



Université de Relizane
Faculté des Sciences et Technologie
Département de Génie Mécanique
-2022/2023-



Comportement Mécanique des Matériaux

Composites et Multi-Matériaux

Niveau : Master I
Spécialité : Génie des Matériaux
Filière : Génie Mécanique

Rédigé par

Dr. ZOUAMBI Leila

Semestre: 2

Unité d'enseignement: UEF 1.2.1

Matière: Comportement mécanique des Matériaux Composites et multi-matériaux

VHS: 67h30 (Cours: 3h TD : 1h30)

Crédits: 6

Coefficient: 3

Ce polycopié, destiné aux étudiants de Master I ; spécialité de génie des matériaux, a pour objectifs :

Etude du comportement mécanique des matériaux composites et multi-matériaux a pour but de connaître leur réponse à une sollicitation donnée.

Ce cours permet aussi à l'étudiant la compréhension des mécanismes physiques d'endommagement et de fissuration dans les matériaux composites et les multi-matériaux. Les connaissances acquises en mécanique de la rupture seront mises à profit pour aborder les mécanismes physiques d'amorçage et de propagation des fissures et l'effet de la microstructure de ces matériaux, et donc du procédé de mise en œuvre utilisé, sur la résistance à la fissuration des matériaux composites et des multi matériaux.

Sommaire

INTRODUCTION	4
CHAPTER 1	6
1 Généralités sur les matériaux composites	6
1.1 Définitions de base :	6
1.2 Les composants	6
1.3 Les renforts	7
1.3.1 Formes des fibres	9
1.3.2 Natures de fibres	11
1.4 Les matrices	15
1.4.1 Matrice polymérique (Les CMO ou composites à matrice organique)	16
1.4.2 Matrice minérale (Les CMC ou composites à matrice céramique)	17
1.4.3 Matrice métallique (les CMM ou composites à matrice métallique)	17
1.5 Les matériaux composites structuraux	18
1.5.1 Structures en stratifiés	18
1.5.2 Structures en sandwich	21
1.6 Fractions volumiques et massiques	22
1.6.1 Fractions volumiques	23
1.6.2 Fractions massiques	23
1.6.3 Relations entre fractions volumiques et massiques.	24
CHAPITRE 2	26
Approche classique des composites : spécificité du calcul des composites	26
2.1 Etude des lois de comportement anisotrope 3D	26
2.1.1 Loi de Hooke	27
2.1.2 Matériau monoclinique	28
2.1.3 Matériau orthotrope (orthogonal)	30
2.1.4 Matériau transversalement isotropes (Unidirectionnels)	32
2.1.5 Matériau isotropes	34
2.2 Comportement anisotrope 2D	35
2.2.1 Comportement d'un pli de composite unidirectionnel (UD)	35
2.2.1.1 Comportement par rapport aux axes naturels	35
2.2.1.2 Coefficients de raideur	36
2.2.1.3 Coefficients de souplesse	36
2.2.2 Comportement d'un pli (UD) par rapport à un système d'axes quelconque	37
2.2.3 Le comportement thermomécanique du pli unidirectionnel (UD)	39
2.2.4 Le comportement thermomécanique du pli UD dans une direction quelconque	40
CHAPITRE 3	42
Calculs d'homogénéisations des composites	42
3.1 Homogénéisation pour le calcul des modules	42

3.1.1.	Les bornes de Hashin et Hill des modules d'élasticité d'un composite unidirectionnel	43
3.1.2.	Modèle de Halpin-Tsai	44
3.1.3.	Modèle de Halpin-Tsai modifié	46
3.1.4.	Modèle de Tsai-Hahn	47
3.1.5.	Modèle de Cox	48
3.1.6.	Modèle de Hopkins et Chamis	48
3.1.7.	Modèle de Hopkins et Chamis avec interphase	50
3.1.8.	Modèle de Chamis	51
3.1.9.	Tsai avec modèle de contiguïté	51
3.1.10.	Relations du coefficient de Poisson ν_{23} avec les coefficients de souplesse et de rigidité	52
3.1.11.	Relation de R. L. FOYE	52
3.1.12.	Solutions exactes	52
3.1.13.	Approches simplifiées (loi des mélanges).....	55
3.2.	Théorie simplifiée des stratifiés	59
3.2.1.	Couches symétriquement stratifiées	59
3.2.1.1.	Comportement en membrane.....	60
3.2.1.2.	Comportement en flexion.....	63
3.2.2.	Couplage flexion-extension de couches laminées antisymétriques.....	68
3.2.3.	Stratifiés de plis orthotropes.....	74
3.3.	Prise en compte des effets hygrothermiques	77
3.3.1.	Effets thermiques.....	78
3.3.2.	Effets hygrométriques	78
3.3.3.	Superposition des effets thermiques et hygrométriques	80
3.3.4.	Règles de conception d'une pièce composite	89
CHAPITRE 4	92
Critères de rupture classique	92
4.1.	Mécanismes de rupture dans les matériaux composites	92
4.2.	Critères de rupture classique	98
4.2.1.	Définition des critères de résistance.....	98
4.2.2.	Critères en contraintes maximales.....	99
4.2.3.	Critères en déformations maximales	102
4.2.4.	Le critère mixte.....	104
4.2.5.	Le critère de Hill.....	104
4.2.6.	Le critère de Tsai-Hill	106
4.2.7.	Le critère de Tsai-Wu	107
4.2.8.	Le critère de Hashin	109
Références	112

INTRODUCTION

Les matériaux composites sont de plus en plus utilisés pour la réalisation de structures dans de nombreux domaines et dans de nombreux secteurs, notamment le transport, l'automobile, la construction navale, la construction navale sportive, les accessoires sportifs et, en particulier, l'aéronautique et l'aérospatiale, en raison de leur rapport performance/masse élevé par rapport aux matériaux plus conventionnels tels que l'acier ou l'aluminium, ainsi que de la possibilité d'obtenir des formes complexes en réduisant le nombre d'assemblages. Les matériaux composites permettent de réaliser des assemblages plus complexes, grâce à l'utilisation de matériaux aux caractéristiques mécaniques spécifiques, comme le carbone, le verre ou le kevlar, et à l'utilisation de procédés de fabrication couche par couche avec des moules et des contre-moules.

Les matériaux composites constituent un sujet véritablement interdisciplinaire et le nombre d'étudiants qui suivent des cours dans ce domaine est en constante augmentation. Les livres sur le sujet ont tendance à se concentrer soit sur la mécanique, soit sur la science des matériaux composites, et les principes de la mécanique des matériaux composites sont orientés vers la mécanique. La technologie des matériaux composites est suffisamment nouvelle pour de nombreux ingénieurs en activité qui n'ont reçu aucune formation dans ce domaine. La mécanique des matériaux composites devrait donc être utile non seulement pour la formation des nouveaux ingénieurs, mais aussi pour la formation continue des ingénieurs en exercice et à titre de référence.

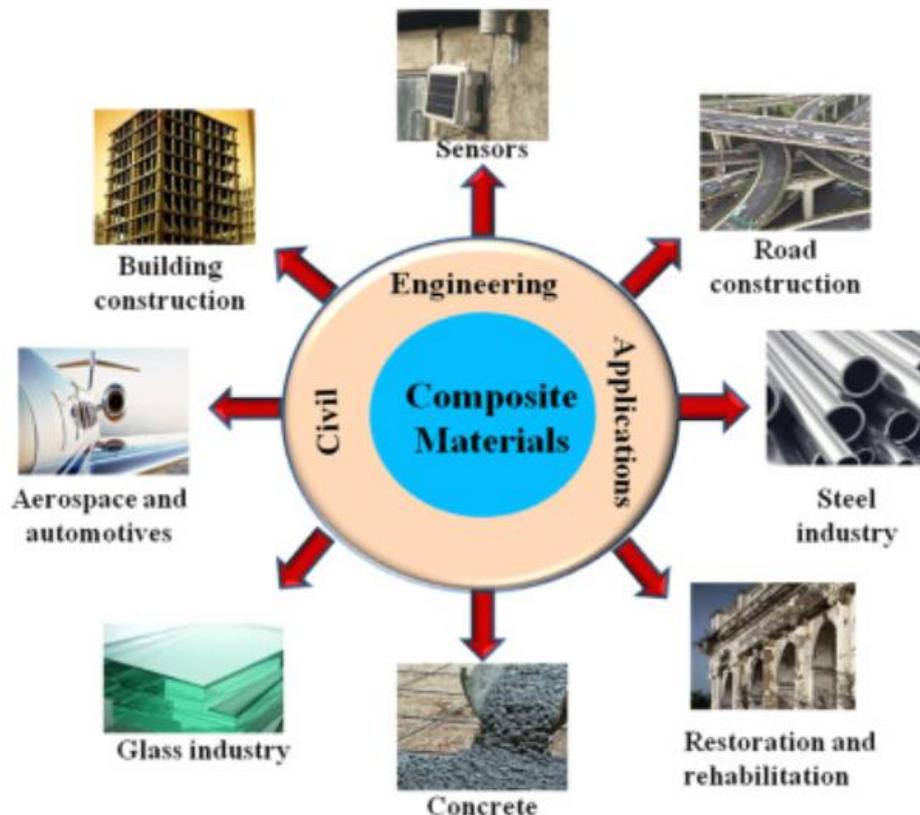


Figure1.1 Matériaux Composite

L'objectif principal de ce polycopié est de donner un aperçu assez général du comportement mécanique des matériaux composites (CMMC), et des étapes d'homogénéisation et de calcul des composites, pour atteindre ce but les sous-objectifs sont :

- Établir les relations entre les propriétés mécaniques à une échelle donnée et le comportement mécanique global du matériau composite.
- Établir les relations entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations en fonction des caractéristiques des matériaux composites (lois de comportement).
- Étudier l'effet de la température et de l'humidité imposées sur le comportement mécanique global des matériaux composites.

Ce polycopié sur le comportement mécanique des matériaux composites et multi-matériaux se compose de quatre chapitres :

- Le premier chapitre est une introduction générale aux matériaux composites ;
- Le deuxième chapitre présente les approches classiques des matériaux composites ;
- Le 3ème chapitre traite de l'homogénéisation des matériaux composites et de la théorie classique des stratifiés ;
- Le 4ème chapitre présente les différents critères de rupture des matériaux composites.
- Des exercices sont fournis avec des corrections complètes et détaillées. Ils aideront le lecteur à assimiler plus facilement les sujets traités.

CHAPTER 1

1 Généralités sur les matériaux composites

1.1 Définitions de base :

Un matériau composite est un assemblage d'au moins deux matériaux non miscibles (qui ne se mélangent pas à l'échelle macroscopique) dont les propriétés combinées sont supérieures à celles de chacun des constituants pris séparément. Pensez par exemple au béton armé : le béton résiste bien à la compression, et l'acier aux forces de traction. Leur combinaison donne un matériau de construction très performant.



1.2 Les composants

Un MATÉRIAU COMPOSITE est constitué dans le cas le plus général d'une ou plusieurs phases discontinues de nature différente, le composite est dit hybride. La phase discontinue est généralement dure et possède des propriétés mécaniques supérieures à celles de la phase continue. La phase continue est appelée matrice. La phase discontinue est appelée matériau de renforcement.

$$\text{Matériaux Composite} = \text{Matrice} + \text{Renforts}$$

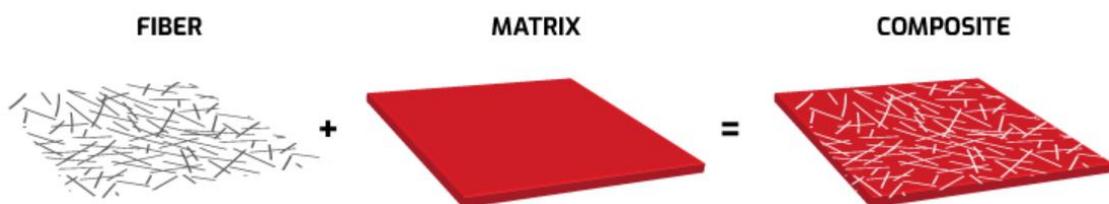


Figure 1.2 Composition du matériau composite

Les propriétés des matériaux composites résultent :

- Des propriétés des matériaux constituants,
- De leur distribution géométrique ;
- De leur interaction, etc.

La liaison entre les fibres et la matrice est créée lors de la phase de fabrication du matériau composite. Ceci a une influence fondamentale sur les propriétés mécaniques du matériau composite.

Ainsi, pour accéder à la description d'un matériau composite, il sera nécessaire de spécifier :

- La nature des constituants et leurs propriétés,
- La géométrie du renfort, sa distribution ;
- La nature de l'interface

1.3 Les renforts

- La phase de renforcement assure la rigidité et la rigidité. Dans la plupart des cas, le renfort est plus dur, plus solide et plus résistant que la matrice.
- Le renfort est généralement une fibre ou une particule. Les composites à particules ont tendance à être plus faibles et plus souples que les composites à fibres, en partie à cause des difficultés de mise en œuvre. Ils sont généralement plus fragiles par nature car ils contiennent généralement moins de renforts.
- Les renforts peuvent être divisés en deux types : les matériaux renforcés par des fibres continues et les matériaux renforcés par des fibres discontinues (courtes), comme indiqué ci-dessous. Les matériaux renforcés par des fibres continues présentent souvent une structure stratifiée (a), tandis que les matériaux renforcés par des fibres discontinues (courtes) ont une orientation aléatoire, se présentant sous la forme de fibres hachées ou de matelas (b).

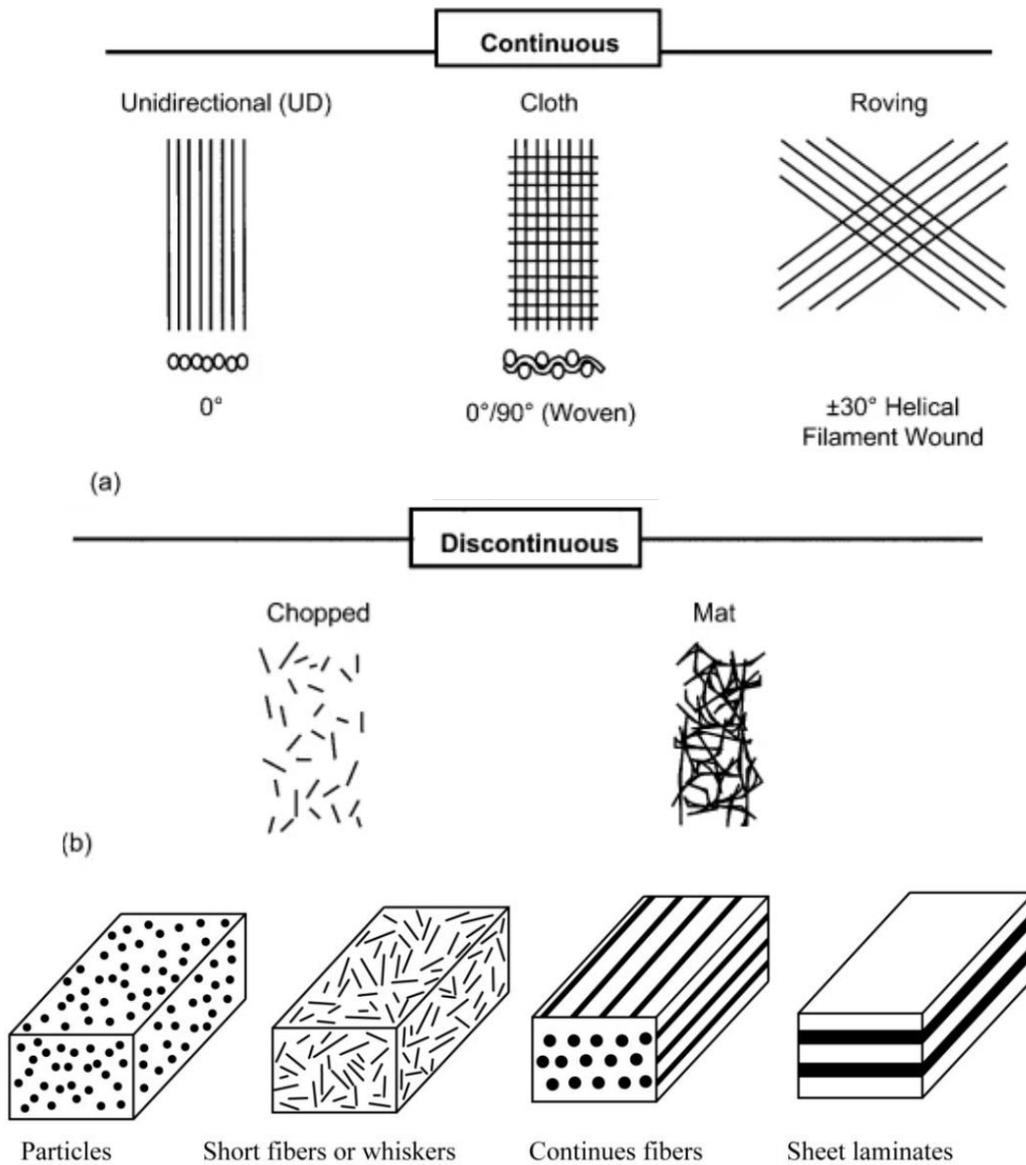


Figure1.3 Types de renforts

Les fibres les plus courantes sont les fibres de verre, les fibres aramides et les fibres de carbone, qui peuvent toutes être continues ou discontinues.



Figure1.4 Différents types de fibres

Les fibres sont constituées de milliers de filaments, chaque filament ayant un diamètre compris entre 5 et 15 micromètres, ce qui permet de les fabriquer à l'aide de machines textiles ; par exemple, dans le cas de la fibre de verre, on peut obtenir deux semi-produits comme le montre la figure 1.3.

Ces fibres sont vendues sous les formes suivantes :

- Les fibres courtes (figure 1.3b), d'une longueur de quelques centimètres ou fractions de millimètres sont des feutres, mats et fibres courtes utilisés dans le moulage par injection.
- Les fibres longues (figure 1.3a), qui sont coupées lors de la fabrication du matériau composite, sont utilisées telles quelles ou tissées.

Les principaux matériaux fibreux sont :

- Verre
- Aramide ou Kevlar, (très léger)
- Carbone (haut module ou haute résistance)
- Bore (haut module ou haute résistance)
- Carbure de silicium (résistant aux hautes températures)

1.3.1 Formes des fibres

Lors de la formation de renfort fibreux, l'assemblage de fibres pour réaliser des formes fibreuses pour la fabrication de matériau composite peut prendre les formes suivantes :

- *Unidimensionnel (câbles, fils ou rubans unidirectionnels)*

Les câbles, fils ou rubans de composites unidirectionnels sont des matériaux composites renforcés de fibres de carbone ou d'autres fibres linéaires, qui sont utilisés dans diverses applications industrielles. Les composites unidirectionnels sont caractérisés par une résistance élevée en traction dans la direction des fibres, mais une faible résistance en cisaillement ou en compression.

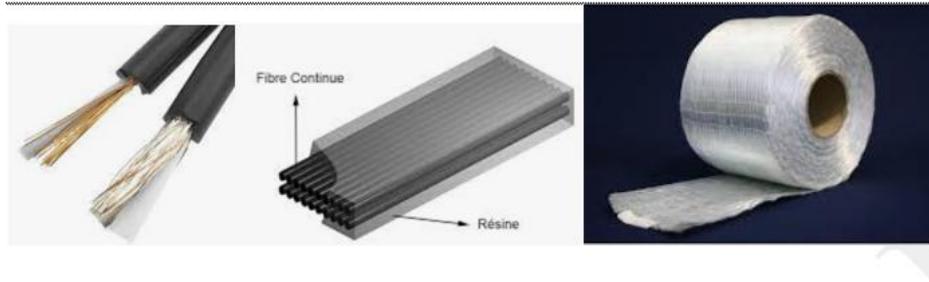


Figure 1.5 : Composites unidirectionnels (câbles, fils ou rubans)

- *Bidimensionnel (tissés ou non tissés (feutres ou mats))*

Les matériaux composites tissés sont fabriqués en croisant des fibres, tandis que les non tissés sont formés par des fibres agglomérées. Les composites tissés offrent une résistance élevée dans les deux directions perpendiculaires au tissage, tandis que les non tissés peuvent offrir une résistance uniforme dans toutes les directions. Les composites bidimensionnels sont utilisés dans diverses applications, allant de la fabrication de pièces de carrosserie à la production de câbles et de tissus haute pression.

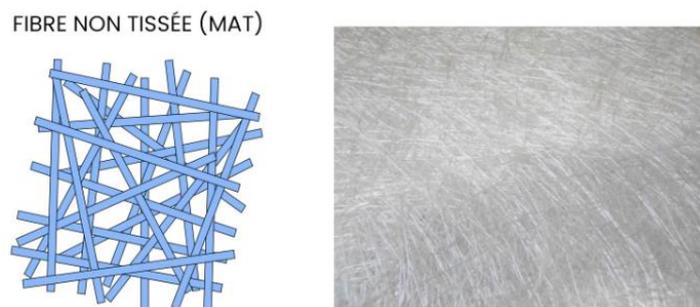


Figure 1.6a : Composites bidimensionnels non tissés

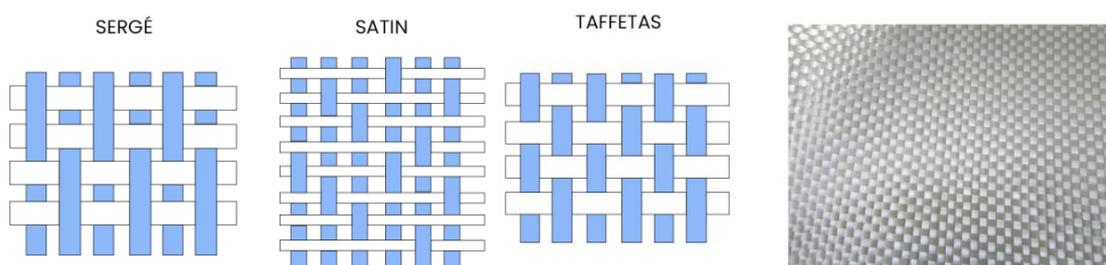


Figure 1.6b : Composites bidimensionnels tissés

- *Tridimensionnel*

Parfois appelés tissus multidimensionnels avec des fibres orientées dans plusieurs directions (>2). Les tissus multidimensionnels sont des matériaux composites renforcés de fibres de

carbone ou d'autres fibres linéaires, avec des fibres orientées dans plusieurs directions. Ces composites peuvent être fabriqués à partir de tissus 3D, de feutres ou de mats, et offrent une résistance élevée dans toutes les directions. Les composites tridimensionnels sont utilisés dans diverses applications, allant de la fabrication de pièces de carrosserie à la production de câbles et de tissus haute pression

Avant la formation des renforts, les fibres sont soumises à un traitement de surface pour :

- Diminue l'action abrasive des fibres lors du passage dans les machines de formage.
- Améliorer l'adhérence avec le matériau de la matrice.

D'autres types de renforts, sphères pleines ou vides (microsphères) ou poudres, sont également utilisés.

1.3.2 Natures de fibres

Vu la quantité importante relative aux fibres utilisées dans la fabrication des composites. On remarque immédiatement l'importance industrielle de la fibre de verre (produite en grande quantité). Les fibres de carbone et de Kevlar sont réservées aux composants à hautes performances.

Voici quelques notes sur les fibres :

- *Fibre de verre :*

Obtenues à partir de sable (silice) et d'additifs (alumine, carbonate de chaux, magnésie, oxyde de bore)

Propriétés:

- Bon rapport performances/prix
- Disponible sous toutes les formes
- Bonne adhérence à toutes les résines
- Résistance à la température
- Dilatation thermique faible
- Bonne résistance à l'humidité
- Renfort le plus utilisé industriellement



Figure 1.7 Fibre de verre

Le module d'Young de ces fibres, voisin de celui de l'aluminium, rend l'utilisation des fibres de verre intéressante lorsqu'elles sont associées à une matrice de faible rigidité telle que les polymères. En général, le plus grand problème associé à ces fibres est leur haute sensibilité aux endommagements superficiels, en particulier les rayures qui limitent leur résistance mécanique et créent des zones de concentration de contraintes.

- *Fibre Kevlar :*

Il s'agit d'une fibre aramide, de couleur jaunâtre. Les fibres d'aramide ont de bonnes propriétés mécaniques en traction et bonne résistance aux chocs (excellente absorption des vibrations) et à l'abrasion, au feu et à la chaleur (Leur dilatation thermique est nulle), aux solvants organiques (exemple : carburants). Leur masse volumique est faible. Leurs inconvénients sont un mauvais comportement en compression, usinabilité délicate : grande difficulté à couper (résistance au cisaillement) ou à usiner, reprise d'humidité importante, sensibilité aux rayons ultraviolets, prix élevé.

Les aramides sont utilisés dans de nombreuses applications à haute technologie dans l'aéronautique, l'aérospatiale, la construction navale, le secteur militaire pour fabriquer par exemple des gilets pare-balles ou des casques.

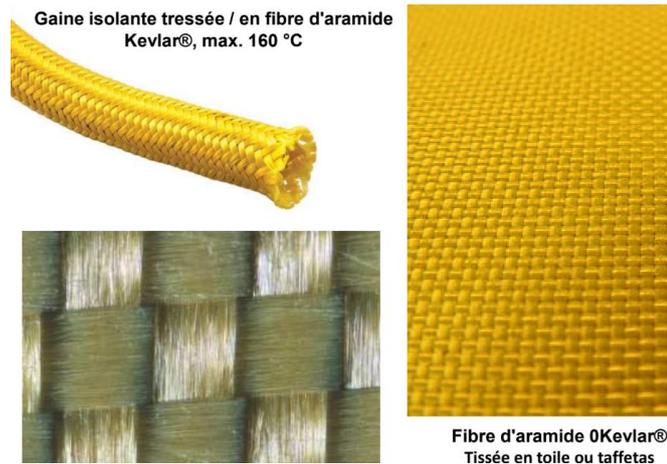


Figure 1.8 Fibre Kevlar (aramide)

Ces fibres ont des modules allant de 60 à 180GPa et une masse volumique d'environ 1400 kg m^{-3} .

- *Fibre de carbone :*

Ce type de matériau est utilisé dans toutes applications exigeant une grande résistance mécanique pour un poids réduit. Ces fibres ont d'excellentes propriétés mécaniques, une très bonne tenue en température, une dilatation thermique nulle, une bonne usinabilité et de bonnes conductibilités thermique et électrique. Elles résistent à l'humidité. Leurs inconvénients est une mauvaise résistance à l'abrasion, au cisaillement et aux chocs, et leur prix est relativement élevé. C'est pourquoi il est souvent allié à une fibre d'aramide ou de verre.

Les fibres de carbone ont des modules qui varient de 150 à 800 GPa et une masse volumique en général inférieure à 2000 kg m^{-3} .



Figure 1.9 Fibre carbone

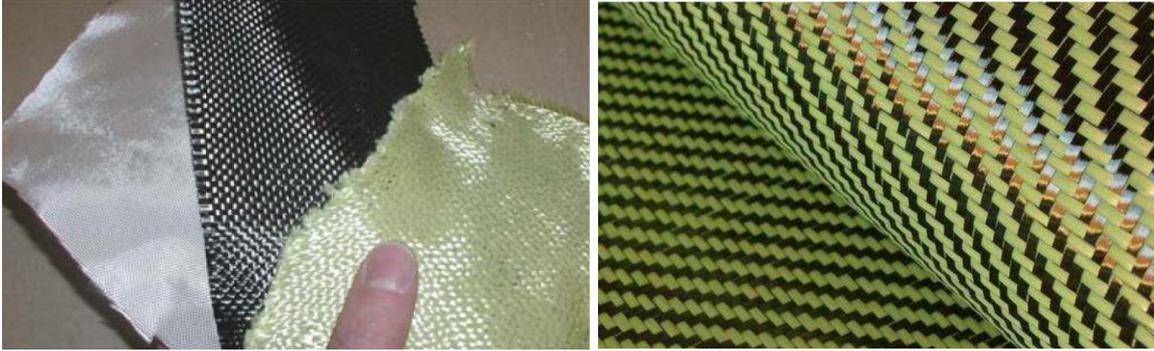


Figure 1.10 Tissu hybride carbone/aramide

- *Autres fibres*
 - ✓ Fibre de bore : Fibres de haut module et insensibles à l'oxydation à hautes températures, elles sont obtenues par dépôt en phase gazeuse sur un substrat en tungstène.
 - ✓ Carbure de silicium : Elles sont produites comme le verre, par fusion, et sont essentiellement utilisées pour leur haute tenue chimique et thermique dans les tuyères pour moteur de fusée.

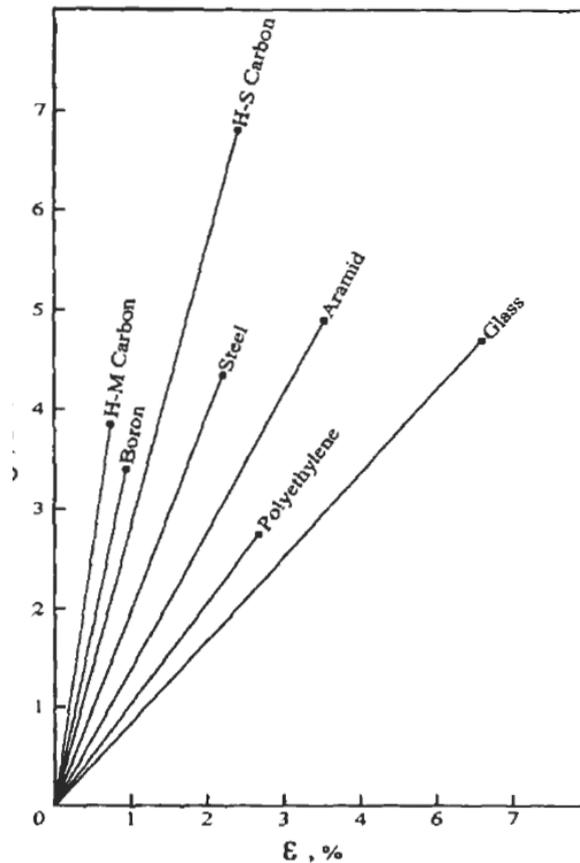


Figure 1.11 Diagrammes contrainte-déformation pour les fibres typiques des composites avancés

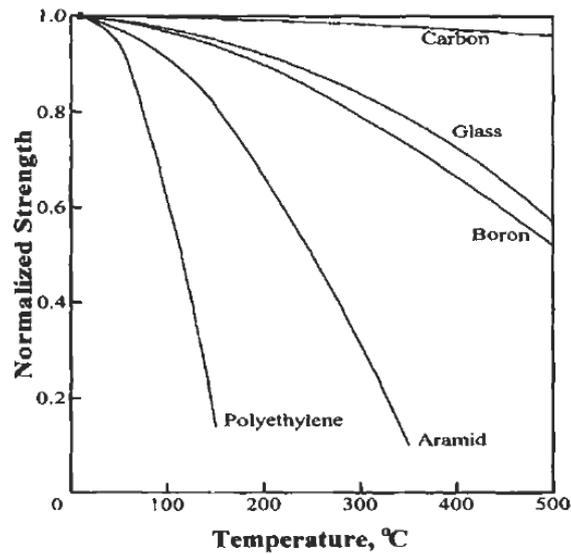


Figure 1.12 Dégradation de la résistance normalisée des fibres en fonction de la température à 20°C.

1.4 Les matrices

La phase continue qui lie les renforts entre eux et leur transmet les charges. La matrice peut être constituée de polymères, de métaux ou de céramiques. Elle protège le renforcement des dommages environnementaux et le maintien dans l'orientation souhaitée.

