

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
CENTRE UNIVERSITAIRE AHMED ZABANA DE RELIZANE
INSTITUT DES SCIENCES ET TECHNOLOGIE



Département de Mathématiques

Espaces vectoriels normés

Dr : DJOURDEM Habib

Année Universitaire 2019/ 2020

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à mes êtres les plus chers au monde

A la mémoire de mon père “**Mehdi**”.

A la mémoire de ma mère (**1947-2019**).

A ma chère femme.

A mes frères et sœurs.

A mes enfants.

En fin, je dédie ce travail à tous ceux qui m’ont aidé de près ou de loin.

Avant-propos

Ce polycopié s'adresse aux étudiants inscrits en troisième année licence mathématiques et couvre l'ensemble des cours du module intitulé espaces vectoriels normés que j'ai le privilège de diriger au Centre universitaire Ahmed-ZABANA de Relizane. L'utilisation de ce manuscrit nécessite la connaissance des notions des espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels, bases et dimensions qui ont été enseignées aux étudiants dans le module d'algèbre 2, avec aussi des notions d'analyse contenues dans les modules analyse 1, analyse 2 et analyse 3. Ce polycopié est composé de deux chapitres, le premier contient sept sections et le deuxième est composé de huit sections. L'avant-dernière section de chaque chapitre est consacrée aux exercices et la dernière à leurs corrections. Une bonne partie de ces exercices ont été proposés aux séances des travaux dirigés, ou donnés en examens.

Au premier chapitre intitulé espaces de Banach, nous présentons dans la première section quelques rappels sur les espaces métriques. Dans la deuxième et la troisième section, nous abordons les espaces vectoriels normés (e.v.n en abrégé) \mathbb{R} ou sur \mathbb{C} . La quatrième section est consacrée à l'étude des applications linéaires continues d'un e.v.n dans un autre e.v.n. La cinquième est dédiée aux espaces vectoriels normés de dimension finie comme une classe spéciale des e.v.n.

Le deuxième chapitre est dédié à une classe de \mathbb{K} -espaces de Banach, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , dont la norme est définie par un produit scalaire, ces espaces sont les espaces de Hilbert. La première section est consacrée à des rappels sur les formes sesquilineaires et les formes hermitiennes et toutes les définitions et les théorèmes qui font des éléments essentiels des notions du produit scalaire et des espaces de Hilbert, puis dans la section suivante, nous présentons la notion d'orthogonalité dans un espace préhilbertien. Dans la troisième

et la quatrième section, nous introduisons respectivement deux théorèmes fondamentaux de l'analyse hilbertienne; le théorème de projection et le théorème de représentation de Riesz. Dans la cinquième section, nous présentons et étudions l'existence d'une base hilbertienne avec tous les résultats qui découlent de cette notion, telles que le procédé d'orthonormalisation de Gram- Schmidt, l'inégalité de Bessel et l'égalité de Parseval. Dans la sixième section, nous allons présenter quelques exemples des plus classiques de bases hilbertiennes. Ce sont des fonctions spéciales qui jouent un rôle important dans la théorie de l'approximation et l'analyse numérique et qui interviennent dans la résolution d'un grand nombre de problèmes de la physique théorique et mathématique.

Nous espérons enfin que ce polycopié constituera un support utile pour nos étudiants et les aidera à améliorer leurs résultats aux examens.

Nos remerciements vont à tous ceux et celles qui ont contribué à la formation des étudiants du troisième année mathématiques à l'institut de sciences et technologies. Un grand merci à mon encadreur le Professeur Benaïcha Slimane pour ses conseils et ses encouragements pour préparer ce polycopié.

Table des matières

1	Espaces de Banach	5
1.1	Rappels	5
1.2	Normes	10
1.2.1	Distance associée à une norme	11
1.2.2	Continuité dans un espace vectoriel normé	12
1.2.3	Continuité uniforme	14
1.2.4	Normes équivalentes	15
1.3	Espaces de Banach	16
1.4	Applications linéaires continues	19
1.4.1	Norme d'une application linéaire	20
1.5	Espaces vectoriels normés de dimension finie	23
1.6	Exercices	27
1.7	Corrections	32
2	Espaces de Hilbert	54
2.1	Formes sesquilinéaires et formes hermitiennes	54
2.2	Orthogonalité	63
2.3	Le théorème de la projection	64

2.4	Dual et théorème de Riesz	69
2.5	Bases hilbertiennes	71
2.5.1	Inégalité de Bessel, égalité de Parseval	74
2.6	Exemples de bases hilbertiennes	78
2.6.1	Séries de Fourier	78
2.6.2	Polynômes orthogonaux	81
2.7	Exercices	83
2.8	Corrections	86

Chapitre 1

Espaces de Banach

Dans ce qui suit \mathbb{K} désignera le corps des nombres réels \mathbb{R} ou le corps des nombres complexes \mathbb{C} .

1.1 Rappels

Définition 1.1. (Distance)

Soit X un ensemble non vide. Une distance sur X est une application $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant pour tout $x, y, z \in X$

(i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (séparation) ;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie) ;

(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

L'ensemble X muni d'une distance d est appelé un espace métrique et on note (X, d)

Définition 1.2. (Suite de Cauchy)

Une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ dans un espace métrique (X, d) est dite de Cauchy si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \text{ et } m \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \epsilon$$

Remarque 1.1. Une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ dans un espace métrique (X, d) est dite de Cauchy si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow d(x_{n+p}, x_n) < \epsilon$$

Proposition 1.1. Soit (X, d) un espace métrique.

- (i) Toute suite convergente dans X est de Cauchy.
- (ii) Toute suite de Cauchy dans X est bornée.
- (iii) Toute sous-suite d'une suite de Cauchy est de Cauchy.

Définition 1.3. Soit (X, d) un espace métrique.

On dit que (X, d) est complet si toute suite de Cauchy dans (X, d) est convergente dans X .

Définition 1.4. Soient (X, d) un espace métrique $a \in X$ et $r > 0$.

1. On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r l'ensemble :

$$B(a, r) = \{x \in X : d(a, x) < r\}.$$

2. On appelle boule fermée de centre a et de rayon r l'ensemble :

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in X : d(a, x) \leq r\}.$$

3. On appelle sphère de centre a et de rayon r l'ensemble :

$$S(a, r) = \{x \in X : d(a, x) = r\}.$$

Définition 1.5. Soit (X, d) un espace métrique.

1. Une partie U de X est dite ouverte (ou U est un ouvert) si $U = \emptyset$ ou si

$$\forall x \in U, \exists \rho > 0, \text{ tel que } B(x, \rho) \subset U.$$

2. Une partie F de X est dite fermée (ou F est un fermé) si son complémentaire $X \setminus F$ est ouvert.

Exemple 1.1. 1. Une boule ouverte est un ouvert. En particulier, dans \mathbb{R} (muni de la distance usuelle $d(x, y) = |x - y|$), les intervalles $]a, b[$ sont des ouverts

2. Une boule fermée est un fermé. En particulier, dans \mathbb{R} , les intervalles $[a, b]$ sont des fermés.

Remarques 1.1. 1. La distance entre deux parties A et B non vides de (E, d) est :

$$d(A, B) = \inf \{d(x, y), x \in A, y \in B\}$$

2. Le diamètre d'une partie non vide A de E est :

$$\text{diam } A = \sup \{d(x, y); x \in A, y \in A\}$$

3. Si $\text{diam } A$ est fini, A est dite bornée.

4. Une application f définie sur un ensemble U et à valeurs dans E est dite bornée si $f(U)$ est une partie bornée de E .

Définition 1.6. Soit (X, d) un espace métrique. L'adhérence d'une partie A de X , notée \overline{A} , est le plus petit ensemble fermé contenant A .

Définition 1.7. Soient (X, d) un espace métrique, A une partie non vide de X et a un élément de X . On dit que le point a est adhérent à A dans X si toute boule ouverte de centre a et de rayon $r > 0$ a une intersection non vide avec A . Autrement dit :

$$\forall r \in \mathbb{R}_+^*, B(a, r) \cap A \neq \emptyset.$$

Théorème 1.1. Soient (X, d) un espace métrique, A une partie non vide de X et a un élément de X . Alors a est adhérent à A si, et seulement si, il existe une suite (u_n) de points de A qui converge vers a .

Remarque 1.2. 1. L'adhérence d'un ensemble A est l'ensemble des points adhérents à A .

Définition 1.8. Soit (X, d) un espace métrique. Une partie D de X est dense dans X si $\overline{D} = X$.

Définition 1.9. Soit (X, d) un espace métrique et soit A une partie non vide de X . La restriction de la distance d de $X \times X$ à $A \times A$ est appelée la distance induite sur A de la distance d sur X et est notée d_A . Cette distance est définie par

$$\begin{aligned} d_A : A \times A &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\longmapsto d_A(x, y) := d(x, y). \end{aligned}$$

Proposition 1.2. Si (X, d) est complet et $A \subset X$, Alors A est complet pour la distance induite si et seulement si A est fermé.

Exemples 1.1. .

1. \mathbb{R} et \mathbb{C} sont complets pour la distance usuelle $(x, y) \longmapsto |x - y|$.
 2. $C([a, b], \mathbb{K})$ est complet pour la distance uniforme $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$.
- $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Définition 1.10. Soient (X, d_1) et (Y, d_2) deux espaces métriques et $f : X \longmapsto Y$ une application.

- On dit que f est continue en $x_0 \in X$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, d_1(x, x_0) < \eta \implies d_2(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

- f est dite continue sur X si elle est continue en tout point de X .
- On dit que f est uniformément continue sur X si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in X, d_1(x, y) < \eta \implies d_2(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Remarque 1.3. Une fonction uniformément continue est continue.

Théorème 1.2. (*Prolongement des applications uniformément continues*)

Soient (X_1, d_1) et (X_2, d_2) deux espaces métriques. D une partie dense de X_1 et $f : D \rightarrow X_2$ une application uniformément continue sur D . Supposons que (X_2, d_2) est complet. Il existe alors une unique application uniformément continue $\tilde{f} : X_1 \rightarrow X_2$ qui prolonge $f : \tilde{f}|_D = f$

Démonstration. Voir [5] exercice 4 page 23. □

Définition 1.11. Soient (X, d_1) et (Y, d_2) deux espaces métriques. On appelle isométrie de X sur Y toute application $f : X \rightarrow Y$ vérifiant

$$\forall x, y \in X, d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y).$$

Définition 1.12. Soit (X, d) un espace métrique. Une complétion de (X, d) est un espace métrique complet (\tilde{X}, \tilde{d}) et une application isométrique $g : X \rightarrow \tilde{X}$ dont l'image est dense dans \tilde{X} et on la note parfois $\{(\tilde{X}, \tilde{d}), g\}$

Théorème 1.3. *Tout espace métrique admet une complétion .*

Démonstration. Voir [5], exercice 6, page 25. □

Théorème 1.4. (*Unicité du complété*) Si $\{(\tilde{X}, \tilde{d}), g\}$ et $\{(\tilde{X}', \tilde{d}'), h\}$ deux complétions d'un espace métrique (\tilde{X}, \tilde{d}) , alors il existe une unique isométrie bijective $f : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}'$ telle que $f \circ g = h$.

Démonstration. Voir [5] exercice 6 page 25. □

Exemple 1.2. \mathbb{R} est le complété de \mathbb{Q} .

1.2 Normes

Définition 1.13. Une norme sur un \mathbb{K} -espace vectoriel E est une application, le plus souvent notée :

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : E &\longrightarrow \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[\\ x &\mapsto \|x\| \end{aligned}$$

ayant les trois propriétés suivantes :

(i) Pour tout $x \in E$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$.

(ii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, pour tout $x \in E$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (homogénéité).

(iii) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{E}^2$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

L'espace vectoriel E muni de la norme $\|\cdot\|$ est appelé un \mathbb{K} -espace vectoriel normé (en abrégé e.v.n) et l'on note $(E, \|\cdot\|)$.

Remarque 1.4. Pour tous $x, y \in E$

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|.$$

En effet, pour tous $x, y \in E$, on a :

$$\|x\| - \|y\| = \|x - y + y\| - \|y\| \leq \|x - y\| + \|y\| - \|y\| = \|x - y\|,$$

d'une autre côté, on a

$$\|y\| - \|x\| = \|y - x + x\| - \|x\| \leq \|y - x\| + \|x\| - \|x\| = \|y - x\|,$$

d'où le résultat.

Exemple 1.3. 1. \mathbb{R} muni de sa valeur absolue ou \mathbb{C} muni de son module est un espace vectoriel normé.

2. $E = \mathbb{K}^n$, pour $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$, on définit :

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2}$$

$$\|x\|_\infty = \max \{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}.$$

Plus généralement, pour tout $\alpha \geq 1$, $\|x\|_\alpha = (\sum_{i=1}^n |x_i|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ est une norme sur \mathbb{R}^n .

3. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, l'espace $C^\infty([a, b], \mathbb{K})$ des fonctions infiniment différentiables et à valeurs dans \mathbb{K} muni de l'une des normes :

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|, \quad \|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}$$

ou encore de la norme :

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)| dx$$

est un espace vectoriel normé.

La norme $\|\cdot\|_1$ est la norme de la convergence en moyenne, $\|\cdot\|_2$ est la norme de la convergence en moyenne quadratique et $\|\cdot\|_\infty$ est la norme de la convergence uniforme.

Remarque 1.5. Lorsque seules les propriétés (ii) et (iii) de la définition 1.13 sont vérifiées, on dit que $\|\cdot\|$ est une semi-norme.

1.2.1 Distance associée à une norme

Définition 1.14. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, l'application d définie par :

$$d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$(x, y) \longmapsto d(x, y) = \|x - y\|$$

est une distance sur E , et est appelée la distance canonique associée à la norme $\|\cdot\|$.

Définition 1.15. (Boules) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $a \in E$ et $r \in]0, +\infty[$.

1. La boule ouverte de centre a et de rayon $r > 0$ est :

$$B(a, r) = \{x \in E; \|x - a\| < r\}.$$

2. La boule fermée de centre a et de rayon $r > 0$ est :

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in E; \|x - a\| \leq r\}.$$

3. La sphère de centre a et de rayon $r > 0$ est :

$$S = \{x \in E; \|x - a\| = r\}.$$

Définition 1.16. (Convergence d'une suite). Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E . On dit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un élément l de E si

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \|x_n - l\| \leq \epsilon.$$

Un tel élément l est alors unique ; il est appelé la limite de (x_n) et on écrit $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

On dit que (x_n) est une suite convergente.

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés sur \mathbb{K} .

1.2.2 Continuité dans un espace vectoriel normé

Définition 1.17. Soit T une application définie sur D une partie de E , à valeurs dans F . Soit a un point du domaine D de T . On dit que T est continue en a si la limite de T en a est $T(a)$.

Cela équivaut à dire :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } x \in D \text{ et } \|x - a\|_E \leq \delta \implies \|T(x) - T(a)\|_F \leq \epsilon$$

Proposition 1.3. L'application $T : D \subset E \longrightarrow F$ est dite continue au point a de D si et seulement si pour toute suite (u_n) de D convergeant vers a , la suite de terme général $T(u_n)$ converge vers $T(a)$.

Définition 1.18. L'application $T : D \subset E \longrightarrow F$ est dite continue sur D si elle est continue en tout point de D .

Définition 1.19. 1. Une partie A de E est dite bornée s'il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $x \in A$, $\|x\|_E \leq M$.

2. Une application $T : D \subset E \longrightarrow F$ est dite bornée si son image $T(D)$ est bornée dans $(F, \|\cdot\|_F)$.

Définition 1.20. (Homéomorphisme) Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, X une partie de E , Y une partie de F et f une application de E dans F .

1. On dit que f est un homéomorphisme de X dans Y si, les trois propriétés suivantes sont vérifiées :

(i) f est continue.

(ii) f est une bijection.

(iii) L'application réciproque de f , f^{-1} est continue.

2. On dit que X et Y sont homéomorphes s'il existe un homéomorphisme de X dans Y .

Définition 1.21. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Une partie A de E est dite compacte si elle est vide ou si toute suite de points de A admet une suite extraite qui converge dans A .

Propriétés 1.1. 1. Si E est de dimension finie, une partie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

2. Soit A une partie de E et $f : A \rightarrow F$ une application continue. Si A est un compact de E , alors $f(A)$ est un compact de F .

3. Cas particulier :

Une fonction f de A dans \mathbb{R} , continue sur un compact non vide $A \subset E$ est bornée et atteint ses bornes, c'est à dire il existe $x_1 \in A$ et $x_2 \in A$ tels que :

$$f(x_1) = \sup_{x \in A} f(x) \quad ; \quad f(x_2) = \inf_{x \in A} f(x).$$

1.2.3 Continuité uniforme

Définition 1.22. Une application $f : A \subset E \rightarrow F$ est uniformément continue sur A si,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \forall x \in A, \forall y \in A : \|y - x\|_E \leq \delta \implies \|f(y) - f(x)\|_F \leq \epsilon.$$

Remarque 1.6. Si A est compact, alors toute application $f : A \subset E \rightarrow F$ continue sur A est uniformément continue.

Définition 1.23. On dit qu'une application $f : A \subset E \rightarrow F$ est lipschitzienne ou k -lipschitzienne sur A de rapport k si

$$\forall x, y \in A, \|f(x) - f(y)\|_F \leq k \|x - y\|_E.$$

Remarque 1.7. Toute application lipschitzienne est uniformément continue. Toute application uniformément continue est continue. Les réciproques ne sont pas toujours vraies.

Proposition 1.4. Toute norme sur E est 1-lipschitzienne.

Démonstration. De la remarque 1.4, on a pour tous $x, y \in E$, $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$, c'est à dire que l'application $x \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}_+$ est 1-lipschitzienne. \square

1.2.4 Normes équivalentes

Définition 1.24. Deux normes N_1 et N_2 sur un espace vectoriel E sont équivalentes s'il existe des constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telles que :

$$C_1 N_1(x) \leq N_2(x) \leq C_2 N_1(x) \quad \text{pour tout } x \in E$$

Remarque 1.8. 1. Deux normes N_1 et N_2 de E sont équivalentes si les fonctions $\frac{N_1}{N_2}$ et $\frac{N_2}{N_1}$ sont bornées sur $E \setminus \{0\}$.

2. Si N_1 et N_2 sont équivalentes, alors une suite converge dans (E, N_1) si et seulement si elle converge dans (E, N_2) .

Exemple 1.4. Pour $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose :

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|,$$

$$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|).$$

Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes sur \mathbb{K}^n .

En effet,

Soit $x \in \mathbb{K}^n$

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty &= |x_j| \text{ pour certain } j \text{ (où } 1 \leq j \leq n) \\ &\leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \\ &\leq \|x\|_1. \end{aligned}$$

D'une autre part

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \\ &\leq |x_j| + |x_j| + \dots + |x_j| \\ &= n |x_j| = n \|x\|_\infty \end{aligned}$$

Donc $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$.

Remarques 1.2. .

1. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie p , (e_1, e_2, \dots, e_p) une base de E .

Une suite (a_n) de E s'écrit :

$$a_n = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{pn}e_p,$$

où $(a_{1n}), (a_{2n}), \dots, (a_{pn})$ sont des suites dans \mathbb{K} .

(a_n) converge vers $l = l_1e_1 + l_2e_2 + \dots + l_pe_p$ si et seulement si (a_{jn}) vers l_j pour tout $j \in 1, 2, \dots, n$.

