Représentez les quatre cas?



Exercice n°2 :

Un tourisme tombe en panne d'essence en plein désert, il part à la recherche de l'aide en parcourant 10 Km en direction du Nord, puis 20 Km vers l'Est. À quelle distance se trouve le tourisme de sa voiture ? Et dans quelle direction ?

Exercice n°3 :

Soient deux vecteurs : $\vec{A} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ et $\vec{B} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

1. Représenter ces deux vecteurs dans un trièdre orthonormé (Oxyz).
2. Calculer les modules de $\vec{A}$ et de $\vec{B}$.
3. Calculer les vecteurs unitaires portés par $\vec{A}$ et par $\vec{B}$.
4. Calculer le produit scalaire $\vec{A}.\vec{B}$.
5. Calculer l'angle formé entre $\vec{A}$ *et* $\vec{B}$.
6. Calculer le produit vectoriel $\vec{A} \wedge \vec{B}$.
7. Montrer que les angles α , β et γ , formés respectivement entre les vecteur $\vec{A}$ et les axes $\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}$ et $\overrightarrow{Oz}$, *sont donnés par*:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{A}.\vec{i}}{\|\vec{A}\|}, \quad \cos\beta = \frac{\vec{A}.\vec{j}}{\|\vec{A}\|}, \quad , \quad \cos\gamma = \frac{\vec{A}.\vec{k}}{\|\vec{A}\|}$$

8. Calculer $\cos\alpha$, $\cos\beta$ et $\cos\gamma$
9. Vérifier que $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2$

Exercice n°4 :

Soient deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ repérés dans le trièdre (Oxyz), définis par:

$$\vec{A} = 3.\vec{i} + 4.\vec{j} - 5.\vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{B} = -\vec{i} + \vec{j} + 2.\vec{k}$$

1- Calculez leurs modules.

2- Calculez, puis représentez les deux vecteurs : $\vec{A}+\vec{B}$ et $\vec{A}-\vec{B}$.

3- a- Calculez les produits scalaires $(\vec{A}.\vec{B})$ et $(\vec{B}.\vec{A})$. Que remarquez-vous ?

b- Déterminez l'angle $\theta = (\vec{A}, \vec{B})$.

4- Calculez les produits vectoriels $(\vec{A}\wedge\vec{B})$ et $(\vec{B}\wedge\vec{A})$. Que remarquez-vous?

5- On considère un vecteur $\vec{C} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$, trouvez les variables x, y et z pour que $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C} = \vec{0}$

Exercice n°5 :

On considère les vecteurs suivants : $\vec{V_1} = 5t^3\,\vec{\imath} + 3t\vec{\jmath} - 2t^4\vec{k}$ et $\vec{V_2} = \sin t\ \vec{\imath} - \cos t\,\vec{\jmath} - 3t\,\vec{k}$

1. Trouver les expressions des grandeurs : $\frac{d}{dt}(\vec{V_1}.\vec{V_2})$ et $\frac{d}{dt}(\vec{V_1}\Lambda\,\vec{V_2})$
2. Calculez le moment de $\vec{V_1}$ passant par le point A (1, 2, 3) par rapport à l'origine O.
3. Calculez le moment de $\vec{V_1}$ par rapport à un axe (Δ) de vecteur unitaire $\vec{u}$ (1,0,-1).

Exercice n°6 :

1- Dans un repère orthonormé (Oxyz) de vecteurs unitaires $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$, on considère les vecteurs:

$$\vec{A} = a_1.\vec{i} + a_2.\vec{j} + a_3.\vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{B} = b_1.\vec{i} + b_2.\vec{j} + b_3.\vec{k}$$

Calculez $\cos(\vec{A},\vec{B})$ en fonction des paramètres a_i et b_i avec l'indice i variant de 1 à 3.

2- Soient les points $M_1(1, 1, 1)$, $M_2(2, 2, 1)$ et $M_3(2, 1, 0)$, calculez l'angle $M_2\hat{M}_1M_3$

3- Déterminez l'équation du plan (P) passant par le point $M_0(x_0, y_0, z_0)$, et perpendiculaire au vecteur $\vec{A}$. Application du cas particulier où M_0 est en M_2 et $\vec{A} = 3.\vec{i} - 2.\vec{j} + \vec{k}$

Exercice n°7 :

Soit un vecteur $\vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$ et une fonction scalaire $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

- Calculez : $\overrightarrow{grad}(\varphi)$, $div(\vec{r})$, $\overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{r}\right)$

Exercice n°8 :

Soit un vecteur $\vec{A}$ défini par : $\vec{A} = \left(2.x.y + z^3\right).\vec{i} + \left(x^2 + 2.y\right).\vec{j} + \left(3.x.z^2 - 2\right).\vec{k}$.

1- Calculez $div\left(\vec{A}\right)$.

2- Montrez que $\overrightarrow{rot}\left(\vec{A}\right) = \vec{0}$.

Exercice n°9 :

I- Soit un vecteur $\vec{r}$ défini par $\vec{r} = \cos(2x).\vec{i} + \sin(5x).\vec{j} + e^{-\alpha x}.\vec{k}$. (α est une constante réelle).

- Calculez les vecteurs dérivés $\frac{d\vec{r}}{dx}$, $\frac{d^2\vec{r}}{dx^2}$ et évaluez leurs modules pour x=0, on prend $\alpha = 1$

Exercice n°10 :

Considérons un vecteur $\vec{A} = xz\vec{\imath} + (2x^2 - y)\vec{\jmath} - yz^2\vec{k}$ et une fonction scalaire $\emptyset(x, y, z) = 3x^2y + 2y^2z^3$

1. Calculez : $\overrightarrow{grad}(\emptyset)$, $div(\vec{A})$ et $\overrightarrow{rot}(\vec{A})$.
2. Calculer au point (1,0,1) :
   a. $\overrightarrow{grad}(\emptyset)$
   b. $div(\vec{A})$
   c. $\overrightarrow{rot}(\vec{A})$

Exercice n°11 :

Dans un repère orthonormé direct (OXYZ), on considère le vecteur $\vec{V} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ passant par le point A(3, 4, 2).

1- Calculez le moment de $\vec{V}$ par rapport à l'origine O.

2- Calculer le moment de $\vec{V}$ par rapport aux trois axes principaux.

3- Calculer le moment de $\vec{V}$ par rapport à un axe (Δ) de vecteur unitaire $\vec{u}$ passant par le point O. Où $\vec{u}(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Corrigé : série TD N° 02

Exercice n°01 :

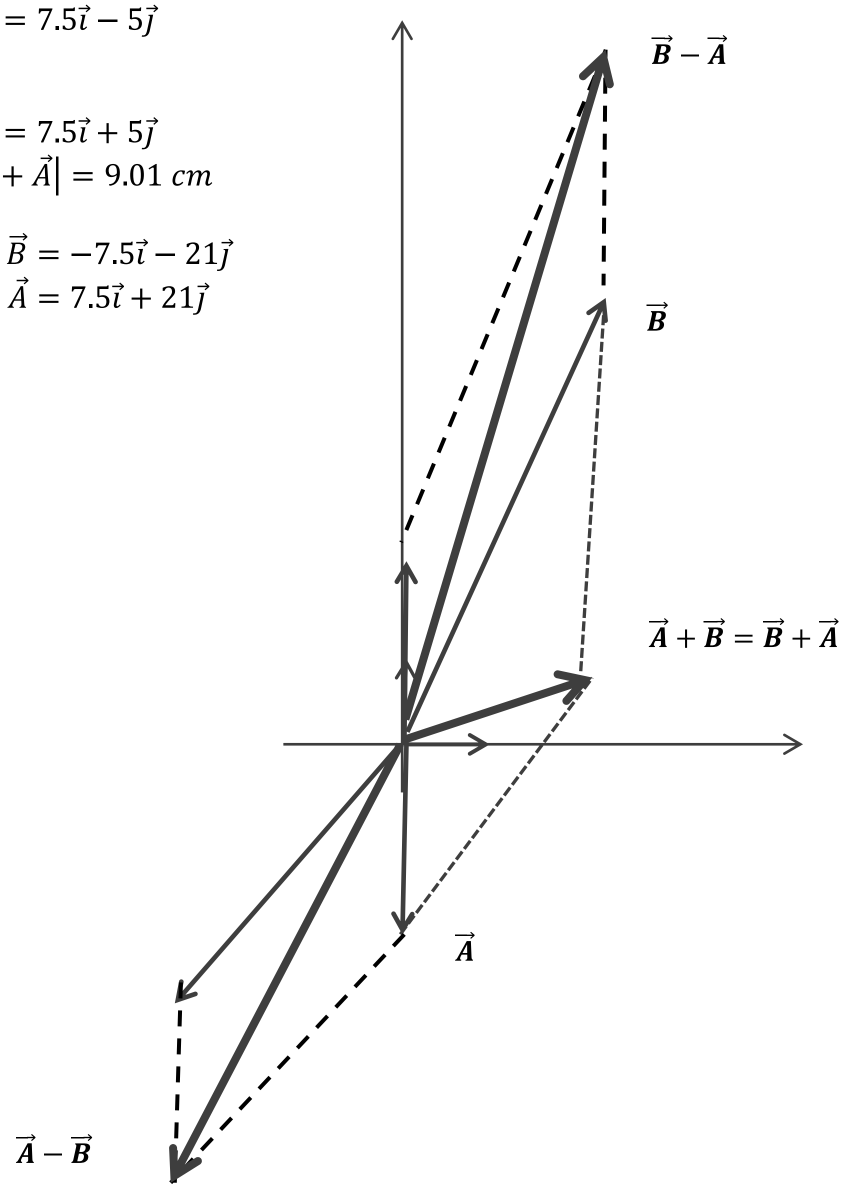
On a $\vec{A} = -8\vec{j}$ $\vec{B} = 15\sin 30\,\vec{i} + 15\cos 30\,\vec{j} = 7.5\vec{i} + 13\vec{j}$

- $\vec{A} + \vec{B} = 7.5\vec{i} - 5\vec{j}$

- $\vec{B} + \vec{A} = 7.5\vec{i} + 5\vec{j}$

Donc $|\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{B} + \vec{A}| = 9.01\ cm$

- $\vec{A} - \vec{B} = -7.5\vec{i} - 21\vec{j}$
- $\vec{B} - \vec{A} = 7.5\vec{i} + 21\vec{j}$



Exercice n°02 :

$\overrightarrow{OB} = ?$

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$…………..(1)

Ou $\begin{cases} \overrightarrow{OA} = 10\vec{j} \\ \overrightarrow{AB} = 20\vec{i} \end{cases}$............(2)

D'où 1 et 2 on obtient $\overrightarrow{OB} = 20\vec{i} + 10\vec{j}$ donc $|\overrightarrow{OB}|$=$\sqrt{500} = 22{,}36\ Km$

Dans quelle direction ?

Soit α angle entre le Nord et $\overrightarrow{OB}$. (Voir la figure)

α =?

$$\tan\alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{20}{10} = 2 \implies \alpha = 63{,}43°$$

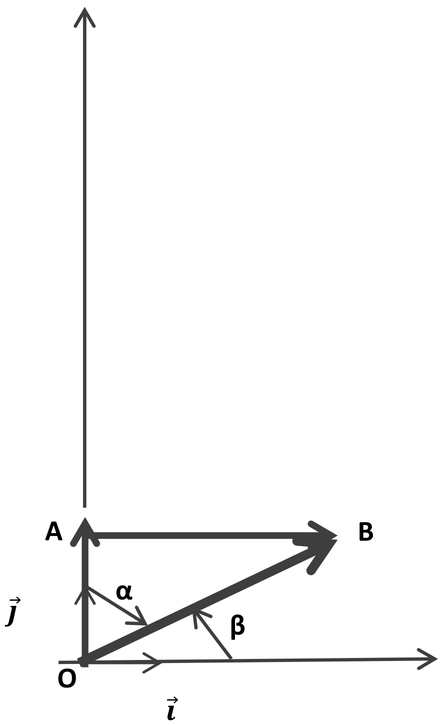
Donc le touriste se trouve à 22,36 Km de sa voiture, selon une orientation de 63,43° Est par rapport à Nord.

Ou bien soit β angle entre $\overrightarrow{OB}$ et Est

β =?

$$\tan\beta = \frac{OA}{AB} = \frac{10}{20} = 0.5 \implies \beta = 26{,}57°$$

Donc le touriste se trouve à 22,36 Km de sa voiture, selon une orientation de 26,57° Nord par rapport à Est.



Exercice n°03 :

$\vec{A} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ et $\vec{B} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

1.
2. $|\vec{A}| = 4.12 \qquad |\vec{B}| = 5.47$
3. $\overrightarrow{U_A}$ =? $\overrightarrow{U_B}$ =?

$on\ a \qquad \vec{A} = |\vec{A}|.\overrightarrow{U_A} \Rightarrow \overrightarrow{U_A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{2}{4.12}\vec{\imath} - \frac{3}{4.12}\vec{\jmath} + \frac{2}{4.12}\vec{k}$

$\vec{B} = |\vec{B}|.\overrightarrow{U_B} \Rightarrow \overrightarrow{U_B} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{5}{5.47}\vec{\imath} + \frac{2}{5.47}\vec{\jmath} - \frac{1}{5.47}\vec{k}$

4. $\vec{A}.\vec{B}$ =2
5. $\theta = ?\ \cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}|.|\vec{B}|}$ A.N θ= 84.92°
6. $\vec{A}\wedge\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{\imath} + 12\vec{\jmath} + 19\vec{k}$

7. On sait que $\vec{A} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath}$

Donc on a $\cos\alpha = \frac{A_x}{|\vec{A}|}$ et $\cos\beta = \frac{A_y}{|\vec{A}|}$

D'autre part $A_x = \vec{A}.\vec{\imath}$ et $A_y = \vec{A}.\vec{\jmath}$ $\quad A_z = \vec{A}.\vec{k}$

Alors $\cos\alpha = \frac{\vec{A}.\vec{\imath}}{|\vec{A}|}$ et $\cos\beta = \frac{\vec{A}.\vec{\jmath}}{|\vec{A}|}$ de même manière pour $\cos\gamma = \frac{\vec{A}.\vec{k}}{|\vec{A}|}$

A.N :

$\cos\alpha = \frac{2}{4.12}$=0.485 $\qquad \cos\beta = \frac{-3}{4.12} = -0.728$ $\cos\gamma = \frac{2}{4.12}$ =0.485

8.

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = (0.485)^2 + (-0.728)^2 + (0.485)^2 = 1$

Exercice n°4

$\vec{A} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$

$\vec{B} = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$

1) $|\vec{A}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$, $|\vec{B}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$

2) $\vec{A}+\vec{B}=(3+(-1))\vec{i}+(4+1)\vec{j}+((-5)+2)\vec{k}=2\vec{i}+5\vec{j}-3\vec{k}$

$\vec{A}-\vec{B}=(3-(-1))\vec{i}+(4-1)\vec{j}+((-5)-2)\vec{k}=4\vec{i}+3\vec{j}-7\vec{k}$

3) $\vec{A}.\vec{B}=\begin{pmatrix}3\\4\\-5\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}=3.(-1)+4.1+(-5).2=-9$

$\vec{B}.\vec{A}=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3\\4\\-5\end{pmatrix}=(-1).3+1.4+2.(-5)=-9$

$\Rightarrow \quad \vec{A}.\vec{B}=\vec{B}.\vec{A}$ Le produit scalaire est commutatif.

$\vec{A}.\vec{B}=|\vec{A}|.|\vec{B}|.\cos(\theta) \Rightarrow \cos(\theta)=\dfrac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}|.|\vec{B}|}=\dfrac{-9}{5\sqrt{2}.\sqrt{6}}=-0.5196$ donc $\theta=121^{\circ}$

4) $\vec{A}\wedge\vec{B}=\begin{vmatrix}\overset{(+)}{\vec{i}} & \overset{(-)}{\vec{j}} & \overset{(+)}{\vec{k}}\\3 & 4 & -5\\-1 & 1 & 2\end{vmatrix}=+\vec{i}(8+5)-\vec{j}(6-5)+\vec{k}(3+4)=13\vec{i}-\vec{j}+7\vec{k}$

$\vec{B}\wedge\vec{A}=\begin{vmatrix}\overset{(+)}{\vec{i}} & \overset{(-)}{\vec{j}} & \overset{(+)}{\vec{k}}\\-1 & 1 & 2\\3 & 4 & -5\end{vmatrix}=+\vec{i}(-5-8)-\vec{j}(5-6)+\vec{k}(-4-3)=-13\vec{i}+\vec{j}-7\vec{k}$

$\Rightarrow \vec{B}\wedge\vec{A}=-13\vec{i}+\vec{j}-7\vec{k}=-\vec{A}\wedge\vec{B} \quad \mapsto$ Le produit vectoriel n'est pas commutatif.

5)

$$\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=\begin{pmatrix}3\\4\\-5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-1+x\\4+1+y\\-5+2+z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+x\\5+y\\-4+z\end{pmatrix}=\vec{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\vec{C}=-2.\vec{i}-5.\vec{j}+3.\vec{k}$

Exercice n°05 :

a. Calculer $\frac{d}{dt}(\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2})$ et $\frac{d}{dt}(\overrightarrow{V_1}\Lambda\overrightarrow{V_2})$

6)

$\overrightarrow{V_1} = 5t^3\,\vec{\imath} + 3t\vec{\jmath} - 2t^4\,\vec{k}$

$$\overrightarrow{V_2} = \sin t\ \vec{\imath} - \cos t\,\vec{\jmath} - 3t\,\vec{k}$$

1) $\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2}$=$5t^3\sin t - 3t\cos t + 6t^5$

$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2}) = 15t^2\sin t + 5t^3\cos t - 3\cos t + 3t\sin t$

$$\overrightarrow{V_1}\wedge\overrightarrow{V_2} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 5t^3 & 3t & -2t^4 \\ \sin t & -\cos t & -3t \end{vmatrix} = (-9t^2 - 2t^4\cos t\,)\vec{\imath} - (-15t^4 + 2t^4\sin t)\vec{\jmath} + (-5t^3\cos t\ - 3t\sin t)\vec{k}$$

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{V_1}\Lambda\overrightarrow{V_2}) = (-18t - 8t^3\cos t + 2t^4\sin t\,)\vec{\imath} - (-60t^3 + 8t^3\sin t + 2t^4\cos t)\vec{\jmath} + (-15t^2\cos t\ + 5t^3\sin t\ - t\sin t - 3t\cos t)\vec{k}$$

2)

Par rapport à l'origine O: $\overrightarrow{M}_{/O}\left(\overrightarrow{V_1}\right) = \overrightarrow{OA}\Lambda\overrightarrow{V_1} = \begin{vmatrix} \overset{(+)}{\vec{i}} & \overset{(-)}{\vec{j}} & \overset{(+)}{\vec{k}} \\ 1 & 2 & 3 \\ 5t^3 & 3t & -2t^4 \end{vmatrix}$

donc $\overrightarrow{M}_{/O}\left(\overrightarrow{V_1}\right) = \overrightarrow{OA}\Lambda\overrightarrow{V_1} = (-4t^4 - 9t).\vec{i} - (-2t^4 - 15t^3).\vec{j} + (3t - 10t^3).\vec{k}$

1) par rapport à un axe (Δ) de vecteur unitaire $\vec{u}$ (1,0,-1)

$\overrightarrow{M}_{/\Delta}\left(\overrightarrow{V_1}\right) = -4t^4 - 9t - 3t + 10t^3 = -4t^4 + 10t^3 - 12t$

Exercice n°06 :

1- $\vec{A} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ et $\vec{B} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$

On sait que $\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}|.|\vec{B}|.\cos(\vec{A},\vec{B})$

- $\vec{A}.\vec{B} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ avec $\begin{cases} \vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1 \\ \vec{i}.\vec{j} = \vec{i}.\vec{k} = \vec{j}.\vec{k} = 0 \end{cases}$
- $\left|\vec{A}\right| = \sqrt{a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + a_3^{\ 2}}$ et $\left|\vec{B}\right| = \sqrt{b_1^{\ 2} + b_2^{\ 2} + b_3^{\ 2}}$

$$\cos\left(\vec{A}, \vec{B}\right) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + a_3^{\ 2}}.\sqrt{b_1^{\ 2} + b_2^{\ 2} + b_3^{\ 2}}} \qquad \ldots(1)$$

2- L'angle $M_2\hat{M}_1M_3$ entre les deux vecteurs $\overrightarrow{M_1M_2}$ et $\overrightarrow{M_1M_3}$.

$$\overrightarrow{\mathrm{M_1M_2}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{\mathrm{i}} + \vec{\mathrm{j}} \Rightarrow a_1 = 1,\ a_2 = 1 \text{ et } a_3 = 0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{M_1M_3}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{\mathrm{i}} - \vec{\mathrm{k}} \Rightarrow a_1 = 1,\ a_2 = 0 \text{ et } a_3 = -1$$

En remplaçant a_i et b_i par leurs valeurs dans l'expression (1), on trouve:

$$(1) \Rightarrow \ \cos(\phi) = \cos\left(\overrightarrow{\mathrm{M_1M_2}}, \overrightarrow{\mathrm{M_1M_3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi = \pm\frac{\pi}{3}}$$

3- L'équation du plan (P) qui passe par le point $M_0(x_0, y_0, z_0) \in (P)$?