Les matériaux de la matrice comprennent les éléments suivants :

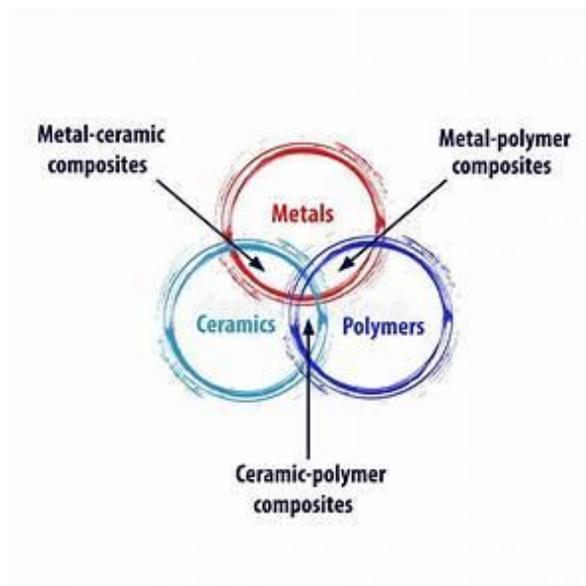


Figure 1.13 Types de composites.

Il existe 3 catégories principales de matrices :

1.4.1 Matrice polymérique (Les CMO ou composites à matrice organique)

Ce sont les matériaux les plus répandus, on retrouve notamment les thermoplastiques et les thermodurcissables. Les composites à matrice organique se divisent à leur tour en deux catégories :

- les composites à grande diffusion : ce sont des composites aux performances plus faibles et aux coûts plus abordables. Ils sont utilisés dans plus de 95 % des cas, notamment lors de productions en grande série,
- les composites à haute performance : ce sont des matériaux qui présentent des qualités mécaniques supérieures et qui représentent donc un coût plus important. Ils sont souvent utilisés dans le domaine de l'aéronautique et de la construction.

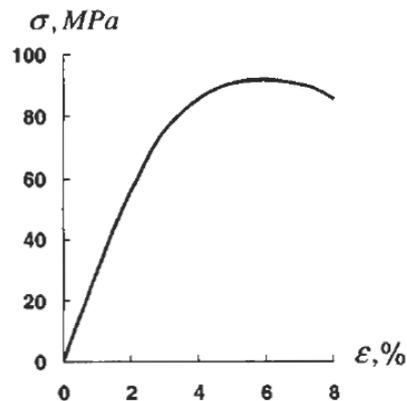


Figure 1.14 Diagramme contrainte-déformation d'une matrice typique d'époxy durcie

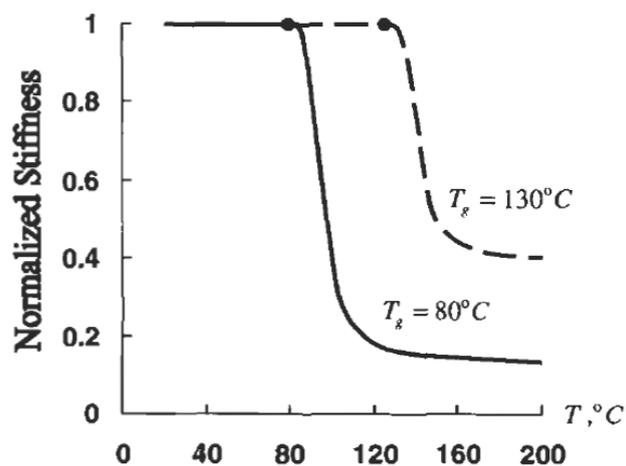


Figure 1.15 Diagrammes thermomécaniques typiques pour les résines époxy durcies avec des températures de transition vitreuse 80°C et 130°C.

1.4.2 Matrice minérale (Les CMC ou composites à matrice céramique)

Les matrices minérales, plus précisément appelées composites à matrice céramique (CMC), sont des matériaux composites où une matrice céramique est renforcée par un autre matériau, qui peut être des fibres (continues ou discontinues), des particules ou des whiskers (courtes fibres monocristallines), également céramiques ou non. L'objectif principal est d'améliorer la ténacité et la fiabilité des céramiques.

Les matrices courantes incluent l'oxyde d'aluminium (alumine, Al_2O_3), le carbure de silicium (SiC), le nitrure de silicium (Si_3N_4), la zircone (ZrO_2) et les silicates.

1.4.3 Matrice métallique (les CMM ou composites à matrice métallique)

Les matrices métalliques (CMM), également appelées composites à matrice métallique, sont des matériaux composites où une matrice métallique est renforcée par un autre matériau, qui peut être un autre métal, une céramique ou un composé organique. L'objectif principal est d'améliorer les propriétés de la matrice métallique, telles que la résistance, la rigidité, la résistance à l'usure, la résistance à la température ou la conductivité.

Il s'agit généralement d'un métal léger comme l'aluminium, le magnésium, le titane ou leurs alliages. Le cuivre et le fer sont également utilisés dans certaines applications.

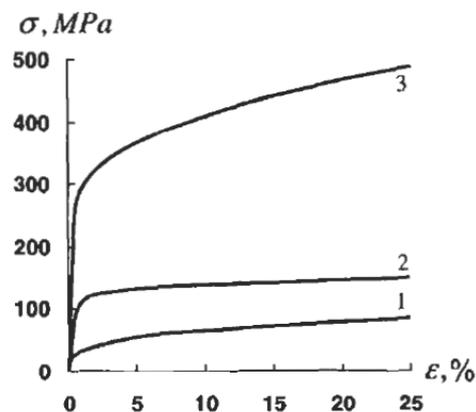


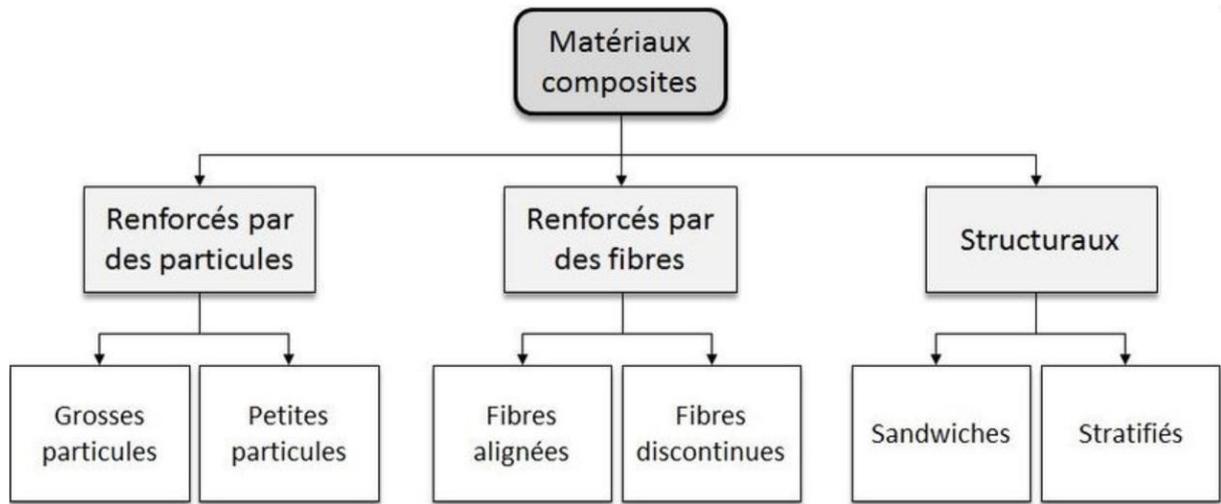
Figure 1.16 Courbes de contrainte-déformation typiques pour les matrices d'aluminium (1), de magnésium (2) et de titane (3).

▪ Interface

La région entre la matrice et le renfort. Elle permet le transfert des charges de la matrice vers le renfort. Les propriétés de l'interface ont un impact significatif sur les performances globales du composite.

1.5 Les matériaux composites structuraux

Les matériaux composites structuraux sont des matériaux innovants qui offrent des avantages structurels significatifs, tels que légèreté, flexibilité, résistance à la corrosion, résistance aux chocs, et une grande variété de propriétés mécaniques avancées.



1.5.1 Structures en stratifiés

Les structures stratifiées sont constituées de couches successives de matériaux composites. Ces couches sont également nommées plis. Elles sont liées par de la résine. Ces pièces structurelles sont réalisées en optimisant les directions des renforts en fonction des charges qu'elles doivent subir. L'interface inter-laminaire assure le transfert des déplacements et des contraintes normales d'une couche à une autre.

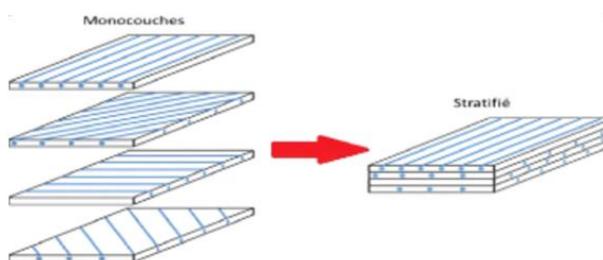


Figure 1.16 Constitution d'un stratifié

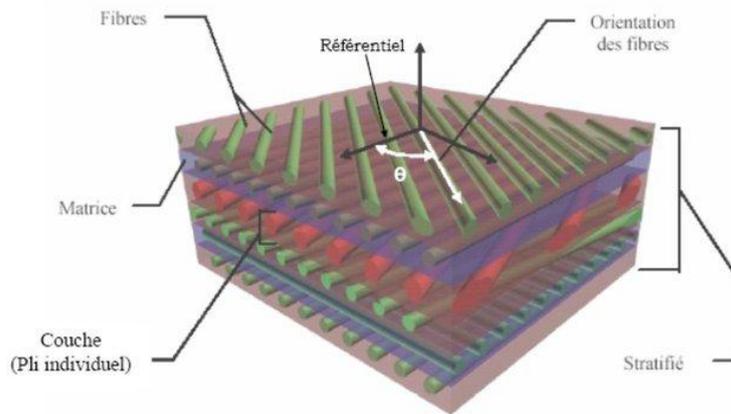


Figure 1.17 Structures stratifiées

1.5.1.1 Stratifiés à base de fils ou de tissus unidirectionnels

Les stratifiés à base de fils ou de tissus unidirectionnels représentent un type de base de stratifié qui peut théoriquement réduire d'autres types de stratifiés. Ces stratifiés sont constitués de couches de fils ou de tissus unidirectionnels dont la direction est décalée à chaque couche, Figure (1.13).

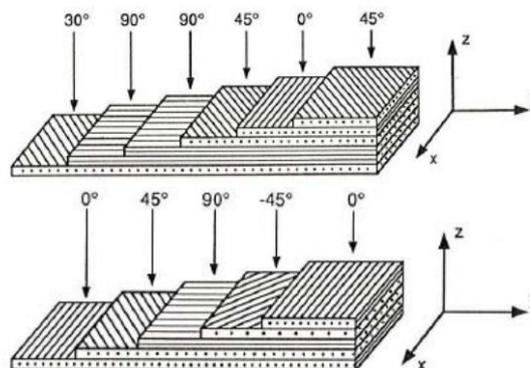


Figure 1.18 Exemples de stratifiés unidirectionnels

Ces stratifiés sont généralement désignés selon les codes suivants :

- Chaque pli est représenté par un nombre indiquant la valeur de l'angle en degrés que fait l'orientation des fibres avec l'axe de référence x.
- Si les angles sont différents, les couches successives sont séparées par une barre oblique (/).
- Les couches successives avec la même orientation sont identifiées par un index numérique.
- Les plans sont nommés séquentiellement d'une face à l'autre.
- Les parenthèses (ou les parenthèses) marquent le début et la fin du code.
- La spécification dépend du système de coordonnées sélectionné.

- Le signe (+) ou (-) est utilisé pour les couches avec des angles de grandeur égale mais de signes opposés. Les règles pour les angles positifs ou négatifs dépendent du système de coordonnées sélectionné.

La direction dite '0°' correspond à la direction d'application de l'effort prépondérant, soit la direction privilégiée de la pièce considérée, soit l'axe horizontal du repère sélectionné.

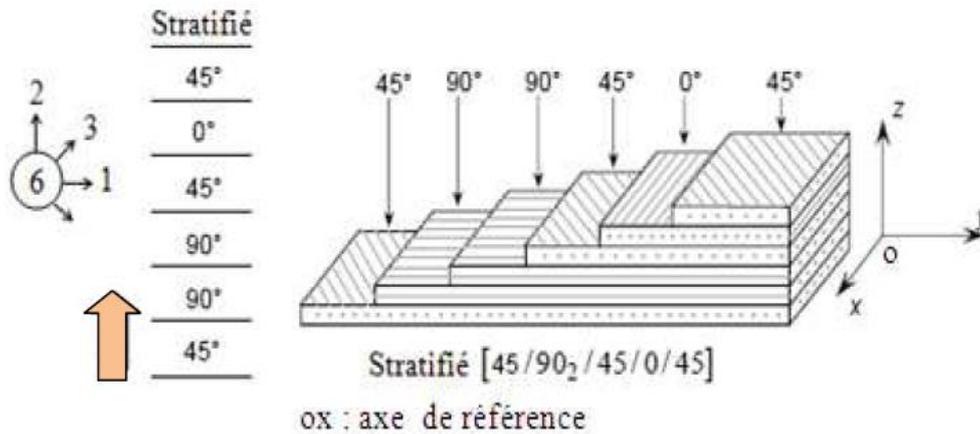


Figure 1.19 Exemples de la désignation d'un stratifié

1.5.1.2 Stratifiés symétriques

Un stratifié est symétrique si le plan médian est le plan de symétrie. Sa spécification ne nécessite que la moitié des couches.

-Si le stratifié à un nombre pair de couches, la désignation commence sur un côté et se termine sur le plan de symétrie. L'indice (s) indique que le stratifié est symétrique (Fig. (1.15)).

-Si le stratifié a un nombre impair de couches, la désignation sera similaire à la désignation précédente, avec la couche intermédiaire (centrale) étant surlignée.

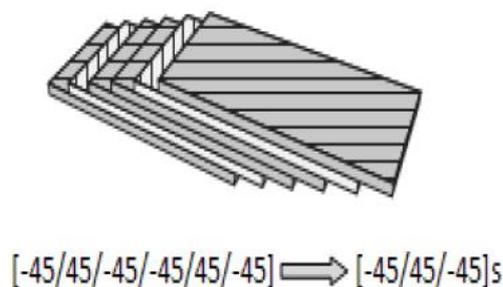


Figure 1.20 Exemple d'un Stratifié symétrique

Applications :

Les stratifiés sont utilisés dans une large gamme d'applications, notamment :

Aéronautique : Les stratifiés sont utilisés pour fabriquer des structures d'avions, telles que les ailes et le fuselage, car ils sont légers et résistants.

Automobile : Les stratifiés sont utilisés pour fabriquer des carrosseries de voitures, des panneaux de carrosserie et des composants de suspension.

Construction : Les stratifiés sont utilisés pour fabriquer des structures de bâtiments, des ponts et des éléments de façade.

Industrie marine : Les stratifiés sont utilisés pour fabriquer des coques de bateaux, des voiles et des éléments de pont

1.5.2 Structures en sandwich

Les structures composites subissant des sollicitations de type flexion ou torsion sont généralement construites en matériaux sandwichs. Une structure sandwich est composée d'une âme et de deux peaux en matériaux composites. L'assemblage est réalisé par collage à l'aide d'une résine. Les âmes les plus utilisées sont de type nid d'abeilles, âme ondulée ou mousse. Ces structures ont une grande rigidité en flexion et torsion.

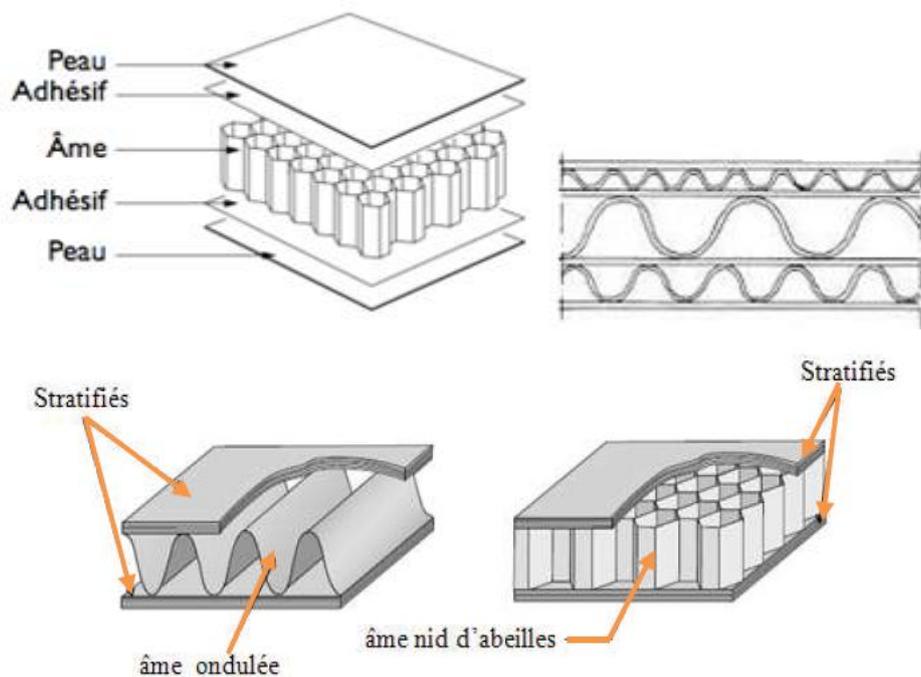


Figure 1.21a Structures sandwichs à âmes creuses

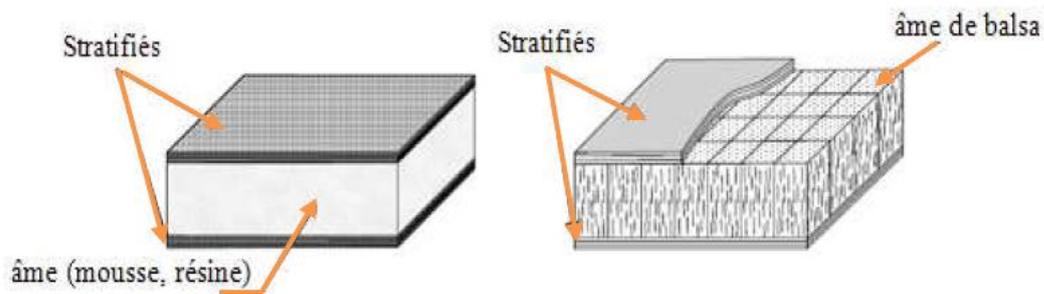


Figure 1.21b Structures sandwichs à âmes pleines

Les matériaux les plus utilisés dans les âmes des matériaux composites sandwichs sont :

✓ ***Pour les âmes pleines***

- Le balsa ou bois cellulaire.
- Diverses mousses cellulaires.
- Des résines chargées de microsphères creuses de verre, appelées mousses syntactiques.

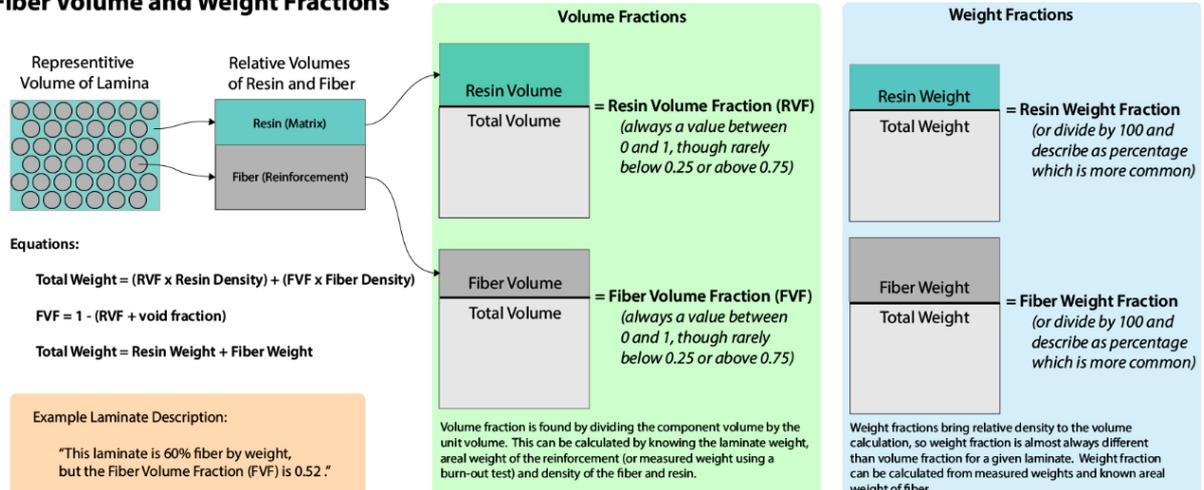
✓ ***Pour les âmes creuses***

- des alliages métalliques légers.
- du papier Kraft (enduit ou non de résine).
- Du papier polyamide, type papier Nomes.

1.6 Fractions volumiques et massiques

Un des facteurs les plus importants qui déterminent les caractéristiques mécaniques d'un matériau composite est la proportion relative de matrice et de renfort. Cette proportion peut être exprimée soit en fraction volumique, soit en fraction massique. Les fractions massiques sont plus faciles à mesurer lors de l'élaboration des matériaux. Par contre, les fractions volumiques interviennent directement dans les modèles théoriques décrivant le comportement mécanique des matériaux. Il est donc nécessaire de savoir passer de l'une à l'autre de ces fractions. Ces expressions seront établies pour un matériau à deux phases, puis étendues à un matériau à plus de deux phases.

Fiber Volume and Weight Fractions



1.6.1 Fractions volumiques

Considérons un volume v_c de matériau composite, composé d'un volume v_f de fibres et d'un volume v_m de matrice. Par la suite, les indices c, f et m seront systématiquement utilisés comme indices respectifs des caractéristiques du matériau composite, des fibres et de la matrice. La fraction volumique des fibres est :

$$V_f = \frac{v_f}{v_c}$$

La fraction volumique de la matrice est :

$$V_m = \frac{v_m}{v_c}$$

Avec

$$V_m = 1 - V_f$$

Puisque

$$v_c = v_f + v_m$$

1.6.2 Fractions massiques

Les fractions massiques sont définies de la même manière à partir des masses P_c, P_f, P_m respectives de matériau composite, de fibres et de matrice. Les fractions massiques ou fractions en masse de fibres et de matrice s'écrivent respectivement :

$$P_f = \frac{p_f}{p_c}$$

$$P_m = \frac{p_m}{p_c}$$

$$P_m = 1 - P_f$$

1.6.3 Relations entre fractions volumiques et massiques.

Les relations entre les fractions volumiques et massiques font intervenir les masses volumiques ρ_c, ρ_f, ρ_m respectives de matériau composite, de fibres et de matrice. Les masses et les volumes sont liés par les relations :

$$p_c = \rho_c v_c$$

$$p_f = \rho_f v_f$$

$$p_m = \rho_m v_m$$

La masse totale du matériau composite est :

$$P_c = P_f + P_m$$

Où

$$\rho_c v_c = \rho_f v_f + \rho_m v_m$$

La masse volumique du matériau composite s'écrit donc en fonction des fractions volumiques suivant :

$$\rho_c = \rho_f V_f + \rho_m (1 - V_f)$$

De même, en partant du volume total du composite :

$$v_c = v_f + v_m$$

Nous obtenons :

$$\frac{p_c}{\rho_c} = \frac{p_f}{\rho_f} + \frac{p_m}{\rho_m}$$

D'où l'expression de la masse volumique en fonction des fractions massiques :

$$\rho_c = \frac{1}{\frac{P_f}{\rho_f} + \frac{P_m}{\rho_m}}$$

Les relations entre fractions massiques et fractions volumiques peuvent maintenant être établies, en partant des relations de définition :

$$P_f = \frac{p_f}{p_c} = \frac{\rho_f v_f}{\rho_c v_c} = \frac{\rho_f}{\rho_c} V_f$$

et

$$P_m = \frac{\rho_m}{\rho_c} V_m$$

Les relations inverses s'obtiennent de la même manière, soit :

$$V_f = \frac{\rho_c}{\rho_f} P_f$$

$$V_m = \frac{\rho_c}{\rho_m} P_m$$

Où la masse volumique est déterminée cette fois par l'expression :

$$\rho_c = \frac{1}{\frac{P_f}{\rho_f} + \frac{P_m}{\rho_m}}$$

Les expressions précédentes entre fractions volumiques et fractions massiques peuvent être étendues au cas d'un nombre quelconque de constituants. Les expressions générales s'écrivent pour n constituants :

$$P_i = \frac{\rho_i}{\rho_c} V_i$$

Avec

$$\rho_c = \sum_{i=1}^n \rho_i V_i$$

Et

$$V_i = \frac{\rho_c}{\rho_i} P_i$$

Avec

$$\rho_c = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{P_i}{\rho_i}}$$

CHAPITRE 2

Approche classique des composites : spécificité du calcul des composites

Une structure composite stratifiée consiste en un système de couches liées ensemble. Les couches peuvent être constituées de différents matériaux isotropes ou anisotropes, et avoir des structures, des épaisseurs et des propriétés mécaniques différentes. Les caractéristiques du stratifié sont généralement calculées en utilisant les informations concernant le nombre de couches, leur séquence d'empilement, les propriétés géométriques et mécaniques qui doivent être connues. Un nombre fini de couches peut être combiné pour former de stratifiés. Le stratifié est caractérisé par 21 coefficients indépendants.

Ainsi, notre objectif est de fournir des équations permettant de prédire le comportement d'un stratifié en tant que système de couches avec des propriétés données. La seule restriction imposée au stratifié en tant qu'élément d'une structure composite concerne son épaisseur totale qui est supposée bien inférieure aux autres dimensions de la structure.

2.1 Etude des lois de comportement anisotrope 3D

Les relations contrainte-déformation des matériaux en termes de modules d'élasticité généralisés, de coefficients de Poisson et de modules de cisaillement sont très fréquemment utilisées dans les analyses d'ingénierie.

Ces modules élastiques généralisés sont parfois appelés constantes d'ingénierie ou constantes techniques car ils ont des significations physiques plus directes que les constantes élastiques, relativement abstraites.

Les constantes d'ingénierie peuvent être mesurées dans des tests simples tels que des tests de traction uniaxiale ou de cisaillement pur. Dans ces essais, les déplacements ou déformations d'un spécimen sont mesurés par rapport à une charge ou contrainte connue. La déformation mesurée peut être facilement représentée comme une fonction linéaire de la contrainte, à partir de laquelle des relations entre les constantes élastiques et les constantes d'ingénierie peuvent être établies.

Les matériaux ayant des propriétés différentes dans différentes directions sont appelés anisotropes. Un cas particulier d'anisotropie est l'existence de deux plans de symétrie

mutuellement perpendiculaires dans les propriétés des matériaux. De tels matériaux sont appelés orthotropes. Les composites fibreux avec des fibres courtes orientées ou des fibres continues sont de nature orthotrope. Dans de tels composites, les propriétés sont définies dans le plan de la couche dans deux directions ; la direction le long des fibres et la direction perpendiculaire à l'orientation des fibres.

2.1.1 Loi de Hooke

La relation contrainte-déformation pour un milieu élastique linéaire anisotrope tridimensionnel, également connue sous le nom de loi de Hooke, est exprimée sous la forme matricielle suivante :

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}$$

$\{\sigma\}$ et $\{\varepsilon\}$ les composantes indépendantes des tenseurs des contraintes et des déformations présentées sous forme vectorielle (Notations de Voigt) comme suit :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} \text{ et } \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

$[C]$ appelé la matrice de rigidité ou matrice des coefficients élastiques.

Matrice de rigidité d'un matériau anisotrope et Nombres de constantes d'élasticité

Dans le cas le plus général d'un corps anisotrope, la loi de Hooke généralisée, où 36 modules élastiques sont définis et seuls 21 d'entre eux sont indépendants. Ce cas correspond à un matériau ne possédant aucune propriété de symétrie. Un tel matériau est appelé matériau triclinique ou matériau anisotrope.

La loi de comportement sous forme matricielle s'écrit :

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}}_{\{\sigma\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix}}_{[C]} \underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}}_{\{\varepsilon\}}$$

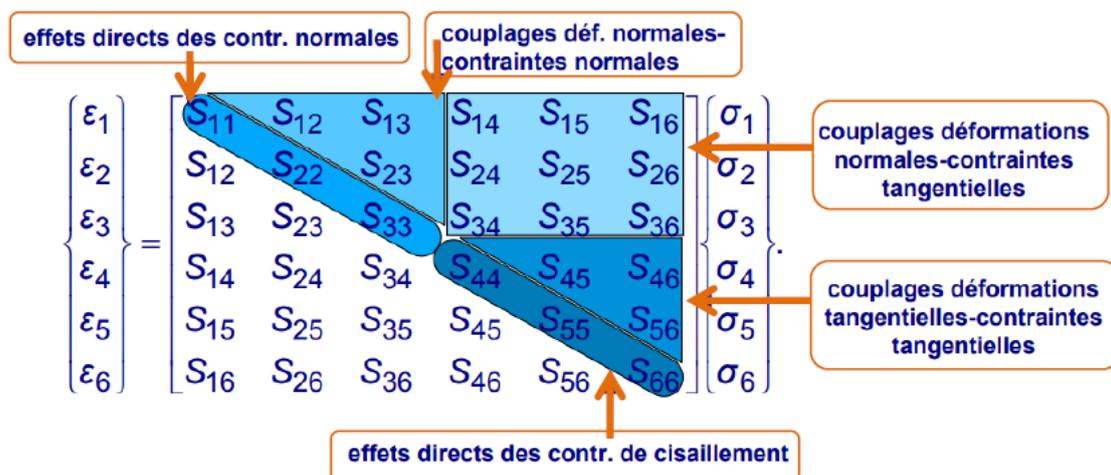
$$\sigma_{11} = C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22} + C_{13}\varepsilon_{33} + C_{14}\gamma_{23} + C_{15}\gamma_{13} + C_{16}\gamma_{12}$$

Le tenseur des rigidités fait intervenir l'ensemble des caractéristiques élastiques du matériau. De même, les déformations sont reliées linéairement aux contraintes par la relation inverse :

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\} \quad \text{avec } [S] = [C]^{-1}$$

Où S est le tenseur des complaisances élastiques du matériaux (matrice de souplesse).

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}}_{\{\varepsilon\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix}}_{[S]} \underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}}_{\{\sigma\}}$$



Plans de symétrie dans les matériaux

En pratique, les matériaux possèdent des plans de symétries supplémentaires qui permettent de restreindre encore le nombre de composantes indépendantes du tenseur des rigidités et de souplesse. Les principaux cas rencontrés sont l'orthotropie (symétrie par rapport à trois plans orthogonaux), réduisant le nombre de composantes à 9 (c'est le cas par exemple du plis UD Unidirectionnel) et l'isotropie (mêmes propriétés dans toutes les directions), réduisant le nombre de composantes à 2 (cette hypothèse est largement utilisée en mécanique des milieux continus, pour les matériaux courants comme les aciers, cuivre et aluminium, ...).

2.1.2 Matériau monoclinique

Un matériau monoclinique est un matériau qui possède un plan de symétrie.

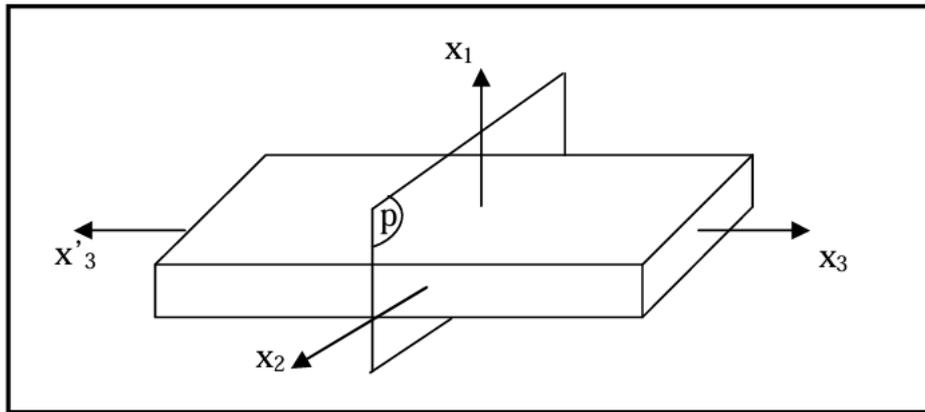


Figure 2.1 Un plan de symétrie dans un matériau monoclinique

La forme de la matrice de rigidité (ou souplesse) doit être telle qu'un changement de base effectué par symétrie par rapport à ce plan ne modifie pas la matrice. Dans le cas où le plan de symétrie est le plan (1,2), l'exploitation des changements de base conduit à une matrice de rigidité de la forme :

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}}_{\{\sigma\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}}_{[C]} \underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}}_{\{\varepsilon\}}$$

Ou bien

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}}_{\{\varepsilon\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & S_{36} \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & S_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{45} & S_{55} & 0 \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix}}_{[S]} \underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}}_{\{\sigma\}}$$

Les matrices de rigidité et de souplesse étant inverses l'une de l'autre. Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est réduit à 13.