2. Une suite (a_n) dans E est dite de Cauchy si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m, n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \geq N_\epsilon$ et $m \geq N_\epsilon$ on ait $\|a_n - a_m\| \leq \epsilon$, ce qui s'écrit :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}; \forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, n \geq N_\epsilon \text{ et } m \geq N_\epsilon \implies \|a_n - a_m\| \leq \epsilon,$$

ou encore :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\epsilon \text{ et } \forall p \in \mathbb{N} \implies \|a_{n+p} - a_n\| \leq \epsilon.$$

3. Si $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ sont deux espaces vectoriels normés, alors $\|\cdot\|_E + \|\cdot\|_F$ définie une norme sur l'espace vectoriel $E \times F$.

1.3 Espaces de Banach

Définition 1.25. Un espace de Banach est un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ qui est complet pour la distance canonique associée à $\|\cdot\|$.

Exemples 1.2. 1. $E = \mathbb{R}^n$ ou $E = \mathbb{C}^n$ muni des normes

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1 \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \{|x_j|\}$$

sont des espaces de Banach (voir remarque 1.9).

2. Un espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach.

3. L'espace vectoriel $\{(x_j)_{j \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{K}; \sum_{j \geq 1} |x_j|^p < \infty\}$, ($p \in [1, +\infty]$) muni de la norme

$$\|x\|_p := \left(\sum_{j \geq 1} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1$$

est un espace de Banach, noté l_p .

4. a) $C([0, 1], \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$$

est un espace de Banach.

b) L'espace vectoriel $E = C([-1, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[-1, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} muni de la norme $\|f\|_1 = \int_{-1}^1 |f(t)| dt$ n'est pas complet.

En effet, si on définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n sur $[0, 1]$ par

$$f_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ 1 - n \left(t - \frac{1}{2}\right), & \text{si } t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right], \\ 0, & \text{si } \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

(f_n) converge (au sens de la convergence simple) vers la fonction f , où f est définie par $f(t) = 1$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $f(t) = 0$ sur $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$.

On montre facilement que (f_n) est une suite de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_1$ en prouvant que pour $p, q \geq n$; $\|f_p - f_q\|_1 \leq \frac{1}{n}$. Par contre (f_n) ne converge pas dans E car f n'est pas continue (f n'appartient pas à l'espace E). Donc E n'est pas complet.

Théorème 1.5. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés et soit $E \times F$ muni de la norme $\|\cdot\|_E + \|\cdot\|_F$. $E \times F$ est complet si et seulement si E et F sont complets.

Démonstration. Supposons E et F sont complets et soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $E \times F$ de terme général $u_n = (x_n, y_n)$ où $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite E et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de F .

On a, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|x_p - x_q\|_E + \|y_p - y_q\|_F \leq \epsilon, \forall p, q \geq r.$$

Il en résulte que les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites de Cauchy dans E et F , d'où elles sont convergentes et posons

$$\lim_{q \rightarrow +\infty} x_q = x \in E \text{ et } \lim_{q \rightarrow +\infty} y_q = y \in F.$$

Alors

$$\|x_p - x\|_E + \|y_p - y\|_F \leq \epsilon, \forall p \geq r,$$

par conséquent

$$\|(x_p, y_p) - (x, y)\|_{E \times F} \leq \epsilon, \forall p \geq r$$

c'est à dire

$$\|u_p - u\|_{E \times F} \leq \epsilon, \forall p \geq r$$

avec $u = (x, y)$. Donc, $E \times F$ est complet.

Réciproquement, supposons que $E \times F$ est un espace complet et soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de Cauchy de E et F . Alors, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $r_1 \in \mathbb{N}$ et $r_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\|x_p - x_q\|_E \leq \frac{\epsilon}{2}, \forall p, q \geq r_1 \quad \text{et} \quad \|y_p - y_q\|_F \leq \frac{\epsilon}{2}, \forall p, q \geq r_2,$$

d'où $\|(x_p, y_p) - (x_q, y_q)\|_{E \times F} \leq \epsilon$ pour tout $p, q \geq r_0 = \sup(r_1, r_2)$. Donc, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $E \times F$. Cela implique $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = (x, y)$ et il vient immédiatement $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y$ c'est à dire que E et F sont complets. \square

Remarque 1.9. La démonstration précédente est valable pour un produit fini d'espaces vectoriels normés $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ muni de la norme $\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_E = \sum_{i=1}^n \|x_i\|_{E_i}$

où $\|\cdot\|_{E_i}$ désigne une norme sur E_i .

Il en résulte que $E = \mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K}$ (n fois) est complet.

1.4 Applications linéaires continues

Théorème 1.6. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés et $T : E \rightarrow F$ une application linéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) T est continue sur E .

(ii) T est continue en 0_E .

(iii) Il existe une constante $C \geq 0$ tel que pour tout $x \in E$, on ait $\|T(x)\|_F \leq C \|x\|_E$.

Démonstration. Il est clair que (i) \implies (ii).

Montrons que (ii) \implies (iii).

Par hypothèse, l'application T est continue en 0_E . On a $T(0_E) = 0_F$ car T est linéaire, donc pour tout $\epsilon > 0$ fixé, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in E$, vérifiant $\|x\|_E < \delta$, on ait $\|T(x)\|_F \leq \epsilon$.

Soit $x \in E$, $x \neq 0$ et considérons $y = \frac{\delta}{2} \frac{x}{\|x\|_E}$, alors $\|y\| = \frac{\delta}{2} < \delta$, donc $\|T(y)\|_F \leq \epsilon$.

Or on a $\left\|T\left(\frac{\delta}{2} \frac{x}{\|x\|_E}\right)\right\|_F = \frac{\delta}{2\|x\|_E} \|T(x)\|_F$, d'où $\|T(x)\|_F \leq \frac{2\epsilon}{\delta} \|x\|_E$ pour tout $x \neq 0$ et comme elle est vraie aussi pour $x = 0$, alors il suffit de prendre $C = \frac{2\epsilon}{\delta}$ pour avoir (iii).

Supposons que (iii) est vérifiée. Alors pour tout $x, y \in E$, on a

$$\|T(x - y)\|_F \leq C \|x - y\|_E$$

d'où $\|T(x) - T(y)\|_F \leq C \|x - y\|_E$. Donc T est lipschitzienne et par conséquent continue. Ceci montre que (iii) \implies (i). D'où (i) \iff (ii) \iff (iii) \square

Remarque 1.10. L'application linéaire T vérifiant (i) ou (ii) ou (iii) est dite linéaire bornée.

1.4.1 Norme d'une application linéaire

Définition 1.26. Soit $T : E \rightarrow F$ une application linéaire continue (bornée) entre les espaces vectoriels normés $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$. Le nombre

$$\sup_{x \in E, x \neq 0_E} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

est appelé la norme de T et est noté $\|T\|$ (ou $\|T\|$).

Remarques 1.3. 1. D'après le théorème 1.6 le nombre $\sup_{x \in E, x \neq 0_E} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E}$ est fini.

2. Si pour une constante C , on a $\|T(x)\|_F \leq C \|x\|_E$ pour tout $x \in E$, alors T est bornée et $\|T\| \leq C$. De plus,

$$\|T(x)\|_F \leq \|T\| \|x\|_E \text{ pour tout } x \in E.$$

3. On vérifie facilement que

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_E=1} \|T(x)\|_F$$

ainsi que

$$\|T\| = \inf \{C > 0 : \|T(x)\|_F \leq C \|x\|_E \text{ pour tout } x \in E\}.$$

Notation On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues entre E et F . Quand $E = F$, $\mathcal{L}(E, F)$ est simplement noté $\mathcal{L}(E)$.

Proposition 1.5. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. L'application $T \rightarrow \|T\|$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$.

Démonstration. (i) Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\|T\| = 0$.

Alors, par définition de T , on a $T(x) = 0$ pour tout $x \in E$ et donc $T = 0$.

(ii) Soient $T \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On a

$$\begin{aligned} \|\alpha T\| &= \sup_{\|x\|_E=1} \|(\alpha T)(x)\|_F \\ &= \sup_{\|x\|_E=1} |\alpha| \|T(x)\|_F = |\alpha| \sup_{\|x\|_E=1} \|T(x)\|_F \\ &= |\alpha| \|T\|. \end{aligned}$$

(iii) Soient $T, S \in \mathcal{L}(E, F)$. Pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} \|(T + S)(x)\|_F &= \|T(x) + S(x)\|_F \\ &\leq \|T(x)\|_F + \|S(x)\|_F \\ &\leq \|T\| \|x\|_E + \|S\| \|x\|_E = (\|T\| + \|S\|) \|x\|_E \end{aligned}$$

et donc $\|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|$ □

Exemple 1.5. On munit l'espace vectoriel $C([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur l'intervalle $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|.$$

L'application linéaire $T : C([0, 1], \mathbb{R}) \longrightarrow C([0, 1], \mathbb{R})$, $f \longmapsto Tf$ définie par

$$Tf : x \longmapsto T(f(x)) := T(f)(x) := \int_0^x f(t) dt$$

pour tout $x \in [0, 1]$ est une application continue.

En effet, pour tout $x \in [0, 1]$, on a

$$|T(f(x))| \leq \int_0^x |f(t)| dt \leq x \|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$$

et donc $\|T(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ et $\|T\| \leq 1$.

Nous allons maintenant démontrer que $\|T\| = 1$.

Prenons $f = 1$. Alors $\|f\|_\infty = 1$, $T(f(x)) = x$ et donc $\|T(f)\|_\infty = 1$. Il vient que

$\|T(f)\|_\infty = \|f\|_\infty$ et donc on a $\|T\| = 1$.

Proposition 1.6. Soient E , F et G des espaces vectoriels normés, soient $T \in \mathcal{L}(E, F)$ et $S \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors $S \circ T \in \mathcal{L}(E, G)$ et on a

$$\|S \circ T\| \leq \|S\| \|T\|.$$

Démonstration. Il est clair que $S \circ T$ est linéaire. Pour tout $x \in E$, on a :

$$\|S \circ T(x)\|_G = \|S(T(x))\|_G \leq \|S\| \|T(x)\|_F \leq \|S\| \|T\| \|x\|_E.$$

Donc $S \circ T$ est continue et on a $\|S \circ T\| \leq \|S\| \|T\|$. □

Théorème 1.7. Soient E un espace vectoriel normé et F un espace de Banach. Alors l'espace vectoriel normé $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace de Banach.

Démonstration. Soit $(T_n)_{n \geq 0}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E, F)$.

On construit la limite de $(T_n)_{n \geq 0}$. Fixons x un élément quelconque de E . On a

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \|T_p(x) - T_q(x)\|_F \leq \|T_p - T_q\| \cdot \|x\|_E,$$

donc la suite $(T_n(x))$ est de Cauchy dans F , et comme F est complet, elle converge. On note $T(x)$ sa limite. On définit ainsi une application T de E dans F .

On vérifie que $T \in \mathcal{L}(E, F)$. L'application T est linéaire car $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$T(\lambda x + \mu y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(\lambda x + \mu y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda T_n(x) + \mu T_n(y)) = \lambda T(x) + \mu T(y).$$

Elle est continue. En effet, $(T_n)_n$ étant de Cauchy, elle est bornée donc il existe $M > 0$ tel que $\|T_n\| \leq M$ pour tout n .

Si $x \in E$ est fixé, on a donc $\|T_n(x)\|_F \leq M \|x\|_E$ pour tout n , donc à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient $\|T(x)\|_F \leq M \|x\|_E$. Ainsi, T est continue.

Il nous reste à prouver que (T_n) converge vers T au sens de la norme $\|\cdot\|$.

Soit $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \geq N$, $\|T_p - T_q\| \leq \epsilon$. En fixant $x \in E$, on donc

$$\forall p, q \geq N, \|T_p(x) - T_q(x)\|_F \leq \|T_p - T_q\| \cdot \|x\|_E \leq \epsilon \|x\|_E.$$

En fixant $p \geq N$ et faisant tendre q vers l'infini, on obtient $\|T_p(x) - T(x)\| \leq \epsilon \|x\|_E$.

Ceci est vrai pour tout $x \in E$, on a donc $\|T_p - T\| \leq \epsilon$, et ceci pour tout $p \geq N$, d'où

$\mathcal{L}(E, F)$ est un espace de Banach. □

Définition 1.27. Soit E un espace vectoriel normé. L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est appelé espace dual (topologique) de E et est noté E' .

Corollaire 1.1. Le dual $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ d'un espace vectoriel normé E est un espace de Banach.

Démonstration. Comme $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ est complet, d'après le théorème 1.7, l'espace E' est de Banach. □

1.5 Espaces vectoriels normés de dimension finie

Théorème 1.8. *Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes entre-elles.*

Démonstration. Soient E un espace vectoriel de dimension finie n avec $n \in \mathbb{N}^*$, $\|\cdot\|$ une norme arbitraire sur E et $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base de E . Nous allons montrer que cette norme est équivalente à une norme particulière sur E , de sorte que, par transitivité, deux normes arbitraires seront équivalentes. Choisissons la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie précédemment.

Si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

$$\begin{aligned} \|x\| &= \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \|x_i e_i\| \\ &= \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n \|e_i\| \right) \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \|e_i\| \right) \|x\|_\infty. \end{aligned}$$

D'où, en posant $\alpha = \sum_{i=1}^n \|e_i\| > 0$, on a

$$\|x\| \leq \alpha \|x\|_\infty. \quad (1.5.1)$$

D'autre part, d'après la remarque 1.4, on a pour tous $x, y \in E$:

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

Et comme $\|x\| \leq \alpha \|x\|_\infty$, $\forall x \in E$ d'après (1.5.1), il en résulte que l'on a pour tous $x, y \in E$:

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \alpha \|x - y\|_\infty.$$

C'est à dire que l'application :

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : (E, \|\cdot\|_\infty) &\longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|) \\ x &\longmapsto \|x\| \end{aligned}$$

est α -lipschitzienne et est par conséquent continue sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$. Soit

$$S_\infty(0_E, 1) = \{x \in E, \|x\|_\infty = 1\}.$$

C'est une partie fermée et bornée de $(E, \|\cdot\|_\infty)$, elle est donc compacte dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

L'application $\|\cdot\|$ atteint ses bornes sur $S_\infty(0_E, 1)$. En particulier, $\|\cdot\|$ atteint sa borne

inférieure. Cela signifie qu'il existe $x_0 \in S_\infty(0_E, 1)$ tel que :

$$\|x\| \geq \|x_0\|, \quad \forall x \in S_\infty(0_E, 1).$$

Posons $\beta = \|x_0\| \geq 0$. Si $\beta = 0$, alors $x_0 = 0_E \notin S_\infty(0_E, 1)$, ce qui est absurde. D'où $\beta > 0$ et on a :

$$\forall x \in S_\infty(0_E, 1) : \|x\| \geq \beta. \quad (1.5.2)$$

Enfin, étant donné $x \in E - \{0_E\}$, et avec (1.5.2) pour $\frac{x}{\|x\|_\infty} \in S_\infty(0_E, 1)$, on aura

$$\|x\| \geq \beta \|x\|_\infty \quad (1.5.3)$$

qui est satisfaite pour $x = 0$.

De (1.5.1) et (1.5.3), les deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes. \square

Proposition 1.7. Soient E, F deux espaces vectoriels normés, avec E de dimension finie n et $T : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors, T est continue.

Démonstration. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , $\|\cdot\|$ une norme de E et $\|\cdot\|_F$ une norme de F . Les normes de E sont équivalentes d'après le théorème 1.8, en particulier, $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes. Par suite, il existe une constante $C > 0$ telle que

$\|x\|_\infty \leq C \|x\|$ pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in \mathbb{K}^n$. On a

$$\begin{aligned}
 \|T(x)\|_F &= \left\| T \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i \right) \right\|_F \\
 &= \left\| \sum_{i=1}^n x_i T(e_i) \right\|_F \\
 &\leq \sum_{i=1}^n \|x_i T(e_i)\|_F \\
 &= \sum_{i=1}^n |x_i| \|T(e_i)\|_F \\
 &\leq \left(\sum_{i=1}^n \|T(e_i)\|_F \right) \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n \|T(e_i)\|_F \right) \|x\|_\infty \\
 &\leq \left(\sum_{i=1}^n \|T(e_i)\|_F \right) C \|x\|,
 \end{aligned}$$

donc, pour $C' = (\sum_{i=1}^n \|T(e_i)\|_F) C$, on obtient

$$\|T(x)\|_F \leq C' \|x\|, \quad \text{pour tout } x \in E.$$

C'est à dire T est continue. □

Proposition 1.8. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. On a :

1. Si $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ est une base de E , alors l'application linéaire

$$\sigma : \mathbb{K}^n \longrightarrow E$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

est un homéomorphisme.

2. $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.

Démonstration. 1. De la proposition précédente, σ est continue. La continuité de σ ne changera pas si on remplace les normes sur \mathbb{K}^n et E par des normes équivalentes, alors on choisit la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur \mathbb{K}^n et sur E , on prend la norme $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ pour

tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$. Dans ce cas, l'application σ est une isométrie et bijective, donc c'est un homéomorphisme de \mathbb{K}^n dans E .

2. Comme $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ est complet (voir remarque 1.9), on en déduit que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach. Par conséquent, $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach car les deux normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|$ sont équivalentes sur E . \square

Proposition 1.9. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors, toute boule fermée $\overline{B}(x, r)$ de E est compacte.

1.6 Exercices

Exercice 1.1. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $N(x, y) = \max\{|x|, |y|, |x - y|\}$. Montrer que N est une norme sur \mathbb{R}^2 et déterminer la boule unité fermée.

Exercice 1.2. Soit $E = C^2([0, 1], \mathbb{R})$. Pour f élément de E , on pose $N_1(f) = \int_0^1 |f(t)| dt$, $N_2(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| dt$ et $N_3(f) = |f(0)| + |f'(0)| + \int_0^1 |f''(t)| dt$.

1. Montrer que N_1 , N_2 et N_3 sont des normes.

2. Montrer que :

$$\forall f \in E, N_1(f) \leq N_2(f) \leq N_3(f).$$

Exercice 1.3. 1) Montrer que les trois normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ définies sur \mathbb{R}^n vérifient les inégalités suivantes :

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty.$$

2) Dessiner les boules unités de \mathbb{R}^2 muni des normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 1.4. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de variable X et coefficients réels. On définit sur E trois normes par, si $P = \sum_{i=0}^p a_i X^i$:

$$N_1(P) = \sum_{i=0}^p |a_i|, \quad N_2(P) = \left(\sum_{i=0}^p |a_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad N_\infty(P) = \max_{0 \leq i \leq p} |a_i|.$$

Vérifier qu'il s'agit de 3 normes sur $\mathbb{R}[X]$. Sont-elles équivalentes deux à deux ?

Exercice 1.5. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $a, b \in E$ et $r > 0$. Montrer que :

1. $b + \overline{B}(a, r) = \overline{B}(a + b, r)$.
2. $\overline{B}(a, r) = a + r\overline{B}(0, 1)$.

Exercice 1.6. Dans $\mathbb{R}[X]$ on pose

$$\|P\| = \sum_{k=0}^{\infty} |P^{(k)}(k)|.$$

Montrer que l'on obtient une norme sur $\mathbb{R}[X]$ et que cet espace n'est pas complet.

Exercice 1.7. Soit l'espace vectoriel E des suites $(u_n)_{n \geq 0}$ de nombres réels telles que la suite $(u_{n+1} - u_n)$ soit bornée.

1) Montrer que l'on définit une norme sur E en posant

$$\|u\| = |u_0| + \sup_{n \geq 0} |u_{n+1} - u_n|$$

et que l'espace E est complet.

2) Montrer que l'espace l_∞ des suites bornées est inclus dans E et comparer les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur ce sous-espace.

Exercice 1.8. On considère l'espace vectoriel \mathbb{C}^n muni d'une norme $X \mapsto \|X\|$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n d'éléments dans \mathbb{C}), on pose $N(A) = \sup_{\|X\| \leq 1} \|AX\|$.

