الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de RELIZANE
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département: Mathématiques

جامعة غليزان
RELIZANE UNIVERSITY

Algèbre 3 : cours et exercices

Habib DJOURDEM

Maitre de conférences classe A

Année universitaire :2021/2022

Avant-propos

Ce manuscrit est destiné aux étudiants du deuxième année licence mathématiques et il conforme au syllabus du module d'algèbre 3 que j'ai le privilège de diriger à l'université de Relizane pendant quatre années universitaires. Ce polycopié est composé de quatre chapitres, le premier contient six sections et le deuxième est composé de sept sections. Chapitre 3 nommé application de la réduction contient trois sections. Le dernier est consacré aux exercices avec leurs solutions. Une bonne partie de ces exercices ont été proposés aux séances des travaux dirigés, ou donnés en examens.

Dans le premier chapitre, nous avons fait un rappel aux notions qui font des outils de bases. Les concepts visés sont le corps commutatif, les polynômes dans ce corps, des généralités sur les espaces vectoriels et évidement l'application linéaire associé à une matrice dans une base de l'espace d'étude.

Dans le chapitre 2, nous avons présentés les éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice. La réduction d'un endomorphisme ou d'une matrice se fait à travers la méthode de diagonalisation, la méthode de la trigonalisation ou la jordanisation. Ces méthodes ont été étudiés dans ce chapitre avec la théorie nécessaire.

Une signification à ce travail à été présenté dans le troisième chapitre, à d'autre terme ce chapitre à été consacré aux applications de la réductions des endomorphismes, telles que le calcul des puissances d'une matrice, l'exponentielle d'une matrice et la résolution d'un système différentiel linaire du premier ordre.

Nous espérons enfin que ce manuscrit constituera un support utile pour nos étudiants et les aidera à améliorer leurs résultats aux examens.

Nos remerciements vont à tous ceux et celles qui ont contribué à la formation des étudiants qui suivent à la spécialité mathématiques de la faculté des sciences et technologies.

Table des matières

Chapitre 1

Rappels

1.1 Corps commutatif

Définition 1.1. Soit E un ensemble non vide. On appelle loi de composition interne $*$ sur E, une application de $E \times E$ dans E, qui à tout couple (a, b) de $E \times E$ fait correspondre un élément unique $a * b$ de E.

Exemple 1.1. 1) L'addition $(+)$ et la multiplication $(.)$ sont des loi de composition interne dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.
2) La réunion, l'intersection dans l'ensemble des parties d'un ensemble sont des loi de composition interne.

Définition 1.2. Soient E et F deux ensembles non vides. On appelle loi de composition externe toute application de $F \times E$ dans E, où F est distinct de E. Si on la note $\circ$, alors $\circ$ correspond à tout couple (λ, a) de $F \times E$ un élément unique $\lambda \circ a$ de E.

Définition 1.3. Soit $*$ une lois de composition interne sur un ensemble E. On dit que

i) la loi $*$ est commutative si pour tous les éléments x, y de E, on a $x * y = y * x$.

ii) la loi $*$ est associative si pour tous les éléments x, y, z de E, on a $(x * y) * z = x * (y * z)$.

iii) un élément e de E est un élément neutre pour la loi $*$ si pour tout élément a de E, on a $a * e = e * a = a$.

Proposition 1.1. Soit $*$ une loi interne sur un ensemble E, si $*$ possède un élément neutre, il est unique.

Exemple 1.2. Dans $\mathbb{R}$, 0 est un élément neutre pour l'addition et 1 est un élément neutre pour la multiplication.

Définition 1.4. Soit $*$ une loi interne sur un ensemble E, possédant un élément neutre e et soit a un élément de E. On dit que a de admet un symétrique b pour la loi $*$, si l'on a $a * b = b * a = e$.

Exemple 1.3. 1. Dans $\mathbb{R}$, chaque élément a possède un symétrique pour l'addition qui est son opposé $-a$.

2. Dans $\mathbb{R}^*$, chaque élément a possède un symétrique pour la multiplication qui est son inverse $\frac{1}{a}$.

Définition 1.5. Soit E un ensemble muni de deux lois internes notées $*$ et $\circ$. On dit que $\circ$ est distributive à gauche par rapport à $*$ si pour tous les éléments x, y, z de E, on a

$$x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z) .$$

On dit que $\circ$ est distributive à droite par rapport à $*$ si pour tous les éléments x, y, z de E, on a

$$(y * z)\, x \circ = (y \circ x) * (z \circ x) .$$

Exemple 1.4. Dans $\mathbb{R}$, la multiplication est distributive par rapport à l'addition.