En supposant qu'un autre point $M(x, y, z) \in (P)$ vérifie la condition $\overrightarrow{MM_0} \perp \vec{A}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MM_0}.\vec{A} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \mathrm{x_0 - x} \\ \mathrm{y_0 - y} \\ \mathrm{z_0 - z} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 3(\mathrm{x_0 - x}) - 2(\mathrm{y_0 - y}) + (\mathrm{z_0 - z}) = 0 \qquad \ldots(2)$$

<u>Cas particulier</u> M_0 est en M_2 $\Rightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 2 \\ z_0 = 1 \end{cases}$

En remplaçant ces valeurs dans l'équation (2) on trouve : $3(2 - x) - 2(2 - y) + (1 - z) = 0$

Où encore après le développement on trouve :

$$\boxed{-3x+2y-z+3=0}$$

Exercice n°7

$\vec{r}=x.\vec{i}+y.\vec{j}+z.\vec{k}$ et $\varphi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

$$\overrightarrow{grad}(\varphi)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} \quad \text{donc } \overrightarrow{grad}(\varphi)=2.\vec{r}$$

$$\operatorname{div}(\vec{r}) = \frac{\partial(x)}{\partial x}+\frac{\partial(y)}{\partial y}+\frac{\partial(z)}{\partial z} = 1+1+1 = 3 \qquad \Rightarrow \operatorname{div}(\vec{r}) = 3$$

$$\overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{r}\right)=\overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)=\frac{\partial\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)}{\partial z}\vec{k}$$

$$=\frac{-x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}.\vec{i}+\frac{-y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}.\vec{j}+\frac{-z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}.\vec{k} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{-\vec{r}}{r^3}$$

Exercice n°8 :

$$\vec{A}=\left(2xy+z^3\right).\vec{i}+\left(x^2+2y\right).\vec{j}+\left(3xz^2-2\right).\vec{k}$$

1) $$\operatorname{div}\left(\vec{A}\right)=\frac{\partial\left(2.x.y+z^3\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(x^2+2.y\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(3.x.z^2-2\right)}{\partial z} \qquad \Rightarrow \operatorname{div}\left(\vec{A}\right)=2.y+2+6.x.z$$

$$\overrightarrow{rot}\left(\vec{A}\right)=\begin{vmatrix} \overset{(+)}{\vec{i}} & \overset{(-)}{\vec{j}} & \overset{(+)}{\vec{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy+z^3 & x^2+2y & 3xz^2-2 \end{vmatrix}=+\vec{i}.(0-0)-\vec{j}.\left(3z^2-3z^2\right)+\vec{k}.(2x-2x)=\vec{0}$$

Exercice n°9 :

$$\vec{r}=\cos(2x)\vec{i}+\sin(5x)\vec{j}+e^{-\alpha x}\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dx}=-2\sin(2x)\vec{i}+5\cos(5x)\vec{j}-\alpha e^{-\alpha x}\vec{k} \qquad \text{si } x=0 \quad \left|\frac{d\vec{r}}{dx}\right|=\sqrt{25+\alpha^2}=\sqrt{26}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dx^2} = -4\cos(2x)\vec{i} - 25\sin(5x)\vec{j} + \alpha^2 e^{-\alpha x}\vec{k} \qquad \text{si } x=0 \qquad \left|\frac{d^2\vec{r}}{dx^2}\right| = \sqrt{16+\alpha^4} = \sqrt{17}$$

Exercice n°10 :

1)

$$\overrightarrow{grad}(\emptyset) = \vec{\nabla}.\emptyset = \frac{\partial\emptyset}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial\emptyset}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial\emptyset}{\partial z}\vec{k} = 6xy\vec{\imath} + (3x^2 + 4yz^3)\vec{\jmath} + 6y^2z^2)\vec{k}$$

$$div(\vec{A}) = \vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = z - 1 - 2yz$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = z^2\vec{\imath} + x\vec{\jmath} + 4x\vec{k}$$

2) Au point (1,0,1) on a :

a) $\overrightarrow{grad}(\emptyset) = 3\vec{\jmath}$

b) $div(\vec{A}) = 0$

c) $\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + 4\vec{k}$

Exercice n°11 :

1- Par rapport à l'origine O: $\vec{M}_{/O}(\vec{V}) = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \overset{(+)}{\vec{i}} & \overset{(-)}{\vec{j}} & \overset{(+)}{\vec{k}} \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

donc $\vec{M}_{/O}(\vec{V}) = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{V} = 8.\vec{i} - 7.\vec{j} + 2.\vec{k}$

2- Par rapport aux trois axes principaux:

a- L'axe ox: $M_{/Ox}(\vec{V}) = \vec{i}.\vec{M}_{/O}(\vec{V}) = 8$

b- L'axe oy: $M_{/Oy}(\vec{V}) = \vec{j}.\vec{M}_{/O}(\vec{V}) = -7$

c- L'axe oz: $M_{/Oz}(\vec{V}) = \vec{k}.\vec{M}_{/O}(\vec{V}) = 2$

3- Par rapport à un axe (Δ): $M_{/\Delta}(\vec{V}) = \vec{M}_{/O}(\vec{V}).\vec{u}$,

$\vec{u}$ est le vecteur unitaire de l'axe (Δ) et les cosinus directeurs sont ses composantes.

$$\overrightarrow{M}_{/\Delta}\left(\vec{V}\right) = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{-8}{\sqrt{2}} - \frac{7}{2} + 1 = \frac{-8\sqrt{2} - 5}{2}$$

CHAPITRE : II

CINEMATIQUES

Objectifs :

- Décrire les caractéristiques d'un mouvement : vitesse, accélération, trajectoire ;
- Définir le vecteur rotation ;
- Différencier entre réferentiels absolu, relatif et d'étude ;
- Illustrer la distinction entre vitesse absolue, relative et d'entrainement (relation de transfert) ; Comprendre et utilisé la formule de compostion des accélérations;
- Apprendre à choisir le bon système de coordonnées en fonction du problème étudié;
- Classer les référentiels d'utilisation en fonction de leur caractère galiléen approché.

Prérequis :

- Notions sur la dérivée et l'intégration vues en mathématiques ;
- Notions en mathématique concernant les coniques (ellipse, hyperbole, parabole).

Série TD n°03

Exercice n°1 :

Le déplacement d'une abeille est donné par le vecteur de déplacement $\vec{r}$:

$\vec{r}$=$(2t^2-3)\vec{\imath}+(4t+4)\vec{\jmath}+(t^3+2t^2)\vec{k}$

Déterminer :

1. La position de l'abeille à l'instant t=0 s.
2. Sa vitesse à l'instant t=1 s et son accélération au temps t=2 s.

Exercice n°2 :

Pour aller à la ville de Tlemcen à partir de la ville de Relizane, il est possible d'emprunter soit la route ancienne, distance de 210 km avec une vitesse moyenne de 80 km/h, ou soit l'autoroute Est-Ouest longue de 230 km où la vitesse moyenne est de 100 km/h.

1. Quel est le gain du temps entre les deux trajets.

Exercice n° 3 :

L'accélération d'un point matériel mobile M est défini par la relation : a(t)=8-6t, les conditions initiales du mouvement sont données à t=0 x_0=0 et v_0=11ms^{-1}

a. Donner l'expression de la vitesse du mouvement.
b. A quel instant t_1, le mobile M s'arrête-t-il?
c. Calculer la distance parcourue par le mobile M à cet instant.

Exercice n° 4 :

Un astrophysicien a détecté trois météorites sur son radar. Il a pu déterminer leurs positions dans un plan (Oxy) en fonction du temps :

$M_1\begin{cases}x=5t-3\\y=2-4t\end{cases}$ $M_2\begin{cases}x=t\\y=t^2/2\end{cases}$ $M_3\begin{cases}x=2\sin(3t)\\y=2\cos(3t)\end{cases}$

Pour chaque météorite, trouver :

1. L'équation de la trajectoire.
2. Le point de départ et le sens du mouvement.

Exercice n° 5 :

Un point M se déplace dans le plan (XOY) suivant les équations horaires suivantes :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 - t \end{cases}$$

Trouver :

1. L'équation de la trajectoire y=f(x).
2. Les composantes de la vitesse et son module v.
3. Les composantes de l'accélération et son module a.
4. L'accélération tangentielle a_T et l'accélération normale a_n .
5. Le rayon de courbure R.

Exercice n° 6 :

Un point M est repéré dans le plan (XOY) suivant les équations horaires suivantes :

$$\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = 2t \end{cases}$$

Donner :

1. L'expression de la trajectoire y=f(x).
2. L'expression de la vitesse et son module v.
3. L'expression de l'accélération et son module a.
4. Quelle est la nature du mouvement ? justifier.
5. L'accélération tangentielle a_T et l'accélération normale a_n .
6. Le rayon de courbure R.

Exercice n° 7 :

Une pierre est lancée avec une vitesse initiale horizontale v_0 selon les équations :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Déterminer :

1- L'équation de la trajectoire de la pierre.

2- Les composantes de la vitesse et de l'accélération de la pierre

3- Les accélérations : tangentielle a_T et normale a_N.

4- Le rayon de courbure de la trajectoire de la particule.

Exercice n°8 :

Les coordonnées d'une particule sont données par les fonctions du temps : $\begin{cases} x = 2.t \\ y = 4.t(t-1) \end{cases}$

7. Déterminer l'équation de la trajectoire y=f(x).
8. Donner l'expression de la vitesse et l'accélération en fonction du temps.
9. Déterminer l'accélération tangentielle a_T et l'accélération normale a_n .
10. Déduire le rayon de courbure R de la trajectoire de la particule.

Exercice n°9 :

Les coordonnées d'une particule sont données par les fonctions du temps : $\begin{cases} x = 4.t + 3 \\ y = t^2 - 5t + 2 \end{cases}$

1. Déterminer l'équation de la trajectoire y=f(x).
2. Donner l'expression de la vitesse et l'accélération en fonction du temps.
3. Déterminer l'accélération tangentielle a_T et l'accélération normale a_n .
4. Déduire le rayon de courbure R de la trajectoire de la particule.

Exercice n° 10 :

Deux mobiles M_1 et M_2, se déplaçant sur une même direction, sont repérés par leurs positions temporaires respectives : $\boldsymbol{x_1 = t - 1}$ et $\boldsymbol{x_2 = \frac{1}{2} t^2}$

1. Trouver les positions, les vitesses et les accélérations initiales.

2. Les mobiles M_1 et M_2 peuvent-ils se rencontrer ?

Les vecteurs positions des deux mobiles M_1 et M_2 sont attribués respectivement sur les axes $X'OX$ et $Y'OY$ à une comète qui se déplace dans le système solaire. Sa position aura pour expression : $\overrightarrow{OM} = (t-1).\vec{\imath} + \frac{1}{2}t^2.\vec{\jmath}$

Où O est l'origine du repère (le soleil). On suppose que la comète reste dans le plan (XOY) .

1. Déterminez les composantes du vecteur vitesse $\vec{v}$ et du vecteur accélération $\vec{a}$.

2. Trouver l'expression de l'accélération tangentielle a_T et déterminer celle de l'accélération normale a_N et déduire le rayon de courbure **R** de la trajectoire en fonction de **t**.

Exercice n° 11:

Un étudiant est en train de courir à vitesse constante de 5 m/s afin de rattraper le bus qui est à l'arrêt. Quand l'étudiant est à une distance de 30 m de l'arrêt, le bus démarre et s'éloigne avec une accélération constante de 0.15 m/s^2.

1. Combien de temps doit courir l'étudiant et sur quelle distance afin de rattraper le bus ?
2. Quelle est la vitesse du bus une fois que l'étudiant est à sa hauteur ?
3. Tracer le graphe x=f(t) pour l'étudiant et le bus ; prenez x=0 comme position initiale de l'étudiant.
4. Si la vitesse de l'étudiant est de 2.6 m/s, rattrapera-t-il le bus.
5. Quelle est la vitesse minimale de l'étudiant lui permettant de rattraper le bus ?
6. Combien de temps et quelle distance doit-il courir dans ce cas ?

Exercice n° 12 :

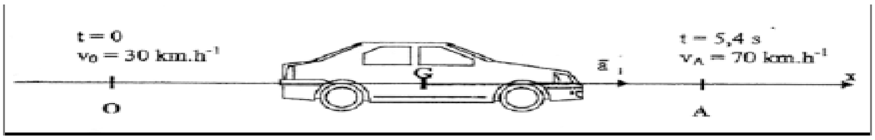
Dans une zone habitable à Relizane, la vitesse est limitée à 30 km/h. Une automobile traverse cette zone avec une vitesse constante de 54 km/h. Un policier en moto l'aperçoit et la poursuit avec une accélération de 3 m/s^2. On suppose à t=0 $x_0=0$ et $v_0=0$ pour la moto du policier.

1. Quelle est la durée pour que le policier rejoigne l'automobile ?
2. Quelle est alors sa vitesse.
3. Quelle est la distance parcourue par les deux mobiles (automobile et moto).

Exercice n° 13 :

Un magazine d'automobile donne le résultat du test d'accélération de la Logan par un passage de 30 km/h à 70 km/h en 5.4 s, sur une portion de circuit rectiligne et horizontale. Le vecteur accélération est supposé constant pendant tout le mouvement ; sa norme est notée a_1. L'origine des temps est choisie à l'instant où le centre d'inertie G du véhicule passe au point O avec la vitesse v_0=30 km/h.

1. Donner la relation entre le vecteur accélération et le vecteur vitesse du centre d'inertie G du véhicule v(t) en fonction de a_1, v_0 et t.
2. En utilisant le résultat du test d'accélération, calculer la valeur de l'accélération a1 du véhicule en unité SI.
3. Établir l'équation horaire de la position x(t) du centre d'inertie G en fonction des grandeurs de l'énoncé. En déduire la distance D parcourue par la Logan quand elle passe de 30 km/h à 70 km/h en 5.4 s.

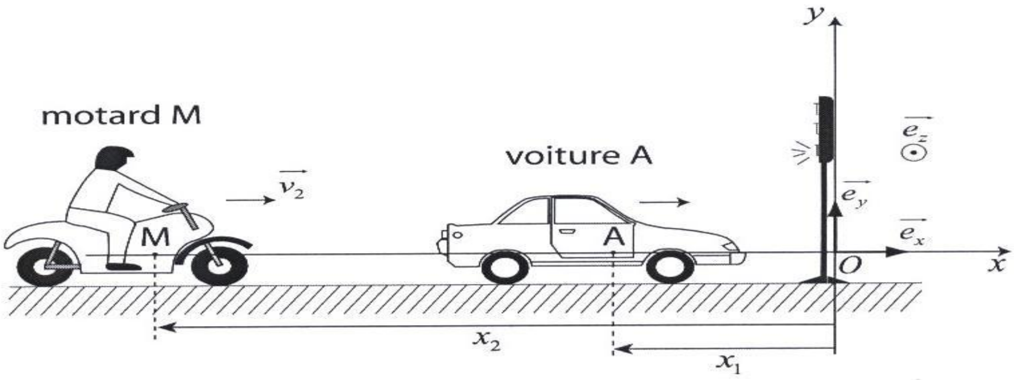


Exercice n°14 :

Une voiture A est arrêtée sur une route horizontale rectiligne à une distance d_1=3 m d'un feu rouge. Lorsque le feu passe au vert, à l'instant t=0, la voiture démarre avec une accélération constante a_1=3 m /s^2. Au même moment un motard M roulant à une vitesse constante v_2=54 km/h se trouve à une distance d_2=24 m de la voiture. La voiture et le motard considérés comme des points matériels sont repérée à l'instant t à l'aide de leurs vecteurs positions respectifs $\overrightarrow{OA} = x_1\vec{\imath}$ et $\overrightarrow{OM} = x_2\vec{\imath}$. On choisira comme origine O des abscisses la position du feu tricolore. Voir la figure ci-dessous.

1. Déterminer les équations horaires x_1(t) et x_2(t) de la voiture et du motard respectivement.
2. Déterminer les instants des dépassements ainsi que les positions de la voiture et du motard à ces instants.
3. Si le motard roulait à la vitesse v_2=36 km/h pourrait-il rattraper la voiture ?
4. Calculer, dans ce cas, l'instant pour lequel la distance qui sépare le motard de la voiture est minimale.

Déduire cette distance.



Exercice n°15 :

Au départ d'une course de 100*m*, un athlète accélère pendant 1.8 *s* pour atteindre une vitesse de 9.5 ms^{-1}, un second athlète, accélère durant 2.2 *s* pour atteindre la vitesse de 9.6 ms^{-1} . Ils conservent leur vitesse acquise durant le reste de la course.

1. Lequel de ces deux athlètes va gagner la course ? Justifiez votre réponse en donnant le temps qui sépare les arrivées des deux athlètes (en secondes).
2. Quelle distance sépare les deux athlètes lorsque le premier passe la ligne.

Exercice n°16 :

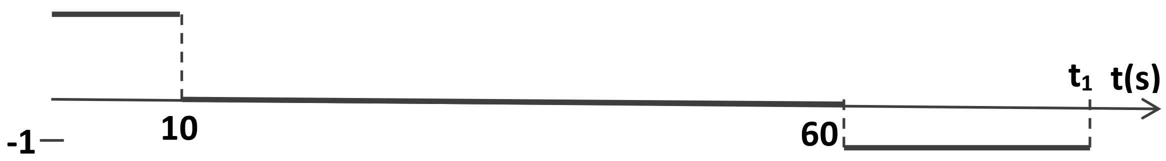
Les coordonnées d'un point matériel mobile sont $\begin{cases} x(t) = 3\sin(3wt) \\ y(t) = 3\cos(3wt) \end{cases}$

5. Déterminer l'équation de la trajectoire. Trouver le point de départ et le sens du mouvement.
6. Calculer le module de la vitesse.
7. Calculer les accélérations : tangentielle a_T et normale a_N et quelle est la nature du mouvement ?

Exercice n°17 :

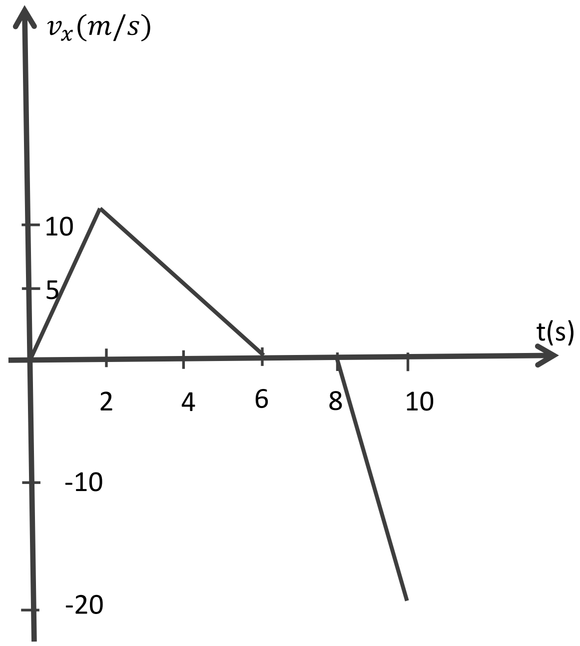
Une rame de tramway démarre d'une station A à **t =0s** et arrive à une station B au bout d'un temps **t₁** que l'on déterminera. Le graphe de son accélération en fonction du temps est donné sur la figure 1.

figure 1



1- Donner l'équation de la vitesse en fonction du temps, ainsi que la nature du mouvement dans chaque phase.
2- Tracer le graphe de *v*(t) et déduire le temps t_1.
3- Déterminer les équations horaires x(t) pour les phases $t \in [0,10]s$ et $t \in [10,60]s$

Exercice n°18 :



Un mobile M se déplace sur la droite OX avec un vitesse $v_x(t)$ dont les variations sont données par le graphe ci-dessous.

Tracer $a_x(t)$. Donner la nature du mouvement pour chaque phase.

Ecrire les équations $v_x(t)$ *et* $x(t)$ sachant que à t=0 s , $x_0 = 0$ m.

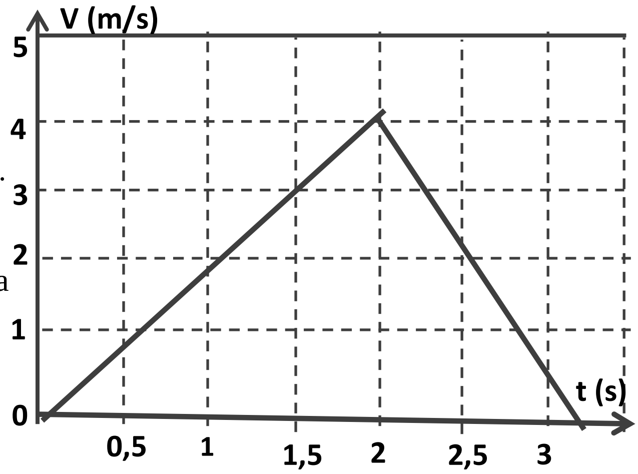
Tracer $x(t)$ en donnant ses valeurs t=2s, 4s, 6s, 8s, 10s

Déterminer graphiquement et analytiquement l'instant pour lequel $x(t) = 0$

Déterminer le vecteur vitesse aux instant t=4s et t=9s en déduire l'accélération moyenne.

Quelle est la distance totale parcourue entre les instants t=0s et t=10s.

Exercice n°19 :



Le graphe ci-contre donne l'évolution de la vitesse en fonction du temps d'une masse **M** par:

1-Tracer le diagramme de l'accélération en fonction du temps.

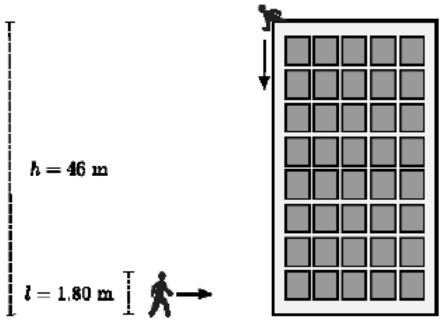
2-Déterminer la nature de chaque phase. Justifiez

3-Déterminer l'équation du mouvement de la masse **M** dans la première phase.

4-Déterminer l'équation de la vitesse de la masse **M** dans la seconde phase.

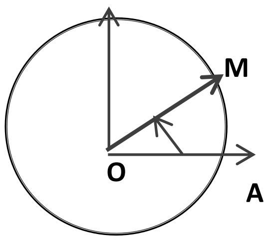
Exercice n° 20 :

Vous êtes sur le toit d'un immeuble de hauteur h=46 m, et vous tenez une bille dans votre main. Un de vos camarades qui mesure l=1.8 m se dirige droit vers l'immeuble avec une vitesse constante v=1.2 m/s. si vous



Exercice n°21 :

Un mobile se déplace sur un cercle de rayon **R=2m**. Son abscisse Curviligne $s=\widehat{AM}$ a pour équation : $s(t) = t^2+2$ ou s(m) et t(seconde).



1. Exprimer la vitesse linéaire du mobile. En déduire sa vitesse angulaire.

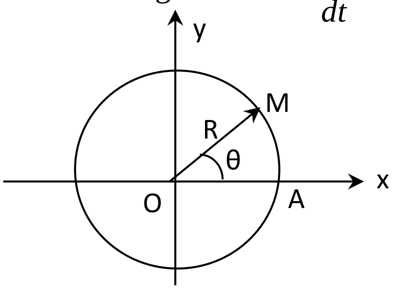
2. Calculer les composantes tangentielle et normale de l'accélération.

En déduire l'accélération totale.

Exercice n°22 :

Soit un point mobile décrit un cercle de rayon R et centre O avec une vitesse angulaire $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

. A l'instant t=0 le point M est en A.



1- Ecrire les coordonnées de M en fonction de R et θ.

2- Calculer le module de la vitesse de point M.

3- Déterminer les composantes de l'accélération sur les axes ox et oy (coordonnées cartésienne) d'une part et sur les axes parallèle et perpendiculaire à OM d'autre part (coordonnés polaire)

θ

4- on suppose que $\alpha_0 = \frac{d\omega}{dt}$ (α_0 est un constante non nulle). Donner les expressions de *w* et θ en fonction du temps. On rappelle qu'a t=0, $\theta_0=0$ et $w= w_0$. Quelle relation existe entre *w* et θ ?