2.1.3 Matériau orthotrope (orthogonal)

Un matériau orthotrope possède trois plans de symétrie, perpendiculaires deux à deux. Il est à noter que l'existence de deux plans de symétrie perpendiculaires implique l'existence du troisième.

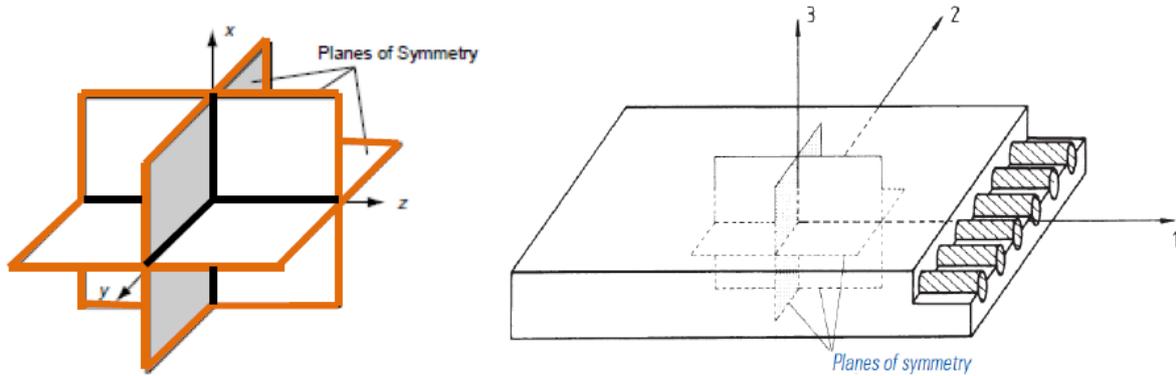


Figure 2.2 Trois plans de symétrie dans un matériau composite orthotrope UD

La forme de la matrice de rigidité est donc obtenue en ajoutant au matériau monoclinique un plan de symétrie perpendiculaire au précédent. L'invariance de la matrice dans un changement de base effectué par symétrie par rapport à ce deuxième plan conduit à une matrice de rigidité de la forme :

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}}_{\{\sigma\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}}_{[C]} \underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}}_{\{\varepsilon\}}$$

Ou bien

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}}_{\{\varepsilon\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix}}_{[S]} \underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}}_{\{\sigma\}}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \frac{S_{22}S_{33} - S_{23}^2}{\Delta S}, & C_{12} &= \frac{S_{13}S_{23} - S_{12}S_{33}}{\Delta S} \\
C_{22} &= \frac{S_{11}S_{33} - S_{13}^2}{\Delta S}, & C_{13} &= \frac{S_{12}S_{23} - S_{13}S_{22}}{\Delta S} \\
C_{33} &= \frac{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}{\Delta S}, & C_{23} &= \frac{S_{12}S_{13} - S_{23}S_{11}}{\Delta S} \\
C_{44} &= \frac{1}{S_{44}}, & C_{55} &= \frac{1}{S_{55}}, & C_{66} &= \frac{1}{S_{66}}
\end{aligned}$$

$$\Delta S = S_{11}S_{22}S_{33} - S_{11}S_{23}^2 - S_{22}S_{13}^2 - S_{33}S_{12}^2 + 2S_{12}S_{13}S_{23}$$

La relation d'élasticité s'écrit, en introduisant les modules de l'ingénieur, sous la forme :

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{array} \right\} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}}_{[S]} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{array} \right\} \\
& \left\{ \varepsilon \right\} & & & & \left\{ \sigma \right\}
\end{aligned}$$

Relations qui s'écrivent sous la forme condensée :

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j}, \quad i, j = 1, 2, 3 \text{ ou } L, T, T'$$

Où

- 3 modules de Young E_1, E_2 et E_3 ou E_L, E_T et $E_{T'}$ qui désignent les modules orthotropes d'élasticité par rapport aux directions x, y, z respectivement ;
- 3 modules de cisaillement G_{12}, G_{13}, G_{23} ou $G_{LT}, G_{LT'}, G_{TT'}$ sont les modules de cisaillement orthotropes dans les plans YZ, ZX et XY, respectivement ;
- 3 coefficients de Poisson $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$ ou $\nu_{LT}, \nu_{LT'}, \nu_{TT'}$ pour la déformation dans la direction j lorsqu'il est sollicité dans la direction i (ν_{ij}).

Les constantes élastiques, C_{ij} pour un matériau orthotrope peuvent être exprimées en termes de constantes d'ingénierie. Ces relations sont :

$$C_{11} = \frac{E_1(1 - \nu_{23}\nu_{32})}{Q}$$

$$C_{12} = C_{21} = \frac{E_1(\nu_{21} - \nu_{31}\nu_{23})}{Q} = \frac{E_2(\nu_{12} - \nu_{13}\nu_{32})}{Q}$$

$$C_{22} = \frac{E_2(1 - \nu_{13}\nu_{31})}{Q}$$

$$C_{13} = C_{31} = \frac{E_1(\nu_{31} - \nu_{21}\nu_{32})}{Q} = \frac{E_3(\nu_{13} - \nu_{12}\nu_{23})}{Q}$$

$$C_{33} = \frac{E_3(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{Q}$$

$$C_{23} = C_{32} = \frac{E_2(\nu_{32} - \nu_{12}\nu_{31})}{Q} = \frac{E_3(\nu_{23} - \nu_{21}\nu_{13})}{Q}$$

$$C_{44} = G_{23}$$

$$C_{55} = G_{13}$$

$$C_{66} = G_{12}$$

$$Q = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31} - 2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31}$$

Les constantes de souplesse :

$$S_{11} = \frac{1}{E_1}, \quad S_{22} = \frac{1}{E_2}, \quad S_{33} = \frac{1}{E_3},$$

$$S_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1}, \quad S_{13} = -\frac{\nu_{13}}{E_1}, \quad S_{23} = -\frac{\nu_{23}}{E_2},$$

$$S_{44} = \frac{1}{G_{23}}, \quad S_{55} = \frac{1}{G_{13}}, \quad S_{66} = \frac{1}{G_{12}}$$

2.1.4 Matériau transversalement isotropes (Unidirectionnels)

Un modèle de comportement est dit isotrope transverse lorsque les propriétés élastiques présentent une symétrie de révolution autour d'un axe. On distingue donc deux directions : la direction de l'axe, dite longitudinale, et toutes les directions perpendiculaires, dites transversales.

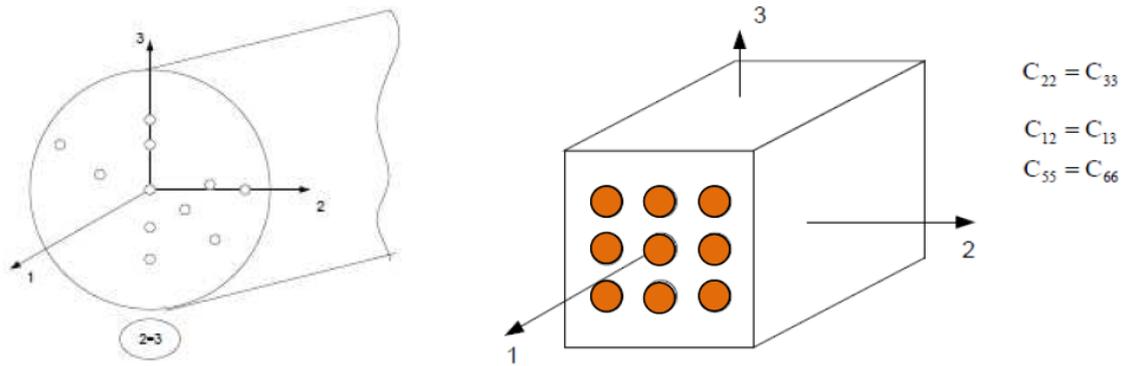


Figure 2.3 Exemple d'un matériau transversalement isotrope

La plupart des matériaux à fibres parallèles peuvent être modélisés de cette sorte, et notamment les plis unidirectionnels qui constituent les pièces stratifiées.

La matrice de rigidité s'écrit donc suivant :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22} - C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

La matrice de souplesse a la même forme. Les propriétés du matériau orthotrope à isotrope transverse sont déterminées par 5 constantes d'élasticité indépendantes.

Dans le comportement du matériau orthotrope :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{-\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{13}}{E_1} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_{23})}{E_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}$$

Les coefficients élastiques fondamentaux ($E_1, E_2, G_{23}, \nu_{12}, \nu_{23}$) sont indépendants et on a les relations suivantes :

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} \quad \text{et} \quad G_{23} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{23})}$$

Le plan (2,3) est isotrope

2.1.5 Matériau isotropes

Un matériau est isotrope si ses propriétés sont indépendantes du choix des axes de référence. Il n'existe alors pas de direction privilégiée, et la matrice de rigidité (ou souplesse) doit être invariante dans tout changement de bases orthonormées. Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est donc réduit à 2, et conduit à la matrice de rigidité :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{bmatrix}$$

La matrice de souplesse a la même forme. Généralement, les constantes de rigidité sont exprimées en introduisant les coefficients de Lamé λ et μ :

$$\begin{cases} C_{11} = \lambda + 2\mu \\ C_{12} = \lambda \end{cases}$$

Les coefficients élastiques fondamentaux (C_{11}, C_{12}) sont indépendants et on a la relation suivante :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

2.2 Comportement anisotrope 2D

2.2.1 Comportement d'un pli de composite unidirectionnel (UD)

2.2.1.1 Comportement par rapport aux axes naturels

Les stratifiés sont constitués de couches de matériaux composites unidirectionnels ou de composites à base de tissu. Généralement, les tissus sont constitués de fils unidirectionnels croisés à 90° : les uns dans le sens chaîne les autres dans le sens trame. Les directions principales (1,2) seront prises respectivement suivant la direction chaîne et la direction trame ; ces directions seront notées L et T.

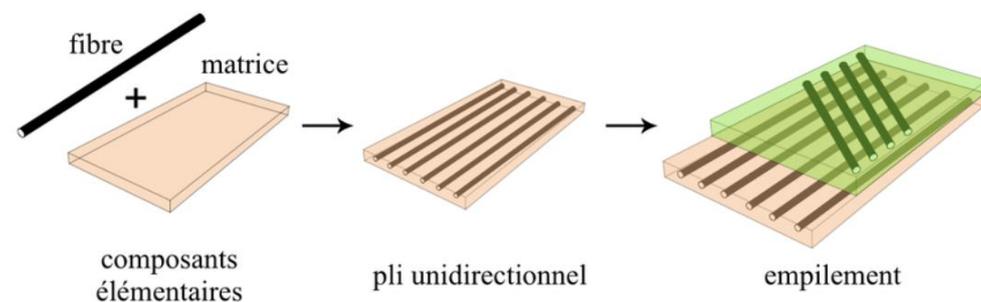


Figure 2.4 Couche d'un matériau composite unidirectionnel

Considérons un pli soumis à un état complet de contraintes dans le plan constitué par les axes naturels 1 et 2 (longitudinal et transversal).

- **Traction dans le sens chaîne** (longitudinal)

Dans un essai de traction suivant le sens chaîne, toutes les contraintes sont nulles, excepte la contrainte σ_1 :

$$\sigma_1 \neq 0, \quad \sigma_i = 0 \quad \text{si } i = 2, 3, \dots, 6.$$

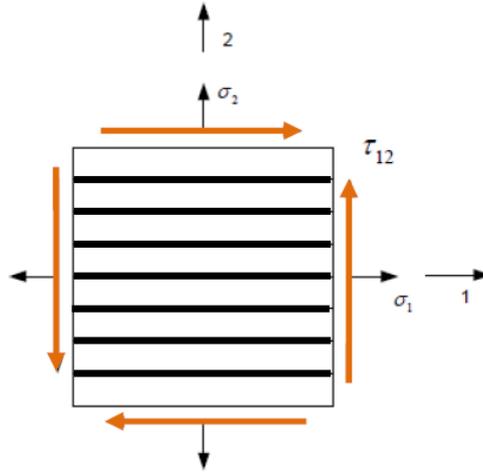


Figure 2.5 Pli UD soumis à un état plan de contrainte dans le plan (1,2)

2.2.1.2 Coefficients de raideur

Les relations contrainte-déformation sont :

- Loi de comportement :

$$\{\sigma\} = [Q]\{\varepsilon\}$$

D'où

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{12} = \frac{E_1\nu_{21}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{E_2\nu_{12}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad \text{et}$$

$$Q_{66} = G_{12}$$

Où la matrice Q est appelée matrice de rigidité matérielle réduite.

2.2.1.3 Coefficients de souplesse

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}}_{\{\varepsilon\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix}}_{[S]} \underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}}_{\{\sigma\}}$$

Pour un matériau orthotrope soumis à un état plan de contrainte, on obtient :

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}}_{\{\varepsilon\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}}_{[S]} \underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}}_{\{\sigma\}}$$

Où

$$S_{11} = \frac{1}{E_1}, \quad S_{22} = \frac{1}{E_2}, \quad S_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} \text{ et } S_{66} = \frac{1}{G_{12}}$$

Notons qu'il y a 5 coefficients de souplesse non nuls et 4 constantes élastiques fondamentales :

$$E_1, E_2, \nu_{12} \text{ et } G_{12}$$

Notez que la matrice contrainte-déformation ci-dessus est symétrique.

Le nombre de constantes élastiques distinctes est de cinq :

- Deux modules d'élasticité : E_1 et E_2 ,
- Deux coefficients de Poisson : ν_{12} et ν_{21} , et
- Un module de cisaillement : G_{12} .

En fait, il n'y a que quatre constantes élastiques indépendantes :

E_1, E_2, G_{12} et ν_{21} (ou ν_{12}). La cinquième constante élastique peut être obtenue à partir des autres en utilisant la relation de symétrie :

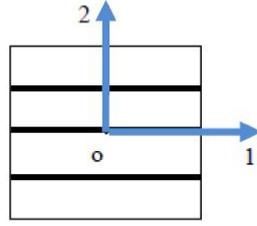
$$\nu_{12} = \nu_{21} \frac{E_1}{E_2}$$

2.2.2 Comportement d'un pli (UD) par rapport à un système d'axes quelconque

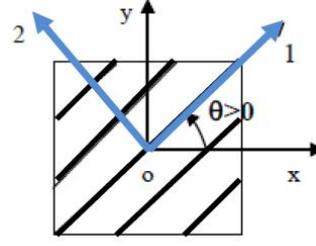
□ Transformation de contraintes

La plupart des composites renforcés de fibres sont fabriqués sous la forme d'un ensemble uniaxial de fibres entourées d'une matrice polymère. Un stratifié est formé en empilant des couches d'au moins deux stratifiés qui peuvent avoir des orientations de fibres différentes.

Considérons un pli (UD) soumis à un état plan de contrainte $(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \tau_{12})$ dont les directions des axes x et y font un angle (θ) quelconque avec les directions des axes naturels du composite.



Matériau orthotrope
(système d'axes naturels)



Matériau composite dont la direction
des fibres n'est pas 0 ni 90 degrés

Figure 2.6 Plaque monocouche renforcée de fibres

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C^2 & S^2 & 2CS \\ S^2 & C^2 & -2CS \\ -CS & CS & (C^2 - S^2) \end{bmatrix}}_{[T(\theta)]} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [T(\theta)] \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

Où

$$\bar{Q}_{11}(\theta) = C_{11}c^4 + C_{22}s^4 + 2(C_{12} + 2C_{66})c^2s^2$$

$$\bar{Q}_{22}(\theta) = C_{11}s^4 + C_{22}c^4 + 2(C_{12} + 2C_{66})c^2s^2$$

$$\bar{Q}_{12}(\theta) = C_{12}(c^4 + s^4) + (C_{11} + C_{12} - 4C_{66})c^2s^2$$

$$\bar{Q}_{16}(\theta) = (C_{11} - C_{12} - 2C_{66})c^3s - (C_{22} - C_{12} - 2C_{66})cs^3$$

$$\bar{Q}_{26}(\theta) = (C_{11} - C_{12} - 2C_{66})cs^3 - (C_{22} - C_{12} - 2C_{66})c^3s$$

$$\bar{Q}_{66}(\theta) = (C_{11} + C_{22} - 2C_{12} - 2C_{66})c^2s^2 + C_{66}(c^4 + s^4)$$

Dans l'équation précédente, $c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$. Les \bar{Q}_{ij} sont les constantes élastiques orthotropes de la plaque dans le système de coordonnées α, β, γ comme indiqué dans l'équation, où les axes orthotropes de le matériau coïncide avec les trois axes de coordonnées orthogonaux.

Les Q_{ij} sont les constantes élastiques transformées dans le système de coordonnées x, y, z et représentent les constantes élastiques d'une couche d'angle typique.

Comportement et coefficients de raideur en fonction des constantes d'élasticité

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$E_1 = \frac{E_x}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad E_2 = \frac{E_y}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$\bar{Q}_{11}(\theta) = c^4 E_1 + s^4 E_2 + 2c^2 s^2 (\nu_{12} E_1 + 2G_{12})$$

$$\bar{Q}_{22}(\theta) = s^4 E_1 + c^4 E_2 + 2c^2 s^2 (\nu_{12} E_1 + 2G_{12})$$

$$\bar{Q}_{12}(\theta) = (c^4 + s^4) \nu_{12} E_1 + c^2 s^2 (E_1 + E_2 - 4G_{12})$$

$$\bar{Q}_{16}(\theta) = -cs^3 E_2 + c^3 s E_1 - cs(c^2 - s^2)(\nu_{12} E_1 + 2G_{12})$$

$$\bar{Q}_{26}(\theta) = -c^3 s E_2 + cs^3 E_1 + cs(c^2 - s^2)(\nu_{12} E_1 + 2G_{12})$$

$$\bar{Q}_{66}(\theta) = c^2 s^2 (E_1 + E_2 - 2\nu_{12} E_1) + (c^2 - s^2)^2 G_{12}$$

2.2.3 Le comportement thermomécanique du pli unidirectionnel (UD)

Sous les effets conjugués de contraintes et de variation de température, les déformations globales (thermomécaniques) du pli UD sont obtenues au moyen d'une loi de comportement modifiée.

✓ Le comportement thermomécanique du pli UD dans les directions d'orthotrope

Pour un pli UD on utilise le comportement isotrope transverse limité au comportement plan dans le plan (1, 2), avec les effets de la variation de la température sur les contraintes et les déformations.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \Delta T \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Avec : $\Delta T = T_1 - T_0$

α_x : Coefficient de dilatation linéique longitudinal.

α_y : Coefficient de dilatation linéique transversal.

2.2.4 Le comportement thermomécanique du pli UD dans une direction quelconque

La relation de comportement thermomécanique peut ainsi être exprimée sous forme technique dans les axes (x, y) faisant l'angle (θ) avec les axes (1, 2).

On y a fait apparaître les modules élastiques, coefficients de Poisson et coefficients de dilatation thermique pour chaque direction.

- Comportement thermomécanique et coefficients de souplesse

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & -\frac{n_{xy,x}}{G_{xy}} \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{n_{xy,y}}{G_{xy}} \\ -\frac{n_{xy,x}}{E_x} & -\frac{n_{xy,y}}{E_y} & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \Delta T \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix}$$

Où $n_{xy,x}$ et $n_{xy,y}$: sont des coefficients de couplage analogue aux un coefficients de Poisson, qui relie respectivement entre la déformation longitudinale ε_{xx} suivant la direction x a la déformation en cisaillement γ_{xy} et entre la déformation longitudinale ε_{yy} suivant la direction y a la déformation en cisaillement γ_{xy} par les relations :

$$\varepsilon_{xx} = -n_{xy,x} \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}} = -n_{xy,x} \gamma_{xy}$$

$$\varepsilon_{yy} = -n_{xy,y} \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}} = -n_{xy,y} \gamma_{xy}$$

$C = \cos\theta$ et $S = \sin\theta$

$$E_x(\theta) = \frac{1}{\frac{C^4}{E_1} + \frac{S^4}{E_2} + C^2 S^2 \left(\frac{1}{G_{12}} - 2 \frac{\nu_{21}}{E_2} \right)}$$

$$E_y(\theta) = \frac{1}{\frac{S^4}{E_1} + \frac{C^4}{E_2} + C^2 S^2 \left(\frac{1}{G_{12}} - 2 \frac{\nu_{21}}{E_2} \right)}$$

$$G_{xy}(\theta) = \frac{1}{4C^2 S^2 \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + 2 \frac{\nu_{21}}{E_2} \right) + \frac{(C^2 - S^2)^2}{G_{12}}}$$

$$\frac{v_{yx}}{E_y}(\theta) = \frac{v_{21}}{E_2}(C^4 + S^4) - C^2 S^2 \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{1}{G_{12}} \right)$$

$$\frac{n_{xy,x}}{G_{xy}}(\theta) = -2CS \left(\frac{C^2}{E_1} - \frac{S^2}{E_2} + (C^2 - S^2) \left(\frac{v_{21}}{E_2} - \frac{1}{2G_{12}} \right) \right)$$

$$\frac{n_{xy,y}}{G_{xy}}(\theta) = -2CS \left(\frac{S^2}{E_1} - \frac{C^2}{E_2} - (C^2 - S^2) \left(\frac{v_{21}}{E_2} - \frac{1}{2G_{12}} \right) \right)$$

Avec :

$$\alpha_x = C^2 \alpha_1 + S^2 \alpha_2$$

$$\alpha_y = S^2 \alpha_1 + C^2 \alpha_2$$

$$\alpha_{xy} = 2CS(\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \Delta T \begin{Bmatrix} \bar{\alpha E}_x \\ \bar{\alpha E}_y \\ \bar{\alpha G}_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\bar{E}_L = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad , \quad \bar{E}_T = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$\bar{\alpha E}_x = C^2 \bar{E}_L(\alpha_1 + \nu_{21}\alpha_2) + S^2 \bar{E}_T(\nu_{21}\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$\bar{\alpha E}_y = S^2 \bar{E}_L(\alpha_1 + \nu_{21}\alpha_2) + C^2 \bar{E}_T(\nu_{21}\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$\bar{\alpha G}_{xy} = 2CS[\bar{E}_T(\nu_{21}\alpha_1 + \alpha_2) - \bar{E}_L(\alpha_1 + \nu_{21}\alpha_2)]$$

CHAPITRE 3

Calculs d'homogénéisations des composites

L'homogénéisation des composites est un processus complexe qui vise à calculer les propriétés effectives d'un matériau composite en considérant l'ensemble de la matrice et du renfort. Voici quelques points clés issus des sources fournies :

➤ *Nature des composites :*

Les composites sont composés d'une matrice et d'un renfort, et l'ajout du renfort améliore les propriétés mécaniques de la matrice renforcée. Le calcul d'homogénéisation permet de déterminer les constants élastiques d'un composite, en considérant la fraction volumique et massique, ainsi que les variations des propriétés mécaniques selon la direction des fibres.

➤ *Méthodes de calcul :*

Pour homogénéiser un matériau composite, différentes méthodes peuvent être utilisées, telles que le schéma du cluster ou la résolution de problèmes microscopiques et macroscopiques couplés. Ces méthodes impliquent la résolution de problèmes non linéaires, parfois sur une seule période de base, ce qui peut nécessiter des algorithmes spécifiques pour réduire les coûts de simulation.

➤ *Applications pratiques :*

L'homogénéisation des composites est essentielle pour estimer les comportements équivalents des matériaux envisagés. Elle repose sur la résolution de problèmes cellulaires pour construire le comportement homogène équivalent du composite, en prenant en compte la périodicité des variations dans le matériau.

En résumé, le calcul d'homogénéisation des composites est une étape cruciale pour déterminer les propriétés effectives de ces matériaux complexes, en prenant en compte la nature hétérogène et anisotrope des composites.

3.1. Homogénéisation pour le calcul des modules

Afin d'estimer le comportement mécanique équivalent du matériau composite en tenant compte de son hétérogénéité apportée par le mélange des constituants élémentaires, un inventaire des méthodes d'homogénéisation les plus utilisées est maintenant proposé.

3.1.1. Les bornes de Hashin et Hill des modules d'élasticité d'un composite unidirectionnel

Le problème de la détermination des modules d'élasticité d'un composite unidirectionnel consiste à rechercher les expressions de ces modules en fonction des caractéristiques mécaniques et géométriques des constituants : modules d'élasticité de la matrice et des fibres, fraction volumique de fibres, longueur des fibres, géométrie et arrangement des fibres. La détermination de bornes sur les modules d'élasticité utilise les théorèmes variationnels de l'énergie. Parmi les divers travaux effectués à ce propos, les travaux de Z. Hashin et R. Hill, effectués dans le cas de fibres de différents diamètres, réparties au hasard, avec une fraction volumique donnée, sont à mentionner. Dans ce cas, les limites sur les cinq modules indépendants sont données par les relations. Précisons qu'ici $\mathbf{1}$ (\mathbf{x}) est la direction selon la longueur des fibres tandis que $\mathbf{2}$ (\mathbf{y}) et $\mathbf{3}$ (\mathbf{z}) sont les directions dans le plan transverse.

$$K_m + \frac{V_f}{\frac{1}{K_f - K_m} + \frac{V_f}{K_m - G_m}} \leq K_1 \leq K_f + \frac{V_m}{\frac{1}{K_m - K_f} + \frac{V_m}{K_f - G_f}} \quad (3.1)$$

$$G_m + \frac{V_f}{\frac{1}{G_f - G_m} + V_m \left(\frac{K_m + 2G_m}{2G_m(K_m + G_m)} \right)} \leq G_{23} \leq G_f + \frac{V_m}{\frac{1}{G_m - G_f} + V_f \left(\frac{K_f + 2G_f}{2G_f(K_f + G_f)} \right)} \quad (3.2)$$

$$G_m + \frac{V_f}{\frac{1}{G_f - G_m} + \frac{V_m}{2G_m}} \leq G_{12} \leq G_f + \frac{V_m}{\frac{1}{G_m - G_f} + \frac{V_f}{2G_f}} \quad (3.3)$$

$$\frac{V_f V_m}{\frac{V_f}{K_m} + \frac{V_m}{K_f} + \frac{1}{G_m}} \leq \frac{E_1 - V_f E_f - V_m E_m}{4(\nu_f - \nu_m)^2} \leq \frac{V_f V_m}{\frac{V_m}{K_f} + \frac{V_f}{K_m} + \frac{1}{G_f}} \quad (3.4)$$

$$\frac{V_f V_m}{\frac{V_f}{K_m} + \frac{V_m}{K_f} + \frac{1}{G_m}} \leq \frac{\nu_{12} - V_f \nu_f - V_m \nu_m}{(\nu_f - \nu_m) \left(\frac{1}{K_m} - \frac{1}{K_f} \right)} \leq \frac{V_f V_m}{\frac{V_m}{K_f} + \frac{V_f}{K_m} + \frac{1}{G_f}} \quad (3.5)$$

Les relations donnent un encadrement respectivement pour le module de compression latérale du composite K_1 , le module de cisaillement transversal G_{23} et longitudinal G_{12} . Les dernières relations sont des encadrements pour le module d'Young longitudinal E_1 et pour le coefficient de Poisson longitudinal ν_{12} . Dans toutes les relations, V_f et V_m représentent respectivement la fraction volumique de fibres et de la matrice.

$$K_i = \frac{E_i}{(1 - 2\nu_i)(1 + \nu_i)} \quad (3.6)$$

$$G_i = \frac{E_i}{2(1 + \nu_i)}$$

Avec : $i = f, m$

Sont respectivement le module de compression latérale, le module de cisaillement de la fibre et de la matrice.

Un premier inconvénient de cette méthode réside dans le fait qu'elle ne donne aucune information concernant le module d'Young transversal E_2 et le coefficient de Poisson transversal ν_{23} . Afin de compléter ce manque d'information, les relations analytiques suivantes peuvent être employées pour calculer ces deux modules :

$$E_2 = \frac{2}{\frac{1}{2K_1} + \frac{1}{2G_{23}} + 2\frac{\nu_{12}^2}{E_1}} \quad (3.7)$$

$$\nu_{23} = \frac{E_2}{2G_{23}} - 1 \quad (3.8)$$

Celles-ci sont obtenues en considérant dans la loi de Hooke pour un matériau isotrope transverse un champ connu de contraintes afin de simuler des essais de traction uniaxiale, de cisaillement et de compression latérale sans déformation longitudinale.

Un deuxième inconvénient de cette méthode réside dans l'impossibilité de prendre en compte le comportement isotrope transverse de la fibre (cas de la fibre de carbone par exemple) car lorsque les relations ont été déterminées, Hashin et Hill ont fait l'hypothèse de fibres isotropes.

3.1.2. Modèle de Halpin-Tsai

Le modèle de Halpin-Tsai ne prend pas en considération la position spécifique des fibres dans la matrice.

Les principales conclusions à tirer sont :

- Le comportement de la matrice et des fibres est élastique linéaire isotrope.
- Le modèle exprime directement les propriétés effectives du composite en fonction des propriétés des constituants (matrice et fibres) et de la fraction volumique des fibres, sans tenir compte de leur position spécifique dans la matrice.

- Le modèle ne prend pas en compte les effets de l'orientation et de la distribution spatiale des fibres dans la matrice. Il considère plutôt une distribution statistique aléatoire des fibres.

Les équations générales de Halpin-Tsai permettent de prédire les modules d'un matériau composite unidirectionnel en intégrant des informations spatiales :

$$M_c = M_m \left(\frac{1 + \xi \eta V_f}{1 - \eta V_f} \right) \text{ ou } \eta = \frac{\frac{M_f}{M_m} - 1}{\frac{M_f}{M_m} + \xi} \quad (3.9)$$

M_c : représente le module considéré du composite homogénéisé : E_y , G_{xy} ou ν_{yz}

M_f : est le module correspondant aux fibres : E_f , G_f ou ν_f

M_m : est le module correspondant de la matrice : E_m , G_m ou ν_m

Le facteur ξ (X_i) permet de quantifier le renfort. Il dépend de la géométrie des fibres, de leur arrangement et du module considéré. La grandeur V_f représente la fraction volumique de fibres.

La difficulté d'utilisation de la relation (9) réside dans la détermination des valeurs appropriées de ξ .

Halpin et Tsai l'ont déterminé dans le cas d'un composite unidirectionnel avec des fibres cylindriques réparties selon un arrangement carré et pour $V_f = 0,55$: $\xi = 2$ pour le calcul de E_y et $\xi = 1$ pour le calcul de G_{12} .

➤ **Module d'élasticité transversal E_2**

$$E_2 = E_m \left(\frac{1 + \xi \eta V_f}{1 - \eta V_f} \right) \text{ où } \eta = \frac{\frac{E_{f2}}{E_m} - 1}{\frac{E_{f2}}{E_m} + \xi} \quad (3.10)$$

ξ : Coefficient de renfort; $\xi = 2$ pour $V_f = 0,55$

et $\xi = 2 + 40V_f^{10}$ pour $V_f \neq 0,55$

➤ **Module de cisaillement**

Le module de glissement ou de Coulomb

$$G_{12} = G_m \left(\frac{1 + \xi \eta V_f}{1 - \eta V_f} \right) \text{ ou } \eta = \frac{\frac{G_{f12}}{G_m} - 1}{\frac{G_{f12}}{G_m} + \xi} \quad (3.11)$$

ξ : Coefficient de renfort; $\xi = 1$ pour $V_f = 0,55$

et $\xi = 1 + 40V_f^{10}$ pour $V_f \neq 0,55$

3.1.3. Modèle de Halpin-Tsai modifié

Neilson a modifié l'équation de Halpin-Tsai en incluant la teneur volumique maximale en fibres ϕ_{max} par exemple l'équation Eq. (9) transformé en Eq. (12) :

$$M_c = M_m \left(\frac{1 + \xi \eta V_f}{1 - \eta V_f} \right) \text{ ou } \eta = \frac{\frac{M_f}{M_m} - 1}{\frac{M_f}{M_m} + \xi} \quad (3.9)$$

$$\frac{P}{P_m} = \left(\frac{1 + \xi \eta \psi V_f}{1 - \eta \psi V_f} \right) \quad (3.12)$$

$$\eta = \frac{\frac{P_f}{P_m} - 1}{\frac{P_f}{P_m} + \xi} \quad \text{et} \quad \psi = 1 + \frac{1 - \phi_{max}}{\phi_{max}^2} V_f \quad (3.13)$$

➤ **Module d'élasticité transversal E_2**

$$E_2 = E_m \left(\frac{1 + \xi \eta \psi V_f}{1 - \eta \psi V_f} \right) \text{ ou } \eta = \frac{\frac{E_{fT}}{E_m} - 1}{\frac{E_{fT}}{E_m} + \xi} \quad (3.14)$$

Où ϕ_{max} est donné par 0,785 pour le réseau carré de fibres, 0,907 pour l'arrangement hexagonal et 0,82 pour l'arrangement aléatoire.