Définition 1.6. (Groupe) Soit G un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne $*$. On dit que $(G, *)$ est un groupe si la loi $*$ satisfait aux trois conditions suivantes :

1) $*$ est associative ;

2) $*$ admet un élément neutre 0_A dans A ;

3) tout élément de G admet un symétrique dans G.

Si de plus $*$ est commutative, on dit que $(G, *)$ est un groupe commutatif ou groupe abélien.

Exemple 1.5. 1- $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{C}, +)$ sont des groupes abéliens avec élément neutre 0.

2- $(\mathbb{R}^*, +)$ et $(\mathbb{C}^*, +)$ sont des groupes abéliens avec élément neutre 1.

Définition 1.7. (Anneau)

Soit A un ensemble non vide muni de deux lois de composition interne $*$ et $\circ$. On dit que $(A, *, \circ)$ est un anneau les trois conditions suivantes sont satisfaites :

1- $(A, *)$ est un groupe abélien ;

2- $\circ$ est associative.

3- $\circ$ est distributive à gauche et à droite par rapport $*$.

Si $\circ$ est commutatif, l'anneau $(A, *, \circ)$ est dit commutatif.

On dit que l'anneau $(A, *, \circ)$ est unitaire, si $\circ$ admet un élément neutre 1_A dans A.

Exemple 1.6. 1- $(\mathbb{Z}, +, .)$, $(\mathbb{Q}, +, .)$, $(\mathbb{R}, +, .)$ et $(\mathbb{C}, +, .)$ sont des anneaux commutatifs et unitaires.

2- L'ensemble des polynômes muni de l'addition et la multiplication noté $(K[X], +, .)$ est anneau commutatif et unitaire où $\mathbb{K} = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On désigne plus souvent au anneau des polynômes par $\mathbb{K}[X]$.

Définition 1.8. (Corps)

Soit $\mathbb{K}$ un ensemble non vide muni de deux lois de composition interne notées $*$ et $\circ$. On dit que $(\mathbb{K}, *, \circ)$ est un corps si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1- $(\mathbb{K}, *, \circ)$ est anneau unitaire avec $1_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$;

2- tout élément de $\mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}$ est inversible pour la loi $\circ$.

Si de plus $(\mathbb{K}, *, \circ)$ est commutatif, on dit que le corps $(\mathbb{K}, *, \circ)$ est commutatif.

Exemple 1.7. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(\mathbb{K}, +, .)$ est un corps commutatif.

1.2 Polynômes

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. $\mathbb{K}[X]$ est l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Définition 1.9. Soit P un élément de $\mathbb{K}[X]$, P s'écrit

$$P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n,$$

où $(a_0, a_1, ..., a_n)$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. De plus, si $a_n \neq 0$, alors l'entier n est appelé degré de P et on note $deg(P)$.

Remarque 1.1. i) Si $a_n = 1$, on dit que le polynôme P est unitaire.

ii) P est dit nul, si pour tout $i \in \{0, 1, 2, ..., n\}$, $a_i = 0$.

Propriétés 1.1. Soient P et Q deux éléments de $\mathbb{K}[X]$.

i) Si $P \neq 0$, alors P est constant si et seulement si $deg(P) = 0$.

ii) $deg(P + Q) = \max(deg(P), deg(Q))$.

iii) $deg(PQ) = deg(P) + deg(Q)$.

iv) Si P et Q sont non nuls. Alors, il existe un polynôme D et un polynôme R tels que :

$$P = DQ + R,$$

avec $deg\,(R) < deg\,(D)$. Si $R = 0$, on dit que Q e P.

Définition 1.10. Un polynôme P de $\mathbb{K}\,[\mathbb{X}]$ est irréductible (ou premier) sur $\mathbb{K}$ s'il est non-constant, et si ses seuls diviseurs de P sont les constantes ou les λP où $\lambda \in \mathbb{K}$.

Définition 1.11. Soient P un polynôme de $\mathbb{K}\,[\mathbb{X}]$ et α un élément de $\mathbb{K}$. On dit que α est une racine (ou zéro) de P si $P\,(\alpha) = 0$.