Exercice n°23 :

Un point matériel décrit une trajectoire spirale dans l'espace caractérisée par les équations suivantes :

$x(t) = Rcos\theta(t)$ $y(t) = Rsin\theta(t)$ $z(t) = h\theta(t)$

Ou R et h sont des constantes

Trouver les composantes des vecteurs vitesse et accélération en coordonnées cartésiennes et en coordonnées cylindriques et en déduire leurs modules respectifs.

Dans le cas ou $\omega = \frac{d\theta}{dt} = cst$, donner le vecteur vitesse et montrer qu'il fait un angle α avec l'axe OZ, calculer tg α .

Exercice n°24 :

Un nageur plonge en un point A de la rive. Avec l'intention de traverser la rivière, de largeur d, dont on suppose les eaux animées d'un courant de vitesse uniforme ($\vec{u}$).

1. Le nageur se propulse dans l'eau à la vitesse ($\vec{v}$) perpendiculaire aux rives. Déterminer se trajectoire relativement aux rives, son point d'abordage et le temps de sa traversée.
2. Le nageur désire en fait, aborder au point B situé en regard du point A. Que doit-il faire pour parcourir une trajectoire rectiligne AB en nageant à une vitesse constante ($\vec{v}$) ? Quelle est la durée de sa traversée.

Exercice n°25 :

Soit un repère fixe (Oxyz), un point O' se déplace sur l'axe (Oy) avec une accélération constante a. On relie au point O' un repère mobile (O'XYZ) qui tourne autour de (O'Z) avec une vitesse angulaire constante *w*. un point M déplace dans le repère mobile avec les coordonnées : $X=t^2$, Y=t.

A l'instant initial t=0, (O'X) est confondu avec (Ox)

Déterminer dans le repère mobile de base $(\overrightarrow{U_X}, \overrightarrow{U_Y}, \overrightarrow{U_Z})$:

1. la vitesse relative et la vitesse d'entrainement. En déduire la vitesse absolue.
2. L'accélération relative. L'accélération d'entrainement et l'accélération de Coriolis. En déduire l'accélération absolue.

Exercice n°26 :

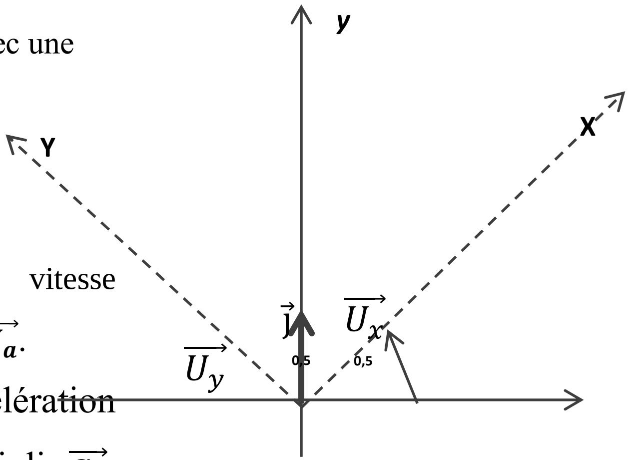
Soit un repère fixe (Oxyz). Un repère mobile (O'XYZ) tourne autour de (Oz) avec une vitesse angulaire ω constante. Le point O' se déplace sur l'axe (Ox) : $\overrightarrow{\boldsymbol{OO'}} = \boldsymbol{at\vec{\imath}}$. Un point M se déplace sur l'axe (O'Y) tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{O'M}} = \boldsymbol{bt^2\vec{\jmath}'}$ avec a et b des constantes positives.

Déterminer dans le repère fixe (Oxyz) :

1. la vitesse relative $\overrightarrow{\boldsymbol{V_r}}$ et la vitesse d'entrainement $\overrightarrow{\boldsymbol{V_e}}$. En déduire la vitesse absolue $\overrightarrow{\boldsymbol{V_a}}$.
2. L'accélération relative $\overrightarrow{\boldsymbol{a_r}}$. L'accélération d'entrainement $\overrightarrow{\boldsymbol{a_e}}$ et l'accélération de Coriolis $\overrightarrow{\boldsymbol{a_c}}$. En déduire l'accélération absolue $\overrightarrow{\boldsymbol{a_a}}$.

Exercice n°27 :

On considère un repère fixe (Oxyz) et un repère mobile (O'XYZ) tournant autour de (Oz) avec une vitesse angulaire ω constante. Un point M initialement en O', se déplace sur l'axe (O'X) avec une vitesse constante *v*.



Dans le repère Mobile (O'XYZ) :

1. Ecrivez l'expression de $\overrightarrow{O'M}$ et $\overrightarrow{OO'}$.
2. Déterminez la vitesse relative $\overrightarrow{\boldsymbol{V_r}}$ et la vitesse d'entrainement $\overrightarrow{\boldsymbol{V_e}}$. En déduire la vitesse absolue $\overrightarrow{\boldsymbol{V_a}}$.
3. Déterminez L'accélération relative $\overrightarrow{\boldsymbol{a_r}}$. L'accélération d'entrainement $\overrightarrow{\boldsymbol{a_e}}$ et l'accélération de Coriolis $\overrightarrow{\boldsymbol{a_c}}$. En déduire l'accélération absolue $\overrightarrow{\boldsymbol{a_a}}$.

Exercice n°28 :

Soit un repère fixe (Oxyz). Un repère mobile (O'XYZ) tourne autour de (Oz) avec une vitesse angulaire ω constante. Le point O' se déplace sur l'axe (Ox) : $\overrightarrow{\boldsymbol{OO'}} = \boldsymbol{at\vec{\imath}}$. Un point M se déplace sur l'axe (O'Y) tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{O'M}} = \boldsymbol{bt^2\vec{\jmath}'}$ avec a et b des constantes positives.

Déterminer dans le repère fixe (Oxyz) :

1. la vitesse relative $\overrightarrow{\boldsymbol{V_r}}$ et la vitesse d'entrainement $\overrightarrow{\boldsymbol{V_e}}$. En déduire la vitesse absolue $\overrightarrow{\boldsymbol{V_a}}$.
2. L'accélération relative $\overrightarrow{\boldsymbol{a_r}}$. L'accélération d'entrainement $\overrightarrow{\boldsymbol{a_e}}$ et l'accélération de Coriolis $\overrightarrow{\boldsymbol{a_c}}$. En déduire l'accélération absolue $\overrightarrow{\boldsymbol{a_a}}$.

Corrigé : série TD N°03

Exercice n°1 :

On a : $\vec{r}(t)=(2t^2-3)\vec{\imath}+(4t+4)\vec{\jmath}+(t^3+2t^2)\vec{k}$

1- $\vec{r}(0)=(2.0^2-3)\vec{\imath}+(4.0+4)\vec{\jmath}+(0^3+2.0^2)\vec{k}=-3\vec{\imath}+4\vec{\jmath}$

2- $\vec{v}(t)=\frac{d\,\vec{r}(t)}{dt}=(4t)\vec{\imath}+(4)\vec{\jmath}+(3t^2+4t)\vec{k}\Rightarrow\vec{v}(1)=4\vec{\imath}+4\vec{\jmath}+7\vec{k}$, donc $\|\vec{v}(1)\|=9\,m/s$

$\vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}\,(t)}{dt}=4\vec{\imath}+4\vec{\jmath}+(6t+4)\vec{k}\Rightarrow\vec{a}(2)=4\vec{\imath}+4\vec{\jmath}+16\vec{k}$, donc $\|\vec{a}(2)\|=16.97\,m/s^2$

Exercice n°2:

Pour l'ancienne route le mouvement est rectiligne uniforme on a

$v_{1moy}=80\frac{km}{h}$=80x1000/3600=22.22m/s ; $\Delta x_1=210km=210000m;$

$v_{1moy}=\frac{\Delta x_1}{\Delta t_1}\Rightarrow\Delta t_1=\frac{\Delta x_1}{v_{1moy}}$ donc $\Delta t_1\cong 9451\,s\;\cong 2h\,37m\,31s$

Pour autoroute Est-Ouest le mouvement est rectiligne uniforme on a

$v_{2moy}=110\,km/h$=100x1000/3600=27.77m/s ; $\Delta x_2=230km=230000m;$

$v_{2moy}=\frac{\Delta x_2}{\Delta t_2}\Rightarrow\Delta t_2=\frac{\Delta x_2}{v_{2moy}}$ donc $\Delta t_2\cong 8282\,s\;\cong 2h\,18m\,2s$

Donc le gain du temps est : $\Delta t=\Delta t_1-\Delta t_2=19m\,29s$

Exercice n°3 :

a) Expression de la vitesse : $v(t)=-3t^2+8t+11$

b) L'instant où le mobile s'arrête $\Rightarrow v(t)=0$ cela pour $t=\frac{1}{3}\,s$

c) La distance parcourue à cet instant $t=\frac{1}{3}\,s$:

$$x=-3\left(\frac{1}{3}\right)^3+4\left(\frac{1}{3}\right)^2+11\left(\frac{1}{3}\right)=44{,}81\,m$$

Exercice n°4:

1. $M_1\begin{cases}x=5t-3 & \Rightarrow t=\frac{x+3}{5}\\ y=2-4t & \Rightarrow y=-\frac{4}{5}x-\frac{2}{5}\end{cases}$

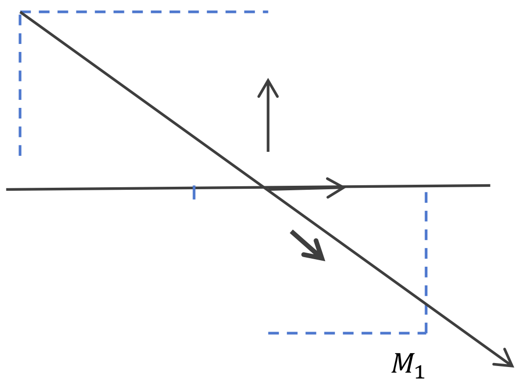
M_0

à t=0 (point départ)

$$M_0 \begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = 2 \end{cases}$$

à t=1s par exemple

$M_1 \begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = -2 \end{cases}$ pour savoir le sens du mouvement

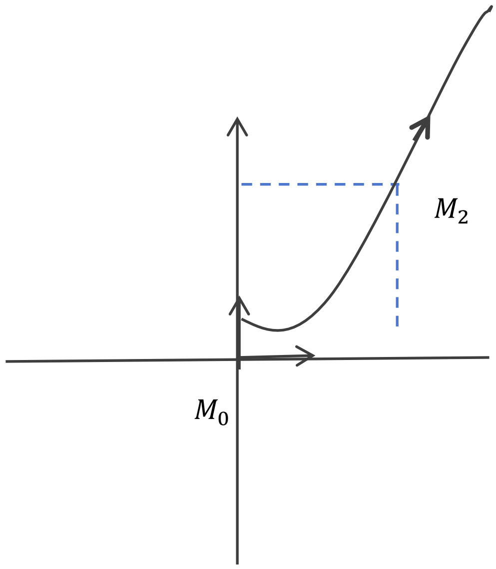


2. $M_2 \begin{cases} x = t \Rightarrow t = x \\ y = \frac{t^2}{2} \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

à t = 0 $M_0 \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$

à t=2s par exemple

$M_2 \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$ pour savoir le sens du mouvement



3. $M_3 \begin{cases} x = 2\, sin3t \Rightarrow sin3t = \frac{x}{2} \Rightarrow sin^2(3t) = \frac{x^2}{4} \\ y = 2\, cos3t \Rightarrow cos3t = \frac{y}{2} \Rightarrow cos^2(3t) = \frac{y^2}{4} \end{cases}$

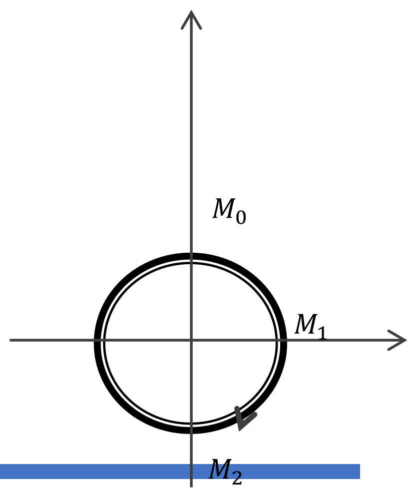
$sin^2(3t) + cos^2(3t) = 1 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$, *C'est une équation d'un cercle de centre (0,0) et de rayon 2*

à t = 0 $M_0 \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 2 \end{cases}$

Pour le sens on a :

à $t_3 = \frac{\pi}{6}$ $M_3 \begin{cases} x_3 = 2 \\ y_3 = 0 \end{cases}$

à $t_4 = \frac{\pi}{3}$ $M_4 \begin{cases} x_4 = 0 \\ y_4 = -2 \end{cases}$ Où $(t_3 < t_4)$



Exercice n°05:

1. $\begin{cases} x = t \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(1) \\ y = t^2 - t \dots\dots\dots\dots\dots(2) \end{cases}$

(1) ⇒**t=*x*** ……(3) on remplace (3) dans (2) on obtient $\boldsymbol{y = x^2 - x}$

c'est l'équation d'une parabole

2. **Les composantes de la vitesse** ?

$$\begin{cases} v_x(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} = 1 \\ v_y(t) = \dfrac{dy(t)}{dt} = 2t - 1 \end{cases}$$

***v*= ?**

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} \Rightarrow v = \sqrt{1^2 + (2t-1)^2} = \sqrt{4t^2 - 4t + 2}$$

3. **Les composantes de l'accélération ?**

$$\begin{cases} a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = \frac{d1}{dt} = 0 \\ a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} = \frac{d(2t-1)}{dt} = 2 \end{cases}$$

a= ?

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{0^2 + (2)^2} \Rightarrow a = +2\ m/s^2$$

(1) $\boldsymbol{a_T}$ =?

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\sqrt{4t^2-4t+2})}{dt} \Rightarrow a_T = \frac{8.t-4}{2.\sqrt{4t^2-4t+2}} = \frac{4.t-2}{\sqrt{4t^2-4t+2}}$$

$\boldsymbol{a_N}$ =?

$on\ sait$ que $\vec{a} = \vec{a_T} + \vec{a_N} \Rightarrow a^2 = {a_T}^2 + {a_N}^2 \Rightarrow {a_N}^2 = a^2 - {a_T}^2$

$\Rightarrow {a_N}^2 = 2^2 - (\frac{4.t-2}{\sqrt{4t^2-4t+2}})^2$

donc $a_N = \frac{2}{\sqrt{4t^2-4t+2}} = \frac{2}{v}$

(2) **R= ?**

On sait que $a_N = \frac{v^2}{R} \Rightarrow$ R= $\frac{v^2}{a_N}$ $\Rightarrow$ R = $\frac{v^3}{2}$

Exercice n° 6

$$\begin{cases} x = t^2 - 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ y = 2t \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

1. (1) ⇒**t=**$\boldsymbol{\sqrt{x+1}}$ ……(3) on remplace (3) dans (2) on obtient $\boldsymbol{y = 2\sqrt{x+1}}$ c'est l'équation d'une parabole

2. **Les composantes de la vitesse** ?

$$\begin{cases} v_x(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} = 2t \\ v_y(t) = \dfrac{dy(t)}{dt} = 2 \end{cases}$$

***v*= ?**

v=$|\vec{v}| = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2}$ ⇒ v=$\sqrt{(2t)^2 + 2^2}$ =$\sqrt{4t^2+4}$

3. **Les composantes de l'accélération ?**

$$\begin{cases} a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = \frac{d1}{dt} = 2 \\ a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} \quad = \frac{d(2t-1)}{dt} = 0 \end{cases}$$

a= ?

a=$|\vec{a}| = \sqrt{(2)^2 + 0^2}$ ⇒ a= + 2 m/s^2

4. La nature du mouvement est un mouvement rectiligne uniformément varie

   Parce que l'accélération est constante : a= + 2 m/s^2

5.

$\boldsymbol{a_T}$ =?

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\sqrt{4t^2+4})}{dt} \Rightarrow a_T = \frac{8.t}{2.\sqrt{4t^2+4}} = \frac{4.t}{\sqrt{4t^2+4}}$$

$\boldsymbol{a_N}$ =?

$on\ sait$ que $\vec{a} = \vec{a_T} + \vec{a_N} \Rightarrow a^2 = a_T{}^2 + a_N{}^2 \Rightarrow a_N{}^2 = a^2 - a_T{}^2$

$\Rightarrow a_N{}^2 = 2^2 - (\frac{4.t}{\sqrt{4t^2+4}})^2$

donc $a_N = \frac{4}{\sqrt{4t^2+4}} = \frac{4}{v}$

6.

R= ?

On sait que $a_N = \frac{v^2}{R} \Rightarrow$ R=$\frac{v^2}{a_N}$ $\Rightarrow$ R $= \frac{v^3}{4}$

Exercice n° 7 :

4. $\begin{cases} x(t) = v_0.t \dots\dots\dots(1) \\ y(t) = -\frac{1}{2}.g.t^2 \dots..(2) \end{cases}$

(3) $\Rightarrow$t=$\frac{x}{v_0}$ ……(3) on remplace (3) dans (2) on obtient $\boldsymbol{y = \frac{-g}{2.v_0{}^2}x^2}$ c'est l'équation d'une parabole

(4) v= ?

$$\begin{cases} v_x(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} = v_0 \\ v_y(t) = \dfrac{dy(t)}{dt} = -g.t \end{cases}$$

On remarque que la vitesse, suivant l'axe (ox), est constante.

v=$|\vec{v}| = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2}$ $\Rightarrow$ v=$\sqrt{v_0{}^2 + g^2.t^2}$

(5) a= ?

$$\begin{cases} a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = \frac{dv_0}{dt} = 0. \\ a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} = \frac{d(-g.t)}{dt} = -g \end{cases} \Rightarrow \text{a}=|\vec{a}| = \sqrt{0^2 + (-g)^2} \Rightarrow \text{a}= + g$$

(6) a_T =?

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d\sqrt{v_0{}^2+g^2.t^2}}{dt} \Rightarrow a_T = \frac{g^2.t}{\sqrt{v_0{}^2+g^2.t^2}}$$

a_N =?

on sait que $\vec{a} = \vec{a_T} + \vec{a_N} \Rightarrow a^2 = a_T{}^2 + a_N{}^2 \Rightarrow a_N = \sqrt{a^2 - a_T{}^2}$

donc $a_N = \frac{g.v_0}{\sqrt{v_0{}^2+g^2.t^2}} = \frac{g.v_0}{v}$

(7) R= ?

On sait que $a_N = \frac{v^2}{R} \Rightarrow$ R=$\frac{v^2}{a_N}$ $\Rightarrow$ R $= \frac{v^3}{g.v_0}$

Exercice n°8:

$$\begin{cases} x(t) = 2.t \dots\dots\dots(1) \\ y(t) = y = 4.t(t-1) \dots..(2) \end{cases}$$

(8) ⇒$t=\frac{x}{2}$ ……(3) on remplace (3) dans (2) on obtient $\boldsymbol{y = x^2 - 2x}$ c'est l'équation d'une parabole

(9) v= ?

$$\begin{cases} v_x(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} = 2 \\ v_y(t) = \dfrac{dy(t)}{dt} = 8t - 4 \end{cases}$$

On remarque que la vitesse, suivant l'axe (ox), est constante.

v=$|\vec{v}| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$ ⇒ v=$\sqrt{2^2 + (8t-4)^2}$ =$2\sqrt{16t^2 - 16t + 5}$

(10) a= ?

$$\begin{cases} a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = \frac{dv_0}{dt} = 0. \\ a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} = \frac{d(8t-4)}{dt} = 8 \end{cases} \Rightarrow a=|\vec{a}| = \sqrt{0^2 + (8)^2} \Rightarrow a= +8\ m/s^2$$

(11) a_T =?

$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d(2\sqrt{16t^2-16t+5})}{dt} \Rightarrow a_T = \frac{16.t - 8}{\sqrt{16t^2-16t+5}}$

a_N =?

on sait que $\vec{a} = \vec{a_T} + \vec{a_N} \Rightarrow a^2 = {a_T}^2 + {a_N}^2 \Rightarrow a_N = \sqrt{a^2 - {a_T}^2}$

donc $a_N = \frac{16}{2\sqrt{16t^2-16t+5}} = \frac{16}{v}$

(12) R= ?

On sait que $a_N = \frac{v^2}{R} \Rightarrow$ R=$\frac{v^2}{a_N}$ ⇒ R = $\frac{v^3}{16}$

Exercice n°9:

5. $\begin{cases} x = 4.t + 3 \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ y = t^2 - 5t + 2 \ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$

(13) ⇒$t=\frac{x-3}{4}$ ……(3) on remplace (3) dans (2) on obtient $\boldsymbol{y = \frac{1}{16}x^2 - \frac{13}{8}x + \frac{101}{16}}$

c'est l'équation d'une parabole

v= ?

$$\begin{cases} v_x(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} = 4 \\ v_y(t) = \dfrac{dy(t)}{dt} = 2t - 5 \end{cases}$$

On remarque que la vitesse, suivant l'axe (ox), est constante.

v=$|\vec{v}| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$ ⇒ v=$\sqrt{4^2 + (2t-5)^2}$ =$\sqrt{4t^2 - 20t + 41}$

a= ?

$$\begin{cases} a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = \frac{dv_0}{dt} = 0. \\ a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} \quad = \frac{d(8t-4)}{dt} = 2 \end{cases} \Rightarrow a=|\vec{a}| = \sqrt{0^2 + (2)^2} \Rightarrow a= + 2\ m/s^2$$

a_T =?

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\sqrt{4t^2-20t+41})}{dt} \Rightarrow a_T = \frac{8.t-20}{2\sqrt{4t^2-20t+41}} = \frac{4.t-10}{\sqrt{4t^2-20t+41}}$$

a_N =?

$on\ sait$ que $\vec{a} = \overrightarrow{a_T} + \overrightarrow{a_N} \Rightarrow a^2 = {a_T}^2 + {a_N}^2 \Rightarrow a_N = \sqrt{a^2 - {a_T}^2}$

donc $a_N = \frac{64}{\sqrt{4t^2-20t+41}} = \frac{8}{v}$

R= ?

On sait que $a_N = \frac{v^2}{R} \Rightarrow$ R= $\frac{v^2}{a_N}$ ⇒ R = $\frac{v^3}{8}$

Exercice n° 10 :

I.