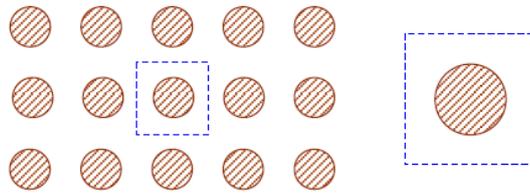


Figure 3.1 Arrangement carré

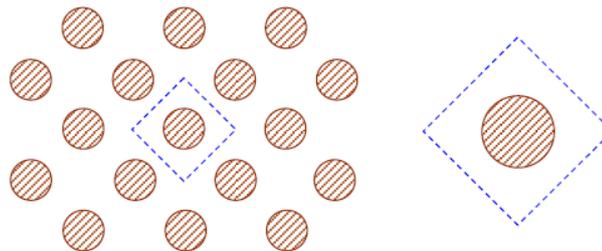


Figure 3.2 Arrangement carré décalé

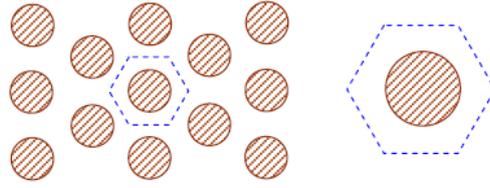


Figure 3.3 Arrangement hexagonal

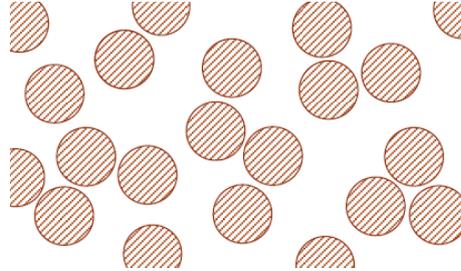


Figure 3.4 Représentation schématique de l'arrangement réel des fibres (aléatoire)

➤ **Module de cisaillement (coulomb)**

$$G_{12} = G_m \left(\frac{1 + \xi \eta V_f}{1 - \eta \psi V_f} \right) \text{ ou } \eta = \frac{\frac{G_{fLT}}{G_m} - 1}{\frac{G_{fLT}}{G_m} + \xi} \quad (3.15)$$

3.1.4. Modèle de Tsai-Hahn

Le modèle de Tsai-Hahn ne prend pas en considération la position spécifique des fibres dans la matrice. Ce modèle se concentre principalement sur l'interaction entre les fibres et la matrice pour évaluer les propriétés mécaniques des composites, sans inclure la position précise des fibres dans la matrice dans son analyse.

$$\frac{1}{E_2} = \frac{1}{V_f + \eta_2 V_m} \left(\frac{V_f}{E_f} + \frac{\eta_2 V_m}{E_m} \right) \quad (3.16)$$

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{1}{V_f + \eta_2 V_m} \left(\frac{V_f}{G_{fLT}} + \frac{\eta_{12} V_m}{G_m} \right) \quad (3.17)$$

η_2 (Eta) : taux de répartition de contrainte entre les fibres et la matrice

$$\eta_2 = \frac{\sigma_m}{\sigma_f} \quad (3.18)$$

$$\eta_2 = \eta_{12}$$

3.1.5. Modèle de Cox

Le modèle de Cox permet de déterminer certains modules d'un matériau composite en tenant compte du rayon r de la fibre et de la distance R entre les fibres centre à centre :

$$M_c = M_f V_f \left(1 - \frac{\tanh\left(\frac{\beta L}{2}\right)}{\frac{\beta L}{2}} \right) + M_m V_m \quad (3.19)$$

Avec

$$\beta = \left[\frac{2\pi G_m}{M_f A_f \ln\left(\frac{R}{r}\right)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.20)$$

M_c : représente le module considéré du composite homogénéisé : E_2 , G_{12} ou ν_{23}

M_f : est le module correspondant aux fibres : E_f , G_f ou ν_f

M_m : est le module correspondant de la matrice : E_m , G_m ou ν_m

G_m : module de cisaillement de la matrice

A_f : L'aire de la section droite de la fibre

L : longueur de la fibre

3.1.6. Modèle de Hopkins et Chamis

Le modèle de Hopkins-Chamis prend en considération la position des fibres dans la matrice. Ce modèle propose une approche qui tient compte de la répartition spatiale des fibres et de la matrice pour évaluer les propriétés mécaniques des composites. Ainsi, le modèle de Hopkins-Chamis intègre la position des fibres dans la matrice pour une analyse plus précise des comportements mécaniques des matériaux composites.

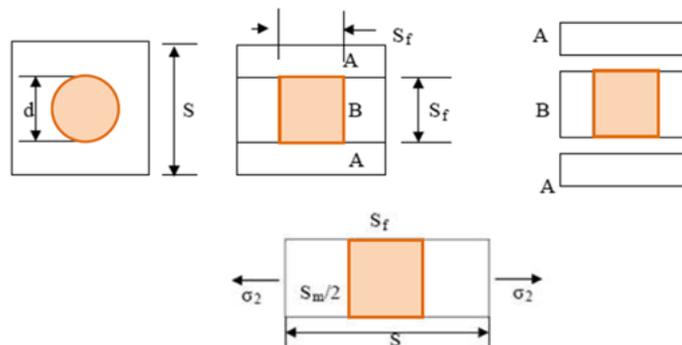


Figure 3.5 Modèle de Hopkins-Chamis

$$\frac{\pi d^2}{4} = S_f^2, \quad S_f = d \sqrt{\frac{\pi}{4}}$$

S_f : aire du cercle=aire du carre

La teneur en volume des fibres est :

$$V_f = \frac{A_f}{A_c} = \frac{S_f^2}{S^2} \Rightarrow S = \sqrt{\frac{\pi d^2}{4V_f}} = d \sqrt{\frac{\pi}{4V_f}} \quad (3.21)$$

Considérons le sous-élément B qui est soumis à une contrainte de traction transversale σ_2 :

$$(V_f)_{B2} = \frac{S_f}{S} = \frac{d \sqrt{\frac{\pi}{4}}}{d \sqrt{\frac{\pi}{4V_f}}} = \sqrt{V_f} \quad (3.22)$$

$$(V_m)_{B2} = \frac{S_m}{S} = \frac{S - S_f}{S} = 1 - \frac{d \sqrt{\frac{\pi}{4}}}{d \sqrt{\frac{\pi}{4V_f}}} = 1 - \sqrt{V_f} \quad (3.23)$$

Le module d'élasticité suivant la direction 2 du blob B est :

$$\frac{1}{E_{B2}} = \frac{1}{E_{f2}} \left(\frac{S_f}{S} \right) + \frac{1}{E_m} \left(\frac{S_m}{S} \right) \quad (3.24)$$

$$\frac{1}{E_{B2}} = \frac{1}{E_{f2}} \sqrt{V_f} + \frac{1}{E_m} (1 - \sqrt{V_f}) = \frac{1 - \sqrt{V_f} \left(1 - \frac{E_m}{E_{f2}} \right)}{E_m} \quad (3.25)$$

$$E_{B2} = \frac{E_m}{1 - \sqrt{V_f} \left(1 - \frac{E_m}{E_{f2}} \right)} \quad (3.26)$$

Considérons l'ensemble des sous éléments A et B soumis à σ_2 :

$$E_2 = E_{B2} \left(\frac{A_B}{A_c} \right) + E_m \left(\frac{A_m}{A_c} \right) = E_{B2} \left(\frac{S_f}{S} \right) + E_m \left(\frac{S_m}{S} \right) \quad (3.27)$$

$$E_2 = E_m \left[(1 - \sqrt{V_f}) + \frac{\sqrt{V_f}}{1 - \sqrt{V_f} \left(1 - \frac{E_m}{E_{f2}} \right)} \right] \quad (3.28)$$

Par le même modèle de Chamis :

$$G_{12} = G_m \left[(1 - \sqrt{V_f}) + \frac{\sqrt{V_f}}{1 - \sqrt{V_f} \left(1 - \frac{G_m}{G_{f12}}\right)} \right] \quad (3.29)$$

$$G_{23} = G_m \left[(1 - \sqrt{V_f}) + \frac{\sqrt{V_f}}{1 - \sqrt{V_f} \left(1 - \frac{G_m}{G_{f23}}\right)} \right] \quad (3.30)$$

$$\nu_{23} = \frac{E_2}{2G_{23}} - 1 \quad (3.31)$$

3.1.7. Modèle de Hopkins et Chamis avec interphase

On peut modifier le VER (volume élémentaire représentatif) de la figure pour prendre en compte la présence d'une interphase autour de la fibre. On obtient alors les expressions ci-dessous pour les constantes élastiques :

$$E_1 = E_m(1 - k_f) + k_f \left[\left(1 - \left(\frac{D}{D_0}\right)^2\right) E_i + E_f \left(\frac{D}{D_0}\right)^2 \right] \quad (3.32)$$

$$\nu_{12} = \nu_m(1 - k_f) + k_f \left[\left(1 - \left(\frac{D}{D_0}\right)^2\right) \nu_i + \nu_f \left(\frac{D}{D_0}\right)^2 \right] \quad (3.33)$$

$$E_2 = E_m \left[(1 - k_f) + \frac{\sqrt{k_f} \left(1 - \frac{D}{D_0}\right)}{1 - \sqrt{k_f} \left(1 - \frac{E_m}{E_{f2}}\right)} + \frac{\sqrt{k_f} \left(\frac{D}{D_0}\right)}{1 - \left(1 - \frac{D}{D_0}\right) \left(\frac{E_m}{E_{f2}}\right) - \left(\frac{D}{D_0} \cdot \frac{E_m}{E_{f2}}\right)} \right] \quad (3.34)$$

$$G_{12} = G_m \left[(1 - k_f) + \frac{\sqrt{k_f} \left(1 - \frac{D}{D_0}\right)}{1 - \sqrt{k_f} \left(1 - \frac{G_m}{G_{f12}}\right)} + \frac{\sqrt{k_f} \left(\frac{D}{D_0}\right)}{1 - \left(1 - \frac{D}{D_0}\right) \left(\frac{G_m}{G_{f12}}\right) - \left(\frac{D}{D_0} \cdot \frac{G_m}{G_{f12}}\right)} \right] \quad (3.35)$$

Où $D_0 - D$ et E_i sont respectivement l'épaisseur et le module de l'interphase. Ces expressions ont été établies initialement pour des composites fibres de métal-matrice céramique pour lesquels l'interphase se forme dans le métal par oxydation. k_f représente alors la fraction volumique de fibre avant la formation de l'interphase. Après la formation de l'interphase, il s'agit en fait de la fraction volumique de l'ensemble *fibre + interphase*. Pour utiliser ces équations pour les composites fibres de verre-matrice polymère où l'interphase se forme dans le polymère, il faut adapter les équations en calculant k_f de la façon suivante :

$$k_f = V_f \left(\frac{D_0}{D} \right)^2 \quad (3.36)$$

3.1.8. Modèle de Chamis

Le modèle de Chamis est obtenu en ne retenant que la contribution de la partie B dans le VER de la figure. On obtient alors les équations pour le module d'Young transverse et le module de cisaillement :

$$E_2 = \frac{E_m}{1 - \sqrt{V_f} \left(\frac{1 - E_m}{E_f} \right)} \quad (3.37)$$

3.1.9. Tsai avec modèle de contiguïté

Dans la fabrication de matériaux composites fibreux, les fibres sont souvent disposées au hasard plutôt que d'être dans une disposition ordinaire, ce caractère aléatoire est beaucoup plus typique pour les fibres de petit diamètre. Ainsi l'analyse concernant les modules de matériaux composites à agencements réguliers doit être modifiée pour tenir compte du fait que les fibres sont contiguës. Basé sur l'espacement et la disposition des fibres. Dans ce cas les fibres se touchent plutôt pour être complètement entourées par la matrice. Si c représente le degré de contiguïté dans la formule Eq.38, alors $c = 0$ correspond à aucune contiguïté (fibres isolées) et $c = 1$ correspond à une contiguïté parfaite (toutes les fibres sont en contact). Naturellement avec des fractions volumiques importantes de fibres, c devrait approcher $c = 1$.

$$E_2 = A^*[(1 - c)B^* + cC^*] \quad (3.38)$$

Avec les constantes A^* , B^* et C^* :

$$A^* = 2[1 - \nu_f + (\nu_f - \nu_m)V_m] \quad (3.39)$$

$$B^* = \frac{K_f(2K_m + G_m) + G_m(K_f - K_m)V_m}{(2K_m + G_m) + 2(K_f - K_m)V_m} \quad (3.40)$$

$$C^* = \frac{K_f(2K_m + G_f) + G_f(K_m - K_f)V_m}{(2K_m + G_f) + 2(K_m - K_f)V_m} \quad (3.41)$$

$$K_f = \frac{E_f 2}{2(1 - \nu_f)}, \quad K_m = \frac{E_m}{2(1 - \nu_m)}, \quad G_f = \frac{E_f 2}{2(1 + \nu_f)}, \quad G_m = \frac{E_f 2}{2(1 + \nu_f)} \quad (3.42)$$

3.1.10. Relations du coefficient de Poisson ν_{23} avec les coefficients de souplesse et de rigidité

On peut utiliser l'équations :

$$\nu_{23} = -\frac{S_{23}}{S_{22}}, \quad \nu_{23} = -\frac{C_{12}^2 - C_{11}C_{23}}{C_{12}^2 - C_{11}C_{22}} \quad (3.43)$$

S_{23}, S_{22} : coefficients de la matrice de souplesse

C_{11}, C_{22}, C_{23} et C_{12} : coefficients de la matrice de rigidité

Relation du coefficient de Poisson et les modules de l'ingénieur, (l'équations utilisées dans le calcul analytique) :

$$\nu_{23} = \frac{E_2}{2G_{23}} - 1 \quad (3.44)$$

$$K_i = \frac{E_i}{2(1 - 2\nu_i)(1 + \nu_i)} \quad \text{avec } i = f, m \quad (3.45)$$

$$G_{23} = \frac{1}{\left(\frac{2}{E_2} - \frac{1}{2K_1} - 2\frac{\nu_{12}^2}{E_1}\right)} - 1 \quad (3.46)$$

$$K_1 = K_m + \frac{V_f}{\left(\frac{1}{K_f - K_m + \frac{1}{3}(G_f - G_m)} + \frac{1 - V_f}{K_m + \frac{4}{3}G_m}\right)} \quad (3.47)$$

3.1.11. Relation de R. L. FOYE

La relation de R. L. FOYE pour le coefficient de Poisson transverse ν_{23} :

$$\nu_{23} = \nu_f V_f + \nu_m V_m \left[\frac{1 + \nu_m - \nu_{12} \left(\frac{E_m}{E_1}\right)}{1 - \nu_m^2 + \nu_m \nu_{12} \left(\frac{E_m}{E_1}\right)} \right] \quad (3.48)$$

3.1.12. Solutions exactes

La recherche de solutions exactes s'effectue, dans le cas d'arrangements particuliers de fibres (cellule élémentaire cylindrique soumise à une traction).

r_f : rayon de la fibre cylindrique.

r_m : rayon de la zone de la matrice.

Les rayons sont reliés à la fraction volumique V_f de fibre par la relation :

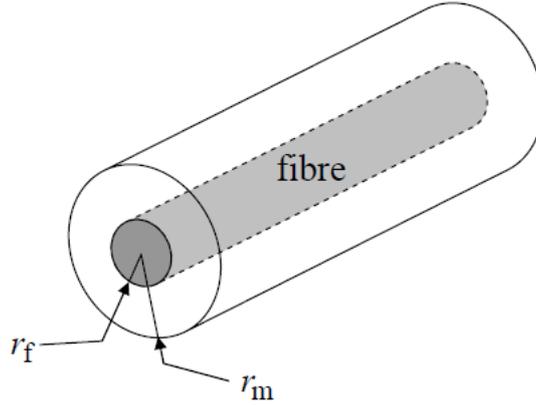


Figure 3.6 cellule élémentaire cylindrique

$$V_f = \frac{r_f^2}{r_m^2} \quad (3.49)$$

$$K_i = \frac{E_i}{2(1-2\nu_i)(1+\nu_i)} \quad \text{avec } i = f, m \quad (3.50)$$

➤ **Module longitudinal :**

$$E_1 = E_f V_f + E_m (1 - V_f) + \frac{4(\nu_f - \nu_m)^2 V_f (1 - V_f)}{\frac{V_f}{K_m} + \frac{1 - V_f}{K_f} + \frac{1}{G_m}} \quad (3.51)$$

➤ **Coefficient de Poisson ν_{23} :**

$$\nu_{23} = \nu_f V_f + \nu_m V_m + \left[\frac{(\nu_f - \nu_m) \left(\frac{1}{K_m} - \frac{1}{K_f} \right) V_f (1 - V_f)}{\frac{V_f}{K_m} + \frac{1 - V_f}{K_f} + \frac{1}{G_m}} \right] \quad (3.52)$$

➤ **Module de cisaillement longitudinal :**

$$G_{12} = G_m \frac{G_f (1 + V_f) + G_m (1 - V_f)}{G_f (1 - V_f) + G_m (1 + V_f)} \quad (3.53)$$

➤ **Module de compression latérale :**

$$K_1 = K_m + \frac{V_f}{\frac{1}{K_f - K_m + \frac{1}{3}(G_f - G_m)} + \frac{1 - V_f}{K_m + \frac{4}{3}G_m}} \quad (3.54)$$

➤ **Module de cisaillement transversal G_{23} :**

$$A \left(\frac{G_{23}}{G_m} \right)^2 + 2B \left(\frac{G_{23}}{G_m} \right) + C = 0 \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} A = & 3V_f(1 - V_f)^2 \left(\frac{G_f}{G_m} - 1 \right) \left(\frac{G_f}{G_m} + \eta_f \right) \\ & + \left[\frac{G_f}{G_m} \eta_m + \eta_f \eta_m - \left(\frac{G_f}{G_m} \eta_m - \eta_f \right) V_f^3 \right] \left[V_f \eta_m \left(\frac{G_f}{G_m} - 1 \right) \right. \\ & \left. - \left(\frac{G_f}{G_m} \eta_m + 1 \right) \right] \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} B = & -3V_f(1 - V_f)^2 \left(\frac{G_f}{G_m} - 1 \right) \left(\frac{G_f}{G_m} + \eta_f \right) \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{G_f}{G_m} \eta_m + \left(\frac{G_f}{G_m} - 1 \right) V_f + 1 \right] \left[(\eta_m - 1) \left(\frac{G_f}{G_m} - \eta_f \right) - 2 \left(\frac{G_f}{G_m} \eta_m - \eta_f \right) V_f^3 \right] \\ & + \frac{V_f}{2} (\eta_m + 1) \left(\frac{G_f}{G_m} - 1 \right) \left[\frac{G_f}{G_m} + \eta_f - \left(\frac{G_f}{G_m} \eta_m - \eta_f \right) V_f^3 \right] \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} C = & 3V_f(1 - V_f)^2 \left(\frac{G_f}{G_m} - 1 \right) \left(\frac{G_f}{G_m} + \eta_f \right) \\ & + \left[\frac{G_f}{G_m} \eta_m + \left(\frac{G_f}{G_m} - 1 \right) V_f + 1 \right] \left[\frac{G_f}{G_m} + \eta_f - \left(\frac{G_f}{G_m} \eta_m - \eta_f \right) V_f^3 \right] \end{aligned} \quad (3.58)$$

Avec :

$$\eta_m = 3 - 4\nu_m, \quad \eta_f = 3 - 4\nu_f \quad (3.59)$$

$$K^* = \frac{K_m(K_f + G_m)V_m + K_f(K_f + G_m)V_f}{(K_f + G_m)V_m + (K_f + G_m)V_f} \quad (3.60)$$

Avec :

$$K_i = \frac{E_i}{2(1 - 2\nu_i)(1 + \nu_i)} \quad \text{avec } i = f, m \quad (3.61)$$

➤ **Coefficient de Poisson ν_{12} :**

$$\nu_{23} = \frac{K^* - mG_{23}}{K^* + mG_{23}}, \quad E_2 = 2(1 + \nu_{23})G_{23} \quad \text{avec } m = 1 + 4K^* \frac{\nu_{12}^2}{E} \quad (3.62)$$

$$\nu_{12} = \nu_f V_f + \nu_m V_m, \quad E_1 = E_f V_f + E_m (1 - V_f) \quad (3.63)$$

3.1.13. Approches simplifiées (loi des mélanges)

Des expressions simplifiées et pratiques des modules peuvent être obtenues avec des approches très simplifiées du comportement mécanique de la cellule élémentaire du composite unidirectionnel.

➤ **Module d'élasticité dans le sens des fibres (module de Young longitudinal)**

Le module d'élasticité dans le sens des fibres est déterminé par un essai de traction longitudinale avec une l'hypothèse simplificatrice que la déformation uniforme et identique dans la fibre et dans la matrice.

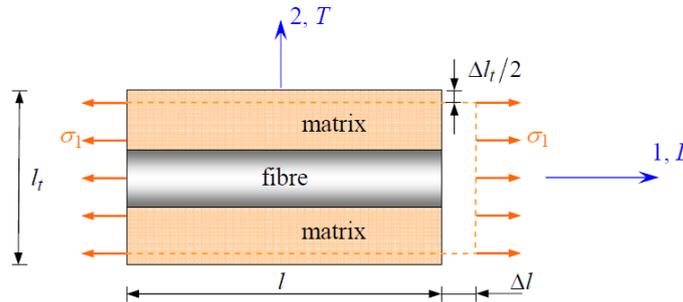


Figure 3.7 Traction dans le sens des fibres

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta L}{L}, \quad \varepsilon_f = \varepsilon_m = \varepsilon_1 \quad (3.64)$$

$$\sigma_f = E_f \varepsilon_1, \quad \sigma_m = E_m \varepsilon_1 \quad (3.65)$$

La charge totale appliquée est :

$$F_1 = \sigma_f \varepsilon_f + \sigma_m \varepsilon_m \quad (3.66)$$

La contrainte moyenne est :

$$\sigma_1 = \frac{F}{S}, \quad \sigma_1 = \sigma_f V_f + \sigma_m (1 - V_f) \quad (3.67)$$

Cette contrainte moyenne est liée à la déformation de la cellule par le module d'Young longitudinal E_L :

$$\sigma_1 = E_L \varepsilon_1 \quad (3.68)$$

$$E_L = E_f V_f + E_m (1 - V_f) \quad (3.69)$$

Cette loi des mélanges est schématisée sur la figure (3.4)

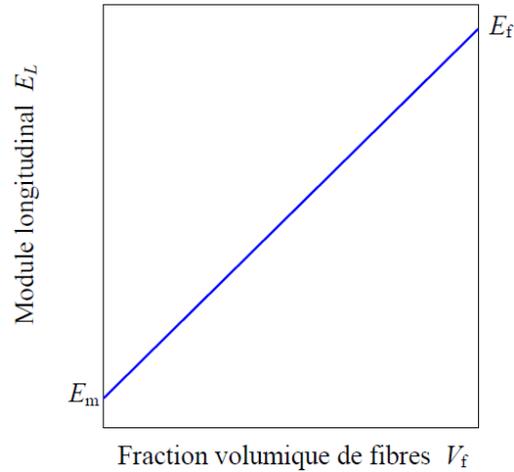


Figure 3.8 Variation du module longitudinal E_1 en fonction de V_f

➤ **Module d'élasticité dans le sens traverse des fibres**

Le module d'élasticité dans le sens travers des fibres est déterminé dans un essai de traction transverse.

$$V_f = \frac{h_f}{h_f + h_m} \text{ et } V_m = 1 - V_f = \frac{h_m}{h_f + h_m} \quad (3.70)$$

La charge F_2 imposée suivant la direction transverse est transmise intégralement dans la fibre et la matrice, imposant des contraintes égales :

$$\sigma_1 = \sigma_f = \sigma_m \quad (3.71)$$

$$\varepsilon_f = \frac{\sigma_f}{E_f}, \quad \varepsilon_m = \frac{\sigma_m}{E_m} \quad (3.72)$$

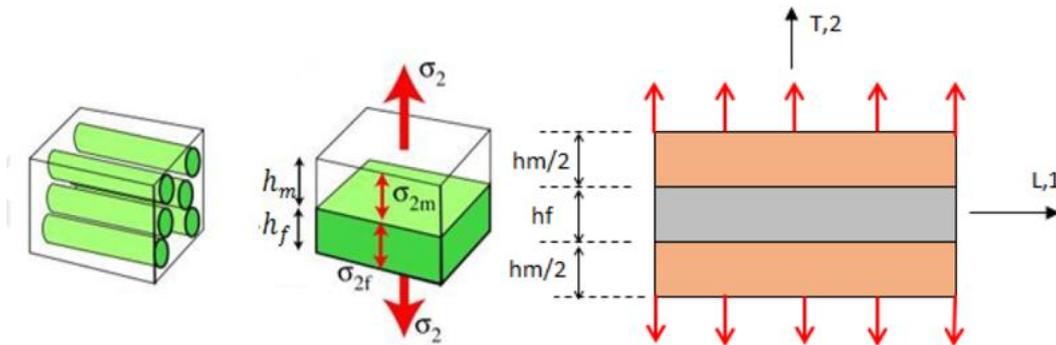


Figure 3.9 Traction dans la direction transversale des fibres

$$\Delta L_2 = \varepsilon_f h_f + \varepsilon_m h_m \quad (3.73)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta L_2}{h_f + h_m} = \varepsilon_f \left(\frac{h_f}{h_f + h_m} \right) + \varepsilon_m \left(\frac{h_m}{h_f + h_m} \right) \quad (3.74)$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_f V_f + \varepsilon_m (1 - V_f) \quad (3.75)$$

$$\sigma_2 = E_2 \varepsilon_2 \quad (3.76)$$

$$\frac{1}{E_2} = \frac{V_f}{E_{f2}} + \frac{V_m}{E_m} \quad (3.77)$$

$$E_2 = \frac{E_{f2} E_m}{E_{f2} V_m + E_m V_f} \quad (3.78)$$

Cette loi est schématisée sur la figure (3.6)

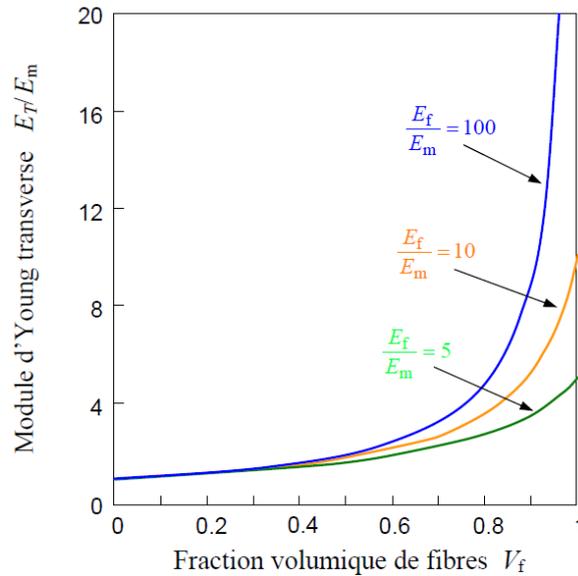


Figure 3.10 Variation du module longitudinal E_2 en fonction de la fraction volumique V_f de fibres

Tableau : les modules d'élasticité et coefficient de Poisson des fibres

Constantes élastiques	Verre « E »	Kevlar	Carbone « HR »	Carbone « HM »
$E_{fl}(MPa)$	74000	130000	230000	39000
$E_{ft}(MPa)$	74000	5400	15000	6000
$G_{flt}(MPa)$	30000	12000	50000	20000
ν_{flt}	0,25	0,4	0,3	0,35

➤ **Coefficient de Poisson longitudinal**

Le coefficient de Poisson longitudinal est déterminé dans un essai de traction longitudinale.

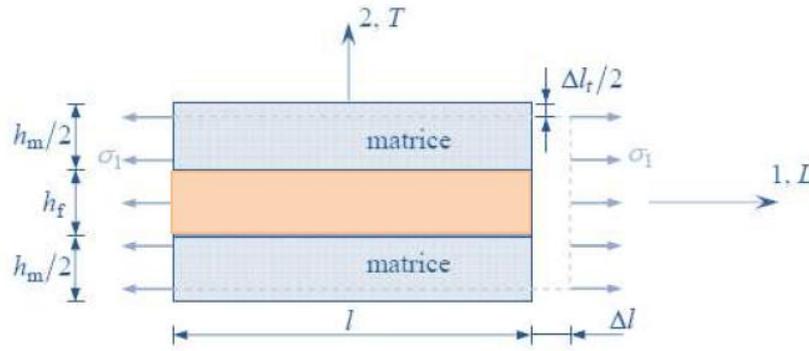


Figure 3.11 Déformations transverses dans un essai de traction longitudinale

Les déformations transverses dans la matrice et dans les fibres s'écrivent :

$$\varepsilon_{2m} = -\nu_m \varepsilon_1 \quad (3.79)$$

$$\varepsilon_{2f} = -\nu_f \varepsilon_1 \quad (3.80)$$

L'allongement transverse de la cellule élémentaire est :

$$\Delta L_2 = -\nu_m \varepsilon_1 h_m - \nu_f \varepsilon_1 h_f \quad (3.81)$$

La déformation transverse s'écrit :

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta L_2}{h_f + h_m} = -(\nu_m V_m + \nu_f V_f) \varepsilon_1 \quad (3.82)$$

D'où l'expression du coefficient de Poisson s'écrit :

$$\nu_{12} = \nu_m V_m + \nu_f V_f \quad (3.83)$$

➤ *Module de cisaillement*

Le module de cisaillement longitudinal GLT est déterminé dans un essai de cisaillement schématisé sur la figure (3.6)

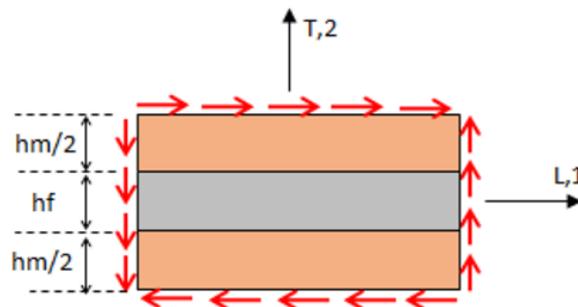


Figure 3.12 Essai de cisaillement longitudinale pour un composite UD

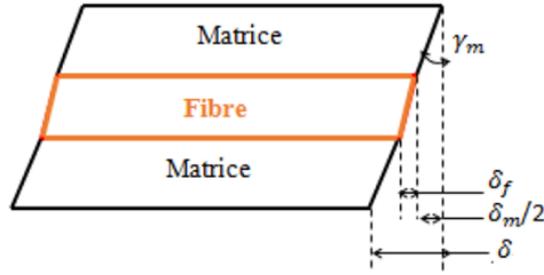


Figure 3.13 Angle de cisaillement de la cellule

Les déformations en cisaillement de la fibre et de la matrice :

$$\gamma_f = \frac{\tau}{G_f} \text{ et } \gamma_m = \frac{\tau}{G_m} \quad (3.84)$$

La déformation totale de la cellule est :

$$\delta = \delta_f + \delta_m = h_f \gamma_f + h_m \gamma_m \quad (3.85)$$

L'angle de cisaillement de la cellule est :

$$\gamma = \frac{\delta}{h_f + h_m} = \gamma_f V_f + \gamma_m (1 - V_f) \quad (3.86)$$

L'angle de cisaillement de la cellule est lié à la contrainte de cisaillement par le module G_{12} , en combinant les expressions, nous obtenons:

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{V_f}{G_{f12}} + \frac{V_m}{G_m} \quad (3.87)$$

$$G_{12} = \frac{G_{f12} G_m}{G_{f12} V_m + G_m V_f} \quad (3.88)$$

3.2. Théorie simplifiée des stratifiés

Dans cette partie on détaille les étapes nécessaires à mener à bien le calcul d'un stratifié, une fois sa composition connue (matériaux des plis et séquence d'empilement) et lorsque le même stratifié est soumis à un état de sollicitation mécanique et thermique connu.