1. Montrer que N est bien définie et que $N(A) = \sup_{\|X\| \neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|}$.
2. Montrer que $A \mapsto N(A)$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
3. Montrer que

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad N(AB) \leq N(A)N(B).$$

4. En est-il ainsi pour toute norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

5. Dans cette question, on suppose $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2+i \end{pmatrix}$.

Calculer $N(A)$ dans chacun des deux cas :

$$\text{a) } \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\| = \max\{|x_1|, |x_2|\}. \quad \text{b) } \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\| = |x_1| + |x_2|.$$

Exercice 1.9. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} . On définit pour tout $f \in E$, les deux normes suivantes :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|, \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$$

1. Vérifier que $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont deux normes sur E et montrer que pour tout $f \in E$, $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$.
2. En utilisant la suite de fonctions $f_n(x) = x^n$ prouver que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 1.10. Soit N l'application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par

$$N : (x, y) \mapsto \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|x + ty|}{1 + t^2}$$

1. Montrer que N est une norme sur \mathbb{R}^2 .

2. Représenter graphiquement la boule $\overline{B}_N(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : N(x, y) \leq 1\}$ dans le plan usuel.

3. Calculer l'aire (dans le plan usuel) de $\overline{B}_N(0, 1)$.

Exercice 1.11. On note E le \mathbb{R} -espace vectoriel des applications $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $[0, 1]$ et telles que $f(0) = 0$.

Pour $f \in E$, on note $N_1(f) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| + \sup_{x \in [0, 1]} |f'(x)|$ et $N_2(f) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) + f'(x)|$.

Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur E , et qu'elles sont équivalentes.

On rappelle qu'une fonction f définie sur $[0, 1]$ est de classe C^1 si f est dérivable sur $[0, 1]$, et f' est continue sur $[0, 1]$.

Exercice 1.12. Pour $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$, on pose $N(f) = \int_0^1 e^t |f(t)| dt$.

1) Montrer que N est une norme

2) En utilisant la fonction f_n définie par :

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] \\ nt + 1 - n & \text{si } t \in \left[1 - \frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

Montrer que N n'est pas équivalente avec la norme de la convergence uniforme.

Exercice 1.13. Soient E un espace vectoriel réel et $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ une application vérifiant, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x \in E$,

$$N(\lambda x) = |\lambda| N(x) \quad \text{et} \quad N(x) = 0 \implies x = 0_E.$$

Montrer que N définit une norme si, et seulement si, l'ensemble

$$B = \{x \in E : N(x) \leq 1\}$$

est une partie convexe de E .

Exercice 1.14. Pour $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $p \in]0, +\infty[$, on pose

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{et } \|x\|_\infty = \max \{|x_i|, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_p$ n'est pas une norme pour $p \in]0, 1[$.
2. Montrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme pour $p \in [1, \infty[$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_p \rightarrow \|x\|_\infty$ quand $p \rightarrow \infty$.

Exercice 1.15. Soit $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace des applications de classe C^1 sur $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} . On considère les normes définies comme suit :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt, \quad \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|.$$

1. Montrer que l'application $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $N(f) = |f(0)| + \|f'\|_2$ est une norme. (f' désigne la dérivée de f).
2. Montrer que l'on a les inégalités suivantes :

$$\|f'\|_1 \leq \|f'\|_2 \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty \leq N(f).$$

3. En utilisant la fonction f_n définie sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = \frac{\sin(n\pi x)}{n}$, montrer que $\|\cdot\|_\infty$ et $N(f)$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 1.16. On munit l'espace $F = C([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme et on y considère la suite des applications réelles $(T_n)_n$ définies par :

$$f \mapsto T_n(f) = n \int_0^{\frac{1}{n}} f(x) dx, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

1. Montrer que pour tout n non nul, T_n appartient à E' .
2. Calculer la norme de T_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Montrer que :

$$\forall f \in E, \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(f) = T(f) = f(0).$$

4. En déduire que T_n est continue, puis calculer sa norme.

Exercice 1.17. Soit k un nombre réel positif et soit la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ de fonctions définies sur $[0, 1]$ par

$$f_n(x) = n^k x e^{-\frac{nx^2}{2}}.$$

Déterminer les valeurs de k pour lesquelles la suite $(\|f_n\|_\infty)$ a l'infini pour limite et la suite $(\|f_n\|_1)$ converge vers 0.

1.7 Corrections

Correction 1.1. Tout d'abord, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $|x| \geq 0$, $|y| \geq 0$ et $|x - y| \geq 0$, donc $N(x, y) \geq 0$.

(i) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$N(x, y) = 0 \iff |x| = |y| = |x - y| = 0 \iff (x, y) = 0.$$

(ii) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} N(\lambda(x, y)) &= N(\lambda x, \lambda y) \\ &= \max\{|\lambda x|, |\lambda y|, |\lambda x - \lambda y|\} \\ &= \max\{|\lambda| |x|, |\lambda| |y|, |\lambda| |x - y|\} \\ &= |\lambda| \max\{|x|, |y|, |x - y|\} \\ &= |\lambda| N(x, y) \end{aligned}$$

(iii) Soient (x, y) et (z, t) deux éléments de \mathbb{R}^2 ,

$$N((x, y) + (z, t)) = N(x + z, y + t) = \max\{|x + z|, |y + t|, |(x + z) - (y + t)|\}.$$

On a $|x + z| \leq |x| + |z|$, $|y + t| \leq |y| + |t|$

et $|(x + z) - (y + t)| \leq |x - y| + |z - t|$.

Donc

$$\begin{aligned} \max \{|x + z|, |y + t|, |(x + z) - (y + t)|\} &\leq \max \{|x| + |z|, |y| + |t|, |x - y| + |z - t|\} \\ &\leq \max \{|x|, |y|, |x - y|\} + \max \{|z|, |t|, |z - t|\} \\ &= N(x, y) + N(z, t), \end{aligned}$$

d'où $N((x, y) + (z, t)) \leq N(x, y) + N(z, t)$. Ceci prouve que N est une norme sur \mathbb{R}^2 .

La boule unité est définie par $\overline{B}(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : N(x, y) \leq 1\}$

et pour la dessiner, on a

$$N(x, y) \leq 1 \iff \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ x - 1 \leq y \leq x + 1 \end{cases}$$

La boule est limitée par les droites d'équations : $x = -1$, $x = 1$, $y = -1$, $y = 1$, $y = x + 1$, $y = x - 1$.

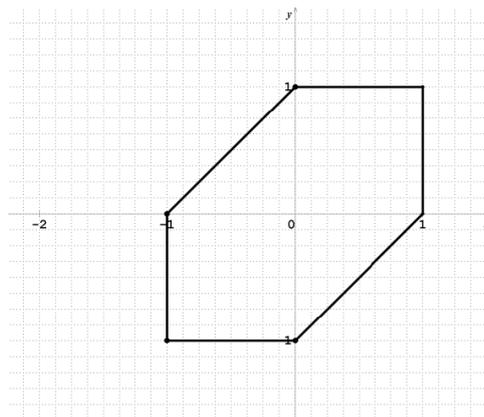


FIGURE 1.1 – Boule unité fermée

Correction 1.2. 1) Il est connu que N_1 est une norme.

Montrons que N_2 est une norme sur E .

(i) Pour $f \in E$, f' est continue sur $[0, 1]$ et donc f' est intégrable sur $[0, 1]$. D'où N_2 est une application de E dans \mathbb{R}_+ .

(ii). On a pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et toute $f \in E$:

$$\begin{aligned} N_2(\alpha f) &= |(\alpha f)(0)| + \int_0^1 |(\alpha f)'(t)| dt \\ &= |\alpha| |f(0)| + |\alpha| \int_0^1 |f'(t)| dt = |\alpha| N_2(f). \end{aligned}$$

(iii) On a, pour toutes $f, g \in E$:

$$\begin{aligned} N_2(f+g) &= |(f+g)(0)| + \int_0^1 |(f+g)'(t)| dt \\ &= |f(0) + g(0)| + \int_0^1 |f'(t) + g'(t)| dt \\ &\leq (|f(0)| + |g(0)|) + \int_0^1 (|f'(t)| + |g'(t)|) dt \\ &= \left(|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| dt \right) + \left(|g(0)| + \int_0^1 |g'(t)| dt \right) \\ &= N_2(f) + N_2(g). \end{aligned}$$

(iv) Soit $f \in E$ telle que $N_2(f) = 0$.

On alors : $|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| dt = 0$. Donc $f(0) = 0$ et $\int_0^1 |f'(t)| dt = 0$.

Puisque $|f'|$ est continue et positive, il résulte $f' = 0$, donc f est constante, $f = f(0) = 0$.

Ceci montre que N_2 est une norme.

Notons que pour tout $f \in E$:

$$N_3(f) = |f(0)| + N_2(f').$$

Il est facile à vérifier que N_3 est une norme.

2. Soit $f \in E$ et $t \in [0, 1]$. Comme f' est continue sur $[0, 1]$

$$|f(t)| = \left| f(0) + \int_0^t f'(u) du \right| \leq |f(0)| + \int_0^t |f'(u)| du \leq |f(0)| + \int_0^1 |f'(u)| du = N_2(f).$$

Donc $N_1(f) = \int_0^1 |f(t)| dt \leq \int_0^1 N_2(f) dt = N_2(f)$.

Ensuite en appliquant le résultat précédent à f' , on obtient

$$N_2(f) = |f(0)| + N_1(f') \leq |f(0)| + N_2(f') = N_3(f).$$

Il résulte que

$$\forall f \in E, N_1(f) \leq N_2(f) \leq N_3(f).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 1]$, on pose $f_n(t) = t^n$.

$N_1(f) = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$ et donc la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 dans l'espace vectoriel normé (E, N_1) .

Par contre, pour $n \geq 0$, $N_2(f_n) = n \int_0^1 t^{n-1} dt = 1$ et la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 dans l'espace vectoriel normé (E, N_2) . On en déduit que les normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes.

De même en utilisant $f_n(t) = \frac{t^n}{n}$, on montre que les normes N_2 et N_3 ne sont pas équivalentes.

Correction 1.3. 1. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$, alors il existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\|x\|_\infty = |x_j|$, donc

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty^2 &= |x_j|^2 \\ &\leq |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 = \|x\|_2^2, \end{aligned}$$

d'où $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$.

$$\begin{aligned} \|x\|_2^2 &= |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 \\ &\leq |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} |x_i| |x_j| \\ &= (|x_1| + \dots + |x_n|)^2 \\ &= \|x\|_1^2 \end{aligned}$$

d'où $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$.

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= |x_1| + \dots + |x_n| \\ &\leq n |x_j| \\ &= n \|x\|_\infty \end{aligned}$$

d'où $\|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$. Il résulte que

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty.$$

2.

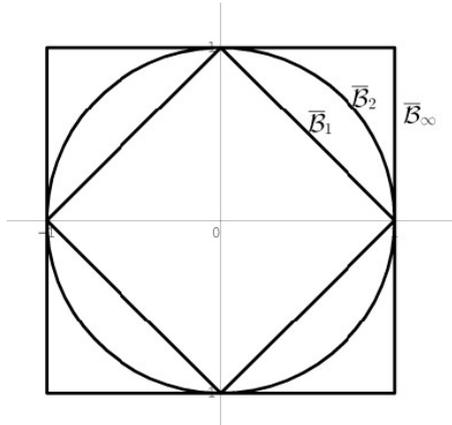


FIGURE 1.2 – Boules d'unité

Correction 1.4. Il n'est pas difficile de vérifier que N_1 , N_2 et N_3 sont des normes sur E .

Supposons qu'il existe $C > 0$ tel que $N_1(P) \leq CN_\infty(P)$.

Pour $P(X) = 1 + X + \dots + X^n$, on

$$N_1(P) = n + 1 \quad \text{et} \quad N_\infty(P) = 1,$$

donc $n + 1 \leq C$, ce qui est impossible pour n grand.

Si $N_2(P) \leq CN_\infty(P)$, pour le même polynôme P , on a

$$N_2(P) = \sqrt{n + 1} \leq C,$$

ce qui est toujours impossible.

Avec le même polynôme, si on a $N_1(P) \leq CN_2(P)$. Alors, $n + 1 \leq C\sqrt{n + 1}$ qui est aussi impossible.

Correction 1.5. 1. Soit $x \in b + \overline{B}(a, r)$. Alors il existe $t \in \overline{B}(a, r)$ tel que $x = b + t$ et

$$\|x - (a + b)\| = \|(x - b) - a\| = \|t - a\| \leq r.$$

Donc, $x \in \overline{B}(a + b, r)$.

Réciproquement, supposons que $x \in \overline{B}(a + b, r)$ et posons $t = x - b$. Alors, on a $x = b + t$ et

$$\|a - t\| = \|a - (x - b)\| = \|(a + b) - x\| \leq r.$$

On a donc $t \in \overline{B}(a, r)$ ce qui prouve $x \in b + \overline{B}(a, r)$.

2. Soit $x \in \overline{B}(a, r)$, alors $\|x - a\| \leq r$. En écrivant $x = a + r\frac{x-a}{r}$, en posant $y = \frac{x-a}{r}$, on a

$$\|y\| = \frac{\|x - a\|}{r} \leq 1,$$

d'où $x \in a + r\overline{B}(0, 1)$.

Réciproquement, si $x \in a + r\overline{B}(0, 1)$, x s'écrit $x = a + ry$ avec $\|y\| \leq 1$, d'où $\|x - a\| \leq r$, donc $x \in \overline{B}(a, r)$.

Correction 1.6. Tout d'abord la somme est finie, puisque si P est de degré k , le polynôme $P^{(k+1)}$ est nul. Donc, $\|P\|$ est bien définie. Prenons ensuite P, Q dans E et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $k \geq 0$,

$$\left| (P + Q)^{(k)}(k) \right| \leq \left| P^{(k)}(k) \right| + \left| Q^{(k)}(k) \right|$$

et donc, en passant à la somme $\|P + Q\| \leq \|P\| + \|Q\|$. On a clairement $\|\lambda P\| = |\lambda| \|P\|$.

Enfin, si $\|P\| = 0$ c'est à dire $\sum_{k=0}^{+\infty} \left| P^{(k)}(k) \right| = 0$. Soit P un polynôme de degré $n \geq 0$.

Alors le polynôme $P^{(n)}$ est un polynôme constant non nul et donc $P^{(n)}(n)$ est non nul.

Mais

$$\left| P^{(n)}(n) \right| \leq \|P\|,$$

et il en résulte que $\|P\|$ n'est pas nul. Le seul polynôme P tel que $\|P\|$ soit nul est le polynôme zéro.

Pour tout entier n , il existe un polynôme P_n de degré au plus n et un seul tel que, si $0 \leq k \leq n$,

$$P_n^{(k)}(k) = \frac{1}{2^k}.$$

En effet, si l'on pose

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k,$$

on est amené, pour déterminer P_n à résoudre un système de $n + 1$ équations à $n + 1$ inconnues dont la matrice est triangulaire supérieure avec éléments diagonaux non nuls. C'est donc un système de Cramer qui a une solution et une seule.

Si $n < m$, on a alors

$$\|P_n - P_m\| = \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{2^k} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}.$$

La suite (P_n) est donc une suite de Cauchy.

La forme linéaire qui à P associe $P^{(k)}(k)$ est continue puisque

$$|P^{(n)}(n)| \leq \|P\|.$$

Si la suite (P_n) convergerait vers une limite P , la suite $(P_n^{(k)}(k))$ convergerait vers $P^{(k)}(k)$.

Mais, si $n \geq k$, on a

$$P_n^{(k)}(k) = \frac{1}{2^k},$$

donc on devrait avoir $P^{(k)}(k) = \frac{1}{2^k}$ pour tout entier k et aucune dérivée de P ne serait le polynôme zéro, d'où une contradiction. Il en résulte que $\mathbb{R}[X]$ n'est pas complet pour la norme ainsi définie.

Correction 1.7. 1) On a $|u_0| \geq 0$ et $\sup_{n \geq 0} |u_{n+1} - u_n| \geq 0$, donc $\|u\| \geq 0$,

$\|u\| = 0$ ce qui équivaut $|u_0| = 0$ et $|u_{n+1} - u_n| = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, cela signifie que

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite constante avec $u_0 = 0$. Alors, $u = 0$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $u \in E$, on a

$$\begin{aligned} \|\lambda u\| &= |\lambda u_0| + \sup_{n \geq 0} |\lambda u_{n+1} - \lambda u_n| \\ &= |\lambda| |u_0| + |\lambda| \sup_{n \geq 0} |u_{n+1} - u_n| = |\lambda| \|u\|. \end{aligned}$$

Soient u et v deux éléments de E

$$\begin{aligned} \|u + v\| &= |u_0 + v_0| + \sup_{n \geq 0} |u_n + v_n| \\ &\leq \left(|u_0| + \sup_{n \geq 0} |u_n| \right) + \left(|v_0| + \sup_{n \geq 0} |v_n| \right) \\ &= \|u\| + \|v\|. \end{aligned}$$

Ceci montre que l'on a défini une norme sur E .

Soit $(u(p))$ une suite de Cauchy de E . Pour tout $\epsilon > 0$, il existe N_ϵ tel que $q > p \geq N_\epsilon$

implique

$$\begin{aligned} \|u(q) - u(p)\| &= |u_0(q) - u_0(p)| + \sup_{n \geq 0} |(u_{n+1}(q) - u_{n+1}(p)) - (u_n(q) - u_n(p))| \\ &= |u_0(q) - u_0(p)| + \sup_{n \geq 0} |(u_{n+1}(q) - u_n(q)) - (u_{n+1}(p) - u_n(p))| \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Donc, quel que soit n ,

$$|u_0(q) - u_0(p)| + |(u_{n+1}(q) - u_n(q)) - (u_{n+1}(p) - u_n(p))| \leq \epsilon. \quad (1.7.1)$$

Alors $(u_0(p))$ est une suite de Cauchy de \mathbb{R} et converge vers un nombre u_0 et pour tout

n , la suite $(u_{n+1}(p) - u_n(p))_p$ est une suite de Cauchy de \mathbb{R} et converge vers un nombre

a_n . On considère la suite $u = (u_n)_n$ définie par

$$u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a_k,$$

qui est telle que

$$u_{n-1} - u_n = a_n.$$

En faisant tendre q vers l'infini dans l'inégalité (1.7.1), on obtient, si $p \geq N_\epsilon$,

$$\begin{aligned} |u_0(q) - u_0(p)| + |a_n - (u_{n+1}(p) - u_n(p))| &= |u_0(q) - u_0(p)| \\ &\quad + |(u_{n+1}(q) - u_n(q)) - (u_{n+1}(p) - u_n(p))| \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Alors

$$|u_{n+1} - u_n| = |(u_{n+1} - u_n) - (u_{n+1}(p) - u_n(p))| + |u_{n+1}(p) - u_n(p)| \leq \epsilon + \|u(p)\|,$$

ce qui montre que la suite $u = (u_n)$ est dans E . Par ailleurs, si $p \geq N_\epsilon$,

$$\|u - u(p)\| \leq \epsilon,$$

donc la suite $(u(p))$ converge vers u . Il en résulte que E est complet.

2) Tout d'abord

$$\|u\| \leq |u_0| + \sup_{n \geq 0} (|u_n| + |u_{n+1}|) \leq 3 \|u\|_\infty,$$

avec égalité pour la suite $(-1, 1, 0, \dots)$, ce qui montre que l_∞ est inclus dans E .