$x_1 = t - 1$ et $x_2 = \frac{1}{2}t^2$

1. $x_{01} = -1$m et $x_{02} = 0m$

   $v_{01} = 1$ m/s et $v_{02} = 0m/s$

   a_1=0 m/s^2 et a_2=1m/s^2

2. $x_1 = x_2 \leftrightarrow t - 1 = \frac{1}{2}t^2 \rightarrow \frac{1}{2}t^2 - t + 1 = 0$

$\Delta = -1$ →**M₁ et M₂ ne peuvent pas se rencontré**

II.

$$\overrightarrow{.Om} \begin{cases} x(t) = t - 1 \\ y(t) = \frac{1}{2}t^2 \end{cases}$$

$$\vec{v}\begin{cases} v_x(t) = 1 \\ v_y(t) = t \end{cases}$$

$$\vec{a}\begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = 1 \end{cases}$$

D'où : $v = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2} = \sqrt{1+t^2}$ et $a = 1\, m/s^2$

2. La composante tangentielle

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

3. La composante normale

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_T} + \overrightarrow{a_N} \rightarrow a^2 = a_T^2 + a_N^2 \rightarrow a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

4. Le rayon de courbure

$$\rho = \frac{v^2}{a_N} = (1+t^2)^{3/2}$$

Exercice n°11 :

1. Pour l'étudiant - vitesse cst (MRU) : $x_1(t) = v_1 t + x_{01} = 5t$ $x_{01} = 0$, position initiale pour l'étudiant

Pour le bus - accélération cst (MRUV) : $x_2(t) = \frac{1}{2}\, a_2 t^2 + \ v_{02} t + x_{02} = 0.075t^2 + 30$ $avec\ \ v_{02} = 0$

L'étudiant rattrape le bus c.a.d : $x_1(t) = x_2(t)\ \Rightarrow\ 0.075t^2 + 30\ \ = 5t$

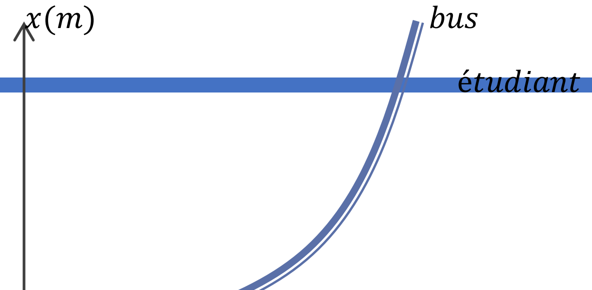
$$\Rightarrow\ 0.075t^2 - 5t + 30 = 0$$

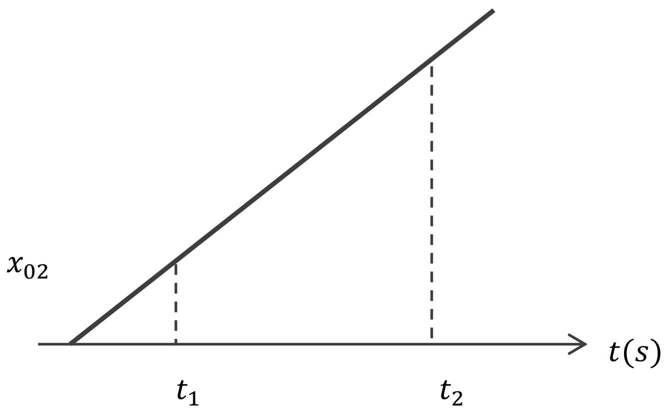
La résolution cette équation donne : $t_1 = 6.66\ s$ $, t_2 = 60\ s$

Distance courir par l'étudiant pour rattraper le bus est $x_1(t_1)$= $5t_1 = 33{,}33\ m$

2. La vitesse du bus : $v_2(t) = a_2(t)$+ $v_{02} = 0.15(6{,}66) = 0{,}99\ m/s$

3.





4. $x_1(t) = 2{,}6t$, $x_2(t) = 0.075t^2 + 30$

$x_1(t) = x_2(t) \Rightarrow 0.075t^2 + 30 \ = 2{,}6t$

$\Delta < 0$ pas de solutions c .a.d avec cette vitesse, l'étudiant jamais rattrape le bus.

5. Détermination de la vitesse minimale pour que l'étudiant rattrape le bus :

L'étudiant rattrape le bus si $\frac{1}{2}\ a_2t^2 + \ v_1t + x_{02}$= 0 admet des solutions

c.a.d $v_1{}^2 - 2.\,a_2.\,x_{02} > 0$

Et pour que la vitesse minimale si $v_1{}^2 - 2.\,a_2.\,x_{02} = 0 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2.\,0{,}75.\,30} =$ $3\ m/s$

Temps : t=$\frac{3}{0{,}15} = 20\ s$

Distance : $x_1 = 3.20 = 60m$

Exercice n°12

1- Pour l'automobile à une vitesse constante (mouvement rectiligne uniforme) :

$x_{auto}(t) = 15t + \ x_0$ ou $x_0 = 0$ $\quad x_{auto}(t) = 15t$

Pour la moto du policier il y a une accélération (mouvement rectiligne uniformément varié):

$x_{\ moto}(t) = \frac{1}{2}at^2 += 1{,}5\ t^2 + v_0 t + x_0 \qquad ou \quad x_0 = 0\ et\ v_0 = 0$

$$x_{\ moto}(t) = 1{,}5\ t^2$$

Le policier rejoigne l'automobile $\Rightarrow\ x_{auto}(t) = x_{moto}(t)\ \Rightarrow\ 1.5t^2 - 15t = 0$

La résolution cette équation donne : $\begin{cases} t_1 = 0\ s \\ t_2 = 10\ s \end{cases}$

2- La vitesse de la moto : $v_{moto} = at\ +\ v_0 = 3(10) = 30$ m/s

3- La distance parcourue par

$x_{auto}(t) = 15t = 15(10) = 150\ m$

$x_{moto}(t) = 1{,}5\ t^2 = 1{,}5(10)^2 = 150\ m$

Exercice n° 13 :

(1) La relation entre le vecteur accélération et le vecteur vitesse du centre d'inertie G du véhicule. $\vec{a_1} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

On a $\vec{a_1} = a_{1x}.\vec{\imath}$

$\vec{v} = v_x\vec{\imath} = v.\vec{\imath}$

$a_1 = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a_1.dt \Rightarrow v(\mathrm{t}) = a_1.t + cste$

à t=0, v (0)= v_0 donc $v(\mathrm{t}) = a_1.t + v_0$

(2) a_1 =?

$$a_1 = \frac{\Delta v}{dt} = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = 2.057\ ms^{-2}$$

(3) L'équation horaire x(t) du centre d'inertie G ?

$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v.dt = (a_1.t + v_0)dt$

Donc à t=0 x(0)=0 x(t)=$\frac{1}{2}a_1t^2 + v_0t$

(4) La distance parcourue par la Logan ?

$$d = x(t) - x(0) = \frac{1}{2}a_1t^2 + v_0t$$

d=75m

Exercice n° 14 :

1) Pour la voiture : $x_1(t) = \frac{a_1}{2}t^2 + d_1 = 1.5t^2 - 3$

Pour la moto : $x_2(t) = v_2 t - (d_1 + d_2) = 15t - 27$

2) Il y a dépassement si : $x_1(t) = x_2(t) \Rightarrow 1.5t^2 - 3 = 15t - 27$

$$\Rightarrow 1.5t^2 - 15t + 24 = 0$$

La résolution cette équation donne : $\begin{cases} t_1 = 2\ s \\ x_1(2) = 3\ m \end{cases}$ et $\begin{cases} t_1 = 8\ s \\ x_1(2) = 93\ m \end{cases}$ 3- Si

3) si : $v_2 = 36$ km/h = 10 m/s ce qui revient à résoudre l'équation:$1.5t^2 - 10t + 24 = 0$

qui n'a pas de solution car Δ' est négatif donc ils ne vont pas se rencontrer.

4) Détermination de la distance minimale :

a- $\Delta x = x_2 - x_1 = 1.5t^2 - 10t + 24$; Δx est minimale si sa dérivée est nulle :

c .a.d : $\Delta x' = 0 \Rightarrow 3.t - 10 = 0$

$$\Rightarrow t = {}^{10}/_{3}\ s$$

b- Δx_{min} =7.33 m

Exercice n°15

Athlète 1 ;

Son accélération pendant t_1 =1,8 s : $a_1 = \frac{v_1}{t_1} = \frac{9,5}{1,8} = 5,27\ m/s^2$

La distance parcourue pendant $t_1 = 1,8$ s : $x_1 = \frac{1}{2}a_1{t_1}^2 = \frac{1}{2}5,27(1,8)^2 = 8,53$ m

$x_1' = 100 - x_1 = 100 - 8,53 = 91,47$ m

$x_1' = v_1.t_1'$ $\quad t_1' = \frac{x_1'}{v_1} = \frac{91,47}{9,5} = 9,63$ s

Donc T1= $t_1 + t_1'$=1,8 + 9,63 $= 11,43$s

Athlète 2 ;

Son accélération pendant t_2 =2,2 s : $a_2 = \frac{v_2}{t_2} = \frac{9,6}{2,2} = 4,36\ m/s^2$

La distance parcourue pendant $t_2 = 2,2$ s : $x_2 = \frac{1}{2} a_2 {t_2}^2 = \frac{1}{2} 4,36(2,2)^2 = 10,55$ m

$x_2' = 100 - x_2 = 100 - 10,55 = 89,45$ m

$x_2' = v_2 . t_2'$ $\quad t_2' = \frac{x_2'}{v_2} = \frac{89,45}{9,6} = 9,32$ s

Donc T2= $t_2 + t_2'$=2,2 + $9,32 = 11,52\ s$

Donc : l'athlète 1 gagne la course avec 0,09 s parce que T1< T2

Exercice n°16 :

1. $M(t) : \begin{cases} x = 3\ sin3wt \ \Rightarrow\ sin3wt = \frac{x}{3} \ \Rightarrow\ sin^2(3wt) = \frac{x^2}{9} \\ y = 3\ cos3wt \ \Rightarrow\ cos3wt = \frac{y}{3} \ \Rightarrow\ cos^2(3wt) = \frac{y^2}{9} \end{cases}$

$sin^2(3wt) + cos^2(3wt) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} \quad ou \quad sin^2(3wt) + cos^2(3wt) = 1$

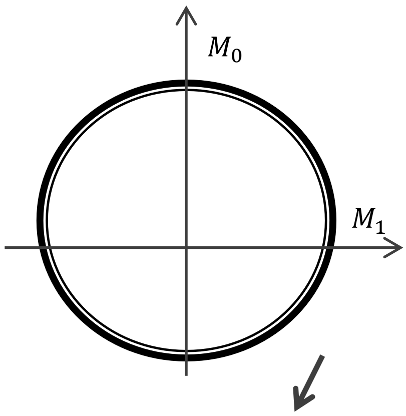
$\Rightarrow\ x^2 + y^2 = 9$,

C'est une équation d'un cercle de centre (0,0) et de rayon 3

à $t_0 = 0 \quad M_0 \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 3 \end{cases}$

Pour le sens on a :

à $t_1 = \frac{\pi}{6} \quad M_1 \begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 0 \end{cases} \qquad Ou\ \ t_1 > t_0$



$\overrightarrow{.Om} \begin{cases} x(t) = 3\ sin3wt \\ y(t) = 3\ cos3wt \end{cases}$

$\vec{v} \begin{cases} v_x(t) = 9w\ cos\ 3wt \\ v_y(t) = -9\ wsin3wt \end{cases}$

D'où : $v = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2} = \sqrt{(9w\cos 3t)^2 + (-9w\sin 3t)^2}$ =(3)²w =9w m/s.

2. La composante tangentielle

$$a_T = \frac{dv}{dt} = 0$$

2. La composante normale

$\vec{a} = \overrightarrow{a_T} + \overrightarrow{a_N} \Rightarrow a_N = a$ Parce que $a_T = 0$

$$\vec{a}\begin{cases} a_x(t) = -27w^2\, sin3wt \\ a_y(t) = -27\, w^2 cos\, 3wt \end{cases}$$

$a = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2} = \sqrt{(-27\, w^2 sin3wt)^2 + (-27\, w^2 sin3wt)^2}$ $=(\mathbf{3}\sqrt{\mathbf{3}})^{\mathbf{2}} w^2 = \mathbf{27} w^2$ m/s

$$\text{Donc } a_N = \mathbf{27} w^2 \text{ m/s}^2$$

$a_T = \frac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dt}} = 0 \quad \Rightarrow$ Mouvement uniforme.

Exercice n °17:

1- Equations de la vitesse et nature :

- ✓ $t \in [0{,}10]s$, $a_1 = 2\, m.S^{-2}$,

$a_1 = \frac{dv_1(t)}{dt} \Rightarrow dv_1(t) = a_1.dt \Rightarrow \int_{t_0=0}^{t} dv_1(t) = \int_{t_0=0}^{t} 2.dt = 2.\int_{t_0}^{t} dt$

$\Rightarrow [v_1(t)]_{t_0=0}^{t} = 2\,.\,[t]_{t_0=0}^{t} \Rightarrow v_1(t) - v(O) = 2.(t-0) \Rightarrow \boldsymbol{v_1(t) = 2.t}$ **(v_0=0)**

Nature du mvt : $\overrightarrow{a_1}.\overrightarrow{v_1} > 0$ $\quad$ *donc* M. R. Uniformément accéléré

- ✓ $t \in [10{,}60]s$, $a_2 = 0\, m.S^{-2}$,

$$a_2 = \frac{dv_2(t)}{dt} = 0 \Rightarrow v_2(t) = cst = \boldsymbol{v_1}(\mathbf{10}) = \mathbf{2.10} = \mathbf{20}\ m.S^{-1}$$

Nature du mvt : $\overrightarrow{a_1}.\overrightarrow{v_1} = 0$ $donc$ M. R. Uniforme

- ✓ $t \in [60, t_1]s$, $a_3 = -1\ m.S^{-2}$,

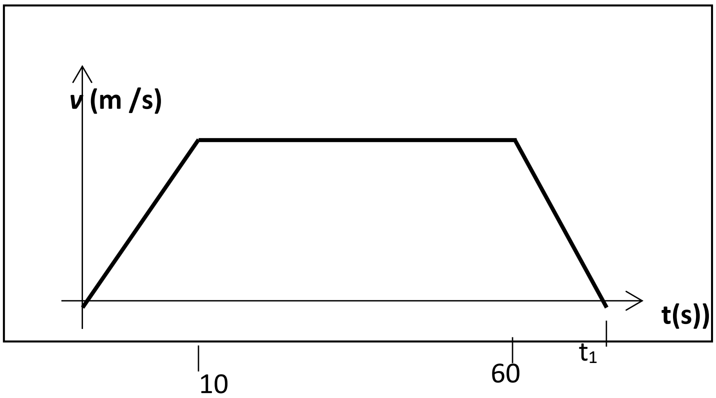
$$a_3 = \frac{dv_3(t)}{dt} \Rightarrow dv_3(t) = a_3.dt \Rightarrow \int_{t_0=60}^{t} dv_3(t) = \int_{t_0=60}^{t} -1.dt = -1.\int_{t_0}^{t} dt$$

$\Rightarrow [v_3(t)]_{t_0=60}^{t} = -1\ .[t]_{t_0=60}^{t} \Rightarrow v_3(t) - v(60) =$ -1.(t-60)

$\Rightarrow \boldsymbol{v_3}(\boldsymbol{t}) =$ **-1.t +60+** $v(60)$ **=-t+80** avec (v(60)=20)

Nature du mvt : $\overrightarrow{a_1}.\overrightarrow{v_1} < 0$ $donc$ M. R. Uniformément retardé

2-



*** valeur de t₁:**

Pour $t = t_1$ on a : $v_3(t_1) = 0$

donc : $t_1 = 80$ (s)

3- équations horaires : $t \in [0,10]s$

$$v_1(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} \Rightarrow dx_1(t) = v_1(t).dt \Rightarrow \int_{t_0=0}^{t} dx_1(t) = \int_{t_0=0}^{t} v_1(t).dt = \int_{t_0}^{t}(\mathbf{2.t})dt$$

$$\Rightarrow \int_{t_{0=0}}^{t} dx(t) = \int_{t_0}^{t}(2.\mathrm{t})\mathrm{dt} \;\Rightarrow [x_1(t)]_{t_0=0}^{t}=\frac{1}{2}.2\,.\,[t^2]_{t_0=0}^{t}+x_0\,.\,[t]_{t_0=0}^{t}$$

$$\boldsymbol{x_1(t) = t^2} \qquad \boldsymbol{(x_0 = 0)}$$

- ✓ $t \in [10,60]s$

$v_2\ (\mathrm{t})=\frac{dx_2(t)}{dt} \Rightarrow dx_2(t) = v_2(t).dt \Rightarrow \int_{t_{0=10}}^{t} dx_2(t) =$

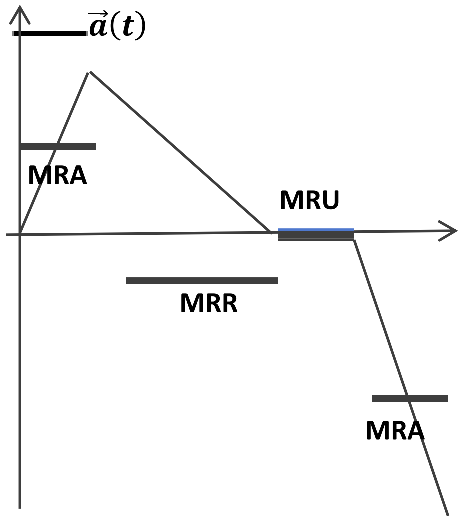
$\int_{t_0=10}^{t} v_2(t).dt = \int_{t_{0=10}}^{t}(\,\mathbf{20})dt$

$$\Rightarrow [x_2(t)]_{t_0=10}^{t}=20\,.\,[t]_{t_0=10}^{t}+x_0\,.\,[t]_{t_0=0}^{t}$$

$$\boldsymbol{x_2(t) = 20t - 200 + x(10) = 20t - 100} \qquad \boldsymbol{(x(10) = 100)}$$

Exercice n°18 :

$\overrightarrow{a_x}(t)$ =?



$t \in [0,2]$, $a_{1x} = \frac{\Delta v_1}{\Delta t} = \frac{10-0}{2-0} = 5\,m.S^{-2}$, $v(t) est\ une\ droite$ $\Rightarrow$

$t \in [0,6]$, $a_{2x} = \frac{\Delta v_2}{\Delta t} = \frac{0-10}{6-2} = -\frac{5}{2}\,m.S^{-2}$

$t \in [6,8]$, $a_{3x} = 0\ (\,v_3 = 0\,m.S^{-1})$

$t \in [8,10]$, $a_{4x} = \frac{\Delta v_4}{\Delta t} = \frac{-20-10}{10-8} = -10\,m.S^{-2}$

$a.v > 0$ → Le mouvement rectiligne accéléré **MRA**

$a.v < 0$ → Le mouvement rectiligne retardé **MRR**

$a.v = 0$ → Le mouvement rectiligne uniforme **MRU**

- $v_x(t)$ =? $et\ x(t)$ =?

$t \in [0,2]$, $a_1 = 5\,m.S^{-2}$

$a_1=\frac{dv_1(t)}{dt} \Rightarrow dv_1(t) = a_1.dt \Rightarrow \int_{t_{0=0}}^{t} dv_1(t) = \int_{t_0=0}^{t} 5.dt = 5.\int_{t_0}^{t} dt$

$\Rightarrow [v_1(t)]_{t_0=0}^{t}=5\,.\,[t]_{t_0=0}^{t} \Rightarrow v_1(t) - v(O) = 5.(t-0) \Rightarrow \boldsymbol{v_1(t) = 5.t}$ **(v_0=0)**

$v_1\,(t)=\frac{dx_1(t)}{dt} \Rightarrow dx_1(t) = v_1(t).dt \Rightarrow$

$\int_{t_0=0}^{t} dx_1(t) = \int_{t_0=0}^{t} v_1(t).dt = \int_{t_0}^{t} (\,\mathbf{5.t})dt$

$\Rightarrow \int_{t_0=0}^{t} dx(t) = \int_{t_0}^{t} (5.\mathrm{t})\mathrm{dt} \;\Rightarrow [x_1(t)]_{t_0=0}^{t}=\frac{1}{2}.5\,.\,[t^2]_{t_0=0}^{t}+ x_0\,.\,[t]_{t_0=0}^{t}$

$$\boldsymbol{x_1(t) = \frac{5}{2}t^2} \qquad (\boldsymbol{x_0 = 0})$$

De même manière on trouve :

$t \in [2,6]$: $v_2(t) = -\frac{5}{2}.\mathrm{t} + 15$; $x_2(t) = \frac{-5}{4}t^2 + 15t - 15$

$t \in [6,8]$: $v_3(t) = 0\ \mathrm{m}.s^{-1}$; $x_3(t) = x_2(6) = cst = 30\ m$

$t \in [8,10]$: $v_4(t) = -10.\mathrm{t} + 80$; $x_4(t) = -5t^2 + 80t - 290$

- Graphe de x (t) :

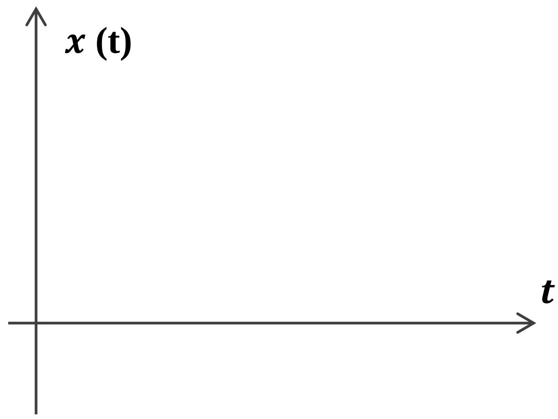
  $x(2) = x_1(2) = 10\ m$

  $x(4) = x_2(4) = 25\ m$

  $x(6) = x_2(6) = 30\ m$

  $x(8) = x_3(8) = 30\ m$

  $x(10) = x_4(10) = 10\ m$



- $x(t) = 0$?

graphiquement: le point où $x(t) = 0$ *c'est pour* $t = 0$

Analytiquement :

$t \in [0,2]$: $x_1(t) = 0 \Rightarrow \frac{5}{2}t^2 = 0 \quad \Rightarrow \mathrm{t} = 0$

$t \in [2,6]$: $x_2(t) = 0 \Rightarrow \frac{-5}{4}t^2 + 15t - 15 = 0 \Rightarrow \Delta = 150 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 10{,}89 \notin [2{,}6] \\ t_2 = 1{,}10 \notin [2{,}6] \end{cases}$

$t \in [6,8]$: $x_3(t) = cst = 30\ m \neq 0$

$t \in [8,10]$: $x_4(t) = 0 \Rightarrow -5t^2 + 80t - 290 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \Delta = 150 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 10{,}44 \notin [8{,}10] \\ t_2 = 5{,}55 \notin [8{,}10] \end{cases}$