3.2.1. Couches symétriquement stratifiées

Lorsque plusieurs couches sont assemblées, un ensemble d'hypothèses supplémentaires est nécessaire afin de dériver des équations qui régissent le comportement constitutif du stratifié. Outre le fait que les couches sont dans un état de contrainte plane, chaque couche est supposée

parfaitement collée aux couches adjacentes, de sorte que les couches laminées se déforment à l'unisson sans subir de discontinuité dans les déplacements.

Les stratifiés les plus couramment utilisés ont des couches avec des propriétés élastiques d'image miroir par rapport à leur plan moyen. C'est-à-dire que la séquence d'empilement des couches (les propriétés élastiques) au-dessus du plan moyen est le miroir du dessous. De tels stratifiés sont appelés stratifiés symétriques ou stratifiés symétriques de plan moyen. Pour les stratifiés symétriques, des charges, dans le plan, correctement réparties ne produisent que des déformations dans le plan sur toute l'épaisseur du stratifié. Aux bords du stratifié, les charges dans le plan doivent être appliquées de manière à ce que leurs résultantes se trouvent au milieu du plan du stratifié. Tout décalage par rapport au plan moyen provoquerait des moments de flexion par rapport à celui-ci et forcerait le stratifié à se plier.

L'hypothèse de déformation dans le plan associée à l'hypothèse de contrainte plane signifie que les déformations et les contraintes sont constantes sur toute l'épaisseur de chaque couche. L'hypothèse de liaison parfaite garantit que les déformations sont constantes sur toute l'épaisseur du stratifié et, par conséquent, les déformations du stratifié pourraient être caractérisées par les déformations dans une seule couche, disons la couche du plan moyen, représentée par ϵ^0 comme indiqué sur la figure 3.8

Le fait d'avoir une répartition constante des contraintes dans l'épaisseur n'implique cependant pas une répartition constante des contraintes.

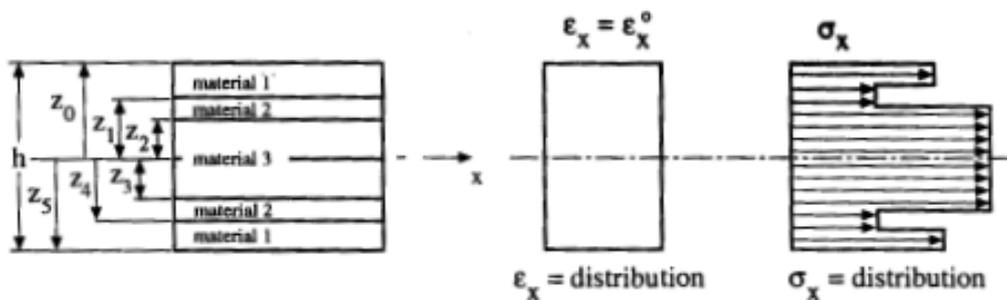


Figure 3.14 Distribution des contraintes et déformations dans un stratifié symétrique et isotrope

3.2.1.1. Comportement en membrane

Bien que les contraintes soient constantes dans chaque couche, elles varieront d'une couche à l'autre en fonction de la rigidité des couches individuelles (qui sont supposées être isotropes) suivant la relation contrainte-déformation de l'équation (3.89) suivante :

$$\sigma_{(k)} = Q_{(k)} \epsilon^0 \quad (3.89)$$

Où k est le nombre de couches. Cette variation est la principale raison de l'utilisation courante des séquences d'empilement symétrique (ou distribution des propriétés élastiques à travers l'épaisseur) des couches. Pour une séquence d'empilement arbitraire, la répartition des contraintes sur toute l'épaisseur du stratifié donnée par l'équation aura un moment de flexion net. Un tel moment forcera le stratifié à se plier, à moins que la flexion du stratifié ne soit empêchée par un moyen externe pour maintenir le stratifié dans son plan. La possibilité de flexion est exclue si l'on se limite aux stratifiés symétriques par rapport au plan moyen du stratifié.

En ce qui concerne la rigidité globale, le stratifié se comporte comme une seule couche avec des propriétés qui sont des moyennes des propriétés des couches individuelles. Le fait que les contraintes varient d'une couche à l'autre rend plus difficile la caractérisation du comportement contrainte-déformation d'un stratifié. Afin de définir une simple relation contrainte-déformation, nous avons besoin d'une quantité qui représente l'effet global d'un composant de contrainte sur la réponse du stratifié. Ceci est réalisé par l'intégration à travers l'épaisseur des composants de contrainte. C'est-à-dire que pour un stratifié d'épaisseur h on définit :

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} dz \quad (3.90)$$

Où N_x et N_y sont les résultantes des contraintes normales dans le plan, et N_{xy} est la résultante de la contrainte de cisaillement. Étant donné que les résultantes de contraintes sont obtenues par intégration des contraintes dans l'épaisseur, en les divisant par l'épaisseur h du stratifié, on obtient des contraintes de stratifié moyennes :

$$\begin{pmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_y \\ \bar{\tau}_{xy} \end{pmatrix} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} \quad (3.91)$$

Les contraintes étant constantes au sein d'une couche, l'intégration peut être remplacée par une sommation sur les couches individuelles :

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}_{(k)} dz = \sum_{k=1}^n \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}_{(k)} (z_k - z_{k-1}) \quad (3.92)$$

Où n est le nombre de couches, l'indice (k) désigne les quantités dans la $k^{\text{ième}}$ couche et les z_k sont les emplacements à travers l'épaisseur des interfaces entre les couches. En substituant la loi contrainte-déformation, l'équation (3.92) nous donne :

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}_{(k)} dz = \left(\sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}_{(k)} (z_k - z_{k-1}) \right) \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} \quad (3.93)$$

Où l'exposant « 0 » est utilisé pour désigner les déformations du plan moyen (rappelons que les déformations sont constantes dans l'épaisseur et peuvent être représentées par les valeurs du plan moyen). L'équation (3.94) s'écrit comme suit :

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} \quad (3.94)$$

Où les coefficients de la matrice A sont donnés par :

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n Q_{ij(k)} (z_k - z_{k-1}) \quad (3.95)$$

Où

$$A_{11} = A_{22} = \sum_{k=1}^n \frac{E_{(k)}}{1 - \nu_{(k)}^2} e_k, \quad A_{12} = \sum_{k=1}^n \frac{\nu_{(k)} E_{(k)}}{1 - \nu_{(k)}^2} e_k, \quad A_{66} = \sum_{k=1}^n G_{(k)} e_k \quad (3.96)$$

Où $e_k = z_k - z_{k-1}$, sont les épaisseurs de la $k^{\text{ième}}$ couche. Pour les stratifiés isotropes considérés dans cette section, le terme A_{22} est identique au terme A_{11} . Cependant, par souci de généralité, nous gardons la représentation matricielle de A comme indiqué dans l'équation. Pour des stratifiés plus généraux constitués de couches anisotropes (telles que des couches orthotropes renforcées de fibres), ces deux termes peuvent ne pas être les mêmes. La matrice A est généralement appelée **matrice de rigidité du matériau en extension** (ou matrice de rigidité dans le plan) et l'équation (3.89) est écrite en notation matricielle comme :

$$N = A\varepsilon^0 \quad (3.97)$$

Une fois la matrice de rigidité dans le plan déterminée, les constantes d'ingénierie efficaces d'un stratifié peuvent être obtenues en reliant la contrainte moyenne dans le stratifié à la déformation :

$$\begin{pmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_y \\ \bar{\tau}_{xy} \end{pmatrix} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} \quad (3.98)$$

En remplaçant les propriétés élastiques dans l'équation par des propriétés effectives inconnues, E_{eff} et ν_{eff} , nous pouvons écrire les deux équations suivantes en fonction des deux inconnues pour les propriétés effectives :

$$\frac{E_{eff}}{1 - \nu_{eff}^2} = \frac{A_{11}}{h} \quad \text{et} \quad \frac{\nu_{eff} E_{eff}}{1 - \nu_{eff}^2} = \frac{A_{12}}{h} \quad (3.99)$$

Qui rapporte

$$E_{eff} = \frac{1}{h} \left(\frac{A_{11}^2 - A_{12}^2}{A_{11}} \right) \quad \text{et} \quad \nu_{eff} = \frac{A_{12}}{A_{11}} \quad (3.100)$$

Le module de cisaillement effectif s'obtient simplement comme :

$$G_{eff} = \frac{A_{66}}{h} \quad (3.101)$$

3.2.1.2. Comportement en flexion

En plus des charges dans le plan, les plaques stratifiées sont souvent chargées par des forces qui plient le stratifié. Cet état de déformation important est mieux étudié en isolant les charges, de sorte que seule une déformation en flexion pure de la ou des couches soit présente sans déformations dans le plan au niveau du plan moyen. Pour la flexion des stratifiés, nous invoquons les hypothèses classiques de Kirchhoff-Love de flexion pure. Une hypothèse est qu'une ligne droite perpendiculaire au plan moyen avant déformation reste droite et perpendiculaire à celui-ci. Une deuxième hypothèse est que la longueur de cette ligne reste inchangée.

L'hypothèse d'une longueur invariable des normales au plan moyen de l'hypothèse de Kirchhoff implique que les déformations à travers l'épaisseur dans le stratifié sont nulles. Autrement dit, les déformations dans la direction hors du plan z sont négligées et le déplacement w est constant à travers l'épaisseur. La ou les couches sont également minces par rapport aux dimensions dans le plan de la ou des couches, et les composantes de contrainte dans la direction z sont supposées être négligeables de sorte qu'un état approximatif de contrainte plane prévaut. Les hypothèses invoquées dans cette section, ainsi que l'hypothèse de couches parfaitement liées (avec des

agents de liaison indéformables infiniment minces) constituent la théorie classique de la stratification ou CLT.

Notez, cependant, que l'hypothèse de contrainte plane ne limite pas la déformation ε_z à être petite. En fait, l'amplitude de ε_z peut être comparable aux déformations dans le plan. Par conséquent, l'hypothèse de déformation nulle à travers l'épaisseur de l'hypothèse de Kirchhoff est incompatible avec l'hypothèse de contrainte plane. Malgré cette incohérence, les hypothèses de la théorie classique du stratifié fournissent une base pour de nombreuses analyses publiées dans la littérature technique et se sont révélées adéquates pour la plupart des applications d'ingénierie.

- Réponse en flexion d'une seule couche isotropique

L'effet cumulatif des hypothèses de Kirchhoff-Love peut-être mieux décrit par l'étude de la figure 3.9.

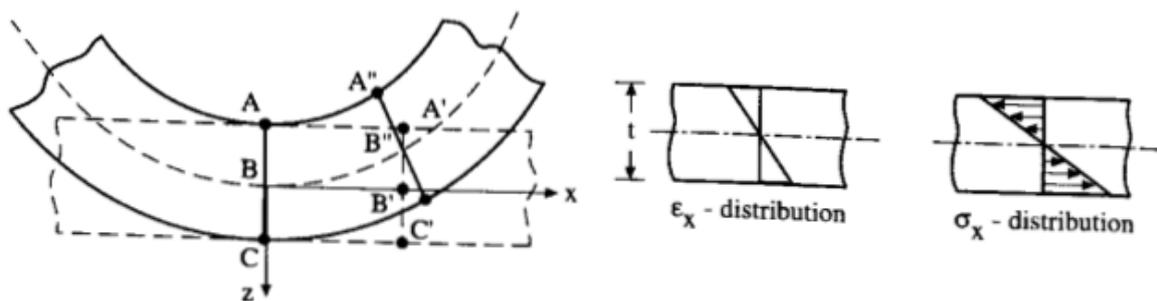


Figure 3.15 Déformations de flexion d'une seule couche

Dans cette figure, les lignes pointillées désignent la configuration non déformée et la ligne continue celle déformée, de sorte que les points A' , B' et C' se déplacent après déformations vers les positions A'' , B'' et C'' . Puisqu'il n'y a pas de déformations dans le plan du plan moyen, la longueur de la ligne non déformée BB' reste inchangée dans les positions déformées comme indiqué par BB'' . Mais si le point d'intérêt est soit en dessous (direction z positive) soit au-dessus du plan moyen de la couche, il y aura un allongement ou un raccourcissement du segment de ligne le long de l'axe x . Par exemple, la ligne AA' se raccourcira, indiquant des déformations de compression à $z = -e/2$. Les valeurs de déformation aux points $z \neq 0$ peuvent être obtenues à partir de la rotation du segment de droite $A'B'C'$. le déplacement d'un point le long de l'axe x , noté u , à n'importe quel emplacement z est lié à la pente par :

$$u = -z\theta_x = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.102)$$

À partir des relations déformation-déplacement,

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned}$$

Nous avons :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad 3.103$$

La négative de la dérivée seconde du déplacement hors plan est une approximation de la courbure de la couche dans le plan x-z et est notée par κ_x , de sorte que $\varepsilon_x = z\kappa_x$. Nous pouvons obtenir des expressions similaires pour les deux autres déformations et écrire en représentation vectorielle :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \end{Bmatrix} \quad (3.104)$$

Contrairement au cas de déformation dans le plan, où la déformation dans une couche est constante, il est clair que la distribution de déformation est une fonction linéaire de z avec $\varepsilon_x(z=0) = 0$ [antisymétrique par rapport au plan moyen $\varepsilon_x(z) = -\varepsilon_x(-z)$] et, par conséquent, les déformations du plan moyen ne peuvent pas être utilisées pour représenter la réponse de la couche en flexion pure. Parce que w est constant à travers l'épaisseur, les courbures sont également constantes à travers l'épaisseur et sont utilisées dans un rôle similaire aux déformations du plan moyen pour représenter la déformation d'une couche.

Les contraintes correspondant à ces déformations ne sont pas constantes même pour une seule couche et peuvent être calculées à partir de l'équation (3.89). Les déformations étant antisymétriques par rapport au plan moyen de la couche, les contraintes sont également antisymétriques ; c'est-à-dire $\sigma_x(z) = -\sigma_x(-z)$. On cherche une grandeur qui serait représentative des contraintes de la couche, mais l'intégrale dans l'épaisseur des contraintes dans le plan est nulle (la couche est en flexion pure). Dans ce cas, les grandeurs représentatives des contraintes d'une couche sont choisies comme étant des moments des contraintes par rapport au plan moyen de la couche. Nous définissons les résultantes de moment (parfois appelées couples de contraintes) par :

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \int_{-e/2}^{e/2} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} z dz \quad (3.105)$$

Où e est l'épaisseur de la couche. En substituant les expressions des composantes de contrainte en termes de déformations de

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad 3.106$$

Et en utilisant les relations déformation-courbure (3.104), on a :

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \int_{-e/2}^{e/2} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} z dz = \left(Q \int_{-e/2}^{e/2} z^2 dz \right) \begin{pmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix} \quad (3.107)$$

Après intégration, nous définissons la matrice qui relie les courbures aux moments résultants comme la matrice de rigidité en flexion du matériau, D ,

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix} \quad (3.108)$$

Ou en notation matricielle,

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa} \quad (3.109)$$

Où les éléments du \mathbf{D} pour le cas isotrope monocouche sont donnés par

$$D_{11} = D_{22} = \frac{Ee^3}{12(1-\nu^2)}, D_{12} = \nu D_{11} \text{ et } D_{66} = (1-\nu) \frac{D_{11}}{2} \quad (3.110)$$

Pour les stratifiés isotropes considérés dans cette section, $Q_{11} = Q_{22}$ et, par conséquent, $D_{11} = D_{22}$. Cependant, par souci de généralité, nous gardons la représentation matricielle de D comme indiqué dans l'équation (3.103)

- Réponse en flexion des couches isotropiques laminées symétriquement

Pour plusieurs couches de matériau isotrope empilées symétriquement par rapport au plan moyen du stratifié, les hypothèses décrites pour les plaques stratifiées sous charges dans le plan et les hypothèses pour une seule couche en flexion sont combinées. C'est-à-dire que les couches

du stratifié sont parfaitement liées entre elles et se déforment de manière à ce que les lignes droites normales au plan moyen restent droites et normales sans changer leur longueur. Par conséquent, suivant l'équation (3.100), la répartition dans l'épaisseur des contraintes de flexion reste linéaire. La courbure est toujours indépendante de l'emplacement dans l'épaisseur du stratifié et peut être utilisée comme quantité représentative de la déformation en flexion du stratifié. Les contraintes peuvent également être représentées par les résultantes de moment introduites pour une seule couche. Cependant, dans le cas d'un milieu stratifié en flexion, les contraintes non seulement varient linéairement dans l'épaisseur mais font aussi des sauts discrets aux interfaces des couches ; voir figure 3.10.

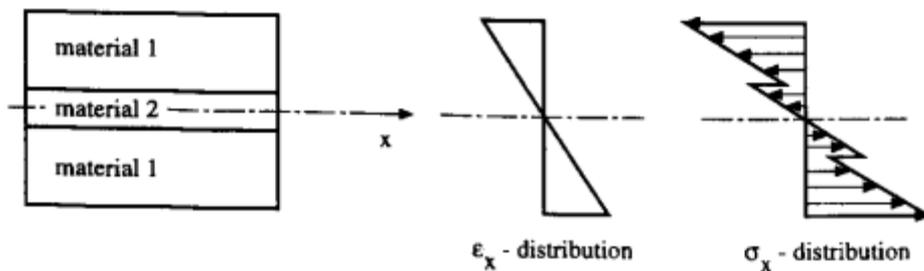


Figure 3.16 Déformations et contraintes de flexion dans les couches stratifiées

Ces sauts sont le résultat du changement des propriétés des matériaux d'une couche à l'autre et sont régis par l'équation (3.89).

L'intégration dans l'épaisseur des contraintes pour établir le moment résultant (3.101) implique une sommation :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{(k)} z dz \quad (3.111)$$

La substitution de la relation contrainte-déformation et des relations déformation-courbure dans cette dernière équation donne :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n Q_{(k)} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_{(k)} z dz = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n Q_{(k)} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^2 dz \right)}_{D_{ij}} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.112)$$

Après intégration, la relation moment-courbure du stratifié peut être réorganisée pour l'exprimer sous forme matricielle où les coefficients de flexion de la matrice D sont maintenant définis par :

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n Q_{ij(k)} (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (3.113)$$

En substituant les déformations de l'équation (3.104) qui sont linéaires en termes de courbures, dans la définition des résultantes de contrainte dans le plan, nous avons :

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n Q_{(k)} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}_{(k)} dz = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n Q_{(k)} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z dz \right)}_{B_{ij}} \begin{pmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix} \quad (3.114)$$

Puisque les $Q_{(k)}$ sont symétriques par rapport au plan moyen, la somme à l'intérieur de la grande parenthèse peut être montrée comme étant nulle. Donc, dans ce cas, les résultantes de contrainte dans le plan sont nulles.

Résumé

Pour les stratifiés symétriques considérés jusqu'ici, la séquence de couches d'un côté du plan moyen est l'image miroir de celles de l'autre côté. Les charges dans le plan pour une telle configuration produisent des déformations constantes dans l'épaisseur et des contraintes constantes dans chaque couche mais changeant d'une couche à l'autre. Les résultantes de moment sont nulles sous des charges dans le plan. Dans le cas des déformations en flexion pure, d'autre part, les distributions de déformation et de contrainte dans l'épaisseur sont toutes deux linéaires (les contraintes sont linéaires pièce par pièce) et sont distribuées de manière symétrique par rapport au plan moyen du stratifié. Dans ce cas, les intégrales des composantes de contrainte, définies comme étant les résultantes de contrainte, sont nulles en raison de la symétrie.

3.2.2. Couplage flexion-extension de couches laminées antisymétriques

Pour les stratifiés symétriques considérés jusqu'ici, la séquence de couches d'un côté du plan moyen est l'image miroir de celles de l'autre côté. Les charges dans le plan pour une telle configuration produisent des déformations constantes dans l'épaisseur et des contraintes constantes dans chaque couche mais changeant d'une couche à l'autre. Les résultantes de moment sont nulles sous des charges dans le plan. Dans le cas des déformations en flexion pure, d'autre part, les distributions de déformation et de contrainte dans l'épaisseur sont toutes deux linéaires (les contraintes sont linéaires pièce par pièce) et sont distribuées de manière asymétrique par rapport au plan moyen du stratifié. Dans ce cas, les intégrales des composantes

de contrainte, définies comme étant les résultantes de contrainte, sont nulles en raison de la symétrie.

La réponse des stratifiés asymétriques aux charges dans le plan et à la flexion pure est sensiblement différente. Comme nous le verrons dans ce qui suit, l'application de charges dans le plan produit des déformations de flexion ainsi que des déformations dans le plan. Inversement, l'application de charges ou de moments de flexion génère des déformations dans le plan ainsi que des déformations de flexion.

Considérons d'abord, par exemple, un stratifié asymétrique à deux matériaux soumis à un moment fléchissant M qui génère des courbures κ ; voir figure ci-dessous. Supposons également que les déformations du plan moyen du stratifié dans le plan, ε^0 sont supprimées pour être nulles en ajustant la charge P . Sur la base des hypothèses de Kirchhoff-Love, la distribution à travers l'épaisseur des déformations est linéaire et, parce que $\varepsilon^0 = 0$, est antisymétrique par rapport au plan moyen. Les contraintes correspondantes sont également réparties linéairement dans chaque couche, mais leurs amplitudes, régies par les propriétés de rigidité des couches individuelles, sont réparties de manière asymétrique par rapport au plan moyen. Contrairement à la flexion pure des stratifiés symétriques,

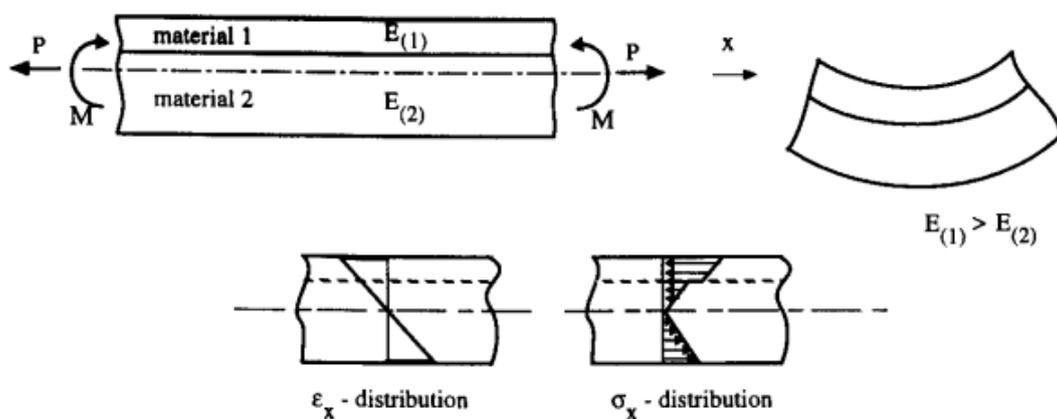


Figure 3.17 Distribution des contraintes et déformations dans un stratifié asymétrique

Lorsque les résultantes de contrainte dans le plan sont nulles, les intégrations à travers l'épaisseur des contraintes peuvent ne pas disparaître et peuvent indiquer des résultantes de contrainte dans le plan non nulles.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.115)$$

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}_{(k)} dz = \left(\sum_{k=1}^n Q_{(k)} \int_{z_{k-1}}^{z_k} dz \right) \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} \left(\sum_{k=1}^n Q_{(k)} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z dz \right) \begin{pmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix} \quad (3.116)$$

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} \quad (3.117)$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}^0 + \mathbf{B}\boldsymbol{\kappa} \quad (3.118)$$

Où les composantes de la matrice \mathbf{B} sont données par

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n Q_{ij(k)} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (3.119)$$

La matrice \mathbf{B} est appelée **matrice de couplage** et l'équation est représentée en notation matricielle comme

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}\boldsymbol{\kappa} \quad (3.120)$$

Notez que les déformations dans le plan sont supposées être supprimées à ce stade, et l'implication de l'équation ci-dessus est que tout type de courbure est également associé à des résultantes de contrainte dans le plan. À partir de l'équilibre dans le plan, le résultat net de ces résultantes de contrainte dans le plan au bord du stratifié est égal à la charge appliquée P . Inversement, toute résultante de contrainte dans le plan induite par les charges de bord induira une courbure.

Le couplage entre la réponse dans le plan et hors du plan d'un stratifié asymétrique a un élément supplémentaire. Dans un cas plus général, les déformations dans le plan au niveau du plan moyen du stratifié ne disparaîtront pas sous le moment de flexion pur. Afin de visualiser cela, considérez la couche supérieure de la figure précédente et supposez qu'elle est très mince par rapport à l'épaisseur globale du stratifié et qu'elle a une rigidité dans le plan infiniment grande, de sorte qu'elle ne peut subir aucune déformation dans le plan. Pour ce stratifié, les déformations de flexion entraîneraient une déformation nulle à la surface supérieure du stratifié (en raison de la rigidité infinie dans le plan) et des déformations finies au plan moyen du stratifié induites par la courbure. Pour des stratifiés asymétriques plus réalistes, la distribution réelle des contraintes est une combinaison de contraintes de flexion pures avec une valeur de plan moyen nulle et de la contrainte de plan moyen finie due à l'asymétrie de la rigidité dans le plan des couches. Cela peut être incorporé dans l'équation (3.114) facilement en ajoutant la relation entre les déformations dans le plan et les contraintes dans le plan :

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}^0 \quad (3.121)$$

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} \quad (3.122)$$

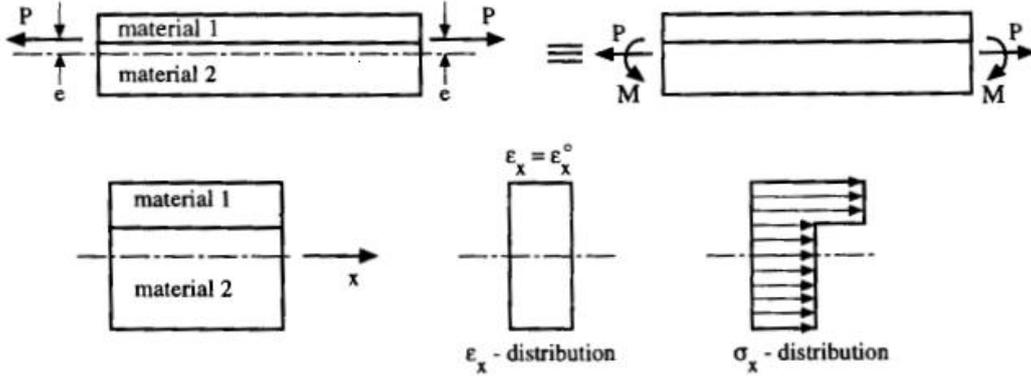


Figure 3.18 Stratifié asymétrique sous l'état de déformation dans le plan.

Ensuite, considérons un cas où nous soumettons le stratifié asymétrique à des déformations dans le plan uniquement en supprimant les courbures. Ceci peut être réalisé en plaçant le stratifié entre deux parois rigides pour supprimer les courbures et en appliquant une charge dans le plan au niveau du plan moyen du stratifié. Même si la distribution à travers l'épaisseur des déformations représentées par les déformations du plan moyen ε^0 est constante et que les contraintes dans chaque couche sont constantes, le profil asymétrique des contraintes génère des résultantes de moment autour du plan moyen du stratifié. A partir de la définition des moments résultants

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{(k)} z dz = \sum_{k=1}^n Q_{(k)} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_{(k)} z dz = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n Q_{(k)} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^2 dz \right)}_{D_{ij}} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.123)$$

On utilise le fait que les déformations sont constantes pour obtenir

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n Q_{(k)} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix}_{(k)} z dz = \left(\sum_{k=1}^n Q_{(k)} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z dz \right) \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} \quad (3.124)$$

Notez que les termes matriciels devant le vecteur de déformation sont les mêmes que ceux obtenus précédemment pour la flexion pure. Par conséquent, la relation entre les résultantes de moment et les composantes de déformation dans le plan est représentée par

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} \quad (3.125)$$

Ou sous la notation matricielle

$$\mathbf{M} = \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}^0 \quad (3.126)$$

L'équation suggère que sous des déformations pures dans le plan, des résultantes de moment interne sont générées. En effet, ces résultantes de moment sont le résultat d'actions externes qui maintiennent le stratifié dans des configurations d'équilibre plat. Une autre façon d'induire des déformations dans le plan sans courber le stratifié consiste à appliquer des charges dans le plan avec une excentricité par rapport au plan moyen du stratifié. Ainsi, un ε^0 et zéro κ donnés peuvent être obtenus en appliquant une charge dans le plan de $\mathbf{N} = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}^0$ et un moment de flexion $\mathbf{M} = \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}^0$.

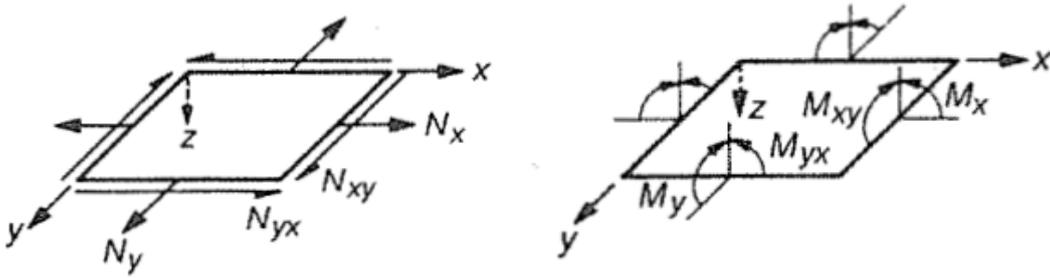


Figure 3.19 Convention de signe pour les forces et moments résultants (toutes les forces et tous les moments indiqués sont positifs).

Notez que différentes excentricités peuvent être nécessaires pour différents composants des charges dans le plan. Inversement, si les moments de flexion externes sont appliqués sans charges dans le plan, l'équation $\mathbf{M} = \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}^0$ suggère que des déformations dans le plan résulteraient. Étant donné que les moments de flexion appliqués provoquent également des courbures comme indiqué par l'équation $\mathbf{M} = \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa}$, l'état de déformation résultant est une combinaison des déformations dans le plan et de flexion régies par :

$$\mathbf{M} = \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}^0 + \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa} \quad (3.127)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.128)$$

Il est important de noter, cependant, que pour un moment de flexion appliqué donné seul n'est pas suffisant pour résoudre l'état de déformation. Il existe deux ensembles d'inconnues, $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ et $\boldsymbol{\kappa}$, mais un seul ensemble d'équations. Le deuxième ensemble d'équations est $\mathbf{N} = \mathbf{B}\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}^0$ et, par conséquent, la solution dépend également des résultantes de contrainte dans le plan. Si les résultantes de contrainte dans le plan sont nulles, cette équation peut être utilisée pour résoudre les courbures en termes de déformations dans le plan (ou courbures).

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} \quad (3.129)$$

Connaissant les courbures en termes de déformations dans le plan, on peut résoudre $\mathbf{N} = \mathbf{B}\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}^0$ pour les résultantes de contrainte dans le plan étant donné les contraintes dans le plan ou les déformations dans le plan pour les résultantes de contrainte dans le plan.

Enfin, dans le cas plus général où $\mathbf{N} \neq \mathbf{0}$ et $\mathbf{M} \neq \mathbf{0}$, les équations (3.118) et (3.122) doivent être résolues simultanément.