Considérons la suite $u(p) = (\inf(n; p))_{n \geq 0}$. On a alors

$$\|u(p)\|_\infty = p \quad \text{et} \quad \|u(p)\| = 1.$$

Il ne peut pas exister de constante C telle que, pour toute suite u de l_∞ ,

$$\|u\|_\infty \leq C \|u\|.$$

Les normes ne sont pas équivalentes sur l_∞ .

Correction 1.8. 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, l'application f de \mathbb{C}^n dans \mathbb{C}^n définie par

$f(X) = AX$ est linéaire, donc continue puisque l'espace de départ est de dimension finie.

Or $\overline{B}(0, 1) = \{X \in \mathbb{C}^n : \|X\| \leq 1\}$ est bornée et fermée, donc compact, donc f atteint ses bornes sur $\overline{B}(0, 1)$.

Ainsi l'application N est de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans \mathbb{R} est bien définie.

Soit $X \in \mathbb{C}^n - \{0\}$, on a $AX = \|X\| A\left(\frac{X}{\|X\|}\right)$, d'où $\frac{\|AX\|}{\|X\|} = \left\|A\left(\frac{X}{\|X\|}\right)\right\|$.

Comme $\left\|\frac{X}{\|X\|}\right\| = 1$, on donc $\frac{\|AX\|}{\|X\|} \leq N(A)$, d'où

$$\sup_{X \neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|} \leq N(A).$$

Réciproquement, soit $X \in \overline{B}(0, 1)$ avec $X \neq 0$. On a

$0 < \|X\| \leq 1$ d'où $\|AX\| \leq \frac{\|AX\|}{\|X\|}$ et donc

$$N(A) \leq \frac{\|AX\|}{\|X\|} \leq \sup_{X \neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|}.$$

Par conséquent

$$N(A) = \sup_{X \neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|}.$$

2. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $N(A)$ est un réel positif.

Si $N(A) = 0$, on a $AX = 0$ pour tout $X \in \mathbb{C}^n$ donc $A = 0$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; pour tout $X \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|X\| \leq 1$, on a

$$\|(\lambda A)X\| = \|\lambda(AX)\| = |\lambda| \|AX\|,$$

donc

$$\sup_{\|X\| \leq 1} \|(\lambda A)X\| = \sup_{\|X\| \leq 1} \|\lambda(AX)\| = \sup_{\|X\| \leq 1} |\lambda| \|AX\|,$$

d'où $N(\lambda A) = |\lambda| N(A)$.

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, pour $X \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|X\| \leq 1$, on a

$$\begin{aligned} \|(A+B)X\| &= \|AX + BX\| \\ &\leq \|AX\| + \|BX\| \\ &\leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|AX\| + \sup_{\|x\| \leq 1} \|BX\|, \end{aligned}$$

donc

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|(A+B)X\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|AX\| + \sup_{\|x\| \leq 1} \|BX\|$$

c'est-à-dire $N(A+B) \leq N(A) + N(B)$. N est donc une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

3. On a vu que, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $N(A) = \sup_{X \neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|}$ d'où, pour tout $X \in \mathbb{C}^n$,

$$\|AX\| \leq N(A) \|X\|.$$

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n$ et $X \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|X\| \leq 1$. On a :

$$\|(AB)X\| = \|A(BX)\| \leq N(A) \|BX\| \leq N(A) N(B) \|X\| \leq N(A) N(B), \text{ donc}$$

$$\sup_{\|X\| \leq 1} \|(AB)X\| \leq N(A) N(B),$$

d'où

$$N(AB) \leq N(A) N(B).$$

4. On définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ en posant, pour $A = (a_{ij})$,

$$\delta(A) = \max \left\{ |a_{ij}|, (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2 \right\}.$$

Si A est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1, on a $A^2 = nA$. Comme $\delta(A) = 1$ et $\delta(A^2) = n$, l'inégalité de la question précédente n'est pas vérifiée par la norme δ .

5. a) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ tel que $\|X\| = \max \{|x_1|, |x_2|\} \leq 1$.

On a $AX = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ 3x_1 + (2+i)x_2 \end{pmatrix}$, donc

$$\begin{aligned} \|AX\| &= \max \{|x_1 - 2x_2|, |3x_1 + (2+i)x_2|\} \\ &\leq \max \{|x_1| + 2|x_2|, 3|x_1| + \sqrt{5}|x_2|\} \\ &\leq \max \{3, 3 + \sqrt{5}\} = 3 + \sqrt{5} \end{aligned}$$

donc $N(A) \leq 3 + \sqrt{5}$.

Or, si $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2-i}{|2+i|} \end{pmatrix}$, on a $\|X\| = 1$ et la seconde composante de AX s'écrit $y_2 = 3 + \sqrt{5}$,

d'où $\|AX\| \geq 3 + \sqrt{5}$ et $N(A) \geq 3 + \sqrt{5}$. On conclut que $N(A) = 3 + \sqrt{5}$.

b) Soit $X \in \mathbb{C}^2$ tel que $\|X\| = |x_1| + |x_2| \leq 1$. On a

$$\begin{aligned} \|AX\| &= |x_1 - 2x_2| + |3x_1 + (2+i)x_2| \\ &\leq |x_1| + 2|x_2| + 3|x_1| + \sqrt{5}|x_2| \\ &\leq 4|x_1| + (2 + \sqrt{5})|x_2| \\ &\leq (2 + \sqrt{5})(|x_1| + |x_2|) \leq 2 + \sqrt{5}, \end{aligned}$$

d'où $N(A) \leq 2 + \sqrt{5}$.

Or, si $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $\|X\| = 1$ et $AX = \begin{pmatrix} -2 \\ 2+i \end{pmatrix}$ d'où $\|AX\| = 2 + \sqrt{5}$ puis

$N(A) \geq 2 + \sqrt{5}$.

On conclut que $N(A) = 2 + \sqrt{5}$.

Correction 1.9. 1. Toute fonction continue sur $[0, 1]$ est bornée (et atteint ses bornes).

Ceci justifie que $\|f\|_\infty$ est bien défini pour tout $f \in E$. De plus, on a $\|f\|_\infty \geq 0$. D'autre part, si $\|f\|_\infty = 0$, alors pour tout x dans $[0, 1]$, on a $f(x) = 0$, et donc $f = 0$.

Pour l'inégalité triangulaire, soient f et g deux éléments de E . Pour tout x de $[0, 1]$, on

a :

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

On obtient

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$. Pour tout x de $[0, 1]$, on a :

$$|\lambda f(x)| = |\lambda| |f(x)|,$$

et passant au max, on a bien $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty$. Pour $\|\cdot\|_1$, Il facile de vérifier que c'est est une norme. On remarque que pour chaque x de $[0, 1]$, on a :

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty.$$

Ensuite

$$\int_0^1 |f(x)| dx \leq \|f\|_\infty \int_0^1 dx.$$

Il résulte que

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty.$$

2. Pour $f_n(x) = x^n$, on a :

$$\|f_n\|_\infty = 1, \|f_n\|_1 = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

Si les normes étaient équivalentes, il existerait une constante $C > 0$ telle que $\|f\|_\infty \leq C \|f\|_1$. Pour $f = f_n$, on obtient et un passage à la limite en n donne $1 \leq 0$, ce qui est une contradiction.

Correction 1.10. 1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $|t| \leq 1$:

$$\frac{|x + ty|}{1 + t^2} = \frac{|x| + |t| |y|}{1 + t^2} \leq \frac{|x| + |y|}{1} = |x| + |y|.$$

et, pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $|t| \geq 1$, alors $t^2 \geq |t|$:

$$\frac{|x + ty|}{1 + t^2} = \frac{|x| + |t||y|}{1 + t^2} \leq \frac{(|x| + |y|)|t|}{t^2} \leq \frac{(|x| + |y|)|t|}{|t|} = |x| + |y|.$$

D'où : $\forall t \in \mathbb{R}, \frac{|x+ty|}{1+t^2} \leq |x| + |y|$.

Ainsi, l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{|x+ty|}{1+t^2}$, est bornée, donc N est bien définie.

- On a, pour tous $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} N((x, y), (x', y')) &= N(x + x', y + y') \\ &= \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|(x + x') + t(y + y')|}{1 + t^2} \\ &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|x + ty| + |x' + ty'|}{1 + t^2} \\ &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|x + ty|}{1 + t^2} + \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|x' + ty'|}{1 + t^2} \\ &= N(x, y) + N(x', y'). \end{aligned}$$

- On a, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} N(\lambda(x, y)) &= N(\lambda x, \lambda y) \\ &= \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|\lambda x + \lambda t y|}{1 + t^2} \\ &= |\lambda| \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|x + t y|}{1 + t^2} = |\lambda| N(x, y). \end{aligned}$$

- On a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} N(x, y) = 0 &\iff \left(\forall t \in \mathbb{R}, \frac{|x + t y|}{1 + t^2} = 0 \right) \\ &\iff (\forall t \in \mathbb{R}, x + t y = 0) \\ &\iff (x, y) = (0, 0). \end{aligned}$$

On conclut que N est une norme sur \mathbb{R}^2 .

2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned}
 (x, y) \in \overline{B}_N(0, 1) &\iff N(x, y) \leq 1 \\
 &\iff \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|x + ty|}{1 + t^2} \leq 1 \\
 &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \frac{|x + ty|}{1 + t^2} \leq 1 \\
 &\iff \forall t \in \mathbb{R}, -(1 + t^2) \leq x + ty \leq 1 + t^2 \\
 &\iff \begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, t^2 - ty + (1 - x) \geq 0 \\ \forall t \in \mathbb{R}, t^2 + ty + (1 + x) \geq 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} y^2 - 4(1 - x) \leq 0 \\ y^2 - 4(1 + x) \leq 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ainsi, $\overline{B}_N(0; 1)$ est la partie du plan comprise entre les deux paraboles (voir schéma ci-après) :

$$(P) : y^2 = 4(1 - x), \quad (P') : y^2 = 4(x + 1).$$

3. Les points d'intersection des deux paraboles P et P' ont pour ordonnées -2 et 2 . L'aire S de $\overline{B}_N(0, 1)$ est donnée, par exemple, par l'intégrale double :

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-2}^2 \left(\int_{\frac{y^2}{4} - 1}^{1 - \frac{y^2}{4}} dx \right) dy \\
 &= \int_{-2}^2 \left(1 - \frac{y^2}{4} - \frac{y^2}{4} + 1 \right) dy \\
 &= \int_{-2}^2 \left(2 - \frac{y^2}{2} \right) dy = \left[2y - \frac{y^3}{6} \right]_{-2}^2 \\
 &= \frac{16}{3}.
 \end{aligned}$$

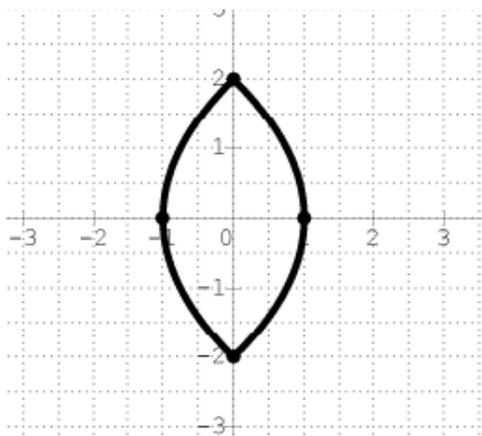


FIGURE 1.3 – Boule unité

Correction 1.11. Montrons d'abord que N_1 et N_2 sont des normes sur E . Pour $f \in E$, $N_1(f)$ et $N_2(f)$ existent dans \mathbb{R} car f et f' sont continues sur le compact $[0, 1]$.

Les propriétés, pour tous λ de \mathbb{R} , f, g de E :

$$N_1(\lambda f) = |\lambda| N_1(f), \quad N_2(\lambda f) = |\lambda| N_2(f)$$

$$N_1(f + g) \leq N_1(f) + N_1(g), \quad N_2(f + g) \leq N_2(f) + N_2(g)$$

sont immédiates. Soit $f \in E$.

Si $N(f) = 0$, alors $\sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| = 0$, donc $f = 0$.

Supposons $N_2(f) = 0$. Alors $f + f' = 0$, donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) = Ce^{-x}.$$

Comme $f(x) = 0$, on déduit $C = 0$, puis $f = 0$.

Ainsi N_1 et N_2 sont des normes sur E .

Montrons que N_1 et N_2 sont équivalentes :

Soit $f \in E$, on a :

$$\forall x \in [0, 1], \quad |f(x) + f'(x)| \leq |f(x)| + |f'(x)| \leq N_1(f),$$

d'où : $N_2 \leq N_1$.

Soit $f \in E$. Considérons l'application $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x f(x)$, qui est de classe C^1 sur $[0, 1]$.

On a, pour tout $x \in [0, 1]$:

$$|g'(t)| = |e^t (f(t) + f'(t))| \leq e N_2(f)$$

puis, pour tout x de $[0, 1]$:

$$|g(x)| = \left| \int_0^x g'(t) dt \right| \leq \int_0^x |g'(t)| dt \leq x e N_2(f) \leq e N_2(f),$$

d'où $|f(x)| = e^{-x} |g(x)| \leq e N_2(f)$.

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= |(f'(x) + f(x)) - f(x)| \\ &\leq |f'(x) + f(x)| + |f(x)| \\ &\leq (1 + e) N_2(f). \end{aligned}$$

D'où $\forall f \in E$, $N_1(f) \leq (1 + 2e) N_2(f)$.

On a montré : $\forall f \in E$, $N_2(f) \leq N_1(f) \leq (1 + 2e) N_2(f)$, donc N_1 et N_2 sont des normes équivalentes.

Correction 1.12. 1. Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ et $f \in E$, on a $N(f) \geq 0$.

Supposons que $N(f) = 0 = \int_0^1 e^t |f| dt$.

Comme la fonction $t \mapsto e^t |f(t)|$ est continue et positive, on en déduit, $\forall t \in [0, 1]$,

$e^t |f(t)| = 0$, d'où $f = 0$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$N(\lambda f) = \int_0^1 e^t |(\lambda f)(t)| dt = |\lambda| \int_0^1 |f(t)| dt = |\lambda| N(f).$$

Enfin, pour f et g dans E , on a :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad e^t |f(t) + g(t)| \leq e^t |f(t)| + e^t |g(t)|.$$

En intégrant sur $[0, 1]$, on a donc $N(f + g) \leq N(f) + N(g)$.

N est donc une norme sur E .

2. La norme de convergence uniforme est $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$.

Montrons que la fonction $f \mapsto \frac{\|f\|}{N(f)}$ n'est pas bornée.

On a $f_n \in E$, $\|f_n\| = 1$ et

$$N(f_n) = \int_{1-\frac{1}{n}}^1 e^t |f_n(t)| dt \leq \int_{1-\frac{1}{n}}^1 e^t \leq \frac{1}{n} \times e,$$

d'où $\frac{\|f_n\|_\infty}{N(f_n)} \geq \frac{n}{e}$, ce qui montre que $f \mapsto \frac{\|f\|}{N(f)}$ n'est pas bornée et donc les deux normes ne sont pas équivalentes.

Correction 1.13. Supposons que N soit une norme et montrons que la boule unité fermée B est convexe.

Soient $a, b \in B$. Pour tout $t \in [0, 1]$, l'inégalité triangulaire donne

$$\begin{aligned} N((1-t)a + tb) &\leq N((1-t)a) + N(tb) \\ &= |1-t|N(a) + |t|N(b) = (1-t) + t = 1. \end{aligned}$$

Ainsi, le vecteur $(1-t)a + tb$ appartient à B . Puisque cela vaut pour tout $t \in [0, 1]$, le segment $[a, b]$ est inclus dans B et l'on peut affirmer que la boule B est convexe.

Inversement, supposons que la partie B est convexe. Pour établir que N est une norme, il suffit de démontrer l'inégalité triangulaire $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ pour tous x et y de E .

Lorsque x ou y désigne le vecteur nul, c'est immédiat. Supposons désormais les vecteurs

x et y tous deux non nuls.

Introduisons les vecteurs $a = \frac{x}{N(x)}$ et $b = \frac{y}{N(y)}$. Les vecteurs a et b appartenant à B , le segment d'extrémités a et b est entièrement inclus dans B et donc, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$N((1-t)a + tb) \leq 1. \quad (1.7.2)$$

En choisissant $t = \frac{N(y)}{N(x)+N(y)} \in [0, 1]$, on obtient

$$(1-t)a + tb = \frac{N(x)}{N(x)+N(y)} \cdot \frac{x}{N(x)} + \frac{N(y)}{N(x)+N(y)} \cdot \frac{y}{N(y)} = \frac{x+y}{N(x)+N(y)}$$

et (1.7.2) se relit

$$N(x+y) \leq N(x) + N(y).$$

Donc N est norme.

Correction 1.14. 1. Prenons les points $x = (1, 0, \dots, 0)$ et $y = (0, 1, \dots, 0)$, on a

$$\|x+y\|_p = 2^{\frac{1}{p}} \quad \text{et} \quad \|x\|_p + \|y\|_p = 2, \quad \text{pour } 0 < p < 1,$$

donc $\|x+y\|_p > \|x\|_p + \|y\|_p$. L'inégalité triangulaire n'étant pas vérifiée, $\|\cdot\|_p$ n'est pas une norme.

2. Toutes les propriétés sont évidentes sauf l'inégalité triangulaire pour $p \in [1, +\infty[$. En utilisant l'exercice précédent, on voit qu'il suffit de vérifier que la boule unité fermée B_p associée à cette norme est convexe. Soient donc $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in B_p$ et $\lambda \in [0, 1]$.

On remarque que la fonction $t \mapsto t^p$ est convexe sur $[0, +\infty[$ car sa dérivée est croissante.

On a donc

$$\begin{aligned} \|(1-\lambda)x + \lambda y\|_p^p &= \sum_{i=1}^n |(1-\lambda)x_i + \lambda y_i|^p \leq \sum_{i=1}^n ((1-\lambda)|x_i| + \lambda|y_i|)^p \\ &\leq \sum_{i=1}^n ((1-\lambda)|x_i|^p + \lambda|y_i|^p) \\ &= (1-\lambda)\|x\|_p^p + \lambda\|y\|_p^p \leq 1. \end{aligned}$$

Ainsi $(1 - \lambda)x + \lambda y \in B_p$, qui est donc convexe. On a donc bien montré que $\|\cdot\|_p$ est une norme.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $p \geq 1$:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty^p &= (\max \{|x_i|, i = 1, 2, \dots, n\})^p \\ &= |x_j|^p, \quad (1 \leq j \leq n) \text{ pour un certain } j \\ &\leq |x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p = \|x\|_p^p, \end{aligned}$$

donc $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p$.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \|x\|_p^p &= |x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p \\ &\leq \underbrace{|x_j|^p + \dots + |x_j|^p}_{n \text{ fois}} = n \|x\|_\infty^p. \end{aligned}$$

Ensuite $(\|x\|_p^p)^{\frac{1}{p}} \leq (n \|x\|_\infty^p)^{\frac{1}{p}}$, donc $\|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty$. Par passage à la limite pour p tend vers $+\infty$, il résulte que $\|x\|_p \longrightarrow \|x\|_\infty$.

Correction 1.15. 1. La solution est similaire à celle d'exercice 1.2 pour la norme N_2 .