Donc la seule point pour $x(t) = 0 \;\; est \; t = 0$

- ***Vecteur vitesse aux instant t=4s et t=9s***

$v(4) = v_2(4) = -\frac{5}{2}.(4) + 15 = 5 \text{ m}.s^{-1} \Rightarrow \vec{v}(4)=5\vec{\imath}$

$v(9) = v_4(9) = -10.(9) + 80 = -10 \; m.s^{-1} \Rightarrow \vec{v}(9)=-10\vec{\imath}$

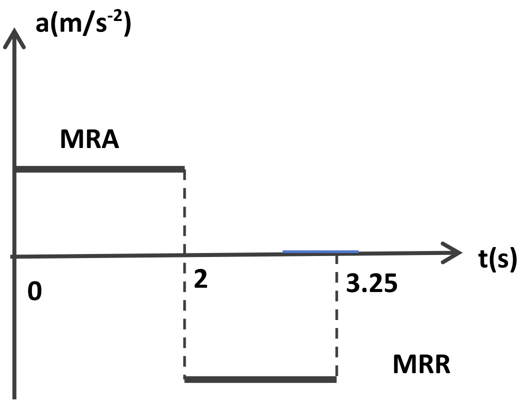
$\vec{a}(4\text{-}9)=\frac{\overrightarrow{v(9)}-\overrightarrow{v(4)}}{9-4} = -3\vec{\imath}$

- Distance total parcourue lorsque $t \in [0,10]$

$\Delta x_t = |\Delta x_1|+|\Delta x_2|+|\Delta x_3|+|\Delta x_4|+|\Delta x_5| = |10|+|15|+|5|+|0|+|-20| = 50 \; m$

Exercice n°19

$\overrightarrow{a_x}(t) = ?$



$t \in [0,2]s \;, a_1 = \frac{\Delta v_1}{\Delta t} = \frac{4-0}{2-0} = 2 \; m.S^{-2},$

$t \in [2,\; 3.25]s \;, a_2 = \frac{\Delta v_2}{\Delta t} = \frac{0-4}{3.25-2} = -\frac{4}{1.25} = -3.2 \; m.S^{-2}$

$t \in [0,2]s \;,\; a_{1=}cst \;\; et \;\; a_1.v_1 > 0 \;\rightarrow$ Le mouvement rectiligne accéléré **MRA**

$t \in [2, 3.25]s$ „ $a_{2=}cst \;\; et \;\; a_2.v_2 < 0 \;\rightarrow$ Le mouvement rectiligne retardé **MRR**

- 3) $v_x(t) = ? \quad et \; x(t) = ?$

$$t \in [0,2]s \;, a_1 = 2 \; m.S^{-2}$$

$a_1=\frac{dv_1(t)}{dt} \Rightarrow dv_1(t) = a_1.dt \Rightarrow \int_{t_0=0}^{t} dv_1(t) = \int_{t_0=0}^{t} 2.dt = 2.\int_{t_0}^{t} dt$

$\Rightarrow [v_1(t)]_{t_0=0}^{t}=2\,.\,[t]_{t_0=0}^{t} \Rightarrow v_1(t) - v(O) = 2.(t-0) \;\Rightarrow \boldsymbol{v_1(t) = 2.t}$ **(v_0=0)**

$v_1\,(t)=\frac{dx_1(t)}{dt} \Rightarrow dx_1(t) = v_1(t).dt \Rightarrow$

$\int_{t_0=0}^{t} dx_1(t) = \int_{t_0=0}^{t} v_1(t).dt = \int_{t_0}^{t} (\,\mathbf{2.t})dt$

$\Rightarrow \int_{t_0=0}^{t} dx(t) = \int_{t_0}^{t} (2.t)dt \;\;\Rightarrow [x_1(t)]_{t_0=0}^{t}=\frac{1}{2}.2\,.\,[t^2]_{t_0=0}^{t}+ x_0\,.\,[t]_{t_0=0}^{t}$

$$\boldsymbol{x_1(t) = t^2} \qquad (\boldsymbol{x_0 = 0})$$

De même manière on trouve :

$t \in [2\,,\ 3.25]$: $\ a_2 = -3{,}2\ m.S^{-2}$

$$a_2 = \frac{dv_2(t)}{dt} \Rightarrow dv_2(t) = a_2.dt \Rightarrow \int_{t_{0=0}}^{t} dv_2(t) = \int_{t_0=0}^{t} -3{,}2dt = -3{,}2.\int_{t_0}^{t} dt$$

$\Rightarrow [v_2(t)]_{t_0=0}^{t} = -3{,}2\,.\,[t]_{t_0=0}^{t} \Rightarrow v_2(t) - v(2) = -3{,}2.(t-2) \Rightarrow \boldsymbol{v_2(t) = -3{,}2.t\ +10{,}4}$ **(v_{02}=4)**

Exercice n°20:

On cherche le temps nécessaire pour que la bille tombe sur la tête du camarade

$h_{bille} = -\frac{1}{2}gt^2 \ldots\ldots\ldots (1)$

$(1) \Rightarrow 46\text{-}1{,}8 = 5\ t^2$

$\Rightarrow t^2 = \frac{44{,}2}{5} = 8.84$

$\Rightarrow t = 2.97\ s$

$d = vt = 1{,}2 * 2.97 = 3.56\ m$

Exercice n°21:

1- La vitesse linéaire du mobile : $v = \frac{ds}{dt} = 2t$ La vitesse angulaire : $\omega = \frac{v}{R} = t$.

2- L'accélération tangentielle : $= \frac{dv}{dt} = 2\ m/s^2$ L'accélération normale : $a_n = \frac{v^2}{R} = 2t^2$

L'accélération totale : $a^2 = a^2_t + a^2_n \Rightarrow \mathbf{a = 2}\ \sqrt{1+t^4}$

Exercice n° 22 :

$$\overrightarrow{OM}: \begin{cases} x = R.cos\ \theta \\ y = R.sin\ \theta \end{cases}$$

1. $\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} : \begin{cases} v_x = \frac{d\,(R.cos\,\theta)}{dt} = -R.\dot{\theta}.\sin\theta \\ v_y = \frac{d\,(R.sin\,\theta)}{dt} = R.\dot{\theta}.\cos\theta \end{cases}$

   Donc $|\vec{v}(t)| = \sqrt{(-R.\dot{\theta}.\sin\theta)^2 + (R.\dot{\theta}.\cos\theta)^2} = R.\dot{\theta}$

2.

$$a)\quad \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}: \begin{cases} a_x = \frac{d\,(-R.\theta^{\cdot}.\sin\theta)}{dt} = -R.\theta^{\cdot\cdot}.\sin\theta - R.\theta^{\cdot 2}.\cos\theta \\ a_y = \frac{d\,(R.\theta^{\cdot}.\cos\theta)}{dt} = \quad R.\theta^{\cdot\cdot}.\cos\theta - R.\theta^{\cdot 2}.\sin\theta \end{cases}$$

$$b)\quad \vec{a}(t): \begin{cases} a_T = \frac{d\vec{v}}{dt} = R.\theta^{\cdot\cdot} \\ a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{(R.\theta^{\cdot})^2}{R} = R.\theta^{\cdot 2} \end{cases}$$

3.

$$\alpha_0 = \frac{dw}{dt} \Rightarrow \mathrm{dw} = \alpha_0.dt$$

$$\Rightarrow \int \mathrm{dw} = \int \alpha_0.dt$$

$$\Rightarrow \mathrm{w} = \alpha_0 t + w_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$w = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \mathrm{d\theta} = w.dt$$

$$\Rightarrow \int \mathrm{d\theta} = \int (\alpha_0 t + w_0).dt$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{1}{2}\alpha_0 t^2 + w_0 t + \theta_0 \ldots\ldots\ldots(2)$$

La relation entre w et θ :

On a :

(1) $\Rightarrow t = \frac{w-w_0}{\alpha_0}$ ……….(3)

(2) En remplace (3) dans (2) on obtient $\theta = \frac{1}{2}\alpha_0(\frac{w-w_0}{\alpha_0})^2 + w_0(\frac{w-w_0}{\alpha_0}) + \theta_0$

se qui conduit à la relation $\theta = \frac{w^2-w_0{}^2}{2.\alpha_0}$

Exercice n° 23 :

$$\overrightarrow{OM}: \begin{cases} x = R.\cos\theta(t) \\ y = R.\sin\theta(t) \\ z = h\theta(t) \end{cases}$$

En coordonnée cartésienne

$$4.\quad \vec{v}(t)=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}:\begin{cases} v_x=\frac{d\,(R.\cos\theta)}{dt}=-R.\dot\theta.\sin\theta \\ v_y=\frac{d\,(R.\sin\theta)}{dt}=R.\dot\theta.\cos\theta \\ v_z=\frac{d(h\theta)}{dt}=h.\dot\theta \end{cases}$$

Donc $|\vec{v}(t)|=\sqrt{(-R.\dot\theta.\sin\theta)^2+(R.\dot\theta.\cos\theta)^2+h^2.\dot\theta^2}=\sqrt{R^2.\dot\theta^2+h^2.\dot\theta^2}$

$$c)\quad \vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}}{dt}:\begin{cases} a_x=\frac{d\,(-R.\dot\theta.\sin\theta)}{dt}=-R.\ddot\theta.\sin\theta-R.\dot\theta^2.\cos\theta \\ a_y=\frac{d\,(R.\dot\theta.\cos\theta)}{dt}=R.\ddot\theta.\cos\theta-R.\dot\theta^2.\sin\theta \end{cases}$$

$$d)\quad \vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}}{dt}:\begin{cases} a_x=\frac{d\,(-R.\dot\theta.\sin\theta)}{dt}=-R.\ddot\theta.\sin\theta-R.\dot\theta^2.\cos\theta \\ a_y=\frac{d\,(R.\dot\theta.\cos\theta)}{dt}=R.\ddot\theta.\cos\theta-R.\dot\theta^2.\sin\theta \\ a_z=\frac{d(h.\dot\theta)}{dt}=h.\ddot\theta \end{cases}$$

$$|\vec{a}(t)|=\sqrt{(R.\ddot\theta)^2+\left(R.\dot\theta^2\right)^2+h^2.\ddot\theta^2}$$

En coordonnée cylindrique

Voir le cours chapitre cinématique

$$\overrightarrow{OM}=\mathrm{R}.\cos\theta.\vec{i}+R.\sin\theta.\vec{j}+\mathrm{z}.\vec{k}=R.\overrightarrow{u_r}+h\theta\,.\vec{k}$$

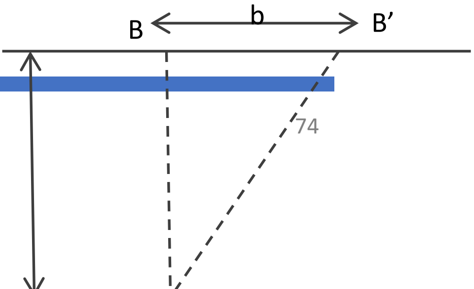
$$\vec{v}=R.\dot\theta.\overrightarrow{u_\theta}+h\dot\theta.\vec{k}$$

$$\vec{a}=-R.\dot\theta^2.\overrightarrow{u_R}+\ddot\theta.R.\overrightarrow{u_\theta}+h\ddot\theta.\vec{k}$$

$$tg\alpha=\frac{h}{R}$$

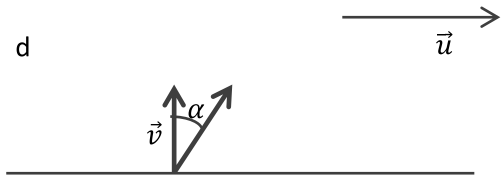
Exercice n° 24 :

Le repère mobile est lié au nageur. Le mouvement du courant est un mouvement de translation du repère mobile par rapport au repère fixe.



1)

$$\begin{cases} \vec{u}. = u.\vec{\imath} \\ \vec{v} = v.\vec{\jmath} \end{cases}$$



L'équation du mouvement du courant (translation) est : $x = u.t$ ……………………(1)

L'équation du mouvement du nageur (mouvement relatif) est : y=v.t ……………………(2)

(1)⇒ $t = \frac{x}{u}$ on remplace dans (2) on obtient :

$y = v.\frac{x}{u} = \frac{v}{u}.x$ C'est une équation d'une droite passant par l'origine et son angle par rapport à la vertical est α :

$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r}\,(nageur)$+ $\overrightarrow{v_a}$ (eau) = $v.\vec{\jmath} + u.\vec{\imath}$

Le point d'abordage B' se trouve décalé par rapport au point vertical du point de départ par une distance b, on peut alors écrire :

$tg(\alpha) = \frac{b}{d} = \frac{u}{v}$

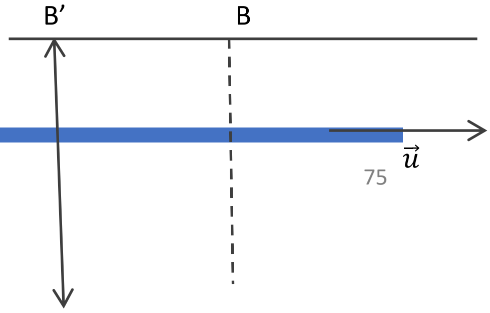
$y = v.t \Rightarrow d = v.t_1, \quad ou \quad t_1 = \frac{d}{v}$

La distance d'abordage par rapport à la verticale est : $b = u.t_1 = u.\frac{d}{v}$ ou $b = \frac{u}{v}.d$

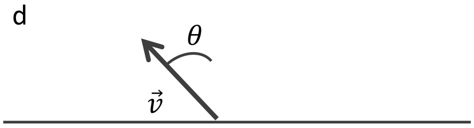
2) Maintenant le nageur veut atteindre le point B, donc il prend une orientation de θ par rapport à la verticale.

La composition des vitesses nous permet d'écrire que la vitesse absolue est égale à la somme des vitesses d'entrainement et relative :

$\overrightarrow{v_a} = \vec{v} + \vec{u}$



$\sin(\theta) = \frac{B'B}{A'B'} = \frac{u.t_2}{v.t_2}$ avec t_2 : le temps d'abordage



$\Rightarrow \sin(\theta) = \frac{u}{v} \Rightarrow \theta = \arcsin\left(\frac{u}{v}\right)$ et

$v.t_2\cos(\theta) = d \Rightarrow t_2 = \frac{d}{v\cos(\theta)}$

Exercice n° 25 :

$\overrightarrow{OO'} = \frac{1}{2}at^2\vec{j}$

La vitesse angulaire constante autour de l'axe Oz $\vec{\omega} = \omega\vec{k} = \omega\overrightarrow{u_z}$

$\overrightarrow{O'M}\begin{cases} X = t^2 \\ Y = t \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{O'M} = \boldsymbol{t^2}\overrightarrow{u_x} + t\overrightarrow{u_y}$

Déterminer dans le repère mobile de base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$

Vitesse relative :

$$\overrightarrow{v_r} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}| = 2t\overrightarrow{u_x} + \overrightarrow{u_y}$$

Vitesse d'entrainement :

$$\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}| + (\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}) = at\vec{j} + \omega t^2\overrightarrow{u_y} - \omega t\overrightarrow{u_x}$$

$$= at[\sin(\omega t)\overrightarrow{u_x} + \cos(\omega t)\overrightarrow{u_y}] + \omega t^2\overrightarrow{u_y} - \omega t\overrightarrow{u_x}$$

$$= [at\sin(\omega t) - \omega t]\overrightarrow{u_x} + [at\cos(\omega t) - \omega t^2]\overrightarrow{u_y}$$

Vitesse absolue :

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_e} + \overrightarrow{v_r} = [at\sin(\omega t) - \omega t + 2t]\overrightarrow{u_x} + [at\cos(\omega t) - \omega t^2 + 1]\overrightarrow{u_y}$$

Accélération relative :

$$\overrightarrow{a_r} = \frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt}| = 2\overrightarrow{u_x}$$

Accélération d'entrainement :

$$\overrightarrow{a_r} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M}\right) + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M})$$

$\Rightarrow \overrightarrow{a_r} = \frac{d^2\overrightarrow{OO\prime}}{dt^2}$ $+\vec{\omega}\wedge$ ($\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}) = \ a\vec{j} - \omega^2 t^2\overrightarrow{u_x}$ - $\omega^2 t\overrightarrow{u_y}$

$= a[sin(\omega t)\overrightarrow{u_x}$+cos$(\omega t)\overrightarrow{u_y}] - \omega^2 t^2\overrightarrow{u_x}$ - $\omega^2 t\overrightarrow{u_y}$

$=[asin(\omega t) + \omega^2 t^2]\overrightarrow{u_x}$+$[acos(\omega t) + \omega^2 t]\overrightarrow{u_y}$

Accélération de Coriolis :

$\overrightarrow{a_c} = 2\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{v_r} = 2\omega\overrightarrow{u_z}\wedge\left(2t\overrightarrow{u_x} + \overrightarrow{u_y}\right) = 4\omega t\overrightarrow{u_y} - 2\omega\overrightarrow{u_x}$

Accélération absolue :

$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_c}$$

$\overrightarrow{a_a}$ $=[asin(\omega t) + \omega^2 t^2 + 2 - 2\omega]\overrightarrow{u_x}$+$[acos(\omega t) - \omega^2 t + 4\omega t]\overrightarrow{u_y}$

Exercice n°26 :

$\overrightarrow{OO'} = \ \boldsymbol{at\vec{\imath}}$

La vitesse angulaire constante autour de l'axe Oz $\ \vec{\omega} = \omega\vec{k} = \ \omega\overrightarrow{k'}$

$\overrightarrow{O'M} = bt^2\overrightarrow{\jmath'}$

Déterminer dans le repère fixe de base $(\vec{\imath},\vec{\jmath}\,,\vec{k})$

Vitesse relative :

$\overrightarrow{v_r} = \frac{d\overrightarrow{O\prime M}}{dt}|$= $2bt\overrightarrow{\jmath}' = 2bt[\,-sin(\omega t)\vec{\imath} +$ cos$(\omega t)\vec{\jmath}$]=$-2btsin(\omega t)\vec{\imath} + 2btcos(\omega t)\vec{\jmath}$

Vitesse d'entrainement :

$\overrightarrow{v_e}$=$\frac{d\overrightarrow{OO\prime}}{dt}|$ $+ (\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M})$= $a\vec{\imath} - b\omega t^2\vec{\imath}' = a\vec{\imath} - b\omega t^2[cos(\omega t)\vec{\imath} +$ sin$(\omega t)\vec{\jmath}]$

$=[a - b\omega t^2 cos(\omega t)]\vec{\imath} - b\omega t^2$ sin$(\omega t)\vec{\jmath}$

Vitesse absolue :

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_e} + \overrightarrow{v_r} = -2btsin(\omega t)\vec{\imath} + 2bt\cos(\omega t)\vec{\jmath} + [a - b\omega t^2 cos(\omega t)]\vec{\imath} - b\omega t^2 \sin(\omega t)\,\vec{\jmath}$$

$$=[-2btsin(\omega t) + \ a - b\omega t^2 cos(\omega t)]\vec{\imath} + [2bt cos(\omega t) - b\omega t^2 \sin(\omega t)]\,\vec{\jmath}$$

Accélération relative :

$$\overrightarrow{a_r} = \frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt}| = 2b[-sin(\omega t)\vec{\imath} + \cos(\omega t)\vec{\jmath}] = -2b\, sin(\omega t)\vec{\imath} + 2b\cos(\omega t)\vec{\jmath}$$

Accélération d'entrainement :

$$\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + (\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M}) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}) = 0 - \omega^2 bt^2 \vec{\jmath'}$$

$$= -\omega^2 bt^2[-sin(\omega t)\vec{\imath} + \cos(\omega t)\vec{\jmath}]$$

$$= \omega^2 bt^2\, sin(\omega t)\vec{\imath} - \omega^2 bt^2 \cos(\omega t)\vec{\jmath}$$

Accélération de Coriolis :

$$\overrightarrow{a_c} = 2\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{v_r} = 2\omega\overrightarrow{u_z} \wedge (2t\overrightarrow{u_x} + \overrightarrow{u_y}) = -4\omega bt\vec{\imath'} = -4\omega bt[cos(\omega t)\vec{\imath} + \sin(\omega t)\vec{\jmath}]$$

$$= -4\omega bt cos(\omega t)\vec{\imath} - 4\omega bt \sin(\omega t)\vec{\jmath}$$

Accélération absolue :

$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_c}$$

$\overrightarrow{a_a} = -2b\, sin(\omega t)\vec{\imath} + 2b\cos(\omega t)\vec{\jmath} + \omega^2 bt^2\, sin(\omega t)\vec{\imath} - \omega^2 bt^2 \cos(\omega t)\vec{\jmath} - 4\omega bt cos(\omega t)\vec{\imath} - 4\omega bt \sin(\omega t)\vec{\jmath}$

$= [-2b\, sin(\omega t) + \omega^2 bt^2\, sin(\omega t) - 4\omega bt cos(\omega t)]\vec{\imath} + +[2b\cos(\omega t) - \omega^2 bt^2\, cos(\omega t) - 4\omega bt \sin(\omega t)]\vec{\jmath}$

Exercice n°27 :

La vitesse angulaire constante autour de l'axe Oz $\vec{\omega} = \omega\vec{k} = \omega\vec{k'}$

1.

$$\overrightarrow{OO'} = \vec{0}$$

$\overrightarrow{O'M} = v.t.\overrightarrow{U_x}$

Déterminer dans le repère mobile :

Vitesse relative :

$\overrightarrow{v_r} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}| = v.\overrightarrow{U_x}$

Vitesse d'entrainement :

$\overrightarrow{v_e}=\frac{d\overrightarrow{OO\prime}}{dt}| \ + (\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M})= 0 + v\omega t\overrightarrow{U_y} = v\omega t\overrightarrow{U_y}$

Vitesse absolue :

$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_e} + \overrightarrow{v_r} = v.\overrightarrow{U_x} + v\omega t\overrightarrow{U_y}$

Accélération relative :

$\overrightarrow{a_r} = \frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt}|=\vec{0}$

Accélération d'entrainement :

$\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO\prime}}{dt^2}+(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M}) \ +\vec{\omega}\wedge (\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M})$

$\Rightarrow \overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO\prime}}{dt^2} \ +\vec{\omega}\wedge (\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}) = 0 - \omega^2 v.t\overrightarrow{U_x}=-\omega^2 v.t\overrightarrow{U_x}$

Accélération de Coriolis :

$$\overrightarrow{a_c} = 2\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{v_r} = 2\omega v\overrightarrow{U_y}$$

Accélération absolue :

$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_c}=-\omega^2 v.t\overrightarrow{U_x} + 2\omega v\overrightarrow{U_y}$