Remarque :

Ces déformations généralisées correspondent aux quatre déformations de base suivantes de la couche illustrées à la figure **3.14**:

- Traction ou compression dans le plan ($\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0$),
- Cisaillement dans le plan (γ_{xy}^0),
- Flexion dans les plans xz et yz (κ_x, κ_y) et
- Torsion (κ_{xy}).

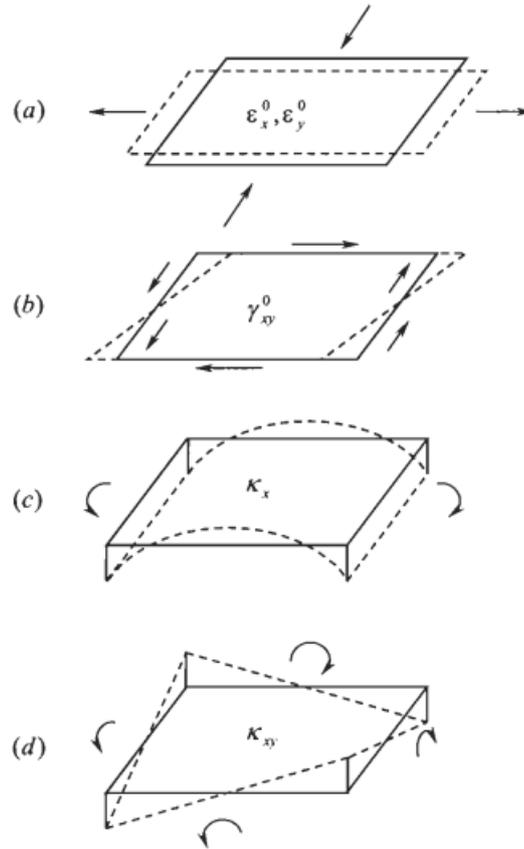


Figure 3.20 Déformations généralisées.

3.2.3. Stratifiés de plis orthotropes

Les mêmes hypothèses utilisées précédemment sont appliquées Eq 3.106, Eq 3.104 et Eq 3.120 quand des couches à propriétés unidirectionnelles sont liées. Autrement dit, la théorie classique de la stratification (CLT) suppose que les n couches orthotropes décrites ci-dessus sont parfaitement liées avec une ligne de liaison mince à l'infini, et les déformations dans le plan à travers la ligne de liaison sont continues. L'hypothèse d'une distribution de déformation constante à travers l'épaisseur ϵ^0 dans le cas de chargement dans le plan et d'une variation linéaire à travers l'épaisseur, en cas de charges de flexion peut être superposée. La distribution des déformations est donc :

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.127)$$

Où l'exposant « 0 » représente les déformations du plan moyen et les courbures κ qui sont constantes à travers l'épaisseur. La relation contrainte-déformation :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.128)$$

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})c^2s^2 + Q_{22}s^4 \quad (3.129)$$

$$\bar{Q}_{22} = Q_{11}s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})c^2s^2 + Q_{22}c^4$$

$$\bar{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})c^2s^2 + Q_{66}(c^4 + s^4)$$

$$\bar{Q}_{12} = Q_{12}(c^4 + s^4) + (Q_{11} + Q_{12} - 4Q_{66})c^2s^2$$

$$\bar{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})c^3s - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})cs^3$$

$$\bar{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})cs^3 - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})c^3s$$

Dans l'équation précédente, $c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$. Les \bar{Q}_{ij} sont les constantes élastiques orthotropes de la plaque dans le système de coordonnées α, β, γ comme indiqué dans l'équation, où les axes orthotropes de le matériau coïncide avec les trois axes de coordonnées orthogonaux. Les Q_{ij} sont les constantes élastiques transformées dans le système de coordonnées x, y, z et représentent les constantes élastiques d'une couche d'angle typique.

La contrainte devient:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \right) \quad (3.130)$$

Les résultantes de contrainte et les résultantes de moment (couples de contrainte) par unité de largeur de la section transversale agissant en un point du stratifié sont obtenues par intégration dans l'épaisseur des contraintes dans chaque pli :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{(k)} dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{(k)} dz \quad (3.131)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{(k)} z dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{(k)} z dz \quad (3.132)$$

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} \quad (3.133)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.134)$$

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_{(k)} (z_k - z_{k-1}) \quad (3.135)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_{(k)} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (3.136)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_{(k)} (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (3.137)$$

Si les plis sont identiques, les formules sont plus simples ; en numérotant les couches selon le schéma de figure, on obtient :

$$A_{ij} = \frac{h}{n} \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_{(k)} \quad (3.138)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \frac{h^2}{n^2} \sum_{k=1}^n b_k (Q_{ij})_{(k)} \quad (3.139)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \frac{h^3}{n^3} \sum_{k=1}^n d_k (Q_{ij})_{(k)} \quad (3.140)$$

Avec

$$b_k = 2k - n - 1 \quad \text{et} \quad d_k = \frac{1}{4} [12k(k - n - 1) + 4 + 3n(n + 2)] \quad (3.141)$$

- Propriétés élastiques des stratifiés composites

Les termes A_{16} et A_{26} dans la matrice de rigidité dans le plan donne un comportement de couplage appelé couplage cisaillement-extension.

Il existe un couplage ($B \neq 0$) entre les déformations dans le plan et en flexion d'un stratifié, sauf si la séquence de stratifiés est symétrique par rapport au plan moyen du stratifié.

Existence d'un terme B_{11} implique un couplage entre la résultante de la contrainte dans le plan N_x et la courbure du stratifié le long de l'axe x κ_x , ainsi qu'entre la résultante du moment M_x et la déformation du plan moyen ε_x^0

Un couplage plus complexe est dû aux termes B_{16} et B_{26} . Ces termes peuvent induire des déformations de torsion dans les stratifiés même s'il n'y a pas d'action de torsion appliquée.

Les stratifiés chargés dans le plan induisant des états de contrainte uniformes dans le plan N_x et N_y subiront des courbures de torsion κ_{xy} .

Les termes B_{16} et B_{26} sont souvent appelés termes de couplage extension-torsion et sont dus à l'existence de couches hors axe qui ne sont pas symétriques par rapport au plan moyen du stratifié. Si le stratifié est constitué de couches isotropes, $B_{16} = B_{26} = 0$ même si le stratifié n'est pas symétrique.

Lorsqu'elle est limitée à des séquences d'empilement symétriques, la disparition de la matrice B élimine le couplage entre les réponses dans le plan et hors plan d'un stratifié.

Les termes de rigidité D_{16} et D_{26} (couplage flexion-torsion) couplent les résultantes de moment M_x et M_y avec la courbure de torsion. L'effet résultant est la tendance du stratifié à s'enrouler sous des éléments de flexion uniformes appliqués. Ces termes existent pour tous les stratifiés qui ont des couches avec des orientations hors axe.

Néanmoins, il existe des situations dans lesquelles la représentation des propriétés de rigidité dans le plan d'un stratifié par des quantités qui émulent les propriétés de rigidité élastique traditionnelles peut être utile. En suivant l'approche des couches laminées symétriquement, les propriétés élastiques effectives suivantes peuvent être dérivées en termes de valeurs de la matrice de rigidité dans le plan :

$$E_x^{eff} = \frac{1}{h} \left(\frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} \right) \quad (3.142)$$

$$E_y^{eff} = \frac{1}{h} \left(\frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{11}} \right) \quad (3.143)$$

$$G_{xy}^{eff} = \frac{A_{66}}{h} \quad (3.144)$$

$$\nu_{xy}^{eff} = \frac{A_{12}}{A_{11}} \quad (3.145)$$

3.3.Prise en compte des effets hygrothermiques

Lors de la conception de la séquence d'empilement d'un stratifié composite pour les chargements anticipés, il faut prendre en considération les effets des variations de température et d'humidité sur le comportement des matériaux constitutifs. En plus des dilatations liées à la température, les matériaux composites, en particulier ceux avec des systèmes de matrice à base de résine, se dilatent en absorbant l'humidité de l'environnement. Par exemple, pour une couche unidirectionnelle, la valeur du coefficient de dilatation thermique dans la direction α_1 de la fibre

est inférieure d'un à trois ordres de grandeur à la valeur α_2 dans une direction perpendiculaire à la fibre. Dans ces conditions, si l'on considère un stratifié à deux couches d'un même matériau mais d'orientations différentes, la réponse du stratifié sous charges thermiques et hygales est similaire à celle d'une plaque bimétallique fabriquée à partir de deux matériaux isotropes différents.

Les stratifiés composites renforcés de fibres sont généralement fabriqués à des températures élevées, qui sont nécessaires pour permettre le durcissement de la résine. La fabrication implique généralement de couper les feuilles de pré-imprégnées à la taille, de les chauffer légèrement et de les disposer aux angles d'orientation souhaités pour le stratifié. La pression appliquée aide à éliminer les gaz et tout air emprisonné. De plus, à cette température, une nouvelle réticulation entre les molécules de polymère se produit et la matrice commence à durcir. Après ce durcissement à des températures élevées, le stratifié est retiré de l'autoclave et laissé refroidir à température ambiante.

3.3.1. Effets thermiques

La conduction thermique à travers l'épaisseur d'un stratifié est régie par l'équation de *Fourier* du transfert de chaleur

$$\left(\frac{k}{\rho c}\right) \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.146)$$

Ici, $T(z, t)$ est la distribution de température à travers l'épaisseur en fonction du temps, k (W/mK) est la conductivité thermique dans la direction de l'épaisseur z , c ($J/kg^\circ C$) est la chaleur spécifique du matériau et ρ (kg/m^3) est la densité globale du matériau composite. Si toutes les couches du stratifié sont constituées de systèmes de matériaux similaires et avec des rapports volumiques fibre/matrice similaires, k peut être supposé constant par rapport à la direction d'épaisseur z .

3.3.2. Effets hygrométriques

La résine dans les systèmes composites a une affinité pour absorber l'humidité en fonction de l'humidité relative de l'atmosphère. Pour une couche composite unidirectionnelle, cette réponse dans des conditions d'humidité variables est similaire à sa réponse thermique. La couche se dilate ou se rétracte beaucoup plus dans une direction transversale à la fibre que dans la direction de la fibre. Ainsi, dans un stratifié constitué de couches d'orientations diverses, les différents niveaux de dilatation ou de contraction se traduisent par l'introduction de contraintes résiduelles.

Semblable au processus de diffusivité thermique, le taux d'absorption ou de désorption d'humidité est exprimé par l'équation de **Fick** comme :

$$D \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} = \frac{\partial C}{\partial t} \quad (3.147)$$

Ici, D est le coefficient de diffusion de l'humidité, qui est analogue au coefficient de diffusivité thermique $k/(\rho c)$ et est supposé constant dans la direction z ; $C(z, t)$ est la quantité d'humidité en tant que fraction de la masse sèche du composite à un emplacement traversant l'épaisseur z et au temps t . Le terme C est également appelé teneur en humidité spécifique. Étant donné que l'absorption d'humidité est principalement régie par le système de résine, l'hypothèse d'un coefficient constant de diffusivité de l'humidité dans le sens de l'épaisseur est valable pour les couches ayant des propriétés de fibres différentes.

Un ensemble typique de conditions initiales et aux limites pour lesquelles l'équation aux dérivées partielles ci-dessus peut être résolue :

$$\begin{aligned} C &= C_i, & -\frac{h}{2} < z < \frac{h}{2}, & & t \leq 0, & & (3.148) \\ C &= C_m, & z &= \left(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right), & & & t > 0, \end{aligned}$$

Où h est l'épaisseur du stratifié et C_i est la teneur en humidité initiale. C_m est la valeur d'équilibre à long terme de la teneur en humidité, qui est fonction de l'humidité relative de l'environnement auquel le composite est exposé. Ici, C_m est également fonction des propriétés du matériau qui reflètent la concentration maximale d'humidité pouvant être absorbée dans le stratifié et est représentée empiriquement par $C_m = a[(\Phi/100)^b]$ où Φ est l'humidité relative de l'environnement, et a et b sont des constantes du matériau. La teneur en humidité spécifique moyenne à travers l'épaisseur dans le matériau composite définie comme :

$$\bar{C} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} C(z, t) dz \quad (3.149)$$

Par exemple, pour les expositions sur une longue période, la concentration d'humidité spécifique moyenne est donnée par **Tsai et Hahn** (1980)

$$\frac{\bar{C} - C_i}{C_m - C_i} = 1 - \frac{8}{\pi^2} \exp\left(\frac{-\pi^2 Dt}{h^2}\right) \quad (3.150)$$

Pour les expositions de courte durée, une solution approximative présentée par **Crank** (1956)

$$\frac{\bar{C} - C_i}{C_m - C_i} = 4 \sqrt{\frac{Dt}{\pi h^2}} \quad (3.151)$$

Fournit de bonnes estimations de la teneur en humidité.

Il est important de souligner que la conduction thermique dans les stratifiés composites se produit beaucoup plus rapidement que la diffusion de l'humidité. Tout changement dans les propriétés du composite qui peut être introduit en raison de variations de la teneur en humidité (densité globale et conductivité thermique) peut être ignoré dans la solution de l'équation de conduction thermique. De même, étant donné que les températures d'équilibre sont rapidement atteintes dans le stratifié, le coefficient de diffusivité de l'humidité peut être supposé constant sur toute l'épaisseur du stratifié. Une exception doit être faite dans le cas de charges transitoires de très courte période ou d'environnements qui ont un grand gradient thermique soutenu à travers l'épaisseur ainsi qu'une diffusion d'humidité, comme les conteneurs de liquide cryogénique.

3.3.3. Superposition des effets thermiques et hygrométriques

Considérons une seule couche unidirectionnelle soumise à un changement de température ΔT à partir de son état sans contrainte. De plus, supposons que cette couche subisse également un changement de teneur en humidité noté ΔC . Les déformations d'expansion libre (ou d'expansion sans contrainte) résultantes dans la couche peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^F \\ \varepsilon_y^F \\ \gamma_{xy}^F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{FT} \\ \varepsilon_y^{FT} \\ \gamma_{xy}^{FT} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{FH} \\ \varepsilon_y^{FH} \\ \gamma_{xy}^{FH} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ 0 \end{Bmatrix} \Delta T + \begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ 0 \end{Bmatrix} \Delta C \quad (3.152)$$

Où α_x, β_x et α_y, β_y sont les coefficients de dilatation thermique et liés à l'humidité dans la direction des fibres et transversalement à la direction des fibres, respectivement, et l'exposant F indique une dilatation sans contrainte. Les exposants FT et FH représentent respectivement les effets thermiques et hygraux sans contrainte. Ces déformations en expansion libre, dans la figure 3.15, où les bandes sombres indiquent les fibres dans une couche composite unidirectionnelle. Notez que l'expansion dans les directions des fibres est généralement plus faible que dans une direction transversale aux fibres.

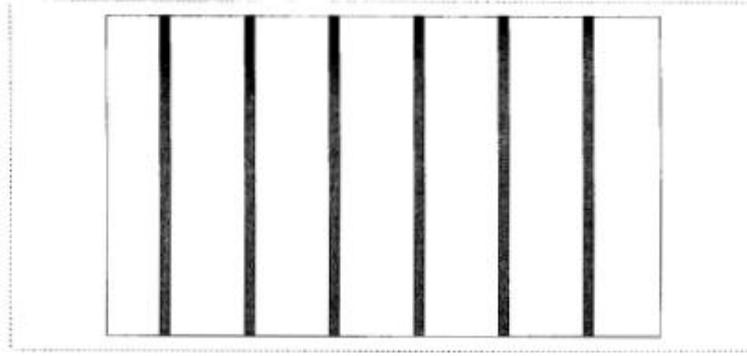


Figure 3.21 Déformations d'expansion sans contrainte dans une couche unidirectionnelle

Notez également qu'aucune déformation de cisaillement hygrothermique n'est induite dans la couche composite unidirectionnelle.

Si les déformations étaient d'origine purement mécanique, les composantes de contraintes correspondant aux déformations seraient obtenues à partir des relations contrainte-déformation d'une même couche comme suit:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (3.153)$$

Généralement, les déformations globales (ou déformations totales) dans une couche, ε^t , sont exprimées comme la somme de la déformation de dilatation libre, $\varepsilon^{HT} = \varepsilon^T + \varepsilon^H$, et des déformations induites mécaniquement, ε^M ,

$$\varepsilon^t = \varepsilon^{HT} + \varepsilon^M \quad (3.154)$$

Les contraintes dans une couche (qui subit à la fois des contraintes hygrothermiques et mécaniques) pourraient alors être calculées à partir de :

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^t \\ \varepsilon_y^t \\ \gamma_{xy}^t \end{pmatrix} \quad (3.155)$$

a) Contraintes résiduelles

Dans un stratifié composite constitué de plusieurs couches unidirectionnelles avec la même orientation, la déformation hygrothermique dans chaque couche serait identique et il n'y aurait pas de contraintes sur les déformations des couches adjacentes. Dans un stratifié général, cependant, la situation est différente et quelque peu plus compliquée parce que chaque couche avec une orientation différente aurait tendance à se dilater ou à se contracter différemment le

long des axes du stratifié. Pour un stratifié [45/90/0], par exemple, les déformations de dilatation libre dans la direction x sont indiquées sur la figure 3.16.



Figure 3.22 déformation en expansion libre dans un stratifié [45/90/0]

Étant donné que dans le stratifié réel, les couches individuelles sont liées ensemble, de telles déformations sans contrainte ne sont pas possibles. Les couches adjacentes du stratifié exercent une influence contraignante contre la dilatation ou le rétrécissement hygrothermique libre de chaque couche. Une telle déformation entraînerait le développement de contraintes résiduelles dans les couches individuelles.

Pour un stratifié général composé de couches avec des orientations différentes, les déformations de dilatation libre dans chaque couche peuvent être transformées en un système de coordonnées souhaité x-y suivant la relation de transformation de déformations :

$$\varepsilon_x^{HT} = c^2 \varepsilon_x^{HT} + s^2 \varepsilon_y^{HT} \quad (3.156)$$

$$\varepsilon_y^{HT} = s^2 \varepsilon_x^{HT} + c^2 \varepsilon_y^{HT}$$

$$\gamma_{xy}^{HT} = 2cs \varepsilon_x^{HT} - 2cs \varepsilon_y^{HT}$$

Où $c = \cos\theta$ et $s = \sin\theta$

Dans le cas des déformations thermiques uniquement, les déformations de dilatation libre peuvent s'écrire :

$$\varepsilon_x^T = (\alpha_x c^2 + \alpha_y s^2) \Delta T \quad (3.157)$$

$$\varepsilon_y^T = (\alpha_x s^2 + \alpha_y c^2) \Delta T$$

$$\gamma_{xy}^T = 2\alpha_{xy} cs \Delta T$$

Où α_{xy} est parfois appelé coefficient de cisaillement thermique.

Dans le cas des déformations hygrales uniquement, β et ΔC sont respectivement remplacés par α et ΔT , et l'exposant FT est remplacé par FH :

Dans un stratifié général, lorsque des couches à différentes orientations sont liées ensemble, le stratifié prendra une certaine forme déformée qui dépend de la séquence d'empilement. Dans

un empilement symétrique, il n'y aurait que des déformations dans le plan. Cependant, pour les couches asymétriques, le stratifié peut également développer des courbures. Ces déformations sont entièrement décrites en termes de déformations et de courbures du plan médian représentées par :

$$\varepsilon^{0N} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{0N} \\ \varepsilon_y^{0N} \\ \gamma_{xy}^{0N} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \kappa^N = \begin{Bmatrix} \kappa_x^N \\ \kappa_y^N \\ \kappa_{xy}^N \end{Bmatrix} \quad (3.158)$$

Quelles sont les déformations et courbures totales correspondant à la forme finale du stratifié déformé sous sollicitations purement hygrothermiques ?

$$\varepsilon^N = \varepsilon^{0N} + z\kappa^N \quad (3.159)$$

Il est important de distinguer les déformations hygrothermiques dans les couches individuelles, ε^N , des déformations de dilatation libre, ε^{HT} , des couches individuelles. Le premier comprend l'effet de l'action de retenue des couches adjacentes les unes sur les autres lorsque le stratifié se déforme dans son ensemble.

En utilisant le même concept:

$$\varepsilon^R(z) = \varepsilon^N(z) - \varepsilon_{(k)}^{HT}(z) \quad (3.160)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^R \\ \varepsilon_y^R \\ \gamma_{xy}^R \end{Bmatrix}_{(k)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{0N} \\ \varepsilon_y^{0N} \\ \gamma_{xy}^{0N} \end{Bmatrix} + z_{(k)} \begin{Bmatrix} \kappa_x^N \\ \kappa_y^N \\ \kappa_{xy}^N \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{HT} \\ \varepsilon_y^{HT} \\ \gamma_{xy}^{HT} \end{Bmatrix}_{(k)} \quad (3.161)$$

ε_x^R , ε_y^R et γ_{xy}^R sont des déformations dans la k^{ième} couche induites par l'action contraignante des couches adjacentes.

En correspondance avec ces déformations, on peut calculer les contraintes induites par l'action contraignante des couches voisines. Ces contraintes induites par l'hygrothermie sont appelées contraintes résiduelles :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^R \\ \sigma_y^R \\ \tau_{xy}^R \end{Bmatrix}_{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{0N} \\ \varepsilon_y^{0N} \\ \gamma_{xy}^{0N} \end{Bmatrix} + z_{(k)} \begin{Bmatrix} \kappa_x^N \\ \kappa_y^N \\ \kappa_{xy}^N \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{HT} \\ \varepsilon_y^{HT} \\ \gamma_{xy}^{HT} \end{Bmatrix}_{(k)} \right) \quad (3.162)$$

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11}c^4 + Q_{22}s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})c^2s^2 \quad (3.163)$$

$$\bar{Q}_{22} = Q_{11}s^4 + Q_{22}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})c^2s^2$$

$$\bar{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})c^2s^2 + Q_{66}(c^4 + s^4)$$

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{12} &= Q_{12}(c^4 + s^4) + (Q_{11} + Q_{12} - 4Q_{66})c^2s^2 \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})c^3s - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})cs^3 \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})cs^3 - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})c^3s\end{aligned}$$

Dans l'équation précédente, $c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$. Les \bar{Q}_{ij} sont les constantes élastiques orthotropes de la plaque dans le système de coordonnées α, β, γ comme indiqué dans l'équation, où les axes orthotropes de le matériau coïncide avec les trois axes de coordonnées orthogonaux. Les Q_{ij} sont les constantes élastiques transformées dans le système de coordonnées x, y, z et représentent les constantes élastiques d'une couche d'angle typique.

La détermination des déformations et courbures dans le plan médian (ε^{0N} et κ^N) nécessite de compléter l'analyse du stratifié sous des effets purement hygrothermiques, ce qui conduit à la définition de contraintes hygrothermiques équivalentes et de moments résultants.

b) Analyse hygrothermique et charges hygrothermiques

Dans la théorie classique du stratifié, le comportement de contrainte du stratifié est généralement caractérisé par des contraintes résultant de l'intégration à travers l'épaisseur des contraintes des couches. Pour une réponse purement hygrothermique d'un stratifié, il n'y a pas de forces ou de moments extérieurs agissant sur le stratifié ; par conséquent, il ne peut y avoir de contraintes ou de moments résultants dans le stratifié.

Cependant, nous savons que pour le cas général, les stratifiés ont des contraintes résiduelles à l'intérieur des couches. Par conséquent, les résultantes de contraintes associées aux contraintes résiduelles doivent s'annuler. En utilisant la définition des résultantes de contrainte et de moment, les contraintes résiduelles sont données par :

$$\begin{Bmatrix} N_x^R \\ N_y^R \\ N_{xy}^R \end{Bmatrix}_{(k)} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x^R \\ \sigma_y^R \\ \sigma_{xy}^R \end{Bmatrix} dz = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.164)$$

Et l'annulation des moments des contraintes résiduelles par :

$$\begin{Bmatrix} M_x^R \\ M_y^R \\ M_{xy}^R \end{Bmatrix}_{(k)} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x^R \\ \sigma_y^R \\ \sigma_{xy}^R \end{Bmatrix} z dz = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.165)$$

Substituant les contraintes résiduelles :

$$[\mathbf{A}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{0N} \\ \varepsilon_y^{0N} \\ \gamma_{xy}^{0N} \end{Bmatrix} + [\mathbf{B}] \begin{Bmatrix} \kappa_x^N \\ \kappa_y^N \\ \kappa_{xy}^N \end{Bmatrix} - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{\mathbf{Q}}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{HT} \\ \varepsilon_y^{HT} \\ \gamma_{xy}^{HT} \end{Bmatrix} dz = 0 \quad (3.166)$$

$$[\mathbf{B}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{0N} \\ \varepsilon_y^{0N} \\ \gamma_{xy}^{0N} \end{Bmatrix} + [\mathbf{D}] \begin{Bmatrix} \kappa_x^N \\ \kappa_y^N \\ \kappa_{xy}^N \end{Bmatrix} - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{\mathbf{Q}}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{HT} \\ \varepsilon_y^{HT} \\ \gamma_{xy}^{HT} \end{Bmatrix} z dz = 0 \quad (3.167)$$

Les termes sous l'intégrale ci-dessus sont constants dans chaque couche pour une distribution constante donnée à travers l'épaisseur de ΔT ou ΔC . Pour une séquence d'empilement de stratifiés donnée, ces intégrations produisent des vecteurs de constantes communément appelées charges hygrothermiques ou non mécaniques induites.

$$[\mathbf{N}^N] = \begin{Bmatrix} N_x^N \\ N_y^N \\ N_{xy}^N \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{\mathbf{Q}}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{HT} \\ \varepsilon_y^{HT} \\ \gamma_{xy}^{HT} \end{Bmatrix} dz \quad (3.168)$$

$$[\mathbf{M}^N] = \begin{Bmatrix} M_x^N \\ M_y^N \\ M_{xy}^N \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{\mathbf{Q}}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{HT} \\ \varepsilon_y^{HT} \\ \gamma_{xy}^{HT} \end{Bmatrix} z dz \quad (3.169)$$

Les termes définis ci-dessus sont appelés charges hygrothermiques

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}^{0N} + \mathbf{B}\boldsymbol{\kappa}^N = \mathbf{N}^N \quad (3.170)$$

$$\mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}^{0N} + \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa}^N = \mathbf{M}^N \quad (3.171)$$

Le calcul des déformations et des courbures résultant d'un chargement purement hygrothermique est similaire au calcul des déformations et des courbures pour des chargements mécaniques qui créent une contrainte et des moments uniformes résultants de \mathbf{N} et \mathbf{M} sauf que les résultantes de contrainte et de moment sont remplacées par les résultantes hygrothermiques équivalentes (ou mécanique).

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N}^N \\ \mathbf{M}^N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^{0N} \\ \boldsymbol{\kappa}^N \end{Bmatrix} \quad (3.172)$$

c) *Coefficients de dilatation hygrothermique du stratifié*

Pour un ingénieur, les coefficients de dilatation liés à l'humidité et à la chaleur pour les couches individuelles sont souvent moins significatifs qu'un coefficient équivalent pour un stratifié composite multidirectionnel général. Pour un stratifié composite unidirectionnel, la dilatation ou le retrait hygrothermique est le même dans chaque couche pour une répartition uniforme de la température et de l'humidité dans l'épaisseur. Pour un tel stratifié, les coefficients de dilatation hygrothermique du stratifié sont les mêmes que ceux d'une couche individuelle. Pour les stratifiés plus généraux, le calcul de ces coefficients est un peu plus complexe, car ils deviennent dépendants des rigidités des couches et de la séquence d'empilement du stratifié.

Nous commençons d'abord par les définitions classiques des coefficients de dilatation thermique et hygrale $\alpha = \varepsilon^T / \Delta T$ et $\beta = \varepsilon^H / \Delta C$, respectivement. Dans le cas le plus général, les déformations en un point donné du stratifié sont exprimées en termes de déformations et de courbures du plan médian du stratifié, $\varepsilon = \varepsilon^0 + z\kappa$. Par conséquent, les coefficients de dilatation "en un point" dans le stratifié sont exprimés par :

$$\alpha_x = \frac{1}{\Delta T} (\varepsilon_x^{0T} + z\kappa_x^T), \quad \alpha_y = \frac{1}{\Delta T} (\varepsilon_y^{0T} + z\kappa_y^T), \quad \alpha_{xy} = \frac{1}{\Delta T} (\varepsilon_{xy}^{0T} + z\kappa_{xy}^T) \quad (3.173)$$

$$\beta_x = \frac{1}{\Delta C} (\varepsilon_x^{0H} + z\kappa_x^H), \quad \beta_y = \frac{1}{\Delta C} (\varepsilon_y^{0H} + z\kappa_y^H), \quad \beta_{xy} = \frac{1}{\Delta C} (\varepsilon_{xy}^{0H} + z\kappa_{xy}^H) \quad (3.174)$$

Les déformations et les courbures du plan médian dans ces équations sont calculées après différenciation entre la température et l'humidité, $\varepsilon^{0T} + \varepsilon^{0H} = \varepsilon^{0N}$ et $\kappa^T + \kappa^H = \kappa^N$, qui sont à leur tour calculés à partir de :

$$\begin{Bmatrix} N^T \\ M^T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^{0T} \\ \kappa^T \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} N^H \\ M^H \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^{0H} \\ \kappa^H \end{Bmatrix} \quad (3.175)$$

Il est clair que cette dépendance à l'égard de z peut être évitée si les courbures du stratifié induites par l'hygrothermie sont nulles.

En imposant des conditions de symétrie du plan médian pour la séquence d'empilement, la rigidité en flexion-extension d'un stratifié peut être éliminée; $\mathbf{B}=\mathbf{0}$. Dans ce cas, les déformations et les courbures du plan médian induites par l'hygrothermie sont découplées et résolues à partir de :

$$\mathbf{A}\varepsilon^{0N} = \mathbf{N}^N \quad (3.176)$$

$$\mathbf{D}\kappa^N = \mathbf{M}^N \quad (3.177)$$

Par exemple, dans le cas thermique, les forces thermiques équivalentes sont données par :

$$[\mathbf{N}^T] = \begin{Bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{\mathbf{Q}}] \begin{Bmatrix} \alpha_1 c^2 + \alpha_2 s^2 \\ \alpha_1 s^2 + \alpha_2 c^2 \\ 2(\alpha_1 - \alpha_2)cs \end{Bmatrix} \Delta T dz \quad (3.178)$$

Par conséquent, les déformations du plan médian du stratifié sont

$$[A] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{0N} \\ \varepsilon_y^{0N} \\ \gamma_{xy}^{0N} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{\mathbf{Q}}] \begin{Bmatrix} \alpha_1 c^2 + \alpha_2 s^2 \\ \alpha_1 s^2 + \alpha_2 c^2 \\ 2(\alpha_1 - \alpha_2)cs \end{Bmatrix} \Delta T dz \quad (3.179)$$

Si nous supposons en outre que le ΔT est constant à travers l'épaisseur du stratifié, définissant les coefficients de dilatation thermique du stratifié par l'expression $\boldsymbol{\varepsilon}^{0N} = \{\bar{\boldsymbol{\alpha}}\}\Delta T$, nous pouvons conclure que les coefficients de dilatation thermique du stratifié (sont de même les coefficients de dilatation d'humidité) sont :

$$[A] \begin{Bmatrix} \bar{\alpha}_x \\ \bar{\alpha}_y \\ \bar{\alpha}_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{\mathbf{Q}}] \begin{Bmatrix} \alpha_1 c^2 + \alpha_2 s^2 \\ \alpha_1 s^2 + \alpha_2 c^2 \\ 2(\alpha_1 - \alpha_2)cs \end{Bmatrix} dz \quad (3.180)$$

$$[A] \begin{Bmatrix} \bar{\beta}_x \\ \bar{\beta}_y \\ \bar{\beta}_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{\mathbf{Q}}] \begin{Bmatrix} \beta_1 c^2 + \beta_2 s^2 \\ \beta_1 s^2 + \beta_2 c^2 \\ 2(\beta_1 - \beta_2)cs \end{Bmatrix} dz \quad (3.181)$$

En tant qu'état, les coefficients de rigidité Q_{ij} sont en général des fonctions à la fois de la température T et de la teneur en humidité C . Pour des applications pratiques, par conséquent, ces coefficients peuvent être considérés simplement comme les valeurs instantanées à des conditions particulières de température et d'humidité.