2. En utilisant l'inégalité de Schwarz, on obtient

$$\left(\int_0^1 |f'(x)| \times 1 dx \right)^2 \leq \left(\int_0^1 |f'(x)|^2 dx \right) \left(\int_0^1 dx \right),$$

ce qui donne

$$\|f'\|_1^2 \leq \|f'\|_2^2.$$

Alors

$$|f(x) - f(0)| = \left| \int_0^x f'(t) dt \right| \leq \int_0^x |f'(t)| dt \leq \int_0^1 |f'(t)| dt = \|f'\|_1 \leq \|f'\|_2,$$

puis

$$|f(x)| \leq |f(0)| + |f(x) - f(0)| \leq |f(0)| + \|f'\|_2,$$

d'où

$$\|f\|_\infty \leq N(f).$$

3. Calculons $N(f_n)$ et $\|f_n\|_\infty$.

Tout d'abord

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^1 (f_n')^2(x) dx = \pi^2 \int_0^1 \cos^2(n\pi x) dx = \frac{\pi^2}{2} \int_0^1 (1 + \cos(2n\pi x)) dx = \frac{\pi^2}{2},$$

puis $N(f_n) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ et $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$, on a donc

$$\frac{\|f_n\|}{\|f_n\|_\infty} = \frac{n\pi}{\sqrt{2}},$$

et cette suite n'est pas bornée. Il n'existe pas de constante C telle que, pour tout f de E ,

$$N(f) \leq C \|f\|_\infty,$$

ce qui montre que les normes N et $\|\cdot\|$ ne sont pas équivalentes.

Correction 1.16. 1. La linéarité de T_n est évidente. T_n est continue car

$$|T_n(f)| \leq n \int_0^{\frac{1}{n}} |f(x)| dx \leq n \max_{0 \leq x \leq \frac{1}{n}} |f(x)| \frac{1}{n} \leq \|f\|_\infty.$$

2. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* |T_n(f)| \leq \|f\|_\infty.$$

Donc

$$\|T_n\| \leq 1.$$

Si f est constante valant 1, on trouve :

$$T_n(f) = n \int_0^{\frac{1}{n}} dx = 1.$$

D'où $\|T_n\| = 1$.

3. Pour tout $f \in E$, on a :

$$\begin{aligned} |T_n(f) - f(0)| &= \left| n \int_0^{\frac{1}{n}} f(x) dx - n \int_0^{\frac{1}{n}} f(0) dx \right| \\ &\leq n \int_0^{\frac{1}{n}} |f(x) - f(0)| dx \\ &\leq \max_{0 \leq x \leq \frac{1}{n}} |f(x) - f(0)|. \end{aligned}$$

Comme f est continue, $\max_{0 \leq x \leq \frac{1}{n}} |f(x) - f(0)|$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

4. T est linéaire. De plus, on a :

$$|T(f)| = |f(0)| \leq \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| = \|f\|_\infty.$$

Donc T est continue et $\|T\| \leq 1$.

Si f est la constante 1, on trouve $\|T\| = 1$.

Correction 1.17. Pour tout $x \in [0, 1]$

$$f'_n(x) = n^k (1 - nx^2) e^{-\frac{nx^2}{2}},$$

et la fonction f_n est maximale pour $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Alors

$$\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = e^{-\frac{1}{2}} n^{k-\frac{1}{2}}.$$

La suite $(\|f_n\|_\infty)_n$ a une limite infinie si et seulement si $k > \frac{1}{2}$.

Par ailleurs

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(x)| dx = n^k \int_0^1 x e^{-\frac{nx^2}{2}} dx = n^k \left[-\frac{1}{n} e^{-\frac{nx^2}{2}} \right]_0^1 = n^{k-1} (1 - e^{-\frac{n}{2}}).$$

Alors la suite $(\|f_n\|_1)_n$ converge vers 0 si et seulement si $k < 1$.

Donc, $k \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right[$.

Chapitre 2

Espaces de Hilbert

Les espaces de Hilbert sont la généralisation naturelle en dimension infinie des espaces euclidiens (ou hermitiens) \mathbb{R}^n (ou \mathbb{C}^n). Dans ce chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

2.1 Formes sesquilinéaires et formes hermitiennes

Définition 2.1. Soient E et F deux \mathbb{C} -espaces vectoriels. Une application $f : E \rightarrow F$ est dite semi-linéaire ou antilinéaire lorsque, pour tout $x, y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad f(\lambda x) = \bar{\lambda}f(x).$$

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, semi-linéaire coïncide avec linéaire. Si $F = \mathbb{K}$, f est dite forme semi-linéaire.

Définition 2.2. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Une forme sesquilinéaire sur E est une application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$, vérifiant, pour tout $x, x', y, y' \in E$ et tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, les propriétés suivantes :

i) $\varphi(x + x', y) = \varphi(x, y) + \varphi(x', y)$ et $\varphi(\lambda x, y) = \lambda\varphi(x, y)$;

ii) $\varphi(x, y + y') = \varphi(x, y) + \varphi(x, y')$ et $\varphi(x, \mu y) = \bar{\mu}\varphi(x, y)$.

Autrement dit, une forme sesquilinéaire sur un \mathbb{K} -espace vectoriel E est une application

$\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que :

i) pour tout $y \in E$, l'application $x \longmapsto \varphi(x, y)$ soit linéaire ;

ii) pour tout $x \in E$, l'application $y \longmapsto \varphi(x, y)$ soit semi-linéaire.

Définition 2.3. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Une forme sesquilinéaire $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ est dite hermitienne, si

$$\forall (x, y) \in E \times E, \varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}.$$

Remarques 2.1. 1. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, une forme hermitienne sur E est tout simplement une forme bilinéaire symétrique sur E .

2. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, une forme sesquilinéaire sur E est simplement une forme bilinéaire sur E .

3. Si φ est une forme sesquilinéaire sur E , alors pour tout $x, y \in E$, on a

$$\varphi(x, 0) = \varphi(0, y) = 0.$$

Définition 2.4. Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et φ une forme hermitienne sur E .

i) On dit que φ est positive, si

$$\forall x \in E, \varphi(x, x) \geq 0.$$

ii) On dit que φ est définie positive, si

$$\forall x \in E, x \neq 0 \implies \varphi(x, x) > 0.$$

iii) On appelle produit scalaire sur E , toute forme hermitienne sur E définie positive.

On notera en général un produit scalaire par \langle, \rangle

Exemples 2.1. 1. Le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^n est défini par :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

où $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

2. Le produit scalaire usuel sur \mathbb{C}^n est défini par :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$$

où $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$.

3. Soit $C([0, 1])$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ et à valeurs dans \mathbb{C} .

Pour tout $f, g \in C([0, 1])$, on pose :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt$$

On définit ainsi un produit scalaire sur $C([0, 1])$.

4. Sur $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{K}) = \{(x_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$, on peut définir le produit (scalaire) hermitien : $\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \bar{y}_n$ avec $x = (x_n)_{n \geq 0}$ et $y = (y_n)_{n \geq 0}$.

5. Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n d'éléments dans \mathbb{K} , on peut définir le produit hermitien (scalaire) : $\langle A, B \rangle = \text{Trace}(A \bar{B}^t)$. \bar{B} est la matrice conjuguée de la matrice B c'est à dire, si $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, alors $\bar{B} = (\bar{b}_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$.

Théorème 2.1. (inégalité de Cauchy-Schwartz). Soit φ une forme hermitienne positive sur un \mathbb{K} -espace vectoriel E . Alors pour tous $x, y \in E$, on a :

$$|\varphi(x, y)|^2 \leq \varphi(x, x) \varphi(y, y). \quad (2.1.1)$$

Démonstration. Soient $x, y \in E$. i) Si $\varphi(x, y) = 0$, l'inégalité (2.1.1) est évidente.

ii) Si $\varphi(x, y) \neq 0$, on pose $\lambda = \frac{\overline{\varphi(x, y)}}{|\varphi(x, y)|}$, donc on aura

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t\lambda x + y, t\lambda x + y) \geq 0$$

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t\lambda x + y, t\lambda x + y) \geq 0 &\implies \forall t \in \mathbb{R}, t^2\varphi(x, x) + 2\operatorname{Re}(\varphi(t\lambda x, y)) + \varphi(y, y) \geq 0 \\ &\implies \forall t \in \mathbb{R}, t^2\varphi(x, x) + 2\operatorname{Re}(t\lambda\varphi(x, y)) + \varphi(y, y) \geq 0. \end{aligned}$$

Or on a

$$\lambda\varphi(x, y) = \frac{\overline{\varphi(x, y)}}{|\varphi(x, y)|} \varphi(x, y) = \frac{|\overline{\varphi(x, y)}|^2}{|\varphi(x, y)|} = |\overline{\varphi(x, y)}| = |\varphi(x, y)|.$$

Ainsi, on aura

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(x, x)t^2 + 2|\varphi(x, y)|t + \varphi(y, y) \geq 0.$$

Nous obtenons, donc, un trinôme de second degré en t qui est toujours positif ou nul pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc son discriminant $\Delta \leq 0$. Donc on aura

$$|\varphi(x, y)|^2 - \varphi(x, x)\varphi(y, y) \leq 0$$

D'où le résultat. □

Corollaire 2.1. Soit $(x, y) \longmapsto \langle x, y \rangle$ un produit scalaire sur E , alors $x \longmapsto \|x\| := \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$ est une norme sur E .

Démonstration. i) Pour tout $x \in E$,

$$\langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} = 0 \iff x = 0$$

ii) Pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$\|\lambda x\| = \langle \lambda x, \lambda x \rangle^{\frac{1}{2}} = (\lambda \bar{\lambda})^{\frac{1}{2}} \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \|x\|.$$

iii) Pour tout $x, y \in E$, on a :

$$\begin{aligned}
 \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\
 &= \langle x, x \rangle + 2\operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\
 &\leq \langle x, x \rangle + 2|\langle x, y \rangle| + \langle y, y \rangle \\
 &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\
 &= (\|x\| + \|y\|)^2.
 \end{aligned}$$

D'où on a $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Donc l'application $x \mapsto \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$ est une norme sur E . □

Remarque 2.1. D'après le corollaire précédent, tout \mathbb{K} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ est un espace normé pour la norme définie par

$x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ et, naturellement, un tel espace est toujours considéré comme un espace métrique pour la distance correspondante $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$.

Définition 2.5. 1. Un espace préhilbertien est un couple (E, \langle, \rangle) où E est un \mathbb{K} -espace vectoriel et \langle, \rangle est un produit scalaire sur E .

2. Un espace euclidien est un \mathbb{R} -espace préhilbertien de dimension finie.

3. Un espace hermitien est un \mathbb{C} -espace préhilbertien de dimension finie.

4. Un espace de Hilbert ou espace hilbertien est un espace préhilbertien qui est complet pour la norme associée au produit scalaire. Ainsi un espace de Hilbert est aussi un espace de Banach.

Exemples 2.2. 1. L'espace \mathbb{K}^n , muni du produit scalaire $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$ est un espace de Hilbert.

2. Soit $C([0, 1])$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur à valeurs dans \mathbb{K} muni du

produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt$$

est un espace préhilbertien, mais non un espace de Hilbert, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la suite de fonctions :

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 1 - n \left(t - \frac{1}{2} \right) & \text{si } \frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } t \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \end{cases}$$

est de Cauchy mais n'a pas de limite dans $C([0, 1])$ pour la norme

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

3. L'espace $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ muni du produit hermitien $\langle x, y \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \overline{y_i}$ est un espace de Hilbert.

En effet, soit $(x^{(p)})$ une suite de Cauchy dans $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ avec

$$x^{(p)} = (x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots).$$

Par définition $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n^{(p)} - x_n^{(q)}|^2$ tend vers zéro lorsque p et q tendent vers l'infini, donc, pour tout n fixé, la suite $(x_n^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ est une de Cauchy, donc admet une limite qu'on peut noter x_n ; posons $x = (x_n)_n$. Soit $\epsilon > 0$, il existe un entier N_ϵ , tel que, pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, $p > q \geq N_\epsilon$, on ait :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n^{(p)} - x_n^{(q)}|^2 \leq \epsilon. \quad (2.1.2)$$

Pour tout entier $m \geq n$, en vertu de l'inégalité (2.1.2) on peut écrire :

$$\sum_{1 \leq n \leq m} |x_n^{(p)} - x_n^{(q)}|^2 \leq \epsilon.$$

Comme il s'agit ici d'une somme finie, on peut faire tendre q vers $+\infty$ et on obtient :

$$\sum_{1 \leq n \leq m} |x_n^{(p)} - x_n|^2 \leq \epsilon.$$

Comme m est arbitraire, on en déduit que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n^{(p)} - x_n|^2 \leq \epsilon.$$

Ceci montre que $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2$ est fini, c'est à dire que $x = (x_n)$ appartient à $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ et que lorsque p tend vers $+\infty$, x_p tend vers x dans $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

Par conséquent, $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ est complet pour la distance associée au produit scalaire usuel.

Corollaire 2.2. Soit (E, \langle, \rangle) un \mathbb{K} -espace préhilbertien, muni de la norme associée au produit scalaire, alors $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ est une application continue de $E \times E$ dans \mathbb{K} .

Démonstration. Pour tout $y \in E$, on définit l'application $f_y : E \rightarrow \mathbb{K}$ par

$$f_y(x) = \langle x, y \rangle \text{ pour tout } x \in E.$$

f_y est clairement linéaire pour tout $y \in E$, puisque le produit scalaire est linéaire à gauche.

Montrons que f_y est continue sur E . Soit $x_0 \in E$ et soit $\epsilon > 0$. Pour tout $x \in E$, on a

$$|\langle x, y \rangle - \langle x_0, y \rangle| = |\langle x - x_0, y \rangle| \leq \|y\| \|x - x_0\|$$

Comme $\|\cdot\|$ est continue sur E , alors il existe $\alpha > 0$, pour $x \in E$, on a $\|x - x_0\| \leq \alpha$. Si on prend $\alpha = \frac{\epsilon}{\|y\|}$, on obtient

$$|\langle x, y \rangle - \langle x_0, y \rangle| \leq \epsilon.$$

Ainsi, on sait que $\langle x, \cdot \rangle$ est continue pour tout x et que $\langle \cdot, y \rangle$ est continue pour tout y .

Par conséquent, l'application $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ est continue sur $E \times E$. \square

Proposition 2.1. (Identité de polarisation) Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel normé et $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ une forme hermitienne positive sur E

(i). Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a pour tout $x, y \in E$:

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4} [\varphi(x + y, x + y) - \varphi(x - y, x - y)].$$

(ii). Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on a pour tout $x, y \in E$:

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4} [\varphi(x + y, x + y) - \varphi(x - y, x - y) + i\varphi(x + iy, x + iy) - \varphi(x - iy, x - iy)]$$

Démonstration. Dans les deux cas (i) et (ii), on a

$$\varphi(x + y, x + y) - \varphi(x - y, x - y) = 4\operatorname{Re}(\varphi(x, y)) \quad (2.1.3)$$

L'assertion (i) en résulte.

Supposons que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. En remplaçant y par iy dans (2.1.3), on trouve

$$\begin{aligned} \varphi(x + iy, x + iy) - \varphi(x - iy, x - iy) &= 4\operatorname{Re}(\varphi(x, iy)) \\ &= 4\operatorname{Im}(\varphi(x, y)). \end{aligned}$$

L'assertion (ii) en découle. □

Théorème 2.2. *Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien. Le complété $(\widehat{E}, \|\cdot\|)$ de l'espace vectoriel normé E est un espace de Hilbert.*

Démonstration. On peut supposer que E est un sous-espace dense dans \widehat{E} .

Soient $x, y \in \widehat{E}$ et soient $(x_n)_n, (y_n)_n$ des suites dans E telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y$.

Pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, on a, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_m, y_m \rangle| &= |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_m, y_n \rangle + \langle x_m, y_n \rangle - \langle x_m, y_m \rangle| \\ &= |\langle x_n - x_m, y_n \rangle - \langle x_m, y_m - y_n \rangle| \\ &\leq |\langle x_n - x_m, y_n \rangle| + |\langle x_m, y_m - y_n \rangle| \\ &\leq \|y_n\| \|x_n - x_m\| + \|x_m\| \|y_m - y_n\|. \end{aligned}$$

Comme $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont convergentes, elles sont de Cauchy et sont bornées. Il s'ensuit que $(\langle x_n, y_n \rangle)_n$ est une suite de Cauchy dans \mathbb{R} et on définit le produit scalaire sur \widehat{E}

comme sa limite. On note

$$[x, y] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x_n, y_n \rangle.$$

On vérifie que cette définition ne dépend pas de $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$, de plus, on vérifie que $[x, y]$ est une forme hermitienne (ou symétrique) positive sur \widehat{E} .

Puisque

$$\|x_n\| = \langle x_n, x_n \rangle^{\frac{1}{2}},$$

on a

$$[x, x] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x_n, x_n \rangle = \|x\|^2 \quad \text{pour tout } x \in \widehat{E}.$$

Ceci implique que $(x, y) \mapsto [x, y]$ est un produit scalaire sur \widehat{E} . et que sa norme associée est $x \mapsto \|x\|$.

La proposition 2.1.1 montre que la restriction de $(x, y) \mapsto [x, y]$

à $E \times E$ coïncide avec $\langle \cdot, \cdot \rangle$. □

Proposition 2.2. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{K} -espace préhilbertien. Pour tous $x, y \in E$, on a :

1. $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (identité du parallélogramme).
2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$
3. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2)$.

Démonstration. 1. Soient $x, y \in E$, on a :

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle + \langle x - y, x - y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \|y\|^2 \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \end{aligned}$$

Les propriétés 2 et 3 sont des cas particuliers de la proposition précédente. □

2.2 Orthogonalité

Définition 2.6. Soit (E, \langle, \rangle) un espace préhilbertien et $x, y \in E$.

1. On dit que x et y sont orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$.
2. On dit que deux parties F et G de E sont orthogonales si $\langle x, y \rangle = 0$ pour tous $x \in F$ et $y \in G$.
3. L'orthogonal de F est la partie

$$F^\perp := \{x \in E : \langle x, y \rangle = 0, \text{ pour tout } y \in F\}.$$

Proposition 2.3. Soit (E, \langle, \rangle) un espace préhilbertien.

1. Si A et B deux parties non vides de E , alors $A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp$.
2. Si F une partie non vide de E , alors l'orthogonal F^\perp de F est un sous-espace vectoriel fermé de E .

Démonstration. 1. Soit $y \in B^\perp$. Alors, pour tout $x \in A$, on a $x \in B$ et donc $\langle x, y \rangle = 0$, donc $y \in A^\perp$, ce qui prouve que $B^\perp \subset A^\perp$.

2. Par sesquilinearité du produit scalaire, il est immédiat que F^\perp est un sous-espace vectoriel de E . Montrons que F^\perp est fermé.

Soit $x \in E$ et soit $(x_n)_n \in F^\perp$ une suite telle que $\lim_n x_n = x$. Pour tout $y \in F$, on a alors $\langle x_n, y \rangle = 0$. Par continuité du produit scalaire (Corollaire 2.2), on a donc $\langle x, y \rangle = 0$.

Donc $x \in F^\perp$. □

Théorème 2.3. (Pythagore) Soit (E, \langle, \rangle) un espace préhilbertien et $x, y \in E$. Si x et y sont orthogonaux, alors

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

2.3 Le théorème de la projection

Dans cette section, on suppose que (E, \langle, \rangle) est un espace de Hilbert.