Exercice n° 28 :

$\overrightarrow{OO'} = at\vec{\imath}$

La vitesse angulaire constante autour de l'axe Oz $\vec{\omega} = \omega\vec{k} = \omega\vec{k'}$

$\overrightarrow{O'M} = bt^2\vec{\jmath'}$

Déterminer dans le repère fixe de base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$

Vitesse relative :

$\overrightarrow{v_r} = \frac{d\overrightarrow{O\prime M}}{dt}|= 2bt\vec{\jmath'} = 2bt[-sin(\omega t)\vec{\imath} + \cos(\omega t)\vec{\jmath}]=-2btsin(\omega t)\vec{\imath} + 2bt\cos(\omega t)\vec{\jmath}$

Vitesse d'entrainement :

$\overrightarrow{v_e}=\frac{d\overrightarrow{OO\prime}}{dt}| \ + (\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M})= a\vec{\imath} - b\omega t^2\vec{\imath'} = a\vec{\imath} - b\omega t^2[cos(\omega t)\vec{\imath} + \sin(\omega t)\vec{\jmath}]$

$$=[a - b\omega t^2 cos(\omega t)]\vec{\imath} - b\omega t^2 \sin(\omega t)\vec{\jmath}$$

Vitesse absolue :

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_e} + \overrightarrow{v_r} = -2btsin(\omega t)\vec{\imath} + 2bt\cos(\omega t)\vec{\jmath} + [a - b\omega t^2 cos(\omega t)]\vec{\imath} - b\omega t^2 \sin(\omega t)\,\vec{\jmath}$$

$$=[-2btsin(\omega t) + \ a - b\omega t^2 cos(\omega t)]\vec{\imath} + [2bt\cos(\omega t) - b\omega t^2 \sin(\omega t)]\,\vec{\jmath}$$

Accélération relative :

$$\overrightarrow{a_r} = \frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt}|=2b[\,-sin(\omega t)\vec{\imath} + \cos(\omega t)\vec{\jmath}] =\text{-2b}\, sin(\omega t)\vec{\imath} + 2b\cos(\omega t)\vec{\jmath}$$

Accélération d'entrainement :

$$\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO\prime}}{dt^2} + (\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M}) \ +\vec{\omega}\wedge(\ \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO\prime}}{dt^2} \ +\vec{\omega}\wedge(\ \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}) = \ 0 - \omega^2 bt^2\overrightarrow{\jmath'}$$

$$=-\omega^2 bt^2[\,-sin(\omega t)\vec{\imath} + \cos(\omega t)\vec{\jmath}]$$

$$=\omega^2 bt^2 \ sin(\omega t)\vec{\imath} - \omega^2 bt^2 \cos(\omega t)\vec{\jmath}$$

Accélération de Coriolis :

$$\overrightarrow{a_c} = 2\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{v_r} = 2\omega\overrightarrow{u_z}\wedge\left(2t\overrightarrow{u_x} + \overrightarrow{u_y}\right) = -4\omega bt\overrightarrow{\imath'} = -4\omega bt[cos(\omega t)\vec{\imath} + \sin(\omega t)\vec{\jmath}]$$

$$= -4\omega btcos(\omega t)\vec{\imath} - 4\omega bt\ \sin(\omega t)\vec{\jmath}$$

Accélération absolue :

$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_e} + \ \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_c}$$

$$\overrightarrow{a_a} = -2\text{b}\ sin(\omega t)\vec{\imath} + 2b\cos(\omega t)\vec{\jmath} + \omega^2 bt^2 \ sin(\omega t)\vec{\imath} - \omega^2 bt^2\cos(\omega t)\vec{\jmath} - 4\omega btcos(\omega t)\vec{\imath} - 4\omega bt\ \sin(\omega t)\vec{\jmath}$$

$$=[-2\text{b}\ sin(\omega t) + \omega^2 bt^2 \ sin(\omega t) - 4\omega btcos(\omega t)]\vec{\imath} + +[2b\cos(\omega t) - \omega^2 bt^2 \ cos(\omega t) - 4\omega bt\ \sin(\omega t)]\vec{\jmath}$$

CHAPITRE : III

DYNAMIQUE

Objectifs :

- Déterminer les caractéristiques de certaines forces ;
- Appliquer les trois lois de Newton ; Introduire la notion d'énergie et de puissance ;
- Appliquer les théorèmes généraux ;
- Utiliser le théorème de l'énergie cinétique pour résoudre les problèmes à un degré de liberté ; Introduire le théorème du moment cinétique ;
- S'entrainer à la résolution des équations différentielles du mouvement ;
- Etudier les mouvements à axe centrale ;
- Comprendre et utiliser les lois de conservation ;
- Appliquer les théorèmes généraux ;

Pré-requis :

- Coordonnées polaires, coniques ;
- Lecture de courbes et interprétation graphique de solutions ;
- Résolution des équations différentielles du mouvement ;

Série de TD n° 04

Exercice n°1 :

Une automobile de 1200 kg est en panne sur une plaque de verglas. On lui attache deux cordes et l'on exerce les forces F_1=800 N à 35° nord par rapport à l'est et F_2=600 N à 25°sud par rapport à l'est.

- Quelle est l'accélération de l'automobile ?

(On considère l'automobile comme une particule et on suppose le frottement négligeable.)

Exercice n°02:

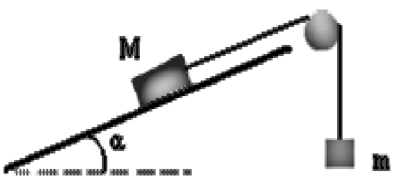
Un bloc A de masse $m_A = 2$ kg est place sur un autre bloc B de masse $m_B = 5$ kg. Le bloc B, qui est posé sur une surface horizontale sans frottement, est soumis à une force $\overrightarrow{F_0}$.

Déterminer la valeur maximale du module de $\overrightarrow{F_0}$ pour que le bloc A ne glisse pas sur le bloc B sachant que le coefficient de frottement statique entre les deux blocs est μ_s = 0,25.

Exercice n°3 :

L'objet de masse m se déplace avec frottement sur le plan incliné. La poulie a une masse faible et en conséquence la tension du fil est la même de chaque côté.

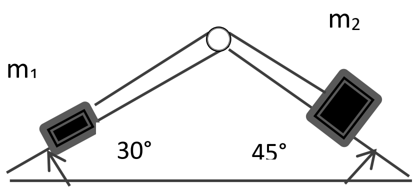
1. Pour quelle masse m, le système est-il en équilibre ?
2. Si m=2M, quel est le sens du mouvement ? α=30° et m=1kg.



Exercice n°4:

Deux mases m_1 et m_2 sont reliées par un fil sans masse qui passe sur une poulie voir la figure. On néglige la masse de la poulie ainsi que les forces de frottement.

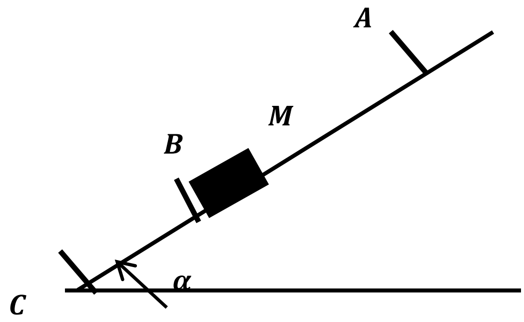
1. Représenter toutes les forces agissant sur le système.
2. Sachant que m_2=2.0 kg, trouver la valeur de m_1 à l'équilibre.



3. On donne m_1=2.5 kg et m_2=2.0 kg, tracer les forces appliquées au système. En utilisant la deuxième loi de Newton, calculer l'accélération du mouvement.

Exercice 05:

Un solide M, de masse m = 0.1 kg, glisse sur la pente d'un plan incliné d'un angle α = 20° par rapport à l'horizontale. Le solide est abandonné depuis le point A sans vitesse initiale. En considérant les frottements négligeables,



1. Déterminer la nature du mouvement de M. Justifiez.
2. Calculer le temps mis par la masse pour arriver au point B si AB = 2 m.

En fait, cette durée est de 1.3 s, en admettant l'existence des frottements caractérisés par un coefficient de frottements de glissement μ:

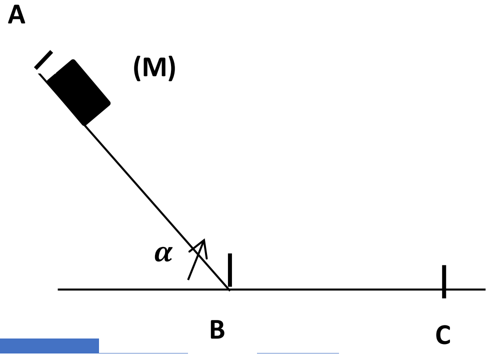
a - Représenter les forces agissant sur M dans ce cas.

b- Déduire la valeur de ce coefficient de frottement μ.

3. Le solide est maintenant lancé du point B vers le point A avec une vitesse de 3 m/s. Déterminer la position du point C où la vitesse du solide s'annule, si on néglige les frottements. On prendra dans cet exercice : **g = 9.81 m/s^2.**

Exercice n°6 :

On lance un bloc (M) de masse m, à partir du sommet d'un plan AB= 1m incliné de α = 45° par rapport à l'horizontale, avec une vitesse initiale $v_A = 1\ m/s$.



1. Sachant que le coefficient de frottement $\mu = 0{,}5$ sur AB, calculer l'accélération du mouvement sur AB et la vitesse de (M) lorsqu'il atteint le point B.
2. On considère que les forces de frottements sont négligeables Sur le plan horizontal BC.

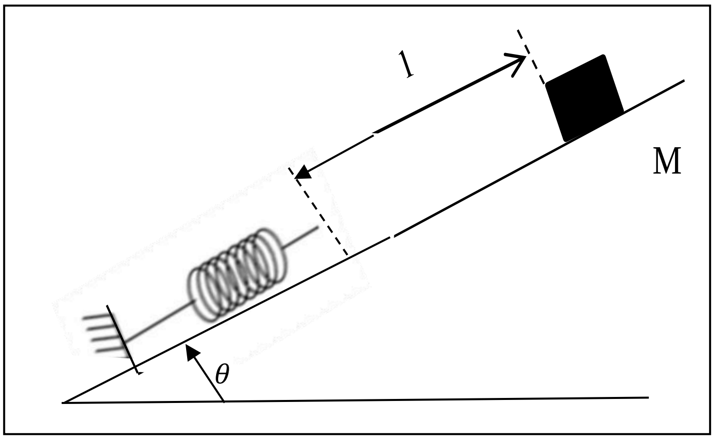
Quelle est la nature du mouvement sur le plan horizontal BC? Justifiez.

- À quelle distance du point B, le bloc (M) s'arrêtera-t-il ?

Exercice 7 :

Un bloc de masse m est lancé sans vitesse initiale sur un plan incliné faisant un angle θ avec l'horizontale, à une distance l au-dessus un ressort léger non comprimé, de raideur K. le mouvement du bloc se fait sans frottement.

1. Déterminer la vitesse du bloc quand il touche le ressort pour la première fois à l'aide du PFD.
2. Déterminer la compression maximale du ressort en fonction de m, g, K et θ.

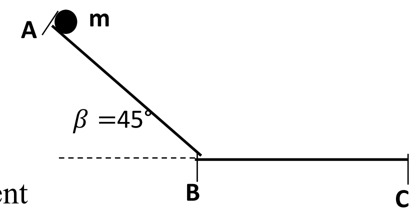


Exercice 8 :

Une masse m est lâchée sans vitesse initiale d'un point **A**, elle arrive en **B** avec une vitesse $\boldsymbol{v_B}$.

1- Si l'on néglige les forces de frottement calculer v_B.
On donne AB=1 m ; β= 45°.

2- La masse m parcourt une distance BC=1.4 m, avant
De s'arrêter au point C, sous l'effet des forces de frottement
Calculer μ_c le coefficient de frottement. g=9,810 m.s^{-2}



Exercice 9 :

Considérons un plan incliné formant un angle de 30° avec l'horizontale. On pose en bas du plan incliné un corps de masse 10kg. On lance ce corps vers le haut, le long du plan incliné, avec une vitesse initiale de 14 m/s. on peut prendre g=10 m/s^2 .

1. Si les frottements sont négligeables, en combien de temps le mobile remonte-t-il ?
2. Si les frottements valent 20, quelle sera la durée de la remontée et la distance parcourue.
3. En admettant que les frottements valent toujours 20 N, quelle sera la durée de la descente ?
4. Calculer le coefficient de frottement μ_c.

Exercice n° 10 :

Un chariot de masse m=1kg est lancé avec une vitesse initiale $v_0 = 5$ m/s vers le haut d'un plan incliné qui fait un angle de α=30° avec le plan horizontale.

1. Si on suppose que les forces de frottement sont négligeables. Démontrer, quelle est la nature du mouvement du chariot et déduire l'accélération du chariot sur le plan incliné.
1. Déterminer la réaction du plan incliné R_n sur le chariot.
2. Calculer la distance parcourue par le chariot jusqu'à son arrêt si une force de frottement $F_r = 3$N s'exerçait sur le chariot lorsqu'il se déplace ? g=10 m/s^2

Exercice 11 :

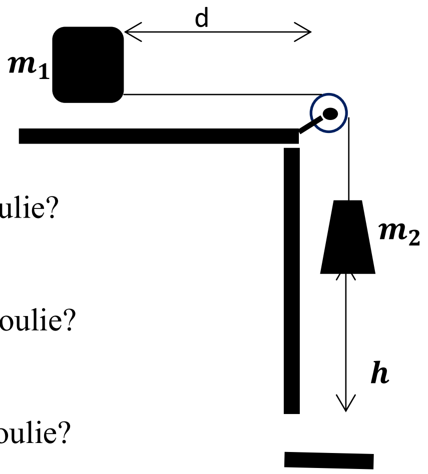
Un bloc de masse, $\boldsymbol{m_1}$ est maintenu immobile sur une table à une distance **d** du bord de cette dernière.

La surface de contact entre la table et le bloc a un coefficient de frottement cinétique $\boldsymbol{\mu_c}$.

La masse $\boldsymbol{m_1}$ est attachée à une corde de longueur $\boldsymbol{l}$ et de masse négligeable, enroulée autour d'une poulie fixée au coin de la table. A l'autre bout de la corde est suspendue à une masse $\boldsymbol{m_2}$, $\boldsymbol{m_2} > \boldsymbol{m_1}$ à une hauteur **h>d** au-dessus du sol.

A l'instant **t=0**, nous relâchons la masse $\boldsymbol{m_1}$.

En supposant que la masse et le rayon de la poulie sont négligeables:



1. Quelle est l'accélération de la masse $\boldsymbol{m_1}$ avant qu'elle n'atteigne la poulie?
2. Quelle est la nature du mouvement de la masse $\boldsymbol{m_1}$?
3. Quelle est la tension de la corde avant que la masse $\boldsymbol{m_1}$ n'atteigne la poulie?
4. Calculer le temps nécessaire à la masse $\boldsymbol{m_1}$ pour atteindre la poulie.
5. Quelle est la vitesse de la masse $\boldsymbol{m_1}$ juste avant qu'elle n'atteigne la poulie?

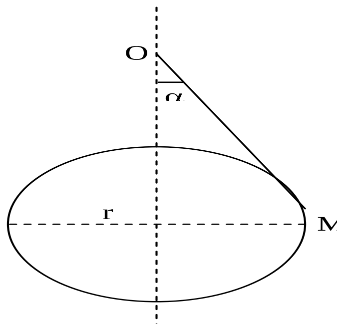
Exercice 12:

Un corps de masse m=200g est lancé vers le sommet d'un plan incliné de 30° par rapport à l'horizontale. Avec une vitesse initiale v_0=12 m/s. le coefficient de frottement dynamique $\mu_d = 0.16$.

Quelle est la distance parcourue par ce corps avant de s'arrêter.

Exercice 13:

Un corps de masse m est attaché par un fil OM et tourne sans frottement sur les surface d'une sphère de rayon r avec une vitesse angulaire constante ω. Le fil est tangent à la sphère au point M et forme un angle α avec le verticale.



1- Déterminer la tension du fil et la réaction de la surface sur le corps.

2- A partir de la quelle valeur de w le corps tournera-t-il sans s'appuyer sur la surface

Exercice 14:

On considère une piste ABC inclinée d'un angle $\alpha = \pi/6$ et constituée d'une partie parfaitement lisse AB = 16m, et d'une partie rugueuse BC. On lance à partir de A un cube assimilé à un point matériel de masse M = 1kg avec une vitesse v_A parallèle à la piste. Le contact entre le cube et la partie BC de la piste est caractérisée par un coefficient de frottement dynamique μd = 0, 4. On donne g = 10m/s2.

1. Représenter les forces appliquées au cube sur les parties AB et BC de la piste.

2- Quelle doit être la vitesse v_{A1} pour que la vitesse v_B au point B soit nulle.

3- On lance le cube avec une autre vitesse vA2. Il s'immobilise en un point D entre B et C. En déduire l'expression de la distance BD en fonction de v_{A2} , AB, g, α, $\mu d = 0,4$. Calculer cette distance sachant que $v_{A2} = 14 m/s$.

4. Qu'arrivera-t-il au cube, après avoir atteint le point D, si le contact cube-piste est caractérisé par un coefficient de frottement statique égal à : a) $\mu s = 0,5$ b) $\mu s = 0,65$

Exercice 15:

Deux corps M et M' de masse m et m' respectivement, sont reliés par un fil inextensible passant par la gorge d'une poulie de masse négligeable. Initialement le corps M' se trouve à une hauteur h du sol, il est lâché sans vitesse initiale. Le contact entre le corps M et le plan horizontal est caractérisé par des coefficients de frottement statique μ_s et glissement μ_g .

Données : m = 6 kg, $\mu s = 0.6$, $\mu d = 0,4$, h=1.5m et g = 10 m.s^{-2}.

1- Donner l'expression de la masse m'_{min} pour que le système se mette en mouvement, en fonction de m et μs .

2- On prend maintenant un masse m'= 4 kg, le système se met en mouvement. En considérant les deux phases du mouvement de la masse M jusqu'à son arrêt:

a- Quelle est la nature du mouvement de la masse M. Justifier.

b- Calculer l'accélération dans la première phase

c- Déduire la vitesse à la fin de cette phase.

d- Calculer l'accélération dans la deuxième phase

a- Déduire la distance totale D parcourue par la masse M. Donner sa valeur.

Exercice 16:

Un point matériel de masse *m*, glisse le long du trajet ABC

- Le trajet AB est circulaire de centre O, et de rayon R.

Les frottements sont négligeables le long de AB. - Le trajet BC est horizontal, caractérisé par un coefficient de glissement μ.

1-Représenter les forces exercées sur la masse au point M.

2-a) démontrer que la vitesse acquise au point M défini par l'angle θ est donnée par l'expression) $v = \sqrt{2Rg(sin\theta - 1/2)}$, exprimer la force de réaction N au point M, v_A=0?

3.b) En déduire les valeurs de la vitesse et de la force de réaction N au point B ?

4- Exprimer la vitesse au point N ; sachant que la force de frottement f= μ.m.g , et BC=R ?

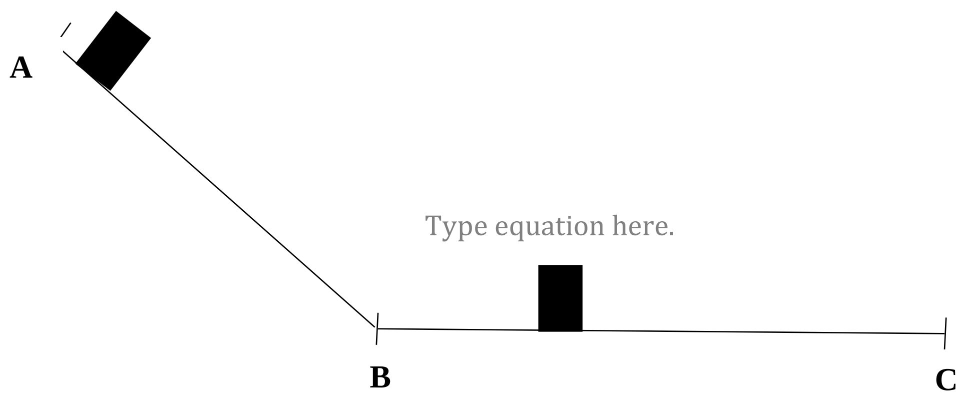
5-Calculer le coefficient de glissement μ, pour que le point matériel s'arrêt au point C

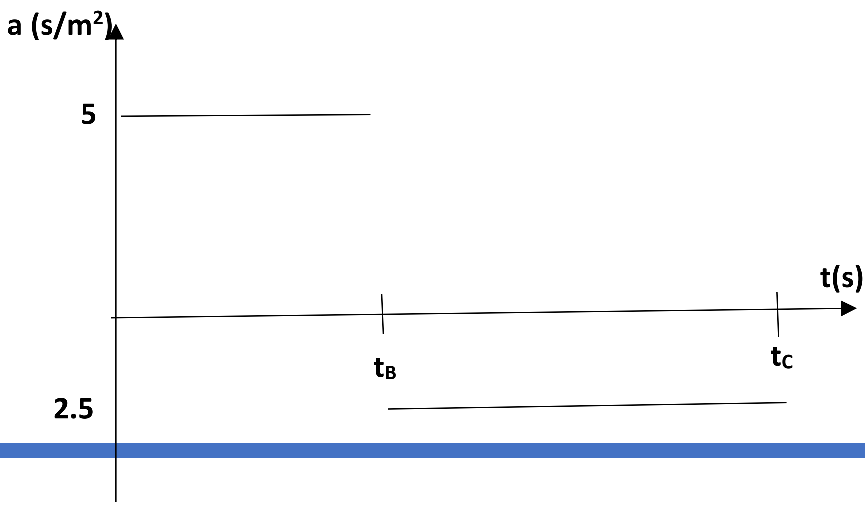
Exercice 17:

Une piste **ABC** constitue d'une partie AB lisse et incliné d'un angle α = 30° par rapport à la partie horizontale BC qui est dur, un corps de masse M= 0.5 kg est abandonnées sans vitesse initiale du pont A, on donne g=10 m/s^{2}.