Il est également intéressant de noter que si les effets hygrothermiques ne produisent aucune contrainte de cisaillement dans une couche unidirectionnelle alignée avec les axes de coordonnées du stratifié, ils induisent des coefficients de dilatation par cisaillement α_{xy} ou β_{xy} pour les stratifiés orthotropes généraux, ce qui implique que des contraintes de cisaillement sont également introduites en raison des effets hygrothermiques.

d) Analyse des stratifiés soumis aux charges mécaniques et hygrothermiques combinées

Pour les stratifiés soumis à des charges mécaniques et hygrothermiques externes combinées, en plus des contraintes hygrothermiques, il existe dans chaque couche des contraintes, $\sigma_{(k)}^M$, résultant des charges mécaniques appliquées de l'extérieur. Les contraintes totales dans une couche donnée sont la somme de ces deux types de contraintes :

$$\sigma_{(k)} = \sigma_{(k)}^R + \sigma_{(k)}^M$$

L'intégration à travers l'épaisseur des contraintes de couche et de leurs moments donne des contraintes mécaniques nettes et des résultantes de moment, N^M et M^M , respectivement

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma dz = N^M \quad \text{et} \quad \int_{-h/2}^{h/2} \sigma z dz = M^M \quad (3.182)$$

Puisque les contraintes dans les couches ont deux parties, nous avons maintenant :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma^M dz + \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^R dz = N^M \quad \text{et} \quad \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^M z dz + \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^R z dz = M^M \quad (3.183)$$

Nous avons déjà mentionné que les intégrales à travers l'épaisseur des contraintes induites par l'hygrothermie sont nulles. Cependant, pour des raisons de dérivation, nous substituons l'expression des contraintes résiduelles induites et réécrivons les équations ci-dessus sous la forme suivante :

$$\left(\int_{-h/2}^{h/2} \sigma^M dz \right) + A\varepsilon^{0N} + B\kappa^N - N^N = N^M \quad (3.184)$$

$$\left(\int_{-h/2}^{h/2} \sigma^M z dz \right) + B\varepsilon^{0N} + D\kappa^N - M^N = M^M$$

$$A\varepsilon^{0M} + B\kappa^M + A\varepsilon^{0N} + B\kappa^N - N^N = N^M \quad (3.185)$$

$$B\varepsilon^{0M} + D\kappa^M + B\varepsilon^{0N} + D\kappa^N - M^N = M^M$$

Exprimer les déformations totales du plan médian du stratifié sous la forme d'une superposition des parties mécaniques et non mécaniques.

3.3.4. Règles de conception d'une pièce composite

Les règles de conception spécifiques aux stratifiés sont formulées à l'échelle mésoscopique. Ces règles proviennent de l'expérience industrielle en matière de conception et de fabrication composite. Elles visent pour la plupart à éviter les empilements susceptibles d'exacerber des comportements indésirables ou des modes critiques d'endommagement échappant aux capacités de prévision des modèles de pré-dimensionnement. Pour plus de justification, le lecteur peut se reporter à [2-4]. De façon générale, le dimensionnement d'un stratifié débute par le choix d'un ensemble pertinent d'orientations de pli admissibles pour l'application considérée. En raison de contraintes de fabrication et en particulier des tolérances de positionnement angulaire des plis, cet ensemble est le plus souvent restreint aux quatre orientations 0° , $\pm 45^\circ$ et 90° . Néanmoins, le développement des procédés de drapage automatisés tend à généraliser l'usage d'orientations supplémentaires telles que les orientations $\pm 15^\circ$, $\pm 30^\circ$, $\pm 60^\circ$ et $\pm 75^\circ$ offrant ainsi davantage de liberté pour la conception des empilements, en particulier pour les structures les plus minces.

Les six règles suivantes sont appliquées localement pour la conception de chaque empilement.

1. La règle de symétrie miroir consiste à définir des empilements symétriques par rapport au plan moyen du stratifié. Cette règle permet d'éviter les couplages entre le comportement de membrane et le comportement de flexion du stratifié.
2. La règle d'équilibrage consiste à imposer un même nombre de plis orientés à $+\theta^\circ$ qu'à $-\theta^\circ$, avec θ différent de 0 et 90. L'équilibrage permet d'annuler les couplages plans cisaillement/traction.
3. La règle de groupage consiste à limiter le nombre de plis contigus de même orientation. Cette règle vise à réduire les phénomènes d'endommagement sensibles à l'épaisseur des couches, comme les effets de bords libres ou la microfissuration matricielle.
4. La règle de désorientation impose une différence maximale de 45° , en valeur absolue, entre les orientations de deux plis adjacents. Cette règle de conception vise à minimiser les effets des cisaillements interlaminaires afin de limiter les problèmes de délaminage en bords libres et au niveau des perforations et des assemblages.
5. La règle des 10% impose un minimum de 10% plis dans chacune des directions 0° , $\pm 45^\circ$ et 90° (parfois 8 % selon la référence consultée). Cette règle de conception vise à éviter d'obtenir un stratifié dont le comportement est régi par celui de la matrice dans certaines directions.

- La dernière règle concerne la tolérance aux dommages et recommande de protéger les plis les plus chargés en les protégeant des surfaces exposées du stratifié par des plis désorientés de $\pm 45^\circ$ par rapport à la direction de la sollicitation principale, ceci afin de minimiser les conséquences d'impacts ou de rayures éventuels.

Six règles s'appliquent localement pour la définition des arrêts et reprises de plis. Une zone de transition d'épaisseur portant sur une variation de quatre plis est présentée en Figure 3.17.

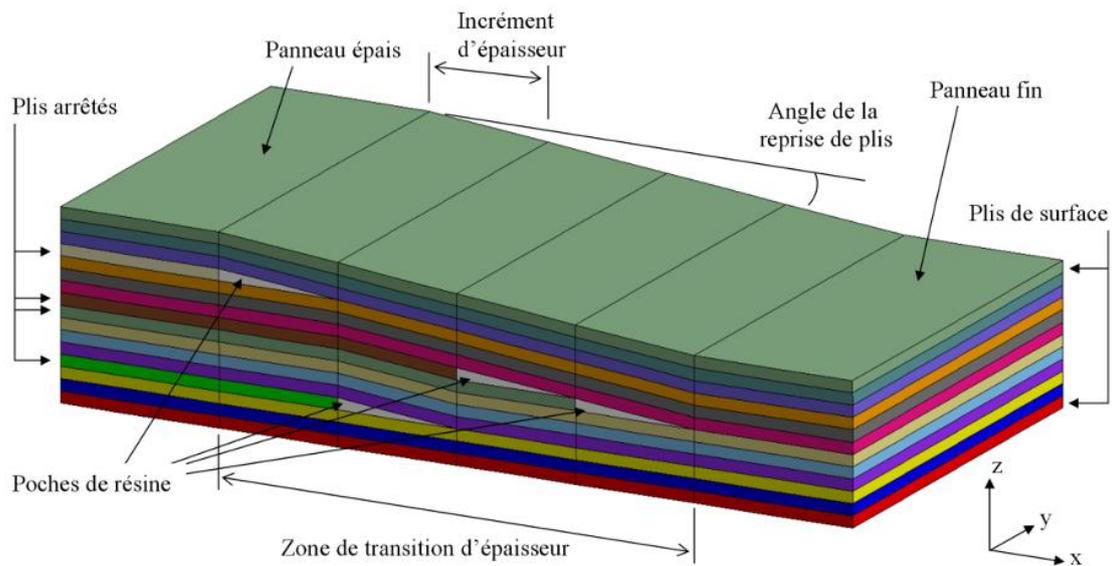


Figure 3.23 Représentation idéalisée d'une zone de transition d'épaisseur entre un panneau épais à 16 plis et un panneau fin à 12 plis. Les panneaux correspondent ici à des zones d'épaisseur constante.

- Les plis de surface doivent rester ininterrompus afin d'éviter tout risque de pelage. Les plis de surface doivent protéger les plis les plus chargés sur toute la surface de la structure.
- L'angle de la zone de reprise ne doit pas excéder 7° (dans certaines références, cette valeur est réduite à 3° dans la direction de l'effort principal), dans le but d'éviter de trop fortes surcontraintes au niveau de la singularité géométrique et de privilégier des surfaces lissées.
- Ne pas arrêter plus de deux plis au même incrément d'épaisseur.
- Par rapport au stratifié le plus épais dans la structure, il convient de conserver au moins un pli continu tous les trois plis arrêtés afin d'assurer une bonne intégrité de la structure.
- Les reprises de plis doivent être distribuées alternativement proches et éloignées du feuillet moyen du stratifié.

12. Les stratifiés de la zone de transition d'épaisseur doivent respecter, autant que possible, les règles d'empilement 1 à 6 énumérées précédemment. En particulier, la symétrie et l'équilibre doivent être préservés.

Enfin, deux règles globales s'appliquent au dimensionnement de la structure dans son ensemble.

13. Afin d'assurer l'intégrité de la structure, tous les plis du panneau le plus fin doivent s'étendre sur l'ensemble de la structure. Couper un pli entre deux panneaux pour changer son orientation n'est pas admissible.

14. Dans le but de lisser la distribution des efforts dans la structure, il est recommandé de limiter les variations d'épaisseur entre panneaux adjacents.

Les matériaux composites sont des assemblages hétérogènes de deux ou plusieurs composants non miscibles, mais ayant une forte capacité d'interpénétration. Ils permettent de combiner les propriétés de différents matériaux de base (comme les fibres et la matrice) pour obtenir des propriétés améliorées par rapport aux matériaux traditionnels. Cette innovation permet notamment de réduire le poids des structures tout en conservant une grande résistance mécanique, ce qui est particulièrement intéressant dans des domaines comme l'aéronautique. Les matériaux composites ouvrent ainsi la voie à de nouveaux concepts de conception et de fabrication dans de nombreuses industries.

CHAPITRE 4

Critères de rupture classique

4.1. Mécanismes de rupture dans les matériaux composites

Le processus mécanique conduisant à la rupture finale d'un matériau, en particulier dans le cas des matériaux composites, implique plusieurs étapes et mécanismes. Initialement, l'initiation de la rupture se produit à une échelle microscopique avec la formation de fissures, souvent bien avant tout changement observable dans le comportement macroscopique. Ces fissures peuvent résulter de divers mécanismes de dégradation, tels que la rupture des ponts de résine entre les fibres, la rupture transverse de la matrice, la rupture longitudinale de la matrice, la rupture de l'interface fibre-matrice (décohésion), la rupture des fibres, et le délaminage entre les plis. Ces mécanismes élémentaires de rupture coexistent et se développent différemment en fonction des matériaux et des conditions de sollicitation mécanique. La propagation de la rupture se manifeste par la création de nouvelles surfaces de déchirures à l'échelle macroscopique, résultant en la rupture finale du matériau composite

Divers mécanismes de rupture dans un composite unidirectionnel

La rupture finale d'un composite unidirectionnel est le résultat de l'accumulation de divers mécanismes élémentaires :

- La rupture des fibres ;
- La rupture transverse de la matrice ;
- La rupture longitudinale de la matrice ;
- La rupture de l'interface (décohésion).

Généralement, un mécanisme n'est pas isolé, mais divers mécanismes coexistent. Ces mécanismes se développent suivant la nature des matériaux et les conditions de sollicitations mécaniques imposées.

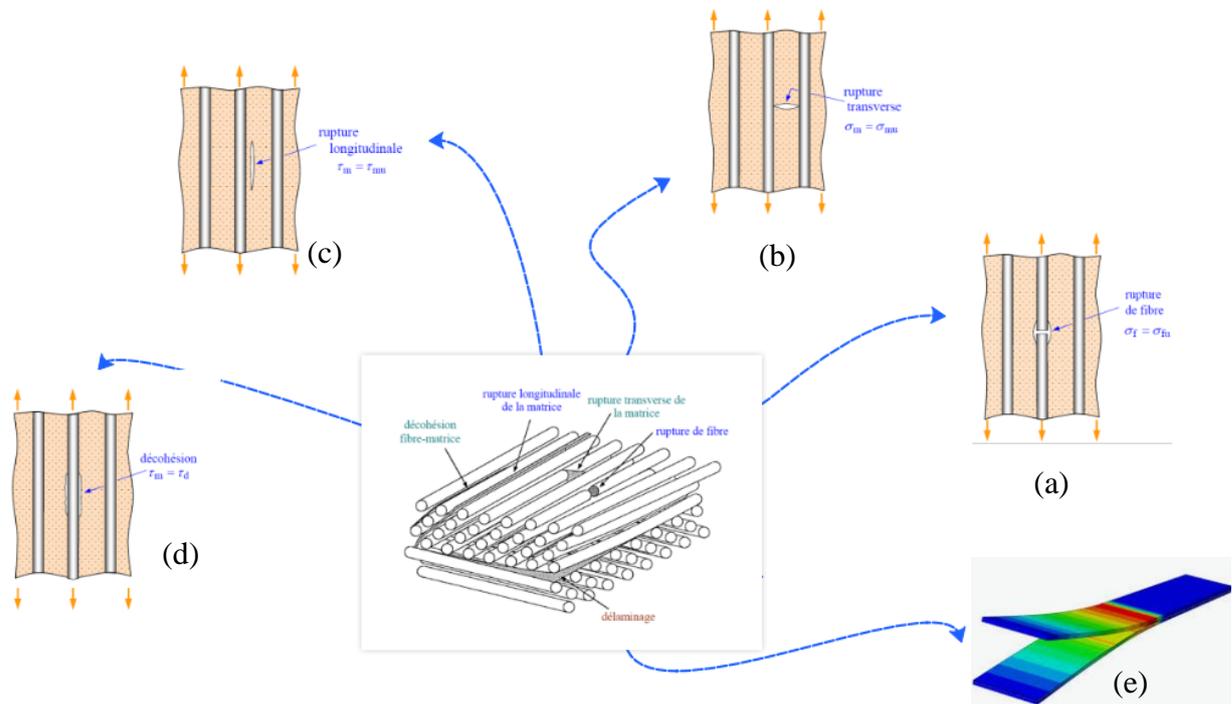


Figure 4.1 Mécanismes de rupture observés dans les stratifiés.

1. Rupture de fibre :

Dans un matériau composite unidirectionnel soumis à des sollicitations mécaniques, la rupture des fibres intervient lorsque la contrainte de traction σ_f dans une fibre atteint la contrainte à la rupture σ_{fu} de la fibre (Fig 4.1(a)).

2. Rupture de la matrice

La fissuration de la matrice peut se produire, soit par fissuration transverse (Fig 4.1(b)) lorsque la contrainte en traction σ_m dans la matrice atteint la contrainte à la rupture σ_{mu} de la matrice, soit par fissuration longitudinale (Fig 4.1(c)) lorsque la contrainte de cisaillement τ_m dans la matrice atteint la contrainte en cisaillement à la rupture τ_{mu} , généralement au voisinage d'une fibre. Le dernier mode appelé « splitting », se produit lorsque la contrainte de décohésion est supérieure à la contrainte en cisaillement (Fig 4.1(d)).

La rupture finale d'un matériau composite unidirectionnel est le résultat de l'accumulation de ces divers mécanismes élémentaires. L'initiation et la propagation de la rupture dépendent des propriétés des fibres et de la matrice, de l'interface fibre-matrice, de la fraction volumique des fibres, de l'état et des conditions de sollicitations mécaniques imposées.

3. Délaminage

Un autre mécanisme de rupture s'ajoute aux précédents, appelé rupture par délaminage. Un mécanisme de rupture induit entre les couches qui dépend de la nature des constituants, de l'architecture des couches et du mode de sollicitation mécanique imposé (Fig 4.1(e)).

Exemple :

- Dans le cas d'un stratifié croisé soumis à une traction dans la direction 0° (Fig. 4.2), le premier phénomène de rupture observe est celui de la fissuration des couches orientées à 90° . La fissuration se produit par la rupture longitudinale de la matrice ou/et par rupture de l'interface fibre-matrice dans les couches orientées à 90° puis se développe jusqu'à ce que les fissures transverses créent en ces pointes des concentrations de contraintes entre les plis conduisant ainsi à l'initiation puis la propagation du délaminage à l'interface entre les couches.

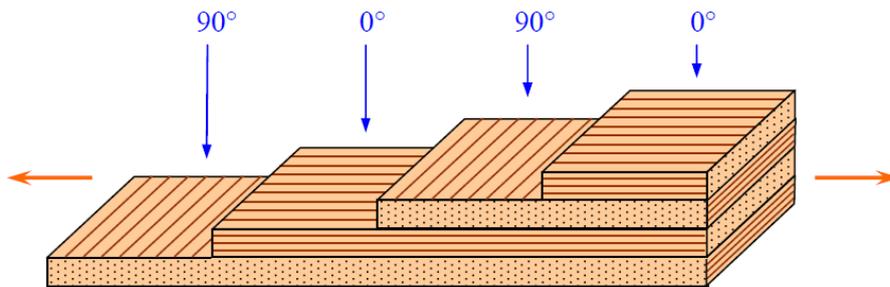


Figure 4.2 Stratifié croisé soumis à une traction dans la direction 0°

- Dans le cas d'un stratifié croisé $\pm 45^\circ$, soumis à une traction dans la direction 0° (Fig. 4.3), on observe d'abord une rupture longitudinale dans les couches $\pm 45^\circ$, suivie d'un délaminage entre les couches.

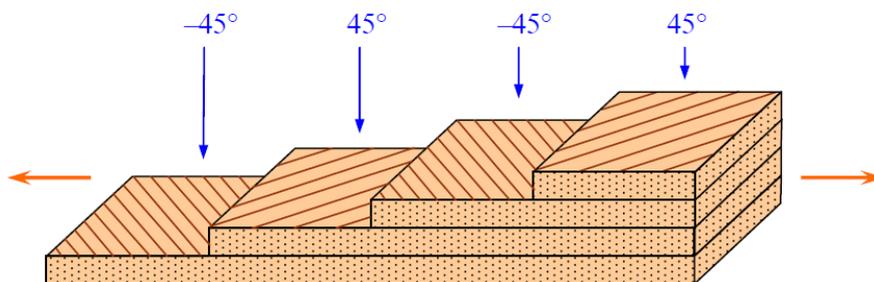


Figure 4.3 Stratifié croisé $\pm 45^\circ$ soumis à une traction dans la direction 0°

- Un autre exemple d'une plaque trouée en stratifié $[0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ]_n$, soumise à une traction dans la direction 0° (Fig. 4.4). Dans la 1^{ère} phase, il se produit une fissuration

longitudinale dans les couches à 90° (Fig. 4.4(b)). Dans la 2^{ème} phase, on observe l'initiation de la fissuration dans les couches à $\pm 45^\circ$ à partir des fissures propagées dans les couches 90° . La 3^{ème} phase est marquée par l'apparition de fissures longitudinales, partant du trou, dans les couches à 0° produisant ainsi un délaminage des couches, suivi de la rupture des couches à 90° , puis des couches à $\pm 45^\circ$, et enfin d'une rupture des fibres dans les couches à 0° conduisant à la rupture finale de la plaque.

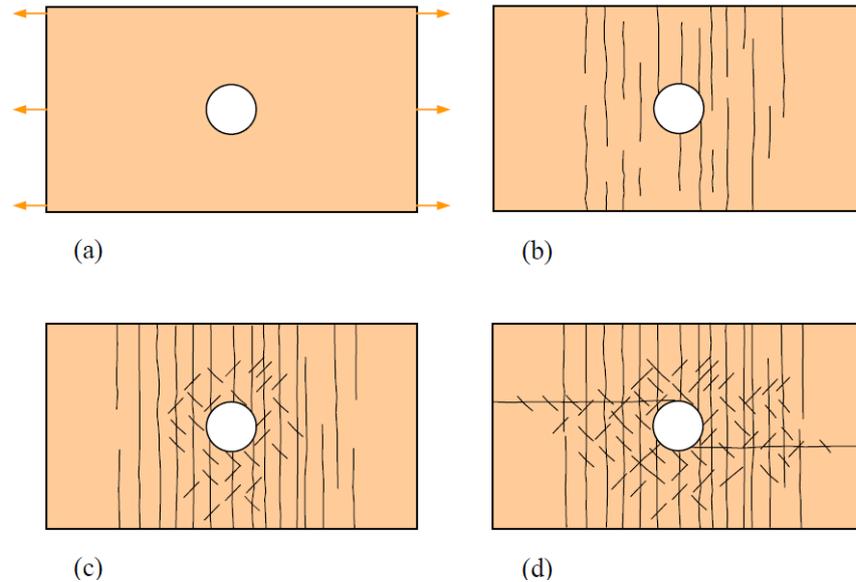


Figure 4.4 Fissuration d'un stratifié croisé $[0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ]_n$, (a) Plaque avec un trou en son centre soumise à une charge de traction ; (b) 1^{ère} phase : fissuration dans les couches à 90° ; (c) 2^{ème} phase : fissuration dans les couches à $\pm 45^\circ$; (d) 3^{ème} phase : rupture dans les couches à 0°

- **Composite unidirectionnel soumis à une traction longitudinale**

Dans le cas d'un composite unidirectionnel soumis à une traction longitudinale, l'initiation de la rupture se produit généralement soit par rupture des fibres lorsque la déformation à la rupture des fibres est plus faible que celle de la matrice ($\epsilon_{fu} < \epsilon_{mu}$), soit par rupture de la matrice dans le cas contraire.

En admettant l'égalité des déformations dans la fibre et dans la matrice, la relation (3.67) s'écrit au moment de la rupture :

$$\sigma_{cu} = \sigma_{fu}V_f + (\sigma_m)_{\epsilon_{fu}}(1 - V_f) \quad (4.1)$$

Où σ_{cu} est la contrainte à la rupture du composite, σ_{fu} ; la contrainte à la rupture des fibres et $(\sigma_m)_{\epsilon_{fu}}$ la contrainte de la matrice pour une déformation égale a la déformation a la rupture des fibres. la contrainte $(\sigma_m)_{\epsilon_{fu}}$ est inferieure a la contrainte à la rupture σ_{mu} de la matrice, d'où :

$$\sigma_{cu} \leq \sigma_{fu}V_f + \sigma_{mu}(1 - V_f) \quad (4.2)$$

Généralement, l'expression retenue pour la contrainte à la rupture du composite est la loi des mélanges :

$$\sigma_{cu} = \sigma_{fu}V_f + \sigma_{mu}(1 - V_f) \quad (4.3)$$

Avec pour les fractions usuelles de fibres :

$$\sigma_{cu} \approx \sigma_{fu}V_f \quad (4.4)$$

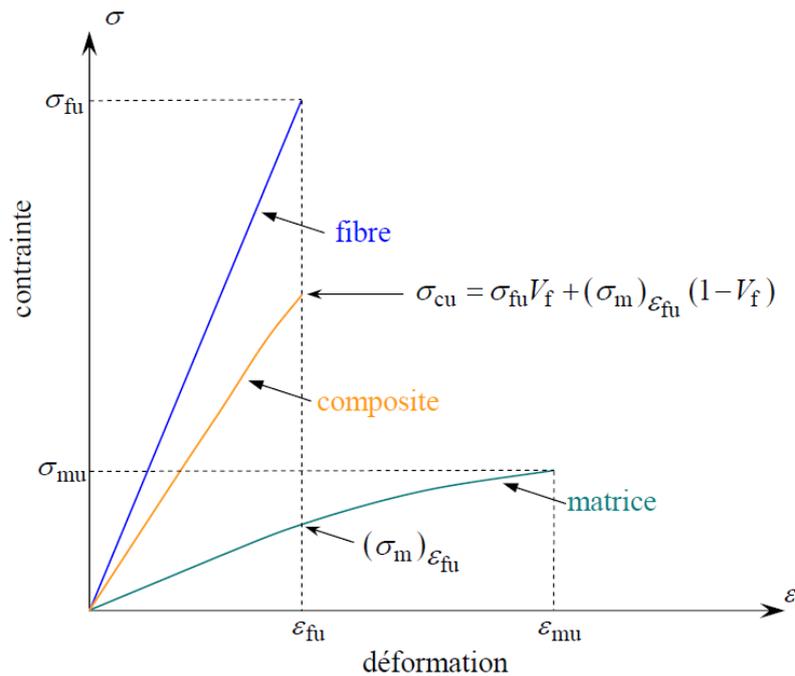


Figure 4.1 Courbe contrainte-déformation d'un composite unidirectionnel soumis a une traction longitudinale, dans le cas où $(\varepsilon_{fu} < \varepsilon_{mu})$

Dans le cas où la déformation à la rupture de la matrice est inférieure à celle des fibres $(\varepsilon_{mu} < \varepsilon_{fu})$, la contrainte à la rupture est donnée par l'expression :

$$\sigma_{cu} = (\sigma_f)_{\varepsilon_{mu}} V_f + \sigma_{mu}(1 - V_f) \quad (4.5)$$

Où $(\sigma_f)_{\varepsilon_{mu}}$ est la contrainte de la fibre au moment de la rupture de la matrice σ_{mu} . La valeur de la contrainte à la rupture du matériau composite est alors bien inférieure à celle donnée par l'expression (4.1). La matrice ne permet pas dans ce cas de bénéficier totalement du renfort des fibres.

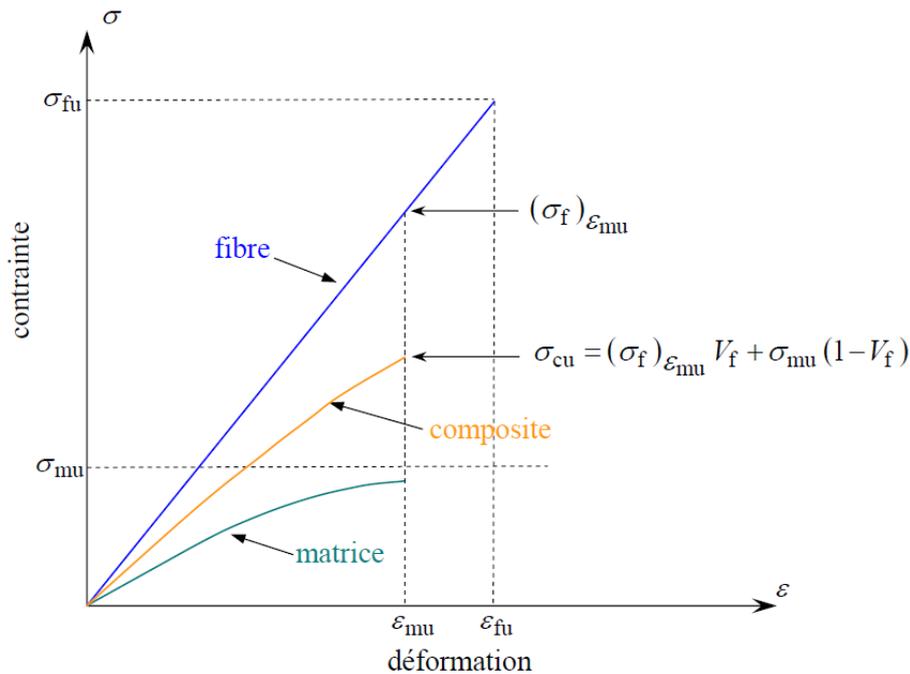


Figure 4.2 Courbe contrainte-déformation d'un composite unidirectionnel soumis a une traction longitudinale, dans le cas où $(\varepsilon_{mu} < \varepsilon_{fu})$

Exemples :

Les caractéristiques mécaniques usuelles des fibres sont :

- Pour les fibres de carbone :
 - A haute résistance (HS)

$$E_f = 220GPa, \sigma_{fu} = 3000 \text{ à } 4000MPa, \quad \text{soit } \varepsilon_{fu} = 1,4 \text{ à } 1,8\%;$$

- A haut module (HM)

$$E_f = 400GPa, \sigma_{fu} \approx 2200MPa, \quad \text{soit } \varepsilon_{fu} = 0,5\%;$$

- Pour les fibres en verre :

$$E_f = 70GPa, \sigma_{fu} = 2400 \text{ à } 3400MPa, \quad \text{soit } \varepsilon_{fu} = 3,4 \text{ à } 3,8\%;$$

L'allongement à la rupture des résines usuelles est :

- Pour les polyesters rigides : $\varepsilon_{mu} = 2 \text{ à } 5\%$;
- Pour les résines phénoliques : $\varepsilon_{mu} \approx 2,5\%$;
- Pour les résines époxydes : $\varepsilon_{mu} = 2 \text{ à } 5\%$;

En outre, en utilisation industrielle, les résines sont assez fortement chargées, conduisant à une diminution notable de la déformation à la rupture de la matrice.

Ces chiffres montrent donc que les performances à la rupture des composites à hautes performances (composites à fibres de carbone) sont gouvernées par les propriétés à la rupture des fibres. Par contre, dans le cas des composites à fibres de verre, les performances à la rupture peuvent être limitées par une déformabilité trop faible de la matrice.

- ***Composite unidirectionnel soumis à une traction transverse***

Dans le cas d'un composite unidirectionnel soumis à une traction transverse, la rupture se produit soit par rupture de la matrice, soit par decohesion de l'interface fibre-matrice, suivant les caractéristiques à la rupture de la matrice et de l'interface. La rupture de la matrice se produit lorsque la contrainte en traction σ_m dans la matrice atteint la contrainte à la rupture σ_{mu} de la matrice. Ce processus intervient lorsque la contrainte à la rupture de la matrice est inférieure à la contrainte de decohesion σ_d en traction de l'interface fibre-matrice. Dans le cas contraire ou $\sigma_{mu} > \sigma_d$, la rupture du composite se produit par rupture de l'interface fibre-matrice.

4.2. Critères de rupture classique

4.2.1. Définition des critères de résistance

Les critères de rupture ont pour objectifs de permettre au concepteur d'avoir une évaluation de la résistance mécanique des stratifiés. D'une manière générale, la résistance mécanique d'un matériau correspond à une dégradation irréversible : soit à la rupture réelle du matériau soit à la limite du domaine élastique (Figure 4.3).

La grande majorité des critères de rupture pour les composites sont dits macroscopiques. L'échelle de référence est donc celle du pli ou de la couche.

Les critères de rupture classique des matériaux composites sont essentiels pour prédire le comportement de ces matériaux. Pour un composite stratifié avec un comportement de type contraintes planes, les caractéristiques de premières ruptures à déterminer sont au nombre de 5, incluant la résistance dans le sens des fibres en traction et compression, les résistances transverses aux fibres en traction, compression, et le cisaillement plan.

X_t : Résistance à la traction dans le sens de la fibre ;

X_c : Résistance à la compression dans le sens de la fibre ;

Y_t : Résistance transverse aux fibres en traction ;

Y_c : la résistance transverse aux fibres en compression ;

S : Résistance au cisaillement plan ;

Les critères de rupture sont établis dans le cas d'une couche d'un stratifié et peuvent être classés suivant :

- Des critères en contraintes maximales ;
- Des critères en déformations maximales ;
- Des critères interactifs, souvent appelés critères énergétiques ;

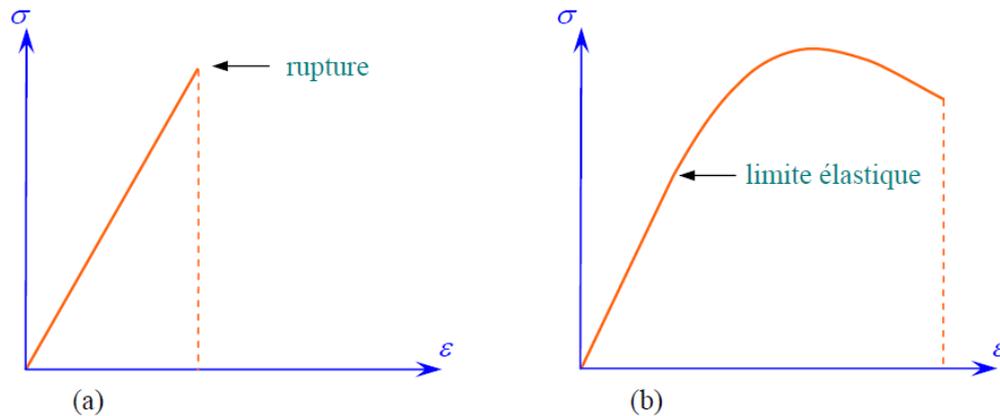


Figure 4.3 Comportements fragile et ductile d'un matériau

4.2.2. Critères en contraintes maximales

a) Critères dans les axes des matériaux

Dans le cas d'une couche soumise à un état de contraintes planes ($\sigma_L, \sigma_T, \sigma_{LT}$) dans les axes des matériaux, les critères en contraintes maximales stipulent que la résistance mécanique de la couche est atteinte lorsque l'une des trois contraintes auxquelles la couche est soumise atteint la valeur de la contrainte à la rupture correspondante. Les critères de rupture s'écrivent sous la forme :

$$-X_c < \sigma_L < X_t, \quad -Y_c < \sigma_T < Y_t \quad \text{et} \quad -S < \sigma_{LT} < S \quad (4.6)$$

Si les inéquations sont vérifiées, l'état de contraintes limite n'est pas atteint. Dans le cas contraire, la rupture se produit suivant le mécanisme correspondant à la contrainte de l'inéquation non vérifiée.