Rappelons d'abord qu'une partie C d'un espace vectoriel est dite convexe si pour tous x et y de C , le segment $[x, y]$ est contenu dans C c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in C, \quad \forall t \in [0, 1] \quad tx + (1 - t)y \in C.$$

Théorème 2.4. (Théorème de la projection) *Soit H un espace de Hilbert et soit C une partie convexe et fermée, non vide, de H . Alors, pour tout $x \in H$, il existe un unique a de C tel que :*

$$\|x - a\| = \min \{\|x - b\| : b \in C\}.$$

On dit que $a = P_C(x)$ est le projeté de x sur C . Il est caractérisé par la propriété

$$\operatorname{Re}(\langle x - a, b - a \rangle) \leq 0, \quad \text{pour tout } b \in C. \quad (*)$$

Démonstration. Soit $d = \min \{\|x - y\| : y \in C\} \in \mathbb{R}$, car $C \neq \emptyset$ et la norme est minorée, alors :

1) Existence : Par la caractérisation de la borne inférieure, il existe une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ d'éléments dans C telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x - a_n\| = d$. L'identité du parallélogramme donne

$$\frac{1}{2} \|a_p - a_q\|^2 = \|x - a_p\|^2 + \|x - a_q\|^2 - 2 \left\| x - \frac{1}{2}(a_p + a_q) \right\|^2,$$

comme C est convexe, $\frac{1}{2}(a_p + a_q) \in C$ et par suite

$$\left\| x - \frac{1}{2}(a_p + a_q) \right\|^2 \geq d^2.$$

On en déduit que

$$\frac{1}{2} \|a_p - a_q\|^2 \leq \|x - a_p\|^2 + \|x - a_q\|^2 - 2d^2.$$

Le second membre de cette inégalité tend vers 0, lorsque p et q tendent vers l'infini, et il en sera alors de même par $\|a_p - a_q\|^2$. La suite $(a_n)_{n \geq 0}$ est donc une suite de Cauchy ; comme H est supposé complet, elle converge vers un élément a de H . Mais comme C est fermé, on aura $a \in C$ et

$$\|x - a\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x - a_n\| = d.$$

2) Unicité : Supposons qu'un autre élément $a' \in C$ réalise aussi l'égalité $\|x - a'\| = d$.

L'élément $a'' = \frac{1}{2}(a + a')$ appartient à C et par suite $\|x - a''\| \geq d$; mais on a aussi

$$\begin{aligned} \|x - a''\|^2 &= \frac{1}{2} (\|x - a\|^2 + \|x - a'\|^2) - \frac{1}{4} \|a - a'\|^2 \\ &= d^2 - \frac{1}{4} \|a - a'\|^2. \end{aligned}$$

Donc $0 = -\frac{1}{4} \|a - a'\|^2$, d'où $a = a'$.

3) Montrons maintenant que l'élément a de C est caractérisé par la propriété

$$\operatorname{Re} (\langle x - a, b - a \rangle) \leq 0, \quad \text{pour tout } b \in C.$$

i) Soit $b \in C$, on a $(1 - t)a + tb \in C$, pour tout $0 \leq t \leq 1$, par convexité de C ; donc :

$$\|x - (1 - t)a - tb\|^2 \geq \|x - a\|^2,$$

d'après la proposition 2.2, on a

$$\|x - (1 - t)a - tb\|^2 = \|x - a + t(a - b)\|^2 = \|x - a\|^2 + t^2 \|a - b\|^2 + 2t \operatorname{Re} (\langle x - a, a - b \rangle),$$

alors

$$t^2 \|a - b\|^2 + 2t \operatorname{Re} (\langle x - a, a - b \rangle) \geq 0.$$

Pour $t \neq 0$, divisons par t , puis faisons ensuite tendre t vers 0 ; il vient

$\operatorname{Re} (\langle x - a, a - b \rangle) \geq 0$, soit

$$\operatorname{Re} (\langle x - a, b - a \rangle) \leq 0.$$

ii) Réciproquement, si a vérifie $(*)$, on a, pour tout $b \in C$

$$\begin{aligned} \|x - b\|^2 &= \|(x - a) + (a - b)\|^2 \\ &= \|x - a\|^2 + \|a - b\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x - a, a - b \rangle) \\ &= \|x - a\|^2 + \|a - b\|^2 - 2\operatorname{Re}(\langle x - a, b - a \rangle) \\ &\geq \|x - a\|^2, \end{aligned}$$

donc $a = P_C(x)$, par définition du projeté de x sur C . \square

Proposition 2.4. Soit H un espace de Hilbert et soit C une partie convexe et fermée, non vide, de H . L'application $P_C : H \rightarrow C$ est continue; plus précisément, on a, pour tous $x_1, x_2 \in H$:

$$\|P_C(x_1) - P_C(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|.$$

Démonstration. Posons $a_1 = P_C(x_1)$ et $a_2 = P_C(x_2)$; la condition $(*)$ donne

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \langle x_1 - a_1, b - a_1 \rangle \leq 0 & \forall b \in C; \\ \operatorname{Re} \langle x_2 - a_2, b' - a_2 \rangle \leq 0 & \forall b' \in C. \end{cases}$$

En prenant $b = a_2$ et $b' = a_1$, et en additionnant, il vient :

$$\operatorname{Re}(\langle [x_1 - a_1] - [x_2 - a_2], a_2 - a_1 \rangle) \leq 0.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \|a_1 - a_2\|^2 &= \operatorname{Re} \|a_1 - a_2\|^2 \\ &= \operatorname{Re} \langle [a_2 - x_2] + [x_2 - x_1] + [x_1 - a_1], a_2 - a_1 \rangle \\ &= \operatorname{Re} \langle [x_1 - a_1] - [x_2 - a_2], a_2 - a_1 \rangle + \operatorname{Re} \langle x_2 - x_1, a_2 - a_1 \rangle \\ &\leq \operatorname{Re} \langle x_2 - x_1, a_2 - a_1 \rangle \\ &\leq \langle x_2 - x_1, a_2 - a_1 \rangle \\ &\leq \|x_2 - x_1\| \|a_2 - a_1\|, \end{aligned}$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwartz. Il en résulte, en divisant par $\|a_1 - a_2\|$ (que l'on peut supposer non nul, car sinon le résultat est évident), que l'on a bien

$$\|a_1 - a_2\| \leq \|x_2 - x_1\|. \quad \square$$

Proposition 2.5. Si F est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Hilbert H , alors l'application $P_F : H \longrightarrow F$ est une application linéaire continue de norme 1, et $P_F(x)$ est l'unique point $a \in F$ tel que :

$$a \in F \quad \text{et} \quad x - a \in F^\perp.$$

Démonstration. Si $a \in F$ et $x - a \in F^\perp$, on a :

$$d^2 = \min_{b \in F} \|x - b\|^2 = \min_{b \in F} [\|x - a\|^2 + \|a - b\|^2] = \|x - a\|^2$$

donc $\|x - a\| = d$ et $a = P_F(x)$.

La réciproque résulte de la condition (*)

$$\operatorname{Re} \langle x - a, b - a \rangle \leq 0, \quad \forall b \in F;$$

en effet, comme F est un sous-espace vectoriel, on a :

$$b = a + \lambda \omega \in F, \quad \forall \omega \in F \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

En prenant $\lambda = \langle x - a, \omega \rangle$, on a donc $\bar{\lambda} \lambda = |\lambda|^2 \leq 0$. Ceci montre que

$$\langle x - a, \omega \rangle = 0 \quad \text{pour tout} \quad \omega \in F.$$

On a donc $x - a = x - P_F(x) \in F^\perp$.

La linéarité de P_F est facile à voir, grace à l'unicité; en effet, si $a_1 = P_F(x_1)$, $a_2 = P_F(x_2)$, alors $(x_1 - a_1), (x_2 - a_2) \in F^\perp$; donc pour $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$,

$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) - (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) \in F^\perp$; donc $P_F(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$.

En vertu de la proposition 2.4, l'application P_F est continue, et si pour $x_2 = 0$ dans cette proposition, on a $\|P_F(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in F$. Comme $P_F(x) = x$ pour tout $x \in F$, on obtient, si $F \neq \{0\}$, que $\|P_F\| = 1$. \square

Proposition 2.6. Si H est un espace de Hilbert, alors, pour tout sous-espace vectoriel fermé F de H , on a :

$$H = F \oplus F^\perp$$

et la projection sur F parallèlement à F^\perp associée est P_F . On dit que P_F est la projection orthogonale sur F .

Démonstration. On a $x = P_F(x) + (x - P_F(x))$, avec $x - P_F(x) \in F^\perp$, par la proposition 2.5. D'autre part, si $x \in F \cap F^\perp$, on a, en particulier, $\langle x, x \rangle = 0$; donc $x = 0$. \square

Définition 2.7. Soit E un espace vectoriel normé et A une partie non vide de E . On dit que A est totale si $\overline{\text{Vect}(A)} = E$ où $\text{Vect}(A)$ est le sous-espace engendré par A .

Définition 2.8. Un espace de Hilbert est dit séparable, ou de dimension dénombrable, s'il contient une famille dénombrable totale.

Corollaire 2.3. Soit H un espace de Hilbert.

- (i) Soit A une partie de H . Alors $(A^\perp)^\perp$ est le plus petit sous-espace vectoriel fermé de H contenant A .
- (ii) Soit F un sous-espace vectoriel de H . Alors $(F^\perp)^\perp = \overline{F}$. En particulier, si F est un sous-espace vectoriel fermé de H , alors $(F^\perp)^\perp = F$.
- (iii) Une partie A de H est totale si et seulement si $A^\perp = \{0\}$.

Démonstration. (i) Rappelons que l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de H contenant A est $\text{Vect}(A)$ le plus petit sous-espace vectoriel contenant A . Posons

$G = \overline{\text{Vect}(A)}$, c'est à dire que G est le plus petit sous-espace vectoriel fermé de H contenant A . Comme A est orthogonal à A^\perp , il est clair que $(A^\perp)^\perp$ contient A . D'autre part, $(A^\perp)^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de H (Proposition 2.3). On a donc $G \subset (A^\perp)^\perp$. D'autre part, on a $H = G \oplus G^\perp$ ainsi que $H = (A^\perp)^\perp \oplus A^\perp$ (Proposition 2.6). Comme $A \subset G$, on a $G^\perp \subset A^\perp$. Par ce qui précède, on a aussi $G \subset (A^\perp)^\perp$. D'où $G = (A^\perp)^\perp$.

(ii) En prenant $A = F$, on voit que l'assertion est une conséquence de (i).

(iii) Supposons que A est totale. Alors, par (i), $\overline{\text{Vect}(A)} = H = (A^\perp)^\perp$. Comme $H^\perp = \{0\}$, il s'ensuit que $\left(\left(A^\perp\right)^\perp\right)^\perp = \{0\}$. Comme $A^\perp \subset \left(\left(A^\perp\right)^\perp\right)^\perp$, on a donc $A^\perp = \{0\}$.

Réciproquement, supposons que $A^\perp = \{0\}$. Alors, $(A^\perp)^\perp = H$. Par (i), $(A^\perp)^\perp$ est le plus petit sous-espace vectoriel fermé de H contenant A , donc

$$H = (A^\perp)^\perp = \overline{\text{Vect}(A)}.$$

□

2.4 Dual et théorème de Riesz

Soit (E, \langle, \rangle) un espace préhilbertien. Pour tout $x \in E$, on définit une forme linéaire $\varphi_x : E \rightarrow \mathbb{K}$ par

$$\varphi_x(y) = \langle y, x \rangle \quad \text{pour tout } y \in E.$$

Proposition 2.7. (i) Pour tout $x \in E$ la forme linéaire φ_x est continue de norme $\|x\|$.

(ii) L'application $\varphi : E \rightarrow E' := \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, $x \mapsto \varphi_x$ est une isométrie semi-linéaire (linéaire si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

Démonstration. (i) Pour tout $y \in E$, on a

$$|\varphi_x(y)| = |\langle y, x \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Ceci montre que $\varphi_x \in E'$. D'autre part, on a

$$|\varphi_x(x)| = \langle x, x \rangle = \|x\|^2.$$

Il s'ensuit que $\|\varphi_x\| = \|x\|$.

(ii) Soient $x_1, x_2 \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour tout $y \in E$, on a :

$$\begin{aligned} \varphi_{x_1+\lambda x_2}(y) &= \langle y, x_1 + \lambda x_2, \rangle \\ &= \langle y, x_1 \rangle + \bar{\lambda} \langle y, x_2 \rangle \\ &= \varphi_{x_1}(y) + \bar{\lambda} \varphi_{x_2}(y) \\ &= \varphi_{x_1}(y) + \bar{\lambda} \varphi_{x_2}(y). \end{aligned}$$

Par conséquent, on a $\varphi_{x_1+\lambda x_2} = \varphi_{x_1} + \bar{\lambda} \varphi_{x_2}$, donc φ_x est semi-linéaire.

Par (i), on a pour tout $x_1, x_2 \in E$, $\|\varphi_{x_1-x_2}\| = \|x_1 - x_2\|$. Comme φ_x est semi-linéaire, on obtient $\|\varphi_{x_1} - \varphi_{x_2}\| = \|x_1 - x_2\|$, d'où φ_x est une isométrie. \square

Avant d'introduire le résultat suivant, on doit rappeler que :

- un hyperplan d'un espace vectoriel E de dimension finie n est tout sous-espace de dimension $n - 1$.

- en dimension infinie, un hyperplan est un sous-espace tel que E/F est de dimension 1.

La dimension de l'espace quotient E/F s'appelle la codimension de F dans E .

Théorème 2.5. (théorème de représentation de Riesz) Soit H un espace de Hilbert. L'isométrie semi-linéaire $\varphi : H \rightarrow H'$, $x \mapsto \varphi_x$ est une bijection.

Démonstration. De la proposition 2.7, on a φ est une isométrie, donc elle est injective. Il reste à montrer que φ est surjective; c'est à dire pour tout $f \in H'$, il existe $x \in H$ telle

que $\varphi_x = f$.

Soit $f \in H'$ et $F = \ker(f)$. Par continuité de f , F est fermé dans H .

Si $f = 0$, alors $f = \varphi(0)$. Donc, on peut supposer que $f \neq 0$, on a

$$H = F \oplus F^\perp,$$

mais f est une forme linéaire non nulle, $\ker(f)$ est de codimension 1 ; donc $(\ker(f))^\perp$ est de dimension 1.

Soit $u \in (\ker(f))^\perp$, de norme 1, et posons $x = \overline{f(u)}u$. Alors, comme $x \in (\ker(f))^\perp$, φ_x est nulle sur $\ker(f)$; et d'autre part

$$\varphi_x(u) = \langle u, x \rangle = f(u) \langle u, u \rangle = f(u) \|u\|^2 = f(u).$$

ainsi, l'on a bien $f = \varphi_x$. □

2.5 Bases hilbertiennes

Définition 2.9. Soit E un espace préhilbertien.

- (i) Un système $\{x_i\}_{i \in I}$ d'éléments de E est un système orthogonal si $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ pour tous $i, j \in I$ avec $i \neq j$.
- (ii) Un système orthogonal $\{x_i\}_{i \in I}$ d'éléments de E est un système orthonormal si $\|x_i\| = 1$ pour tout $i \in I$.

Définition 2.10. (Base hilbertienne) Soit E un espace préhilbertien. Une base hilbertienne de E est un système orthonormé $\{x_i\}_{i \in I}$ qui est total.

La construction explicite de bases hilbertiennes se fait au moyen du procédé suivant.

Théorème 2.6. (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt) Soit $N = \{0, 1, \dots, d\}$ pour $d \in \mathbb{N}$ ou $N = \mathbb{N}$. Soit $\{x_n\}_{n \in N}$ une suite de vecteurs linéairement indépendants

dans un espace préhilbertien E . Alors, il existe une famille orthonormée $\{y_n\}_{n \in N}$ telle que, pour tout $n \in N$, on ait

$$\text{Vect}(\{x_0, \dots, x_n\}) = \text{Vect}(\{y, \dots, y_n\}).$$

Démonstration. On pose $E_{-1} = 0$ et $E_n = \text{Vect}\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$.

Soit P_n la projection orthogonale de E_n sur E_{n-1} . On pose $x'_n = x_n - P_n(x_n)$. On a alors $x'_n \in E_n \cap E_{n-1}^\perp$. On définit $y_n = \frac{x'_n}{\|x'_n\|}$ et on montre que $\{y_n\}_{n \in N}$ est une famille orthonormée telle que, pour tout $n \in N$,

$$\text{Vect}(\{y, \dots, y_n\}) = E_n.$$

Tout d'abord, on a $y_n \in E_n \cap E_{n-1}^\perp$. Ensuite, $\|y_n\| = 1$ par construction.

Soit $n < m$; alors $y_n \in E_n$ et $y_m \in E_{m-1}^\perp$. Donc $y_m \in E_n^\perp$ car $E_n \subset E_{m-1}$. Ceci montre que y_n et y_m sont orthogonaux.

Il reste à prouver qu'avec $F_n = \text{Vect}(\{y, \dots, y_n\})$, on a $F_n = E_n$. Pour cela, nous procédons par récurrence sur n . Le cas $n = 0$ est clair, car $x'_0 = x_0$ et $y_0 = \frac{x'_0}{\|x'_0\|}$. Supposons que $F_n = E_n$ jusqu'à l'ordre $n \geq 0$. Comme $x_{n+1} - x'_{n+1} = P_{n+1}(x_{n+1})$, il s'ensuit que

$$x_{n+1} \in \text{Vect}(\{x'_{n+1}\} \cup E_n) = \text{Vect}(\{y_{n+1}\} \cup F_n) = F_{n+1}.$$

et que

$$y_{n+1} \in \text{Vect}(\{x_{n+1}\} \cup E_n) = E_{n+1}.$$

Ceci montre que $E_{n+1} = F_{n+1}$. □

Théorème 2.7. (*Existence de bases hilbertiennes : cas séparable*) Soit E un espace préhilbertien séparable. Alors E admet une base hilbertienne dénombrable.

Démonstration. Soit D une partie dénombrable et dense de E . Nous pouvons extraire de D une suite $\{x_n\}_{n \in N}$ de vecteurs linéairement indépendants dans E telle que

$Vect(\{x_n\}_{n \in N}) = Vect(D)$, où $N = \{0, 1, \dots, d\}$ pour $d \in \mathbb{N}$ ou bien $N = \mathbb{N}$. Par le théorème 2.6, il existe une famille orthonormée $\{y_n\}_{n \in N}$ telle que, pour tout $n \in N$, on ait

$$Vect(\{y_n\}_{n \in N}) = Vect(D).$$

Il nous reste à montrer que $Y = \{y_n\}_{n \in N}$ est totale. Ceci est clair car D est totale. \square

Remarque 2.2. Le théorème précédent donne un algorithme explicite pour construire, à partir d'une suite $\{x_n\}_{n \in N}$ de vecteurs linéairement indépendants dans E , une base hilbertienne $\{y_n\}_{n \in N}$

$$\begin{aligned} x'_0 &= x_0, & y_0 &= \frac{x'_0}{\|x'_0\|} \\ x'_1 &= x_1 - \langle x_1, y_0 \rangle y_0, & y_1 &= \frac{x'_1}{\|x'_1\|} \\ x'_2 &= x_2 - \langle x_2, y_0 \rangle y_0 - \langle x_2, y_1 \rangle y_1, & y_2 &= \frac{x'_2}{\|x'_2\|} \\ x'_{n+1} &= x_{n+1} - \sum_{i=0}^n \langle x_{n+1}, y_i \rangle y_i, & y_{n+1} &= \frac{x'_{n+1}}{\|x'_{n+1}\|}. \end{aligned}$$

Dans ce qui suit $N = \{0, 1, \dots, d\}$ pour $d \in \mathbb{N}$ ou $N = \mathbb{N}$.

Le résultat suivant montre l'existence de bases hilbertiennes dans le cas non-séparable.

Théorème 2.8. (*Existence de bases hilbertiennes : cas général*) Soit H un espace de Hilbert. Soit $X = \{x_i\}_{i \in N}$ un système orthonormé. Alors il existe une base hilbertienne de H contenant X . En particulier, H admet une base hilbertienne.

Le lemme suivant est utile pour la démonstration du théorème 2.8.