La figure montre l'évolution de l'accélération du corps en fonction du temps, les instants t_B =1s et t_c=3s correspondent respectivement aux passages du corps par le point B et le point d'arrêt C

1. Représenter les forces qui agissent sur le corps pendant son mouvement
2. Quelle est la nature du mouvement sur la partie BC puis déterminer le coefficieent de frottement μ
3. Déterminer la vitesse v_B puis calculer les distances AB et BC

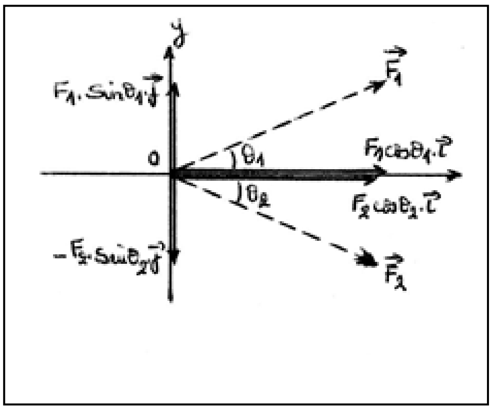




Corrigé série TD n°04

Exercice n°01

D'après la 2 lois du newton :



$\sum \vec{F} = m.\vec{a} \Rightarrow \vec{F_1} + \vec{F_2} = m.\vec{a}$

OX : $\sum F_x = F_1 cos\theta_1 + F_2 cos\theta_2 = m.a_x$……..(1)

OY : $\sum F_y = F_1 sin\theta_1 - F_2 sin\theta_2 = m.a_y$……...(2)

(1) $\Rightarrow a_x = 1{,}00\ ms^{-2}$

(2) $\Rightarrow a_y = 0{,}17\ ms^{-2}$

D'ou

$\vec{a} = 1{,}00\,\vec{i} + 0{,}17\,\vec{j}$ a=1,014 m/s^2

Exercice n°02

A ne glisse pas sur B c.a.d A et B n la même accélération

<u>Bloc B :</u>

$\sum \vec{F} = (m_B + m_A).\vec{a} \Rightarrow \vec{F_0} = (m_B + m_A).\vec{a}$

OX : $F_0 = (m_B + m_A).a$……..(1)

OY : $R_B = (m_B + m_A).g$……...(2)

(1) $\Rightarrow a = \frac{F_0}{m_B + m_A}$…………..(3)

<u>Bloc A :</u>$\sum \vec{F} = m_A.\vec{a} \Rightarrow \vec{F_s} = m_A.\vec{a}$

OX : $F_s = m_A.a = \mu_s.R_A$……..(4)

OY : $R_A = m_A.g$……...(5)

On remplace (3) et (5) dans (4) on obtient:

$F_0 = (m_B + m_A).\mu_s.g$

Exercice n°03

1- Le système est en équilibre $\Rightarrow \sum \vec{F} = \vec{0}$

- ✓ La masse m:

$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P}_m + \vec{T} = \vec{0}$ …….(1)

Après la projection sur l'axe du mouvement on obtient :
$(1) \Rightarrow \mathbf{m.g = T}$……………….(2)

- ✓ La masse M:

$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P}_M + \vec{T} + \vec{f} + \vec{R}_N = \vec{0}$ …….(3) f:forces de frottement, $T=T_1=T_2$

Après la projection sur l'axe du mouvement on obtient:

$(3) \Rightarrow -P_{Mx} + T - f = 0$

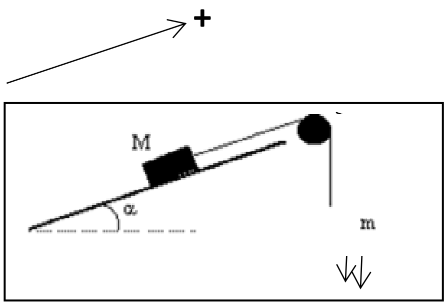
$\Rightarrow$ - M.g.sin(α) + $T - f = 0$

$\Rightarrow \boldsymbol{T}$ = M.g.sin($\boldsymbol{\alpha}$) + $\boldsymbol{f}$……………(4)

A partir de l'équation (2) et (4) on obtient:

$\mathbf{m.g = M.g.\sin(\alpha)} + \boldsymbol{f} \Rightarrow \mathbf{m} = \frac{\mathbf{M.sin(\alpha)}.g+f}{g}$ donc $\mathbf{m} = \frac{\mathbf{M.sin(\alpha)}.g+f}{g}$

Le système en mouvement $\Rightarrow \sum \vec{F} = m\vec{a}$



- ✓ La masse m:

$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P}_m + \vec{T} = m\vec{a}$ …….(5)

Après la projection sur l'axe du mouvement on obtient:

$(5) \Rightarrow \mathrm{m.g - T} = ma$

$\Rightarrow \mathbf{T = m.(g - \boldsymbol{a})}$……………(6)

- ✓ La masse M:

$\sum \vec{F} = M\vec{a} \Rightarrow \vec{P}_M + \vec{T} + \vec{f} + \vec{R}_N = M\vec{a}$ …….(7)

Après la projection sur l'axe du mouvement on obtient:

$(7) \Rightarrow -P_{Mx} + T - f = Ma$

$\Rightarrow$ - M.g.sin(α) + $T - f = Ma$

$\Rightarrow \boldsymbol{T}$ = M.[g.sin($\boldsymbol{\alpha}$) + a] + $\boldsymbol{f}$……………(8) A partir de l'équation (6) et (8) on obtient:

$$\mathrm{m.(g} - a) = \mathrm{M.(g.\sin(}\alpha) + a) + f \Rightarrow a = \frac{g.(m - M\sin(\alpha)) - f}{(m+M)} \quad \text{……..(9)}$$

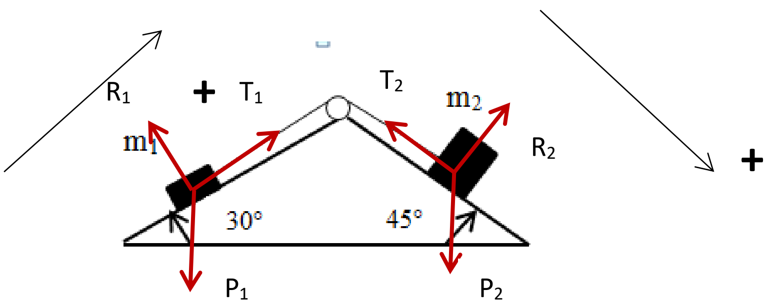
puisque on a: $\mathrm{m = 2M}$

(9) $\Rightarrow$a=$\frac{gm.(1-2\sin(\alpha))-f}{3m}$

g: constante $-\sin(\alpha)$: constante et f: constante $\Rightarrow$ a: constante Donc le Mouvement rectiligne uniformément varié vers le sens proposé.

A.N : a=$\frac{-f}{3}$

Exercice n°04



- **La masse m_1:**

  $\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P_1} + \vec{T_1} + \vec{R_1} = \vec{0}$ …….(1)

  Après la projection sur l'axe du mouvement on obtient:

  $\Rightarrow P_{1x} - T_1 = \vec{0}$

  (1) $\Rightarrow$ **$m_1.g.\sin(30°) = T_1$………………..(2)**

- **La masse m_2:**

  $\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P_2} + \vec{T_2} + \vec{R_2} = \vec{0}$ …….(3)

  Après la projection sur l'axe du mouvement on obtient:

  (3) $\Rightarrow P_{2x} - T_2 = 0$

  $\Rightarrow$ **$m_2.g.\sin(45°) = T_2$**

  $\Rightarrow$ **$T_2 = m_2.g.\sin(45°)$……………(4)**

  A partir de l'équation (2) et (4) on obtient:

$m_1.g.\sin(30°) = m_2.g.\sin(45°) \Rightarrow m_1 = \frac{m_2.g.\sin(45°)}{g.\sin(30°)}$ donc $m_1 = \frac{m_2.\sin(45°)}{\sin(30°)}$

A.N : $m_1 = \frac{2.\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2.82$ kg

2. Si **m_1=2.5 kg et m_1=2.5 kg ,** le système en mouvement $\Rightarrow \sum \vec{F} = m_1\vec{a}$

- **La masse m_1:**

  $\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P_1} + \vec{T_1} + \vec{R_1} = m_1\vec{a}$ …….(1)

  Après la projection sur l'axe du mouvement on obtient:

  $\Rightarrow -P_{1x} + T_1 = m_1 a$

  (1) $\Rightarrow$ **$m_1 a + m_1.g.\sin(30°) = T_1$………………..(2)**

- **La masse m_2:**

  $\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P_2} + \vec{T_2} + \vec{R_2} = m_2\vec{a}$ …….(1)

  Après la projection sur l'axe du mouvement on obtient:

  $\Rightarrow +P_{2x} - T_2 = m_2 a$**……………………..(3)**

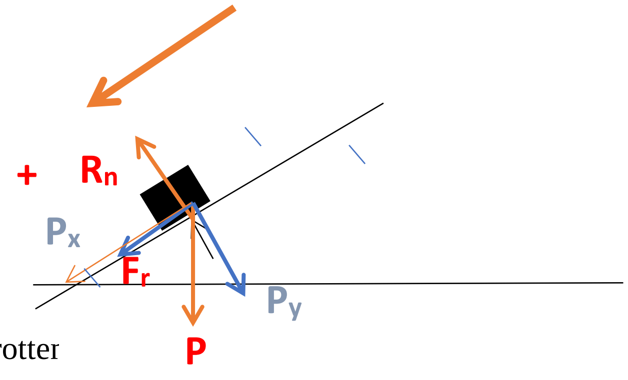
  $\Rightarrow$ **$m_2.g.\sin(45°) - m_2 a = T_2$……………(4)**

  A partir de l'équation (2) et (4) on obtient:

$m_1 a + m_1.g.\sin(30°) = m_2.g.\sin(45°) - m_2 a \Rightarrow a = \frac{m2.g.\sin(45°) - m1.g.\sin(30°)}{m1+m2}$

A.N : $a = \frac{2.10..\frac{\sqrt{2}}{2} - 2.5.10.\frac{1}{2}}{2.5+2}$ =0.35 m/s^2

Exercice N° 5 :



1- Le système en mouvement sans frotter

$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$ ....(1)

Après la projection sur les axes du mouvement on obtient:

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} +P_x = ma \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2) \\ R_n - P_y = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

$(\mathbf{2}) \Rightarrow a = +\text{g.}\sin\alpha$ g :cste et $\sin\alpha$ = cste

donc a :cste ⇒ le mouvement est rectiligne uniformément accéléré

On déduire que $a = \text{g.}\sin\alpha = 3,35\ \text{m/s}^2$

2- Temps du parcours

$$\boldsymbol{x_{AB}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{at^2} \Rightarrow \text{t} = \sqrt{\frac{2x_{AB}}{a}}$$

$\boldsymbol{A.N}$: $\text{t} = \sqrt{\frac{2.2}{3.35}} = 1{,}1\ \text{S}$

3- Calcule de coefficient de frottement μ :

Le système en mouvement avec frottement $\Rightarrow \sum \vec{F} = m\vec{a}$

$$\Rightarrow \sum \vec{P} + \vec{R} + \vec{F_r} = m\vec{a}$$

Après la projection sur les axes du mouvement on obtient:

$$\begin{cases} +P_x - F_r = ma \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (4) \\ R_n - P_y = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (5) \end{cases}$$

$(4) \Rightarrow F_r = +P_x - ma$

$(5) \Rightarrow R_n = +P_y$

On a d'autre part: $\mu = \frac{F_r}{R_n} = \frac{P_x - ma}{P_y} = \frac{m.g.\sin 20 - ma}{m.g.\cos 20} = \frac{g.\sin 20 - a}{g.\cos 20}$

A.N : $\mu = 0{,}107$

La position du point C

a. On néglige les forces du frottement

$v_1 = 0$

$v_0 = 3\ m/S$

on a : $\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$ …….(6)

Après la projection sur les axes du mouvement on obtient:

$$(2) \Rightarrow \begin{cases} -P_x = ma \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7) \\ R_n - P_y = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8) \end{cases}$$

$(\mathbf{7}) \Rightarrow a = -\mathrm{g}.\sin\alpha$ g :cste et sin α = cste

donc a :cste ⇒ le mouvement est rectiligne uniformément retardé

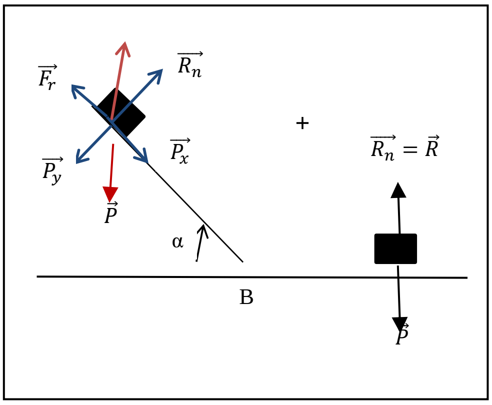
On déduire que $a = -\mathrm{g}.\sin\alpha$ = 9,81 .0,342=-3,35 m/s^2

$v_1{}^2 - v_0{}^2$ =2. $\boldsymbol{x_{BC}}$. a' ⇒ $\boldsymbol{x_{BC}} = \frac{v_1{}^2 - v_0{}^2}{2.a}$

A.N : $d = \frac{v_1{}^2 - v_0{}^2}{2.a'} = \frac{0^2 - 3^2}{2.(-3,35)}$=1,34m

***d* =1,34 m**

Exercice n°6:



1. Le système en mouvement sur AB avec frottement ⇒ $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$ …….(1)

Après la projection sur les axes du mouvement on obtient:

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} P_x - F_r = ma \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \\ R_n + P_y = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3) \end{cases}$$

$(\mathbf{3}) \Rightarrow R_n = \mathrm{m.g.}\cos\alpha$…………..(4)

Et on a $F_r = \mu.R_n = \mu.\mathrm{m.g.}\cos\alpha$……(5)

$(2) \Rightarrow \mathrm{a} = \frac{P_x - F_r}{m} = \frac{m.g.sin\alpha - \mu.\mathbf{m.g.cos\,\alpha}}{m} = g(sin\alpha - \mu.\cos\alpha)$

A.N : a=9.81(707-0.5x0.707)=**3.46 m/s^2**

$v_B = ?$

on a :

$v_B{}^2 - v_A{}^2 = 2.\mathrm{AB.a} \Rightarrow v_B{}^2 = 2.\mathrm{AB.a}$ ou $v_A = 1\ m/s\ 2$

$v_B = \sqrt{v_A{}^2 + 2.AB.a} = \sqrt{1^2 + 2\mathrm{x}1\mathrm{x}3{,}46.}$

$v_B = 2{,}81\ m/s$

2. Le système en mouvement sur BC sans frottement $\Rightarrow \sum \vec{F} = m\overrightarrow{a'}$

$\sum \vec{F} = m\overrightarrow{a'} \Rightarrow \vec{P} + \overrightarrow{R_n} = m\overrightarrow{a'}$ …….(6)

Après la projection sur les axes du mouvement on obtient :

$(6) \Rightarrow \begin{cases} 0 = ma' \dots\dots\dots\dots\dots\dots.(7) \\ R_n + P = 0 \dots\dots\dots..\dots\dots\dots(8) \end{cases}$

$(\mathbf{7}) \Rightarrow a' = \mathbf{0}$ **donc le mouvement est rectiligne uniforme**

$v_c = ?$

on a :

$v_c{}^2 - v_B{}^2 = 2.\mathrm{BC}.a' \Rightarrow \mathrm{BC} = \frac{v_c{}^2 - v_B{}^2}{2.a'}$ ou v_C=0 et $a' = 0$

AN: BC=∞ le corps M ne s'arrêtera jamais car le mouvement du bloc est rectiligne uniforme avec une vitesse constante $v = v_B$

Exercice 7 :

1. Le système en mouvement :$\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$ …….(1)

Après la projection sur les axes du mouvement on obtient:

$(3) \Rightarrow \begin{cases} P_x = ma \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..(2) \\ R_n - P_y = 0 \dots\dots\dots..\dots\dots\dots(3) \end{cases}$

$(\mathbf{2}) \Rightarrow a = \mathrm{g.}\sin\theta$

on a :

$v^2 - {v_0}^2 = 2.\mathrm{l}.\,a \Rightarrow v = \sqrt{2.l.g.sin\theta}$ ou $v_0 = 0$

2ème Méthode

$$(2) \Rightarrow \mathrm{m.g.sin\theta = m.a = m.}\frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow \mathrm{g.sin\theta} = \frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow \mathrm{g.sin\theta}.\,v.\,dt = v.\,dv$$

$$\Rightarrow \int_0^l \mathrm{g.sin\theta}\,.\,dx = \int_0^v v.\,dv \quad \text{avec} \quad dx = v.\,dt$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2.l.g.sin\theta}$$

2. Après contact du bloc avec le ressort, ce dernier se comprime. $\vec{F}$ étant la force de rappel du ressort.

   PFD : $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

   Sur ox : $m.\mathrm{g.sin\theta - K.x = m.a}$ x : la longueur de compression de ressort

$$\Rightarrow m.\mathrm{g.sin\theta - K.x = m.}\frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow v.m.\mathrm{g.sin\theta - K.x.}v = \mathrm{m.}v.\frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow v.m.\mathrm{g.sin\theta - K.x.}\frac{dx}{dt} = \mathrm{m.}v.\frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow m.\mathrm{g.sin\theta}.\,dx - \mathrm{K.x.}\,dx = \mathrm{m.}v.\,dv$$

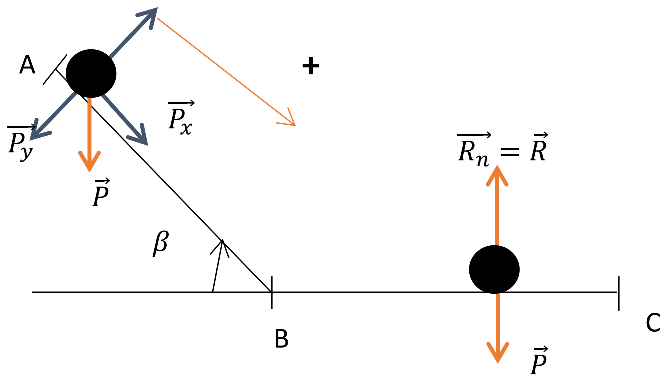
$$\Rightarrow \int_v^0 \mathrm{m.}v.\,dv = \int_0^d -\mathrm{K.x.}\,dx + \int_0^d m.\mathrm{g.sin\theta}.\,dx$$

$$\Rightarrow -\mathrm{m}\frac{v^2}{2} = -K\frac{d^2}{2} + m.g.sin\theta.d$$

$$\Rightarrow -\mathrm{K}.\,d^2 - 2.\,m.\mathrm{g.sin\theta}.\,d - m.\,v^2 = 0$$

$d = \frac{m.g.\sin\theta.}{k}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2.k.l}{m.g.\sin\theta}}\right]$ Car on a besoin de la compression maximale.

Exercice 8 :



1. v_B =? ; a = ?

Le système en mouvement sur AB **sans** frottement $\Rightarrow \sum \vec{F} = m\vec{a}$

$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$ …….(1)

Après la projection sur les axes du mouvement on obtient:

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} P_x = ma \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (2) \\ R_n + P_y = 0 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (3) \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow a = \frac{P_x}{m} = \frac{m.g.\sin\beta}{m} = g\sin\beta$

A.N : $\boldsymbol{a}$ =9,81x0,707=**6.935 m/s²**

on a :

$v_B{}^2 - v_A{}^2$ =2. AB. $a \Rightarrow v_B{}^2 = 2.$ AB. a ou $v_A = 0\ m/s$ 2

$v_B = \sqrt{2.AB.a} = \sqrt{2\text{x}1\text{x}6{,}935}.$

$v_B = 3{,}724\ m/s$

Le système en mouvement sur BC **avec** frottement $\Rightarrow \sum \vec{F} = m\vec{a'}$

$\sum \vec{F} = m\vec{a'} \Rightarrow \vec{P} + \vec{R_n} + \vec{F_r} = m\vec{a'}$ …….(4) $avec\ \ \vec{R_n} = \vec{R}$

Après la projection sur les axes du mouvement on obtient:

$$(4) \Rightarrow \begin{cases} -F_r = ma' \dots\dots\dots\dots\dots\dots.(5) \\ R_n + P = 0 \dots\dots\dots..\dots\dots\dots(6) \end{cases}$$

$$(5) \Rightarrow F_r = -m.a' = \mu_c.R_n$$

$$\Rightarrow \mu_c = \frac{-m.a'}{R_n} \dots\dots\dots\dots\dots(7)$$

$$(\mathbf{6}) \Rightarrow R_n = \mathrm{m.g}$$

$a' = ?$

$v_c = 0\ m/s$ (m s'arrête au point C)

on a :

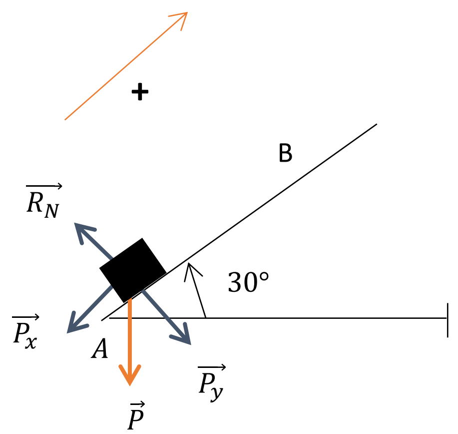
$v_c{}^2 - v_B{}^2 = 2.\,\mathrm{BC}.\,a' \Rightarrow a' = \frac{v_c{}^2 - v_B{}^2}{2.\mathrm{BC}}$ ou v_C=0 et $v_B = 3{,}724\ m/s$

A.N : a'=-$\frac{-(3{,}724)^2}{2X\ 1{,}4}$=**-4.952 m/s²**

$$(7) \Rightarrow \mu_c = \frac{-m.a'}{R_n} = \frac{-m.a'}{\mathrm{m.g}} = \frac{-.a'}{.\mathrm{g}}$$

A.N : μ_c=$\frac{-(\mathbf{-4.952})}{9{,}810}$=0,504

Exercice 9 :



1. t_{AB} =? ; a = ?