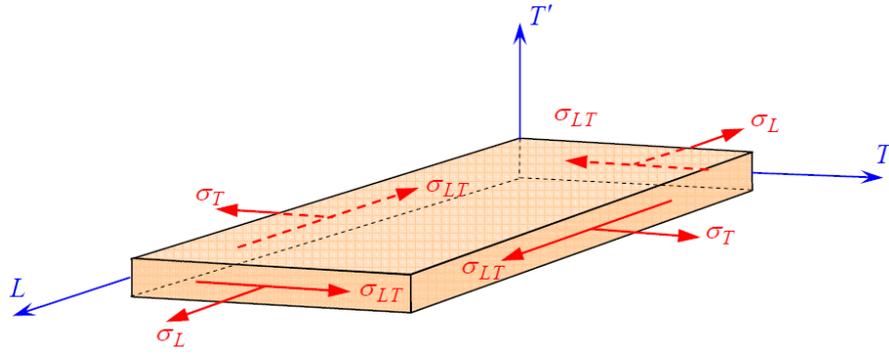


Figure 4.4 Contraintes dans les axes des matériaux d'une couche

b) Critère de contrainte maximale en-dehors des axes du matériau

Dans ce cas, il est nécessaire de se ramener aux axes des matériaux par une rotation d'angle θ .
Les contraintes exprimées dans les axes des matériaux s'écrivent :

$$\begin{aligned}\sigma_L &= \sigma_{xx} \cos^2 \theta + \sigma_{yy} \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \sigma_T &= \sigma_{xx} \sin^2 \theta + \sigma_{yy} \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \sigma_{LT} &= (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)\end{aligned}\tag{4.7}$$

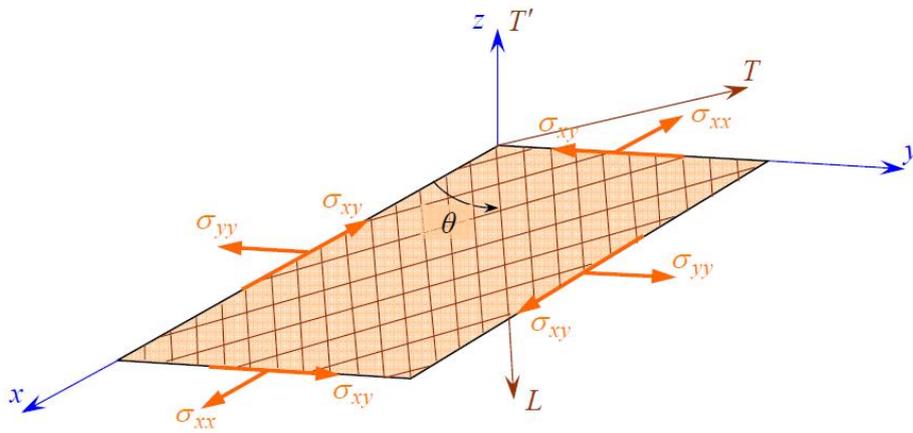


Figure 4.5 Couche rapportée a des axes de référence quelconques

Et les critères en contraintes maximales sont donnés par :

$$\begin{aligned}-X_c &< \sigma_{xx} \cos^2 \theta + \sigma_{yy} \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta < X_t , \\ -Y_c &< \sigma_{xx} \sin^2 \theta + \sigma_{yy} \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta < Y_t \text{ et} \\ -S &< (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) < S\end{aligned}\tag{4.8}$$

Dans le cas d'une traction ou compression en-dehors des axes des matériaux, les contraintes se réduisent à :

$$\begin{aligned}\sigma_L &= \sigma_{xx} \cos^2 \theta \\ \sigma_T &= \sigma_{xx} \sin^2 \theta \\ \sigma_{LT} &= -\sigma_{xx} \sin \theta \cos \theta\end{aligned}\quad (4.9)$$

Ce critère peut être représenté graphiquement en traçant la valeur maximale σ_{xu} de la contrainte σ_{xx} de traction ou de compression pour laquelle l'un des critères est atteint, en fonction de l'angle θ entre la direction du chargement et la direction du matériau.

Et les critères en contraintes maximales s'expriment suivant :

$$\begin{aligned}-X_c &< \sigma_{xx} \cos^2 \theta < X_t, \\ -Y_c &< \sigma_{xx} \sin^2 \theta < Y_t \text{ et} \\ -S &< -\sigma_{xx} \sin \theta \cos \theta < S\end{aligned}\quad (4.10)$$

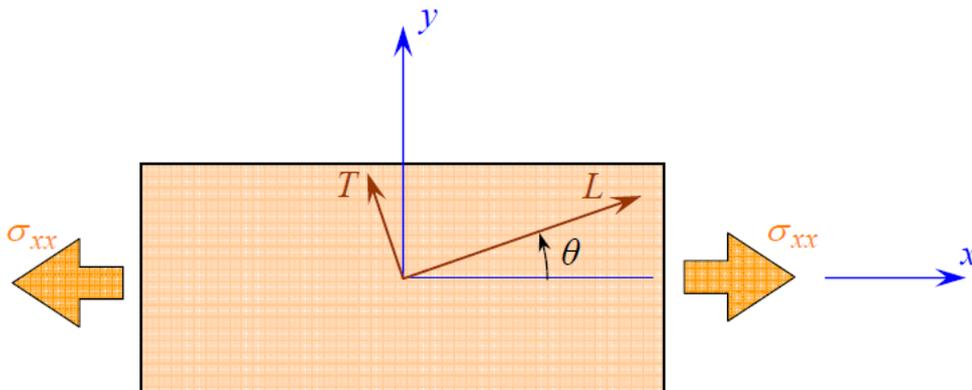


Figure 4.6 Traction en-dehors des axes des matériaux

Dans un essai de traction, la contrainte de traction σ_{xu} correspond à la plus petite des valeurs :

$$\sigma_{xu} = \frac{X_t}{\cos^2 \theta}, \quad \sigma_{xu} = \frac{Y_t}{\sin^2 \theta}, \quad \sigma_{xu} = \frac{S}{\sin \theta \cos \theta}\quad (4.11)$$

Et dans un essai de compression, la contrainte de traction σ_{xu} correspond à la plus petite des valeurs :

$$\sigma_{xu} = \frac{X_c}{\cos^2 \theta}, \quad \sigma_{xu} = \frac{Y_c}{\sin^2 \theta}, \quad \sigma_{xu} = \frac{S}{\sin \theta \cos \theta}\quad (4.12)$$

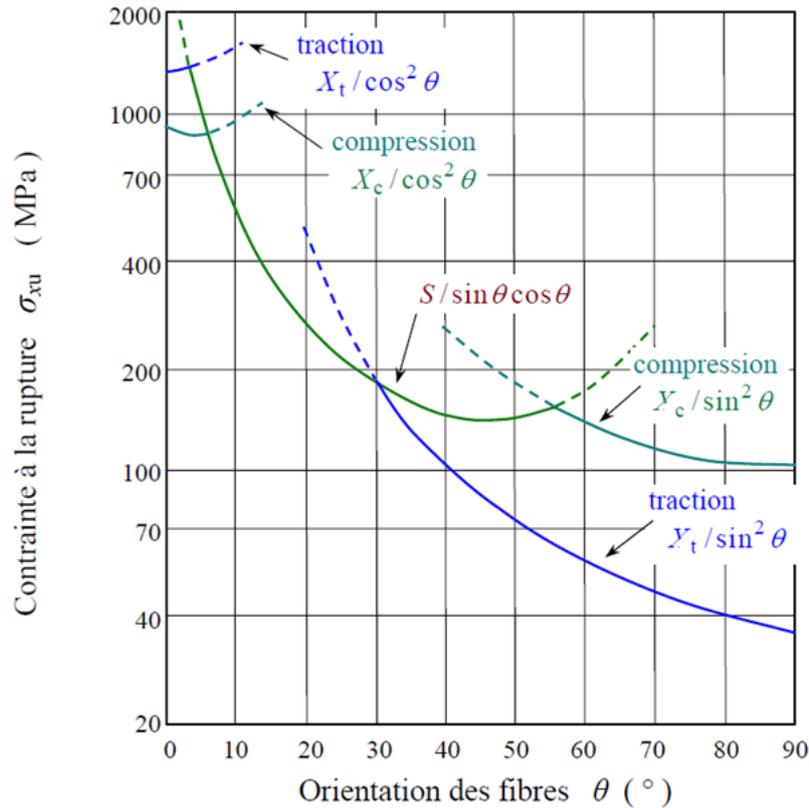


Figure 4.7 Critère de la contrainte maximale dans le cas d'un composite unidirectionnel à fibre de verre

4.2.3. Critères en déformations maximales

a) Critères dans les axes des matériaux

Les critères en déformations maximales sont transposés des critères en contraintes maximales, en ce que le matériau se rompt lorsque la déformation principale maximale en un point dépasse la déformation de rupture du même matériau dans un simple essai de traction ou de compression.

Les critères en déformations font intervenir :

- X_{et} : la déformation à la rupture en traction dans le sens de la fibre ;
- X_{ec} : la déformation à la rupture en compression dans le sens de la fibre ;
- Y_{et} : la déformation à la rupture transverse aux fibres en traction ;
- Y_{ec} : la déformation à la rupture transverse aux fibres en compression ;
- S_{ε} : la déformation à la rupture en cisaillement plan ;

$$\begin{aligned}
 -X_{ec} < \varepsilon_L < X_{et} , \\
 -Y_{ec} < \varepsilon_T < Y_{et} \text{ et}
 \end{aligned}
 \tag{4.13}$$

$$-S_\varepsilon < \gamma_{LT} < S_\varepsilon$$

b) Critères en-dehors des axes des matériaux

Dans ce cas d'une traction ou compression en-dehors des axes des matériaux, les déformations dans les axes sont, dans le cas des contraintes plane :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Soit en associant (4.9) et (4.14)

$$\begin{aligned} \varepsilon_L &= (S_{11}\cos^2\theta + S_{12}\sin^2\theta)\sigma_{xx}, \\ \varepsilon_T &= (S_{12}\sin^2\theta + S_{22}\cos^2\theta)\sigma_{xx} \\ \gamma_{LT} &= S_{66}\sin\theta\cos\theta\sigma_{xx} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Ces relations sont transformées suivant les constantes d'élasticité :

$$\begin{aligned} \varepsilon_L &= \frac{1}{E_L}(\cos^2\theta - \nu_{LT}\sin^2\theta)\sigma_{xx}, \\ \varepsilon_T &= \frac{1}{E_T}(\sin^2\theta + \nu_{TL}\cos^2\theta)\sigma_{xx} \\ \gamma_{LT} &= \frac{1}{G_{LT}}\sin\theta\cos\theta\sigma_{xx} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Dans le cas d'une traction ou compression longitudinale à $\theta = 0^\circ$, et dans le cas d'une traction ou compression transverse à $\theta = 90^\circ$:

$$\begin{aligned} X_{\varepsilon t} &= \frac{X_t}{E_L}, & X_{\varepsilon c} &= \frac{X_c}{E_L} \\ Y_{\varepsilon t} &= \frac{Y_t}{E_T}, & Y_{\varepsilon c} &= \frac{Y_c}{E_T} \end{aligned} \quad (4.17)$$

D'autre part, l'identité du critère de rupture en cisaillement dans les deux cas conduit à :

$$S_\varepsilon = \frac{S}{G_{LT}} \quad (4.18)$$

Il en résulte que les critères en déformations maximales (4.13) peuvent être réécrites suivant :

$$\frac{-X_c}{\cos^2\theta - \nu_{LT}\sin^2\theta} < \sigma_{xx} < \frac{X_t}{\cos^2\theta - \nu_{LT}\sin^2\theta} ,$$

$$\frac{-X_c}{\sin^2\theta - \nu_{LT}\cos^2\theta} < \sigma_{xx} < \frac{X_t}{\sin^2\theta - \nu_{LT}\cos^2\theta} \quad \text{et} \quad (4.19)$$

$$\frac{-S}{\sin\theta\cos\theta} < \sigma_{xx} < \frac{S}{\sin\theta\cos\theta}$$

4.2.4. Le critère mixte

Il s'agit d'une combinaison des deux critères précédents : déformations maximales appliquées dans la direction des fibres, et contraintes maximales appliquées dans la direction transverse et en cisaillement. Il ne fait pas de distinction entre les modes de défaillance unidirectionnels.

4.2.5. Le critère de Hill

Un des premiers critères de rupture appliqués aux matériaux anisotropes a été introduit par R.Hill. Ce critère peut être formulé en disant que l'état limite de contraintes d'un matériau anisotrope n'est pas atteint tant que l'inégalité suivante est vérifiée :

$$F(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + G(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + H(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 2L\tau_{23}^2 + 2M\tau_{13}^2 + 2N\tau_{12}^2 < 1 \quad (4.20)$$

La rupture du matériau se produit donc lorsque l'égalité est vérifiée, soit :

$$F(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + G(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + H(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 2L\tau_{23}^2 + 2M\tau_{13}^2 + 2N\tau_{12}^2 = 1 \quad (4.21)$$

Cette égalité constitue le critère de Hill, rapporté aux axes principaux (1, 2, 3) du matériau. Il peut également être mis sous autre forme suivant :

$$(G + H)\sigma_1^2 + (F + H)\sigma_2^2 + (F + G)\sigma_3^2 - 2H\sigma_1\sigma_2 - 2G\sigma_1\sigma_3 - 2F\sigma_2\sigma_3 + 2L\tau_{23}^2 + 2M\tau_{13}^2 + 2N\tau_{12}^2 = 1 \quad (4.22)$$

Les paramètres F, G, H, L, M et N sont des paramètres caractéristiques du matériau considéré, qui sont reliés aux contraintes à la rupture X, Y, S du matériau suivant les relations suivantes :

- Dans le cas d'un essai de traction (ou compression) dans la direction L, le critère de Hill se réduit à :

$$G + H = \frac{1}{X^2} \quad (4.23)$$

Où X est la contrainte à la rupture en traction (ou compression) dans la direction L.

- De même, on trouve :

$$F + H = \frac{1}{Y^2} \quad (4.24)$$

$$F + G = \frac{1}{Z^2} \quad (4.25)$$

Où Y et Z sont les contraintes à la rupture en traction (ou compression) dans les directions T et T'.

- Dans le cas d'un essai de cisaillement dans le plan (L, T), le critère de Hill se réduit à :

$$2N = \frac{1}{S_{12}^2} \quad (4.26)$$

Où S_{12} est la contrainte à la rupture en cisaillement dans le plan (L, T). De même :

$$2M = \frac{1}{S_{13}^2} \quad (4.27)$$

$$2L = \frac{1}{S_{23}^2} \quad (4.28)$$

Où S_{13} et S_{23} sont les contraintes à la rupture en cisaillement, respectivement dans les plans (L, T') et (T, T').

Les expressions permettent de déterminer les paramètres de rupture F, G, L, M, N est d'écrire le critère de Hill sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_1^2}{X^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y^2} + \frac{\sigma_3^2}{Z^2} - \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2}\right) \sigma_1 \sigma_2 - \left(\frac{1}{X^2} - \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2}\right) \sigma_1 \sigma_3 - \left(-\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2}\right) \sigma_2 \sigma_3 \\ + \left(\frac{\sigma_{12}}{S_{12}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{13}}{S_{13}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{23}}{S_{23}}\right)^2 = 1 \end{aligned} \quad (4.29)$$

Il est à noter que le critère de Hill ne prend pas en compte la différence du comportement des matériaux en traction et compression.

Dans le cas d'un état de contraintes planes dans le plan XY, la couche de matériau composite : $\sigma_3 = \tau_{13} = \tau_{23} = 0$, le critère de Hill se simplifie suivant :

$$\frac{\sigma_1^2}{X^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y^2} - \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2}\right) \sigma_1 \sigma_2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{S_{12}}\right)^2 = 1 \quad (4.30)$$

4.2.6. Le critère de Tsai-Hill

Tsai a simplifié le critère de rupture précédent (4.16) dans le cas de matériaux composites unidirectionnels.

Dans ce cas : $Y=Z$, et le critère (4.16) s'écrit :

$$\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X^2} + \left(\frac{\sigma_{12}}{S_{12}}\right)^2 = 1 \quad (4.31)$$

Ce critère est généralement connu sous le nom de critère de Tsai-Hill.

Dans le cas d'une traction ou compression en dehors des axes des matériaux, le critère de Tsai-Hill s'écrit :

$$\frac{\cos^4\theta}{X^2} + \left(\frac{1}{S_{LT}^2} - \frac{1}{X^2}\right) \sin^2\theta \cos^2\theta + \frac{\sin^4\theta}{Y^2} = \frac{1}{\sigma_{xx}^2} \quad (4.32)$$

Le problème principal du critère de Tsai-Hill est qu'il ne fait aucune distinction entre la résistance à la traction et celle à la compression. Ce manque de distinction peut entraîner des limitations dans la prédiction précise du comportement des matériaux composites soumis à des charges de traction et de compression, car les propriétés mécaniques en traction et en compression peuvent différer significativement.

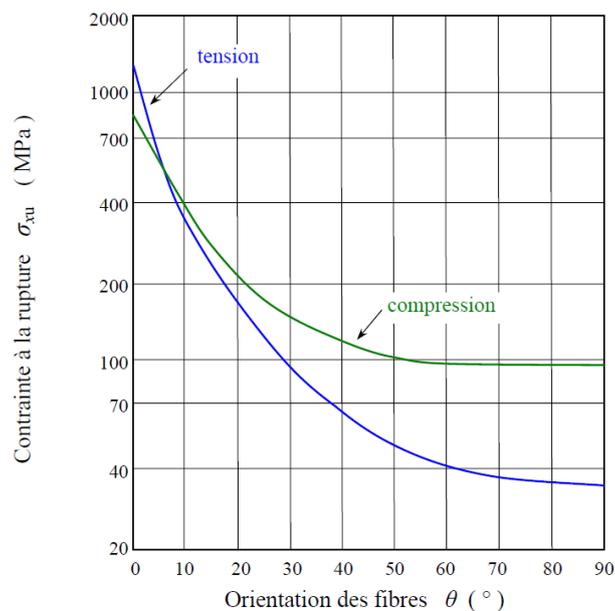


Figure 4.8 Critère de Tsai-Hill dans le cas d'un composite unidirectionnel à fibre de verre

4.2.7. Le critère de Tsai-Wu

Une forme plus générale du critère de rupture pour les matériaux orthotropes sous l'hypothèse de contraintes planes est exprimée par :

$$F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{66}\tau_{12}^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 + 2F_{16}\sigma_1\tau_{12} + 2F_{26}\sigma_2\tau_{12} + F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_6\tau_{12} = 1 \quad (4.33)$$

L'évaluation des coefficients de résistance nécessite d'utiliser les résultats d'expériences sur des éprouvettes fibrées unidirectionnelles dans des conditions de charge simples. Par exemple, si les contraintes de rupture d'un échantillon chargé le long de la direction des fibres en traction et en compression sont respectivement X_t et X_c , alors nous obtenons :

$$F_{11}X_t^2 + F_1X_t = 1, \quad (4.34)$$

$$F_{11}X_c^2 + F_1X_c = 1 \quad (4.35)$$

Les équations (4.34) et (4.35) sont un système de deux équations à deux inconnues, dont la solution donne :

$$F_1 = \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} \quad \text{et,} \quad F_{11} = \frac{1}{X_t X_c} \quad (4.36)$$

$$F_2 = \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c} \quad \text{et,} \quad F_{22} = \frac{1}{Y_t Y_c} \quad (4.37)$$

$$F_{66} = \frac{1}{S_{xy}^2} \quad (4.38)$$

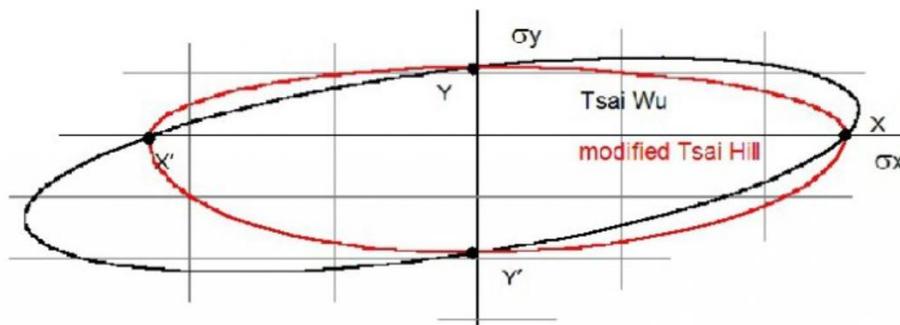


Figure 4.9 Comparaison des critères de rupture Tsai-Wu et Tsai-Hill

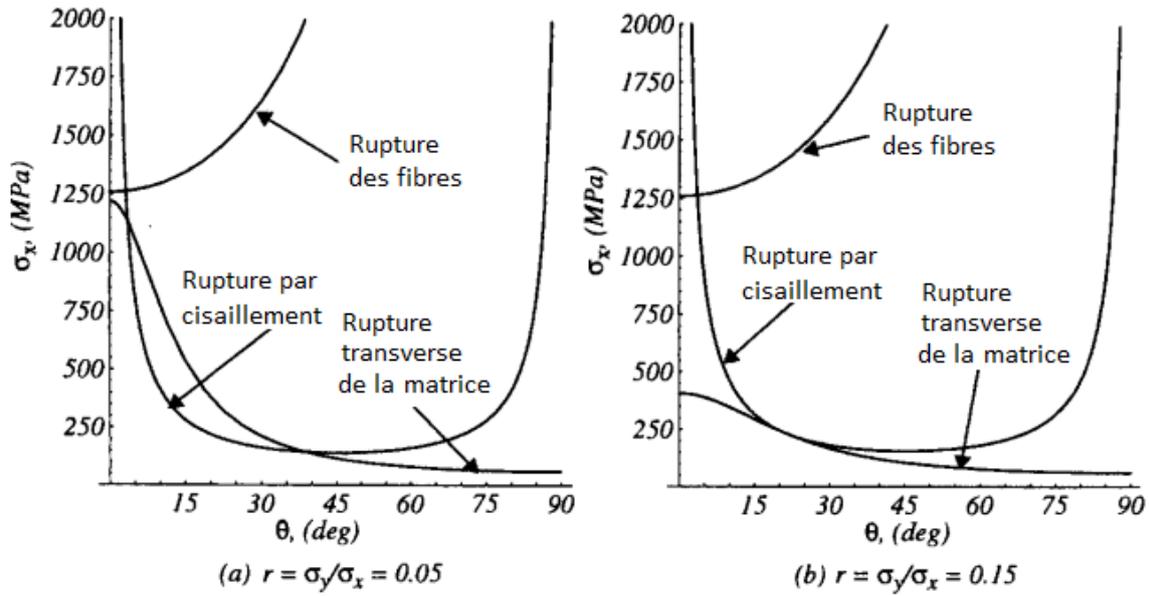


Figure 4.10 Résistance biaxiale du bore/époxy unidirectionnel.

Il reste à déterminer le paramètre de couplage F_{12} . Ce paramètre peut être déterminé dans un essai biaxiale. Un tel essai est effectué en exerçant la même contrainte dans les directions 1 et 2 du matériau. Les contraintes sont alors : $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, les autres contraintes étant nulles. Le critère s'écrit :

$$(F_{11} + F_{22} + 2F_{12})\sigma^2 + (F_1 + F_2)\sigma = 1 \quad (4.39)$$

D'où l'expression du paramètre d'interaction :

$$F_{12} = \frac{1}{2\sigma^2} \left[1 - \left(\frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} + \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c} \right) \sigma + \left(\frac{1}{X_t X_c} + \frac{1}{Y_t Y_c} \right) \sigma^2 \right] = 1 \quad (4.40)$$

La valeur de F_{12} correspond à la valeur σ de la contrainte mesurée lors de la rupture dans l'essai de traction biaxiale.

Dans la pratique, le coefficient d'interaction F_{12} peut également être déterminé dans un essai de traction (ou compression) à 45° des axes du matériau orthotrope.

Dans ce cas, les contraintes dans les axes du matériau sont :

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_6 = \frac{\sigma_{45}}{2}, \quad \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0 \quad (4.41)$$

Où σ_{45} est la contrainte de traction exercée. Le critère (4.33) s'écrit dans ce cas :

$$(F_{11} + F_{22} + F_{66} + 2F_{12}) \left(\frac{\sigma_{45}}{2} \right)^2 + (F_1 + F_2 + F_6) \frac{\sigma_{45}}{2} = 1 \quad (4.42)$$

D'où l'expression du paramètre d'interaction :

$$F_{12} = \frac{1}{2\sigma_{45}^2} \left[1 - \frac{\sigma_{45}}{2} \left(\frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} + \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c} \right) - \frac{\sigma_{45}^2}{2} \left(\frac{1}{X_t X_c} + \frac{1}{Y_t Y_c} + \frac{1}{S_{LT}^2} \right) \right] = 1 \quad (4.43)$$

La valeur de F_{12} correspond à la valeur σ_{45} de la contrainte mesurée lors de la rupture dans l'essai de traction à 45°.

En contraintes planes :

En tenant compte des résultats précédents, le critère de Tsai-Wu, dans un état de contraintes planes, s'écrit sous la forme :

$$\left(\frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} \right) \sigma_L + \left(\frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c} \right) \sigma_T + \frac{\sigma_L^2}{X_t X_c} + \frac{\sigma_T^2}{Y_t Y_c} + \frac{\sigma_{LT}^2}{S_{LT}^2} + 2F_{12}^* \frac{\sigma_L \sigma_T}{X_t X_c} = 1 \quad (4.44)$$

En introduisant le coefficient de couplage F_{12}^* , exprimé suivant :

$$F_{12}^* = \frac{1}{2\sigma^2} \left\{ 1 - \left[X_c - X_t + \frac{X_t X_c}{Y_t Y_c} (Y_c - Y_t) \right] \sigma + \left(1 + \frac{X_t X_c}{Y_t Y_c} \right) \sigma^2 \right\} \quad (4.45)$$

Ou bien

$$F_{12}^* = \frac{1}{2\sigma_{45}^2} \left\{ 1 - \left[X_c - X_t + \frac{X_t X_c}{Y_t Y_c} (Y_c - Y_t) \right] \frac{\sigma_{45}}{2} + \left(1 + \frac{X_t X_c}{Y_t Y_c} + \frac{X_t X_c}{S_{LT}^2} \right) \frac{\sigma_{45}^2}{2} \right\} \quad (4.46)$$

Où σ et σ_{45} sont les contraintes à la rupture déterminées, respectivement, dans un essai biaxiale et dans une traction à 45°. Bien souvent, le coefficient de couplage F_{12}^* est considéré comme un coefficient empirique, ajuste en fonction des résultats expérimentaux.

4.2.8. Le critère de Hashin

L'initiation de l'endommagement fait référence au début de la dégradation en un point du matériau. Les critères d'initiation de l'endommagement pour les composites renforcés de fibres basés sur la théorie de **Hashin** prennent en compte quatre mécanismes différents d'initiation des dommages : la tension des fibres, la compression des fibres, la tension de la matrice et la compression de la matrice.

Les critères d'initiation se présentent sous les formes générales suivantes :

- Tension de la fibre ($\bar{\sigma}_{11} \geq 0$):

$$F_f^t = \left(\frac{\bar{\sigma}_{11}}{X^T}\right)^2 + \alpha \left(\frac{\bar{\tau}_{12}}{S^L}\right)^2$$

- Compression de la fibre ($\bar{\sigma}_{11} < 0$):

$$F_f^c = \left(\frac{\bar{\sigma}_{11}}{X^C}\right)^2$$

- Tension de la matrice ($\bar{\sigma}_{22} \geq 0$):

$$F_m^t = \left(\frac{\bar{\sigma}_{22}}{Y^T}\right)^2 + \left(\frac{\bar{\tau}_{12}}{S^L}\right)^2$$

- Compression de la matrice ($\bar{\sigma}_{22} < 0$):

$$F_m^c = \left(\frac{\bar{\sigma}_{22}}{2S^T}\right)^2 + \left[\left(\frac{Y^C}{2S^T}\right)^2 - 1\right] \frac{\bar{\sigma}_{22}}{Y^C} + \left(\frac{\bar{\tau}_{12}}{S^L}\right)^2$$

Où

X^T : Résistance à la traction dans le sens de la fibre ;

X^C : Résistance à la compression dans le sens de la fibre ;

Y^T : Résistance transverse aux fibres en traction ;

Y^C : Résistance transverse aux fibres en compression ;

S^L : la résistance au cisaillement longitudinal ;

S^T : la résistance au cisaillement transversal ;

α : un coefficient qui détermine la contribution de la contrainte de cisaillement au critère d'initiation de la traction des fibres ;

$\bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{22}, \bar{\tau}_{12}$: sont les composantes du tenseur des contraintes effectives, $\bar{\sigma}$, qui est utilisé pour évaluer les critères d'initiation et qui est calculé à partir de :

$$\bar{\sigma} = M\sigma$$

Où σ est la contrainte nominale et M est l'opérateur d'endommagement :

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-d_f} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-d_m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-d_s} \end{bmatrix}$$

Où

d_f, d_m, d_s : sont des variables internes (d'endommagement) qui caractérisent l'endommagement des fibres, de la matrice et du cisaillement, et qui sont dérivées des variables d'endommagement $d_f^t, d_f^c, d_m^t, d_m^c$ correspondant aux quatre modes précédemment examinés, comme suit :

$$d_f \begin{cases} d_f^t & \text{if } \bar{\sigma}_{11} \geq 0 \\ d_f^c & \text{if } \bar{\sigma}_{11} < 0 \end{cases}$$

$$d_m \begin{cases} d_m^t & \text{if } \bar{\sigma}_{22} \geq 0 \\ d_m^c & \text{if } \bar{\sigma}_{22} < 0 \end{cases}$$

$$d_s = 1 - (1 - d_f^t)(1 - d_f^c)(1 - d_m^t)(1 - d_m^c)$$

Avant toute initiation et évolution de l'endommagement, l'opérateur d'endommagement, M , est égal à la matrice d'identité, donc $\bar{\sigma} = \sigma$. Une fois que l'apparition et l'évolution des dommages se sont produites pour au moins un mode, l'opérateur d'endommagement devient significatif dans les critères d'apparition des dommages pour les autres modes.

Références

1. D. Guitard, "Mecanique du matériau bois et composites, Cépadues Ed.
2. M.F. Ashby. "Matériaux. 2. Microstructure et mise en œuvre", Dunod
3. J. Bodig, B.A. Jayne, "Mechanics of Wood and Wood composites", Van Nostrand Reinhold.
4. J.M. Dinwoodie, "Timber, its Nature and behavior", Van Nostrand Reinhold.
5. H.E. Desch, Timber, its Structure, Proprieties, and utilization". Macmillan.
6. D. Gay, "Matériaux composites", Hermes.
7. N.C. Hillyard, "Mechanics of Cellular Plastics" Ap. Sc. Publishers.
8. M. Grayson, "Encyclopedia of Composite Materials and Components".
9. Zafer Gurdal, Raphael T. Haftka. Design and optimization of laminated composite materials.
10. Valery V. Vasiliev, Evgeny V. Morozov. Mechanics and Analysis of composite materials.
11. Daniel Gay, Suong V. Hoa, Stephen W. Tsai. Composite materials: Design and applications