Lemme 2.9. (*Zorn, 1935*). Tout ensemble ordonné inductif, non vide, possède un élément maximal

Démonstration. Du théorème 2.8. On considère P l'ensemble des systèmes orthonormés de H contenant X , que l'on munit de l'ordre par l'inclusion. L'ensemble P est non vide

car $X \in P$. De plus, si $\{X_k\}_{k \in A}$ est une partie totalement ordonnée de P , alors on peut construire une famille orthonormée contenant X qui est

$$Y = \bigcup_{k \in A} X_k.$$

D'après le lemme de Zorn, P possède un élément maximal Y . Montrons que Y est totale, ie. $\overline{\text{Vect}(Y)} = H$, ce qui équivaut à $(\text{Vect}(Y))^\perp = \{0\}$ (Corollaire 2.3). Si ce n'était pas le cas, il existerait $x \in (\text{Vect}(Y))^\perp$ avec $\|x\| = 1$, et dans ce cas $Y \cup \{x\}$ serait dans P et ceci contredirait la maximalité de Y . \square

2.5.1 Inégalité de Bessel, égalité de Parseval

Théorème 2.10. (*Inégalité de Bessel*) Soient E un espace préhilbertien et $\{e_n\}_{n \in N}$ un système orthonormé de E . Alors, pour tout $x \in E$ la série de terme général $|\langle x, e_n \rangle|^2$ est convergente et on a

$$\sum_{n \in I} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Démonstration. Soit J une partie finie de N . Pour tout $n \in J$, on pose

$$y_n = \sum_{k \in J} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Alors pour tout $l \in J$, on a

$$\begin{aligned} \langle x - y_n, e_l \rangle &= \left\langle x - \sum_{k \in J} \langle x, e_k \rangle e_k, e_l \right\rangle \\ &= \langle x, e_l \rangle - \sum_{k \in J} \langle x, e_k \rangle \langle e_k, e_l \rangle \\ &= \langle x, e_l \rangle - \langle x, e_l \rangle = 0. \end{aligned}$$

D'après le théorème de Pythagore, on a

$$\|x - y_n\|^2 + \|y_n\|^2 = \|x\|^2.$$

Donc $\|y_n\|^2 \leq \|x\|^2$ et comme

$$\|y_n\|^2 = \left\| \sum_{k \in J} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \sum_{k \in J} |\langle x, e_k \rangle|^2,$$

il résulte que

$$\sum_{k \in J} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

D'où la convergence de la série et l'inégalité. \square

Lemme 2.11. *Soit H un espace de Hilbert. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite orthogonale de H . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|^2$ est convergente dans \mathbb{R} .*

(ii) *La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ converge dans H .*

Dans ce cas, on a

$$\left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \right\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|^2.$$

Démonstration. Pour tous $m < n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=m+1}^n x_k \right\|^2 &= \left\langle \sum_{k=m+1}^n x_k, \sum_{l=m+1}^n x_l \right\rangle = \sum_{k=m+1}^n \left\langle x_k, \sum_{l=m+1}^n x_l \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=m+1}^n \langle x_k, x_l \rangle = \sum_{k=m+1}^n \langle x_k, x_k \rangle = \sum_{k=m+1}^n \|x_k\|^2. \end{aligned}$$

Donc $(\sum_{k=0}^n x_k)_n$ est une suite de Cauchy dans H si et seulement si $(\sum_{k=0}^n \|x_k\|^2)_n$ est une suite de Cauchy dans \mathbb{R} .

Comme H et \mathbb{R} sont complets, on obtient l'équivalence entre (i) et (ii).

Sous l'hypothèse (i) ou (ii) et par passage à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ dans l'égalité, on obtient

$$\left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \right\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|^2.$$

\square

Théorème 2.12. (*Egalité de Parseval*) Soient E un espace préhilbertien et $(e_n)_{n \in N}$ une famille orthonormale dans E . Soit $x \in E$

(i) La série de terme général $|\langle x, e_n \rangle|^2$ est convergente et on a

$$\sum_{n \in N} |\langle x, e_n \rangle|^2 = \|x\|^2.$$

(ii) La série de terme général $\langle x, e_n \rangle e_n$ est convergente dans E et on a

$$\sum_{n \in N} \langle x, e_n \rangle e_n = x.$$

Démonstration. Soit H le complété de E (Voir théorème 2.2). On suppose que $E \subset H$.

Par le théorème 2.10, la série de terme général $|\langle x, e_n \rangle|^2$ est convergente. Par le Lemme 2.11, la série de terme général $\langle x, e_n \rangle e_n$ est donc convergente dans H et on a

$$\left\| \sum_{n \in N} \langle x, e_n \rangle e_n \right\|^2 = \sum_{n \in N} |\langle x, e_n \rangle|^2.$$

Posons $y = \sum_{n \in N} \langle x, e_n \rangle e_n \in H$.

Il reste à montrer que $x = y$.

Pour tout $k \in N$, on a

$$\begin{aligned} \langle y, e_k \rangle &= \left\langle \sum_{n \in N} \langle x, e_n \rangle e_n, e_k \right\rangle \\ &= \sum_{n \in N} \langle x, e_n \rangle \langle e_n, e_k \rangle \\ &= \langle x, e_k \rangle. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\langle y - x, e_k \rangle = 0$ pour tout $k \in I$. Comme $(e_n)_{n \in I}$ une base hilbertienne de H , on a donc $y = x$. □

Corollaire 2.4. Soient H un espace de Hilbert séparable, F un sous-espace vectoriel fermé de H et $(e_n)_{n \in N}$ une base hilbertienne de F . Soit P_F le projecteur orthogonal de H

sur F . Alors pour tout $x \in H$, la série de terme général $\langle x, e_n \rangle e_n$ est convergente dans K et on a

$$P_F(x) = \sum_{n \in N} \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Démonstration. Comme $x - P_F(x) \in F^\perp$, alors on a

$$\langle x, e_n \rangle = \langle P_F(x), e_n \rangle \quad \text{pour tout } n \in N.$$

On applique alors le théorème 2.12 à l'élément $P_F(x)$. □

Définition 2.11. (Isomorphisme d'espaces de Hilbert) Deux espaces de Hilbert H_1 et H_2 sont dits isomorphes s'il existe une bijection linéaire $f : H_1 \rightarrow H_2$ telle que

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad \text{pour tous } x, y \in H_1.$$

Corollaire 2.5. (Classification des espaces de Hilbert séparables) Soit H un espace de Hilbert séparable.

(i) Si H est de dimension finie n , alors H est isomorphe à $l^2(n)$, où $l^2(n)$ est l'espace \mathbb{K}^n muni de la norme euclidienne.

(ii) Si H est de dimension infinie, H est isomorphe à $F = l^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$.

Démonstration. Comme H est séparable, H possède une base hilbertienne dénombrable (théorème 2.7). Soit $(e_k)_{k \in N}$ une base hilbertienne de H avec N un ensemble d'indices finie si H de dimension finie et $N = \mathbb{N}$ sinon.

On pose $F = l^2(n)$ si $N = \{1, 2, \dots, n\}$ et $F = l^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ si $N = \mathbb{N}$. Pour tout $x \in H$, la suite $(\langle x, e_k \rangle)_{k \in N}$ est dans F , par le Théorème 2.12.

Soit $f : H \rightarrow F$ l'application linéaire définie par

$$f(x) = (\langle x, e_k \rangle)_{k \in N} \quad \text{pour tout } x \in H.$$

Alors f est une isométrie par le Théorème 2.12. Il reste à montrer que f est surjective.

Soit $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Le Lemme 2.11 montre que la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k e_k$ converge dans H . Soit x sa limite. On vérifie immédiatement que $f(x) = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$. \square

2.6 Exemples de bases hilbertiennes

2.6.1 Séries de Fourier

Rappelons quelques définitions indispensables.

Définition 2.12. On appelle période d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tout nombre réel T tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t + T) = f(t).$$

On dit que f est périodique si elle admet une période non nulle, et plus précisément qu'elle est T -périodique si T est une période strictement positive. Le nombre $\omega = \frac{2\pi}{T}$ est appelé pulsation associée à T .

Définition 2.13. Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est dite continue (resp. de classe C^p où $p \in \mathbb{N}^*$) par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ et des fonctions f_i continues (resp. de classe C^p) sur $[a_i, a_{i+1}]$ telles que f soit égale à f_i sur l'intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$.

Remarque 2.3. Une fonction continue par morceaux n'est pas nécessairement continue aux points de subdivision, mais elle admet en ces points x une limite à gauche (resp. à droite) notée $f(x^-)$ (resp. $f(x^+)$).

Sur D l'espace des fonctions continues par morceaux de période T à valeurs réelles

(resp. complexes), on dispose d'un produit scalaire donné par la formule :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \overline{g(t)} dt \quad (2.6.1)$$

auquel on associe une norme $\|f\|_2$

$$\|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt.$$

D est un espace préhilbertien.

Proposition 2.8. 1) Les fonctions $e_n(t) := e^{in\omega t}$ pour $n \in \mathbb{Z}$ est une base hilbertienne de D .

2) Les fonctions $\gamma_n(t) := \cos(n\omega t)$ pour $n \in \mathbb{Z}$ et $\sigma_n(t) := \sin(n\omega t)$ est une base orthogonale de D .

Démonstration. 1) Pour tout $p, q \in \mathbb{Z}$, $\langle e_p, e_q \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T e^{ip\omega t} e^{-iq\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T e^{i(p-q)\omega t} dt$, et

on a

$$\begin{cases} \langle e_p, e_q \rangle = 1 & \text{si } p = q, \\ \langle e_p, e_q \rangle = 0 & \text{si } p \neq q \end{cases}$$

De plus l'espace des combinaisons linéaires finies des fonctions e_n est dense dans E (Voir [3], page 307).

2) $\langle \gamma_0, \gamma_0 \rangle = 1$ et pour tout $p, q \geq 1$, on a

$$\begin{cases} \langle \gamma_p, \gamma_q \rangle = \frac{1}{2} & \text{si } p = q, \\ \langle \gamma_p, \gamma_q \rangle = 0 & \text{si } p \neq q \end{cases}$$

Le calcul est analogue pour $\langle \sigma_p, \sigma_q \rangle$

□

Corollaire 2.6. 1) Si f est un polynôme trigonométrique en exponentielles :

$$f(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\omega t}, \text{ on a la formule : } c_n = \langle f, e_n \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt.$$

2) Si f est un polynôme trigonométrique en cosinus et sinus :

$$f(t) = \sum_{n=0}^N a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^N b_n \sin n\omega t,$$

on a les formules $a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) d(t)$ et, pour $n \geq 1$:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt.$$

Définition 2.14. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction périodique de période T , continue par morceaux. On définit les coefficients de Fourier de f par les formules suivantes :

$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt$ pour $n \in \mathbb{Z}$, $a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) d(t)$ et pour $n \geq 1$:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt.$$

Remarque 2.4. On a $a_0 = c_0$, et pour $n \geq 1$, $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$, $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$, $b_n = i(c_n - c_{-n})$.

Définition 2.15. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction périodique de période T , continue par morceaux. On appelle série de Fourier associée à f , la série trigonométrique

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)].$$

Remarque 2.5. La somme partielle de cette série est un polynôme trigonométrique et vaut :

$$S_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \quad \text{ou} \quad S_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e_n(t).$$

Théorème 2.13. (*Formule de Fourier-Plancherel*) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux, de période T , et c_n ses coefficients de Fourier. On a la formule :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \|f\|^2.$$

Démonstration. De l'égalité de Parseval, on déduit la formule de Fourier-Plancherel. \square

2.6.2 Polynômes orthogonaux

Considérons $L^2]a, b[$ l'espace des fonctions définies sur $]a, b[$ mesurables et de carré intégrables sur $]a, b[$, c'est à dire

$$f \in L^2]a, b[\iff \begin{cases} f \text{ mesurable et} \\ \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty \end{cases} .$$

Le corollaire suivant est essentiel :

Corollaire 2.7. [2] L'ensemble $\mathbb{R}[X]$ (des fonctions polynômes), est dense dans $L^2]a, b[$.

Comme cet ensemble admet une base dénombrable, il existe une base hilbertienne de $L^2]a, b[$ formée de polynômes.

On peut construire d'autres exemples de bases hilbertienne à partir des polynômes. En général, pour rendre une base orthonormée on peut utiliser un procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt (Remarque 2.2).

Soit $\{v_n\}$ un système des vecteurs (des fonctions, des polynômes) linéairement indépendants ; on définit un autre système des vecteurs $\{v_n\}$, qui est orthonormé et qui engendre le même espace vectoriel E que le système $\{v_n\}$.

1. Polynômes de Legendre :

Sur l'espace $L^2]-1, 1[$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx,$$

on prend pour $\{v_n\}$ le système des monômes :

$$\{v_n = x^n, n = 0, 1, 2, \dots\}$$

qui est libre et total dans $L^2]-1, 1[$. Par orthonormalisation, on obtient la base hilbertienne $\left\{ \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n \right\}_{n \geq 0}$ dans $L^2]-1, 1[$, où P_n est le polynôme de Legendre défini par la

formule de Rodriguez :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n (n!)} \frac{d^n}{dx^n} \left((x^2 - 1)^n \right); \text{ pour tout } n \geq 0,$$

vérifiant

$$\langle P_n, P_m \rangle = \int_{-1}^2 P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m, \\ \frac{2}{2n+1} & \text{si } n = m. \end{cases}$$

2. Polynômes de Laguerre :

On considère l'espace $L^2(]0, +\infty[)$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

On prend pour $\{v_n\}$ le système

$$v_n = e^{-\frac{x}{2}} x^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

car la famille $\{v_n\}$ est totale. On change la définition du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} e^{-x} dx$$

et on considère un système de monômes

$$\{v_n = x^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Par le procédé d'orthonormalisation, on trouve les polynômes de Laguerre $\{L_n(x)\}$ où

$$L_n(x) = (-1)^n e^x \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n).$$

3. Polynômes d'Hermite :

On considère l'espace $L^2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

On prend pour $\{v_n\}$ le système

$$v_n = e^{-\frac{x^2}{2}} x^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

On change la définition du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} e^{-x^2} dx.$$

Alors, avec la procédure d'orthonormalisation pour des monômes :

$$\{v_n = x^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots\},$$

on obtient les polynômes d'Hermite $\{H_n(x)\}$ avec

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)$$

Les polynômes de Hermite forment une famille orthogonale de $L^2(\mathbb{R})$. Et la famille

$$\left\{ \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}} 2^{\frac{n}{2}} (n!)^{\frac{1}{2}}} H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \right\}_{n \geq 0}$$
 est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

2.7 Exercices

Exercice 2.1. I. Montrer qu'un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ est préhilbertien si, et seulement si, sa norme satisfait l'identité du parallélogramme.

II. Montrer que

1) l'espace \mathbb{R}^n muni de la norme de la convergence uniforme n'est pas un espace préhilbertien.

2) $L_1([-1, 1])$ n'est pas un espace préhilbertien.

Exercice 2.2. Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{R} -espace préhilbertien et $x, y \in E$.

1. Montrer que $\|x\| = \|y\|$ si et seulement si on a $\langle x + y, x - y \rangle = 0$.

2. Montrer que si $\|x\| = \|y\|$, alors pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a $\|ax + by\| = \|bx + ay\|$.
3. Soit $z \in E$. Montrer que si $\|x\| = \|y\|$ et $x + y + z = 0$, alors on a $\|x - z\| = \|y - z\|$.
4. Montrer que si $\|x + y\| = \|x - y\|$, alors il existe $c \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ tel que $\|x + cy\| = \|x - cy\|$.

Exercice 2.3. Montrer que si $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une famille de vecteurs deux à deux orthogonaux, alors ces vecteurs sont linéairement indépendants.

Exercice 2.4. Soit H un espace de Hilbert. Soit $u : H \rightarrow H$. On dit que u est une isométrie si u est linéaire et conserve la norme, i.e.

$$\forall x \in H, \quad \|u(x)\| = \|x\|$$

. Montrer que u est une isométrie si et seulement si u conserve le produit scalaire, i.e.

$$\forall x, y \in H, \quad \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

Indications :

1. Pour le sens \Rightarrow , utiliser l'identité de polarisation.
2. Pour le sens \Leftarrow , développer $\|u(x + \lambda y) - u(x) - \lambda u(y)\|^2$ pour $x, y \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.5. Soient $H = L^2([-1, 1])$ et φ une application définie sur H par :

$$\varphi(f) = \int_{-1}^0 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx.$$

1. Montrer que φ est linéaire continue et calculer sa norme.
2. Déterminer une fonction g de H telle que :

$$\forall f \in H \quad \varphi(f) = \langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) g(x) dx.$$

3. Montrer que $\ker \varphi = [g]^\perp$.
4. Déterminer la projection de l'identité id_H sur $\ker \varphi$.

Exercice 2.6. Soit l'espace $H = l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ muni du produit scalaire

$$\langle (u_n), (v_n) \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \overline{v_n}.$$

1. Montrer que l'application $\varphi : H \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\varphi((u_n)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n+1}$ est une forme linéaire continue et déterminer sa norme. (on rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$)
2. En déduire que $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n+1} = 0\}$ est un fermé de H .

Exercice 2.7. 1. Montrer que $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x) Q(x) dx$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_N[X]$ pour tout $N \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que ce produit scalaire fait de $\mathbb{R}_N[X]$ un espace de Hilbert.
3. Soit $P_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!}$. Montrer que (P_n) converge uniformément vers $\exp(x)$.
4. En déduire que (P_n) converge vers $\exp(x)$ pour la norme associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Exercice 2.8. Calculer $\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx$.

Exercice 2.9. 1) Montrer que $\langle P, Q \rangle = \sum_{i=0}^4 P(i) Q(i)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

- 2) Trouver une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

Exercice 2.10. Dans l'espace $H = C([-1, 1], \mathbb{R})$ des fonctions définies et continues sur $[-1, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) g(x) dx,$$

on considère la famille $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1, 1].$$

Vérifier que cette famille, connue sous l'appellation de polynômes de Chebychev, est orthonormale.

Exercice 2.11. 1. Développer en série de Fourier la fonction f , 2π -périodique telle que :

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}, \text{ pour } 0 \leq x \leq 2\pi.$$

2. Déterminer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}$.

Exercice 2.12. On considère la fonction réelle 2π -périodique définie par

$$f(x) = x \sin \frac{x}{2}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

1. Calculer les coefficients de Fourier de f .
2. Quelle est la nature de la série de Fourier de f .
3. En déduire la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2 - 1}$$

2.8 Corrections

Correction 2.1. I. Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace préhilbertien, alors la norme de E satisfait l'identité du parallélogramme d'après la proposition 2.2.

Réciproquement, posons

$$\varphi(x, y) = \langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2), \quad x, y \in E. \quad (2.8.1)$$

et montrons que si l'identité du parallélogramme est vérifiée, alors l'expression (2.8.1) présente une application φ satisfaisant aux conditions d'un produit scalaire.

Si $x = y$, la condition (2.8.1) donne

$$\varphi(x, x) = \frac{1}{4} (\|2x\|^2) = \|x\|^2 = \langle x, x \rangle.$$

C'est précisément la norme que définit un produit scalaire sur E .

De plus, on a

$$\varphi(x, x) = \|x\|^2 = \langle x, x \rangle > 0, \quad \forall x \in E \setminus \{0\},$$

ce qui signifie que φ est définie positive.

Par ailleurs, on déduit de (2.8.1) que

$$\forall x, y \in E, \quad \varphi(x, y) = \varphi(y, x),$$

c'est-à-dire, φ est symétrique.

Il reste à montrer que φ est bilinéaire.