Le système en mouvement sur AB **sans** frottement $\Rightarrow \sum \vec{F} = m\vec{a}$

$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \overrightarrow{R_n} = m\vec{a}$ …….(1)

Après la projection sur les axes du mouvement on obtient:

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} -P_x = ma \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (2) \\ R_n + P_y = 0 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (3) \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow a = \frac{-P_x}{m} = \frac{-m.g.sin30}{m} = -gsin30$

A.N : $\boldsymbol{a}$ =-10x0,5=-5 **m/s²**

A l' instant $\boldsymbol{t_1}$, la masse arrive en B avec une vitesse nulle:

$v_B = a\,\boldsymbol{t_1} + v_A \Rightarrow 0 = -5\,\boldsymbol{t_1}$ **+14=0** $\Rightarrow \boldsymbol{t_1} = \mathbf{2,8}\ \boldsymbol{s},$

2. Le bloc en mouvement sur AB avec frottement t_2 =? ; a' = ?

Le système en mouvement sur AB **avec** frottement $\Rightarrow \sum \vec{F} = m\vec{a}\,'$

$\sum \vec{F} = m\overrightarrow{a'} \Rightarrow \vec{P} + \overrightarrow{R_n} + \vec{F} = m\vec{a}'$ …….(1)

Après la projection sur les axes du mouvement on obtient:

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} -P_x - \mathbf{F} = ma' \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (2) \\ R_n + P_y = 0 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (3) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow a' = \frac{-P_x - F}{m} = \frac{-m.g.sin30 - F}{m}$$

A.N : $\boldsymbol{a}$**'** $= \frac{-10.10.sin30-20}{10}$ =-7 **m/s²**

A l' instant $\boldsymbol{t_2}$, la masse arrive en B avec une vitesse nulle:

$v_B = a'\,\boldsymbol{t_2} + v_A \Rightarrow 0 = -7\,\boldsymbol{t_2}$ **+14=0** $\Rightarrow \boldsymbol{t_2} = \mathbf{2}\ \boldsymbol{s},$

$la\ distance\ parcourue\ \ x_{AB}$

On a :

$v_B{}^2 - v_A{}^2 = 2.\,x_{AB}.\,a \Rightarrow x_{AB} = \frac{v_B{}^2 - v_A{}^2}{2.a}$ ou $v_B = 0\ m/s$

$x_{AB} = \frac{0^2 - 14^2}{2x(-7)}.$

$x_{AB} = 14\ m$

3. Le bloc en mouvement sur BA(descend) avec frottement t_3 =? ; a'' = ?

Le système en mouvement sur AB avec frottement $\Rightarrow \sum \vec{F} = m\vec{a}$''

$\sum \vec{F} = m\overrightarrow{a''} \Rightarrow \vec{P} + \overrightarrow{R_n} + \vec{F} = m\vec{a}''$ …….(1)

Après la projection sur les axes du mouvement on obtient:

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} P_x - \mathbf{F} = ma' \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2) \\ R_n + P_y = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow a' = \frac{P_x - F}{m} = \frac{m.g.sin30 - F}{m}$$

A.N : $\boldsymbol{a'} = \frac{10.10.sin30-20}{10} = 3$ **m/s²**

A l' instant t_3 , la masse arrive en A avec une vitesse :

On a $v_A{}^2 - v_B{}^2 = 2.\,x_{BA}.\,a'' \Rightarrow v_A = \sqrt{2.x_{BA}.a''} = \sqrt{2.14.3} = 9{,}16\ m/s$ ou $v_B = 0\ m/s$

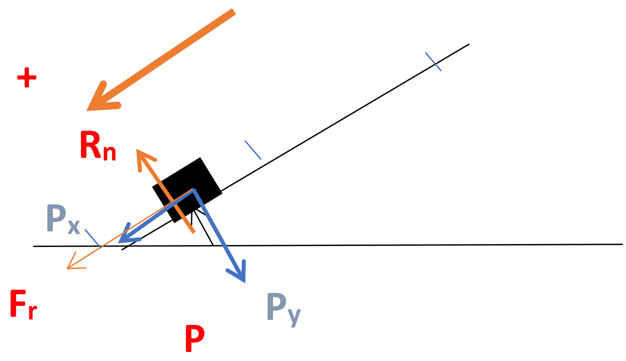
$v_A = a''\, \boldsymbol{t_3} + v_B \Rightarrow v_A = a''\, \boldsymbol{t_3} + v_B = 9{,}16 \Rightarrow \boldsymbol{t_3 = 3{,}05\ s}$

4. μ_c =?

$on\ a\quad \mu_c = tg\ \varphi = \frac{F}{R_n} = \frac{F}{P_y} = \frac{F}{m.g.cos30}$

$AN:\quad \mu_c = \frac{20}{10.10.0{,}866} = 0{,}23$

Exercice 10 :



2- Le système en mouvement sans frottement $\Rightarrow \sum \vec{F} = ma$

$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$ …….(1)

Après la projection sur les axes du mouvement on obtient:

$$(4) \Rightarrow \begin{cases} +P_x = ma \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2) \\ R_n - P_y = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

$(\mathbf{2}) \Rightarrow a = +\text{g}.\sin\alpha$ g :cste et $\sin\alpha = $ cste donc a :cste ⇒ le mouvement est rectiligne uniformément accéléré

On déduire que $a = g.\sin\alpha = 3,35$ m/s^2

3- Temps du parcours

$$\boldsymbol{x_{AB} = \frac{1}{2}at^2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2x_{AB}}{a}}$$

$\boldsymbol{A.N}$: $t = \sqrt{\frac{2.\mathbf{2}}{3.35}} = 1{,}1$ S

4- Calcule de coefficient de frottement μ :

Le système en mouvement avec frottement ⇒ $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$$\Rightarrow \sum \vec{P} + \vec{R} + \vec{F_r} = m\vec{a}$$

Après la projection sur les axes du mouvement on obtient:

$$\begin{cases} +P_x - F_r = ma \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (4) \\ R_n - P_y = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (5) \end{cases}$$

$(4) \Rightarrow F_r = +P_x - ma$

$(5) \Rightarrow R_n = +P_y$

On a d'autre part: $\mu = \frac{F_r}{R_n} = \frac{P_x - ma}{P_y} = \frac{m.g.sin20 - ma}{m.g.cos20} = \frac{g.sin20 - a}{g.cos20}$

A.N : $\mu = 0{,}107$

La position du point C

b. On néglige les forces du frottement

$v_1 = 0$

$v_0 = 3\ m/S$

on a :

$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$ …….(6)

Après la projection sur les axes du mouvement on obtient:

$(5) \Rightarrow \begin{cases} -P_x = ma \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (7) \\ R_n - P_y = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (8) \end{cases}$

$(\mathbf{7}) \Rightarrow a = -g.\sin\alpha$ g :cste et $\sin\alpha = $ cste

donc a :cste ⇒ le mouvement est rectiligne uniformément retardé

On déduire que $a = -g.\sin\alpha$ = 9,81 .0,342=-3,35 m/s^2

$v_1{}^2 - v_0{}^2$ =2. $\boldsymbol{x_{BC}}$. a' ⇒ $\boldsymbol{x_{BC}} = \frac{v_1{}^2 - v_0{}^2}{2.a}$

A.N : $d = \frac{v_1{}^2 - v_0{}^2}{2.a'} = \frac{0^2 - 3^2}{2.(-3,35)}$=1,34m

$\boldsymbol{d}$ **=1,34 m**

Exercice 11 :

1) Le système en mouvement ⇒ $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

✓ La masse m$_1$:

$\sum \vec{F} = m_1\vec{a} \Rightarrow \vec{T_1} + \vec{f} = m_1\vec{a}$ …….(1)

Après la projection sur l'axe du mouvement on obtient:

a. $\Rightarrow T_1 = m_1\vec{a} + f$ avec $f = \mu_c.R_1 = \mu_c.m_1.g$

Donc : $T_1 = m_1\vec{a} + \mu_c.m_1.g$

✓ La masse m$_2$:

$\sum \vec{F} = m_2\vec{a} \Rightarrow \vec{P}_2 + \vec{T_2} = m_2\vec{a}$ …….(2)

Après la projection sur l'axe du mouvement on obtient:

b. $\Rightarrow P_2 - T_2 = m_2\vec{a}$

$\Rightarrow m_2.g - T_2 = m_2\vec{a}$

$\Rightarrow T_2 = m_2.g - m_2\vec{a}$

Puisque le fil et la poulie ont une masse négligeable $\Rightarrow T_1 = T_2$

$T_1 = T_2 \Rightarrow m_1\vec{a} + \mu_c.m_1.g = m_2.g - m_2\vec{a}$

$\Rightarrow a = \frac{(m_2 - \mu_c.m_1).g}{m_1 + m_2}$

2) m_1, m_2, μ_c *et g sont des constants* $\Rightarrow$ *a constant donc* $M.U.V$

3) $T_1 = m_1 \frac{(m_2 - \mu_c.m_1).g}{m_1 + m_2} + \mu_c.m_1.g = \frac{m_1.m_2.g - m_1{}^2.\mu_c.g + m_1{}^2.\mu_c.g + m_1.m_2.\mu_c.g}{m_1 + m_2}$

$$T_1 = \frac{m_1.m_2.g(1 + \mu_c)}{m_1 + m_2}$$

4) Puisque le *M.U.V* On a: $d = \frac{1}{2}\mathrm{a}t^2 \Rightarrow \mathrm{t} = \pm\sqrt{\frac{2.d}{a}} = \pm\sqrt{\frac{2.d(m_1 + m_2)}{(m_2 - \mu_c.m_1).g}}$

5) On a: $v_1{}^2 - v_0{}^2 = 2.a.d \quad avec \quad v_0 = 0$

Donc: $v_1 = \sqrt{2.a.d} = \sqrt{2\frac{(m_2 - \mu_c.m_1).g}{m_1 + m_2}.d}$

CHAPITRE : **IV**

TRAVAIL ET ENERGIE

Objectifs :

- Pouvoir décrire un mouvement et calculer sa vitesse.
- Savoir ce qu'est une force.
- Connaître et savoir appliquer les lois de Newton.

Prérequis :

- Pouvoir calculer son travail et sa puissance.
- Pouvoir calculer l'énergie cinétique et l'énergie mécanique d'un système.

Série de TD n° 05

Exercice n°1 :

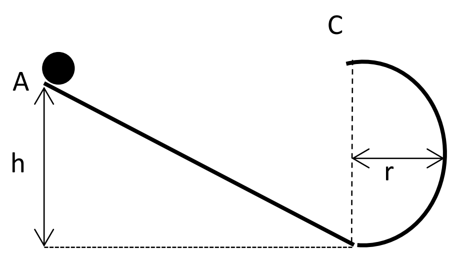
Un corps solide (S) de masse m est lié d'un côté à ressort de raideur (K). L'autre côté du ressort est fixe. On déplace le corps horizontalement de sa position d'équilibre d'une distance x et on lâche. Le coefficient de frottement est donné par : $\mu = tg(\theta)$

1. Représenter les forces appliquées sur le corps (S).
2. Calculer la vitesse v_B correspondante au passage de (S) par sa position d'équilibre.

   A.N : $x = 15\ cm,\quad m = 0{,}5\ kg,\ \ \mu = 0{,}45\ \ et\ K = 40\ N.m^{-1}$

Exercice n°2 :

Une bille glisse sans frottement à l'intérieur d'une gouttière.



1. Trouver la petite hauteur h_{min} à partir de laquelle la bille est lancée pour atteindre le point (c) sans quitter la gouttière.

Exercice n°3 :

Une particule matérielle de masse m se déplace du point A(1,2,-1) au point D(2,4,-2), sous l'action de la force :

$$\vec{F} = (x^2 + y^2)\vec{\imath} + xz\vec{\jmath} + xy\vec{k}$$

- Calculer le travail de la force F en suivant chacun de ces trois trajets :

a/ La droite AD

b/ La ligne brisée ABCD où B (2,2,-1) et C(2,4,-1) c/ La courbe définie par les équations paramétriques $x=t$, $y=t^2$, $z=t$, sachant que la particule quitte le point A à l'instant $t_A=0s$ et atteint le point D à l'instant $t_D=2s$.

Exercice n°4 :

Un corps de masse m se déplace le long d'un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontal. Pour le faire monter d'un point A à un point B, on applique une force F telle que la vitesse du corps reste constante pendant le mouvement (les frottements sont négligeables)
a/ Calculer les travaux de la force F, de la réaction R, et du poids P.
b/ Trouver la variation de l'énergie cinétique entre A et B.

Exercice n°5 :

Un pendule OB formé d'une tige solide de masse négligeable de longueur L=0.5m porte dans son extrémité B un corps de masse m= 50g. Le pendule est lancé à partir de A (la barre fait un angle α=60° avec la verticale) sans vitesse initiale (Fig1).
Trouver l'énergie cinétique et la vitesse du corps lorsque :
a/ La masse passe par la verticale (en point B)
b/ la masse passe par A' (la tige fait un angle ά =30° avec la verticale coté opposé à celui de départ).

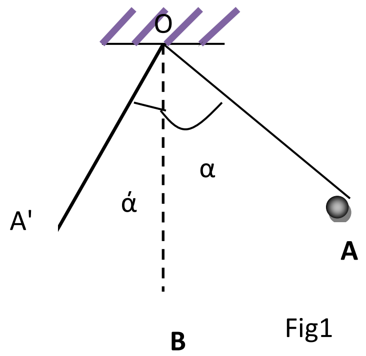


Fig1

Exercice n°6 :

Une bille glisse sans frottement à l'intérieur d'une gouttière.
1 / Déterminer la hauteur minimal h à partir de laquelle il faut Lancer la bille pour qu'elle puisse arriver au point O' sans Qu'elle quitte la gouttière.
2/Déterminer dans ces condition la vitesse et l'énergie totale au point au point O
Application numérique : m=0.1Kg, g=9.81m/s, r=50cm.

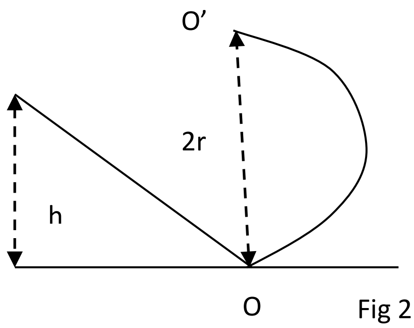


Fig 2

Exercice n°7:

Un corps solide de masse m est lie d'un côté à un ressort de constante de raideur K, l'autre côté du ressort étant fixe. L'ensemble est centré sur une table, le coefficient de frottement est $\mu = tg\varphi$.
On déplace le corps horizontalement de sa position d'équilibre d'une distance x puis on le lâche.
1 / Représenter les forces appliquées sur le corps.
2/ Le corps passe une deuxième fois par la position d'équilibre B. Calculer alors la vitesse V_0.
A.N : x=0.15m ; m=0.5Kg ; μ=0.45 ; K=40N/m.

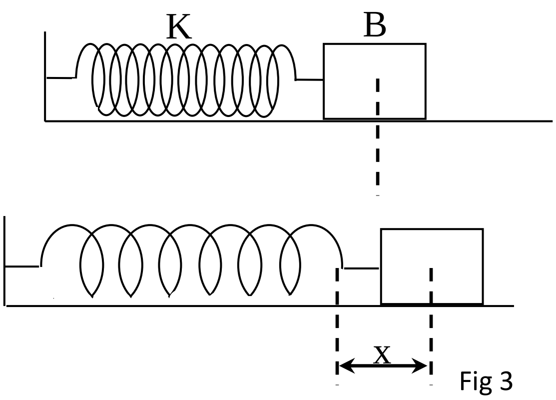


Fig 3

Exercice n°8:

Un corps solide (S) en chute libre, de masse m=200g est lâché sans vitesse initiale d'un point d'altitude H=5m par rapport au sol. L'intensité du champ de pesanteur est : g=9,8N /Kg.

1) Calculer le travail (ou les travaux !) des forces qui s'exercent sur le corps solide.
2) Calculer la vitesse V_{C0} du corps lorsqu'il atteint le sol (V_{C0} représente la vitesse de choc).

On veut que la vitesse de choc soit $V_{C1}=2V_{C0}$, Pour cela on lance le corps solide d'une vitesse initiale notéeV_1.

3) en appliquant le théorème de l'énergie cinétique trouver l'expression de la vitesse V1 en fonction de g et H, Calculer la valeur de V1.

Exercice n°9 :

Une bille de masse m glisse sans frottement sur une demi sphère à partir du sommet (Fig4).
a/ En quelle point la bille quitte la sphère ? (Déterminer l'angle et la hauteur h)
b/ Avec quelle vitesse arrive- t- elle sur l'axe [ox) ?

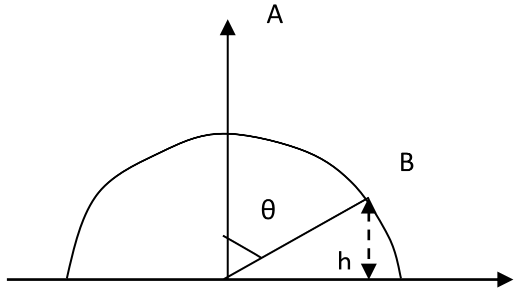


Fig4

Exercice n°10 :

Le mouvement d'un point matériel M de mase est défini par le vecteur position :

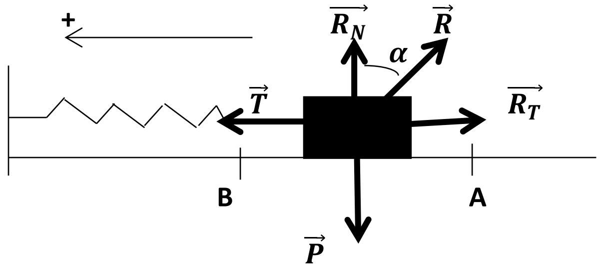
$\vec{r} = acos\omega t\vec{\imath} + b\sin\omega t\vec{\jmath}$;   a, b, ω constantes

a/ Trouver l'expression de la force $\vec{F}$ qui agit sur cette masse
b/ Ecrire l'équation de la trajectoire.
c/Quel est le travail de $\vec{F}$ lorsque le point matériel se déplace du point A(a,0) au point B(0,b) ?
d/ Vérifier le Théorème de l'énergie cinétique $W_A{}^B = E_{CB} - E_{CA}$.

Corrigé : série TD N° 05

Exercice N°1 :

1. Les forces appliquées sur le corps (S)



Le coefficient de frottement est : $\mu = tg(\alpha) = \frac{R_T}{R_N}$

Les différentes forces appliquées sont représentées dans la figure ci-dessus.

2. Vitesse v_B correspondante au passage de (S) par sa position d'équilibre

$$\Delta E_C = \sum w(\overrightarrow{F_{ext}})$$

$$\Rightarrow E_{CB} - E_{CA} = w_{AB}(\vec{T}) + w_{AB}(\vec{P}) + w_{AB}(\overrightarrow{R_T}) + w_{AB}(\overrightarrow{R_N}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Ou $\begin{cases} E_{CA} = 0 \\ w_{AB}(\vec{P}) = w_{AB}(\overrightarrow{R_N}) = 0 \\ w_{AB}(\vec{T}) = \frac{1}{2}Kx^2 \\ w_{AB}(\overrightarrow{R_T}) = -R_T x = -\mu R_N x \end{cases}$ et $R_N = mg$

(1) $\Rightarrow \frac{1}{2}m{v_B}^2 = \frac{1}{2}Kx^2 - \mu.m.g.x$

Donc $v_B = \sqrt{\frac{K}{m}.x^2 - 2\mu.g.x}$

A.N : $v_B = 0,67\, m.s^{-1}$

Exercice N°2 :

h_{min} à partir de laquelle la bille est lancé pour atteindre le point (C) sans quitter la gouttière

On applique la conservation de l'énergie entre (A) et (B) :

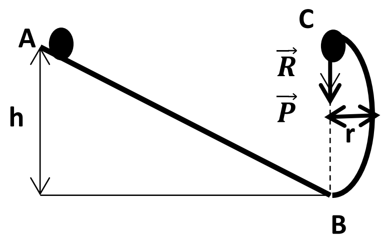
$E_{TA} = E_{TB} \Rightarrow E_{CA} + E_{PA} = E_{CB} + E_{PB}$ …………………(1)

Avec $\begin{cases} v_A = 0 \Rightarrow E_{CA} = 0 \\ h_B = 0 \Rightarrow E_{PB} = 0 \end{cases}$

Le niveau du point B est l'origine des énergies potentielles.

(1)$\Rightarrow E_{PA} = E_{CB} \Rightarrow m.g.h = \frac{1}{2}m.v_B{}^2$

$\Rightarrow v_B = \sqrt{2.g.h}$ …………(2)



la conservation de l'énergie entre (B) et (C) :

$E_{TB} = E_{TC} \Rightarrow E_{CB} + E_{PB} = E_{CC} + E_{PC}$ …………………(3)

$h_B = 0 \Rightarrow E_{PB} = 0 \Rightarrow E_{CB} = E_{CC} + E_{PC}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}m.v_B{}^2 = \frac{1}{2}m.v_C{}^2 + m.g.h_C$ ou $h_C = 2.r$

$\Rightarrow v_B{}^2 = v_C{}^2$ +4.g.r ……………(4)

de (2) et (4) on obtient **$v_C{}^2$=2.g(h-2.r)**

la bille ne quitte pas la gouttière si R>0

en appliquant P.F.D au point (C) :

$\sum \vec{F} = m.\vec{a_n} \Rightarrow \vec{P} + \vec{R} = m.\frac{v_C{}^2}{r}$

$\Rightarrow R = m.g\left(\frac{2h}{r} - 5\right)$

Lorsque la bille quitte la gouttière R=0 $\Rightarrow \frac{2h}{r} - 5 = 0$

Donc la hauteur minimale $\boldsymbol{h_{min}} = \frac{\mathbf{5.r}}{\mathbf{2}}$

BIBLIOGRAPHIE

ABDELKADER BELFEDAL ET KARA ZAITRI KAMEL, Physique Mécanique Rappels De Cours Et Exercices Résolus Office des Publications Universitaires, Algérie, 2017.

AHMED FIZAZI ; Cahier de la Mécanique du Point Matériel Office des Publications Universitaires, Algérie, 2013.

LAMRIA BENALLEGUE, MOHAMMED DEBIANE, AZEDDINE GOURARI, ET AMMAR MAHAMDIA ; Physique I Mécanique du Point Matériel, Edité par la Faculté de Physique U.S.T.H.B. B.P. N 32 El-Alia Alger, 2011.

JEAN-MARIE BRÉBEC, TANIA CHABOUD, THIERRY DESMARAIS, ALAIN FAVIER, MARC MÉNÉTRIER, ET RÉGINE NOËL ; Exercices et Problèmes 1re Année, Physique MPSI/PCSI/PTSI, Hachette Livre, Paris, France, 2010.

C.GROSSETETE ET P. OLIVE ; Mécanique Newtonienne du point ; ellipse 1998.

A.LE PADELLEC ET M. MOURGUES ; . Travaux dirigés de mécanique de point ; Université Toulouse 2011-2012.

MARIE-NOËLLE SANZ, ANNE-EMMANUELLE BADEL ET FRANÇOIS CLAUSSET, PHYSIQUE TOUT-EN-UN - 1re année, Cours et exercices corrigés, Dunod, Paris, France, 2002, 2003, 2008.

MICHEL HENRY ET NICOLAS DELORME, mini Manuel Mécanique du point Cours + Exos, Dunod, Paris, France, 2008.

J .TAYLOR. D. UNOD ; Incertitude et analyse des erreurs dans les mesures physiques ; Dunod 2000.