Pour tout $x_1, x_2, y \in E$ et avec l'utilisation de l'identité du parallélogramme, on obtient

$$\|x_1 + x_2 + 2y\|^2 + \|x_1 - x_2\|^2 = 2\|x_1 + y\|^2 + 2\|x_2 + y\|^2,$$

$$\|x_1 + x_2 - 2y\|^2 + \|x_1 - x_2\|^2 = 2\|x_1 - y\|^2 + 2\|x_2 - y\|^2,$$

D'autre part, par définition du produit scalaire

$$\varphi(x_1 + x_2, y) = \frac{1}{4} \left(\|x_1 + x_2 + y\|^2 - \|x_1 + x_2 - y\|^2 \right),$$

et

$$\varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y) = \frac{1}{4} \left(\|x_1 + y\|^2 + \|x_2 + y\|^2 - \|x_1 - y\|^2 - \|x_2 - y\|^2 \right)$$

ce qui donne en utilisant l'identité du parallélogramme :

$$\varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y) = \frac{1}{8} \left(\|x_1 + x_2 + 2y\|^2 - \|x_1 + x_2 - 2y\|^2 \right). \quad (2.8.2)$$

D'une autre coté, en écrivant $x_1 + x_2 + 2y = (x_1 + x_2 + y) + y$ et utilisant encore une fois

l'identité du parallélogramme, il résulte que :

$$\|x_1 + x_2 + 2y\|^2 = 2\|x_1 + x_2 + y\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x_1 + x_2\|^2,$$

$$\|x_1 + x_2 - 2y\|^2 = 2\|x_1 + x_2 - y\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x_1 + x_2\|^2,$$

En substituant dans (2.8.2), on obtient

$$\varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y) = \frac{1}{4} \left(\|x_1 + x_2 + y\|^2 - \|x_1 + x_2 - y\|^2 \right).$$

Pour dire que φ est bilinéaire, il reste à montrer que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in E, \varphi(\lambda x, y) = \lambda \varphi(x, y).$$

Considérons l'application

$$f(\lambda) = \langle \lambda x, y \rangle - \lambda \langle x, y \rangle, \quad x, y \in E, \lambda \in \mathbb{R}.$$

De (2.8.1), il vient

$$f(0) = \frac{1}{4} (\|y\|^2 - \|y\|^2) = 0, \quad \text{et } f(-1) = 0.$$

Cela nous permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{Z}, \langle nx, y \rangle &= \langle (\text{sgn}(n)(x + x + \dots + x)), y \rangle \\ &= (\text{sgn}(n)) \langle x + x + \dots + x, y \rangle \\ &= (\text{sgn}(n)) (\langle x, y \rangle + \langle x, y \rangle + \dots + \langle x, y \rangle) \\ &= |n| (\text{sgn}(n)) \langle x, y \rangle = n \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

($\text{sgn}(n)$ désigne le signe de n) D'où :

$$f(n) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Si p et q sont deux entiers tels que $q \neq 0$, alors

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \left\langle \frac{p}{q}x, y \right\rangle = p \left\langle \frac{1}{q}x, y \right\rangle = \frac{p}{q} q \left\langle \frac{1}{q}x, y \right\rangle = \frac{p}{q} \langle x, y \rangle,$$

ce qui donne :

$$f(\lambda) = 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

D'où φ est un produit scalaire.

II. 1) Les deux vecteurs $x = (1, 0, \dots, 0)$ et $y = (0, 1, 0, \dots, 0)$ ne vérifient pas l'identité du parallélogramme, puisque

$$\|x\|_\infty = 1, \|y\|_\infty = 1, \|x + y\|_\infty = 1, \|x - y\|_\infty = 1,$$

$$\|x + y\|_\infty^2 + \|x - y\|_\infty^2 = 2 \text{ et } 2(\|x\|_\infty^2 + \|y\|_\infty^2) = 4$$

2. Si l'on choisit par exemple les fonctions

$$f(x) = 1, x \in [-1, 1],$$

$$g(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

dans $L^1([-1, 1])$, on a

$$\|f\| = \int_{-1}^1 |f(x)| dx = \int_{-1}^1 dx = 2,$$

$$\|g\| = \int_{-1}^1 |g(x)| dx = \int_{-1}^0 dx + \int_0^1 x dx = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$\|f + g\| = \int_{-1}^1 |f(x) + g(x)| dx = \int_0^1 (1 + x) dx = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$\|f - g\| = \int_{-1}^1 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-1}^0 2 dx + \int_0^1 (1 - x) dx = 2 + 1 = 3,$$

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = \frac{9}{4} + \frac{25}{4} = \frac{17}{2} \neq 2(\|f\|^2 + \|g\|^2) = \frac{25}{2}$$

et l'identité du parallélogramme n'est pas vérifiée. Donc, $L^1([-1, 1])$ n'est pas préhilbertien.

Correction 2.2. 1. On a $\langle x + y, x - y \rangle = \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle - \langle y, y \rangle$. Donc, $\|x\| = \|y\|$ si et seulement si $\langle x + y, x - y \rangle = 0$.

2. On a $\|ax + by\|^2 = a^2 \|x\|^2 + b^2 \|y\|^2 + 2ab \langle x, y \rangle$ et $\|bx + ay\|^2 = b^2 \|x\|^2 + a^2 \|y\|^2 +$

$2ab \langle x, y \rangle$. Donc, si $\|x\| = \|y\|$, alors pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a $\|ax + by\|^2 = \|bx + ay\|^2$, d'où $\|ax + by\| = \|bx + ay\|$.

3. On a $x + y + z = 0$, d'où $-z = x + y$. Donc, on a

$$\|x - z\| = \|2x + y\| \text{ et } \|y - z\| = \|x + 2y\|.$$

Comme $\|x\| = \|y\|$, d'après 2, on a $\|2x + y\| = \|x + 2y\|$, donc $\|x - z\| = \|y - z\|$.

4. Par hypothèse, on a

$$\|x + y\| = \|x - y\|.$$

D'après 2, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a $\|a(x + y) + b(x - y)\| = \|b(x + y) + a(x - y)\|$, d'où

$$\|(a + b)x + (a - b)y\| = \|(a + b)x - (a - b)y\|.$$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$ et $a \neq -b$, (par exemple, $a = 1$ et $b = 2$). Soit

$c = \frac{a-b}{a+b}$, alors $c \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ et on a $\|x + cy\| = \|x - cy\|$.

Correction 2.3. En effet, si $\sum_{i=1}^p \alpha_i x_i = 0$, alors pour tout $j = 1, 2, \dots, p$ on a :

$$\left\langle x_j, \sum_{i=1}^p \alpha_i x_i \right\rangle = 0 \implies \alpha_j \langle x_j, x_j \rangle = 0.$$

Comme

$$\langle x_j, x_j \rangle = \|x_j\|^2 \neq 0,$$

il résulte que $\alpha_j = 0$.

Correction 2.4. Pour tous $x, y \in H$, en utilisant l'identité de polarisation et le fait que u est linéaire et conserve la norme, on a

$$\begin{aligned} \langle u(x), u(y) \rangle &= \frac{1}{4} \left(\|u(x) + u(y)\|^2 - \|u(x) - u(y)\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\|u(x + y)\|^2 - \|u(x - y)\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 \right) = \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

Ainsi u conserve le produit scalaire.

Si u conserve le produit scalaire, u conserve également la norme car pour tout $x \in H$,

$$\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x) \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2.$$

Pour montrer que u est linéaire, il suffit de montrer que pour tous $x, y \in H$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$

$$u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y),$$

c'est-à-dire, d'après la propriété de définie positivité de la norme, que

$$\|u(\lambda x + y) - \lambda u(x) - u(y)\|^2 = 0.$$

Mais par bilinéarité du produit scalaire,

$$\begin{aligned} \|u(\lambda x + y) - \lambda u(x) - u(y)\|^2 &= \langle u(\lambda x + y) - \lambda u(x) - u(y), u(\lambda x + y) - \lambda u(x) - u(y) \rangle \\ &= \langle u(\lambda x + y), u(\lambda x + y) \rangle - \lambda \langle u(\lambda x + y), u(x) \rangle - \langle u(\lambda x + y), u(y) \rangle \\ &\quad - \lambda \langle u(x), u(\lambda x + y) \rangle + \lambda^2 \langle u(x), u(x) \rangle + \lambda \langle u(x), u(y) \rangle \\ &\quad - \langle u(y), u(\lambda x + y) \rangle + \lambda \langle u(y), u(x) \rangle + \langle u(y), u(y) \rangle \end{aligned}$$

et puisque u conserve le produit scalaire, alors on a

$$\begin{aligned} \|u(\lambda x + y) - \lambda u(x) - u(y)\|^2 &= \langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle - \lambda \langle \lambda x + y, x \rangle - \langle \lambda x + y, y \rangle \\ &\quad - \lambda \langle x, \lambda x + y \rangle + \lambda^2 \langle x, x \rangle + \lambda \langle x, y \rangle - \langle y, \lambda x + y \rangle + \lambda \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \end{aligned}$$

qui pour les mêmes raisons de bilinéarité du produit scalaire, coïncide avec

$$\|(\lambda x + y) - \lambda x - y\|^2 = 0.$$

L'application u est donc linéaire.

Correction 2.5. 1. La linéarité de φ est évidente, elle découle de la linéarité de l'intégrale.

De plus

$$\begin{aligned} |\varphi(f)| &= \left| \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx \right| \\ &\leq \int_{-1}^0 |f(x)| dx + \int_0^1 |f(x)| dx = \int_{-1}^1 |f(x)| dx. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on trouve

$$|\varphi(f)| \leq \sqrt{\int_{-1}^1 dx} \sqrt{\int_{-1}^1 (f(x))^2 dx} = \sqrt{2} \|f\|,$$

ce qui montre que φ est continue et que $\|\varphi\| \leq \sqrt{2}$.

Considérons la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{si } -1 \leq x < 0, \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

Ensuite, on a

$$\|g\| = \sqrt{\int_{-1}^0 \frac{2}{4} dx + \int_0^1 \frac{2}{4} dx} = 1$$

avec

$$|\varphi(g)| = \int_{-1}^0 \frac{\sqrt{2}}{2} dx + \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{2} dx = \sqrt{2} \leq \|\varphi\|,$$

ce qui permet de conclure que : $\|\varphi\| = \sqrt{2}$.

2. La fonction cherchée est :

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leq x < 0, \\ -1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

3. On a

$$f \in \ker \varphi \iff \varphi(f) = 0 \iff \langle f, g \rangle = 0 \iff f \in [g]^\perp.$$

Donc

$$\ker \varphi = [g]^\perp.$$

4. $\ker \varphi$ est un sous-espace fermé de l'espace hilbertien $L^2([-1, 1])$. Le théorème de projection s'applique. Déterminons la projection demandée. En notant P cette projection, il vient :

$$(id_H - P) \in (\ker \varphi)^\perp.$$

Or :

$$(\ker \varphi)^\perp = [g]^{\perp\perp} = [g],$$

donc, il existe un scalaire λ tel que :

$$id_H - P = \lambda g,$$

c'est-à-dire $P = id_H - \lambda g$. Comme P est orthogonale à g , on obtient :

$$0 = \langle P, g \rangle = \langle id_H - \lambda g, g \rangle = \langle id_H, g \rangle - \lambda \|g\|^2.$$

D'où

$$\lambda = \frac{\langle id_H, g \rangle}{\|g\|^2} = \frac{\int_{-1}^1 xg(x) dx}{2} = \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^0 x dx - \int_0^1 x dx \right) = -\frac{1}{2}.$$

Par conséquent :

$$g(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & \text{si } -1 \leq x < 0, \\ x - \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

Correction 2.6. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{n+1}$.

On commence par écrire

$$\varphi((u_n)) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \bar{v}_n = \langle (u_n), (v_n) \rangle$$

et remarquer que

$$\|v_n\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} < +\infty,$$

donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H$. Alors, le théorème de Riesz permet de conclure que φ est une forme

linéaire continue et

$$\|\varphi\| = \|v_n\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} |v_n|^2} = \frac{\pi}{\sqrt{6}}.$$

2. $E = \varphi^{-1}(\{0\})$ est un fermé, comme image réciproque d'un fermé par une application continue.

Correction 2.7. 1. L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire symétrique, car le produit de réels est une opération bilinéaire symétrique, et par linéarité de l'intégrale. De plus pour $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$\langle P, P \rangle = \int_0^1 (P(x))^2 dx \geq 0$$

et cette expression est nulle si et seulement si $P = 0$. En effet $\langle 0, 0 \rangle = 0$ et si $\langle P, P \rangle = \int_0^1 (P(x))^2 dx = 0$ alors la fonction polynomiale $x \mapsto (P(x))^2$ est continue, positive, d'intégrale nulle sur $[0, 1]$, donc elle est identiquement nulle sur $[0, 1]$. Le polynôme P a donc une infinité de racines, ce qui implique que $P = 0$. L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est donc un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$, et par restriction, sur $\mathbb{R}_N[X]$ pour tout $N \in \mathbb{N}$.

2. $\mathbb{R}_N[X]$ est un espace vectoriel de dimension finie, il est donc complet pour la norme associée au produit scalaire considéré : c'est un espace de Hilbert.

3. D'après la formule de Taylor avec reste intégral, on a pour tout $x \in [0, 1]$, et tout entier $n \geq 0$,

$$\left| \exp(x) - \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \right| = \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \right| \leq e \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt = e \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{e}{(n+1)!}.$$

Ce dernier terme ne dépend pas de x et converge vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, donc P_n tend vers \exp uniformément sur $[0, 1]$.

4. Pour tout n ,

$$\|\exp - P_n\| = \left(\int_0^1 |e^x - P_n(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \|\exp - P_n\|_\infty^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \|\exp - P_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc P_n converge vers \exp pour la norme associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Correction 2.8. Posons $E = C([0, 1])$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$.

On a

$$\int_0^1 |x^2 - ax - b|^2 dx = \|x^2 - (ax + b)\|^2.$$

Quand (a, b) décrit \mathbb{R}^2 , $ax + b$ décrit $F = \text{vect}(1, x)$ et donc

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 |x^2 - ax - b|^2 dx = \inf_{f \in F} \|x^2 - f\|^2.$$

Mais on sait que

$$\inf_{f \in F} \|x^2 - f\|^2 = \|x^2 - P(x^2)\|^2$$

où $p(x^2)$ est la projection orthogonale de x^2 sur F . Il s'agit donc de calculer cette projection. Ce projeté orthogonal est caractérisé par le fait que $x^2 - P(x^2) \in F^\perp$ c'est-à-dire que $x^2 - P(x^2)$ est orthogonal aux vecteurs 1 et x . En écrivant $P(x^2) = ax + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on cherche donc à résoudre le système

$$\begin{cases} \langle x^2 - P(x^2), 1 \rangle = \int_0^1 [x^2 - (ax + b)] dx = 0 \\ \langle x^2 - P(x^2), x \rangle = \int_0^1 [x^3 - (ax^2 + bx)] dx = 0. \end{cases}$$

Ce qui équivaut à

$$\begin{cases} -\frac{a}{2} - b + \frac{1}{3} = 0 \\ -\frac{a}{3} - \frac{b}{2} + \frac{1}{4} = 0 \end{cases}$$

Ce système possède comme unique solution $(1, -\frac{1}{6})$. Donc

$$\|x^2 - P(x^2)\|^2 = \frac{1}{180}.$$

Correction 2.9. La vérification de la bilinéarité et de la symétrie de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est immédiate.

Pour la définie positivité, on remarque que pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$,

$$\langle P, P \rangle = \sum_{i=0}^4 P(i)^2 \geq 0,$$

et cette expression est nulle si et seulement si $P(i) = 0$ pour tout entier $i \in [0, 4]$. Ainsi $\langle 0, 0 \rangle = 0$ et si $\langle P, P \rangle = 0$, alors P est un polynôme de degré au plus 2 qui possède 5 racines, ce qui implique que $P = 0$.

2. On applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base canonique de

$\mathbb{R}_2[X]$, que l'on notera $(P_0, P_1, P_2) = (1, X, X^2)$. On pose tout d'abord comme premier vecteur de notre base orthonormée,

$$Q_0 = \frac{P_0}{\|P_0\|} \implies Q_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

On définit ensuite

$$Q'_1 = P_1 - \langle P_1, Q_0 \rangle Q_0 \implies Q'_1(X) = X - 2$$

que l'on norme en posant comme second vecteur de la nouvelle base

$$Q_1 = \frac{Q'_1}{\|Q'_1\|} \implies Q_1(X) = \frac{X - 2}{\sqrt{10}}.$$

On définit enfin

$$Q'_2 = P_2 - \langle P_2, Q_0 \rangle Q_0 - \langle P_2, Q_1 \rangle Q_1 \implies Q'_2(X) = X^2 - 4X + 2$$

que l'on norme en posant comme troisième vecteur de la nouvelle base

$$Q_2 = \frac{Q'_2}{\|Q'_2\|} \implies Q_2(X) = \frac{X^2 - 4X + 2}{\sqrt{14}}.$$

La famille (Q_0, Q_1, Q_2) constitue une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire choisi.

Correction 2.10. Pour tout couple naturels p et q tels que $p \neq q$, on a

$$\begin{aligned} \langle T_p, T_q \rangle &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\cos(p \arccos x) \cos(q \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(py) \cos(qy) dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos((p+q)y) + \cos((p-q)y)) dy = 0, \end{aligned}$$

en posant $y = \arccos x$.

Pour $p = q$ on obtient :

$$\langle T_p, T_p \rangle = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\cos^2(p \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\cos(py))^2 dy = 1.$$

Correction 2.11. 1. On a :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} dx = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \cos(nx) dx = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi x \cos(nx) dx = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin(nx) dx = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi x \sin(nx) dx = \frac{1}{n}.$$

D'où

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}.$$

2. Cette somme vaut $f(1) = \frac{\pi-1}{2}$.

Correction 2.12. 1. On a :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x \sin \frac{x}{2} dx = 2,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin \frac{x}{2} \cos(nx) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin \left(\frac{1}{2} + n \right) x dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin \left(\frac{1}{2} - n \right) x dx = -\frac{4}{4n^2 - 1}.$$

De même, on a :

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin \frac{x}{2} \sin(nx) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos \left(\frac{1}{2} - n \right) x dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos \left(\frac{1}{2} + n \right) x dx = -\frac{32}{\pi (4n^2 - 1)^2}.$$

La série de Fourier de f est :

$$2 - 4 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos nx + \frac{8n}{\pi (4n^2 - 1)^2} \sin nx.$$

2. Cette série converge vers f sur $]0, 2\pi[$.

3. En $\pi - x$, on écrit :

$$\pi = 2 + 4 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2 - 1}.$$

D'où :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2 - 1} = \frac{\pi - 2}{4}.$$

Bibliographie

- [1] B. Bekka, espaces vectoriels normés, cours L3, Rennes, 2010.
- [2] F. Boyer, Agrégation Externe de Mathématiques, Analyse Numérique. Aix-Marseille Université. 14 octobre 2014.
- [3] B. Candelpergher, Calcul intégral. Cassini, Paris, 2009.
- [4] N. El Hage Hassan, Topologie générale et espaces normés, Dunod, 2001.
- [5] X. Gourdon, Les mathématiques en tête, Analyse. Ellipses, 2^e édition, 2008.
- [6] M. Hazi, Topologie au delà des travaux dirigés, Tome 3, Office des publications universitaires, 2009.
- [7] G. Lacombe, P. Massat, Analyse Fonctionnelle. Exercices corrigés, DUNOT, 1999.
- [8] D. Lie, Cours d'analyse fonctionnelle avec 200 exercices corrigés, ellipses, 2013.
- [9] Y. Sonntag, Topologie et analyse fonctionnelle, Cours et exercices, Ellipses, 1997 , Gauthier et Villars.