Propriétés 1.2. Soit P un polynôme de $\mathbb{K}\,[\mathbb{X}]$:

i) α est racine de P si et seulement si $(X - \alpha)$ divise P.

ii) Si $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ sont des racines de P, alors $\prod_{i=1}^{k} (X - \alpha_i)$ divise P.

iii) Si $deg\,(P) = n$, alors P admet au plus n racines distinctes.

Définition 1.1. Soient $P \in \mathbb{K}\,[X]$, $r \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. α est dit racine d'ordre de multiplicité r de P s'il existe $Q \in \mathbb{K}\,[X]$ tel que $P\,(X) = (X - \alpha)^r\, Q\,(X)$ avec $Q\,(\alpha) \neq 0$.

Remarque 1.1. Une racine est dite simple si elle est d'ordre de multiplicité 1, double si elle d'ordre de multiplicité 2. D'une manière générale, l'entier r est appelé ordre de multiplicité de la racine.

Exemple 1.8. $P\,(X) = X^6 - 8X^5 + 23X^4 - 24X^3 - 8X^2 + 32X - 16$ et $\alpha = 2$.

$$\begin{aligned} P\,(X) &= (X-2)\left(X^5 - 6X^4 + 11X^3 - 2X^2 - 12X + 8\right) \\ &= (X-2)^2\left(X^4 - 4X^3 + 3X^2 + 4X - 4\right) \\ &= (X-2)^3\left(X^3 - 2X^2 - X + 2\right) \\ &= (X-2)^4\left(X^2 - 1\right). \end{aligned}$$

2 est donc racine d'ordre de multiplicité 4 du polynôme P.

Propriété 1.1. Soit $P \in \mathbb{K}\,[X]$. Si $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ sont des racines de P d'ordres respectifs $r_1, r_2, ..., r_k$, alors P est divisible par $\prod_{i=1}^{k} (X - \alpha_i)^{r_i}$.

Définition 1.2. Un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ est dit scindé sur $\mathbb{K}$ s'il se factorise en un produit de facteurs du premier degré de $\mathbb{K}[X]$, autrement dit s'il admet des racines $x_1, x_2, ..., x_n$ dans $\mathbb{K}$ d'ordres de multiplicités respectifs $m_1, m_2, ..., m_n$ telles que $m_1 + m_2 + ... + m_n = deg(P)$; on a alors

$$P(x) = \alpha (x - x_1)^{m_1} (x - x_1)^{m_2} ... (x - x_1)^{m_n}$$

avec α dans $\mathbb{K}^*$

Théorème 1.12. ***(d'Alembert-Gauss)*** *Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine complexe.*

Corollaire 1.13. *Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé. Un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré r a donc exactement r racines complexes (comptées avec multiplicité).*

1.3 Généralités sur les espaces vectoriels

Définition 1.3. Soit E un ensemble muni de deux lois : une loi interne notée $(+)$ et une loi externe notée $(.)$. On dit que $(E, +, .)$ est espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel) si

1) $(E, +)$ est un groupe commutatif.

2) La loi externe vérifie :

i) $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2,\ \forall x \in E, \quad (\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x.$

ii) $\forall \alpha \in \mathbb{K},\ \forall (x, y) \in E^2, \quad \alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y.$

iii) $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2,\ \forall x \in E, \quad \alpha.(\beta.x) = (\alpha.\beta).x.$

iv) $\forall x \in E, \quad 1.x = x.$

Remarque 1.2. Tout corps $\mathbb{K}$ se présente comme un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

1.3.1 Vecteurs

Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel.

• Les éléments de E sont appelé vecteurs. L'élément neutre est alors noté 0_E dite vecteur nul de E.

• Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés les scalaires.

• Une combinaison linéaire de la famille finie de vecteurs $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de E est un vecteur $x \in E$ s'écrivant $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ où les λ_i $(i = 1, ...n)$ sont des scalaires.

• Une famille finie de vecteurs $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est libre si, pour tout choix de $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0 \Longrightarrow \forall i \in \{1, 2, ..., n\}, \ \lambda_i = 0.$$

• Une famille quelconque de vecteurs est libre si toute sous-famille finie extraite est libre.

• Une famille qui n'est pas libre est une famille liée.

• Une famille $(x_i)_{i \in I}$ est génératrice de E si tout vecteur de E est combinaison linéaire des $(x_i)_{i \in I}$.

Exemples 1.1. 1) Toute famille formée d'un unique vecteur non nul est libre.

2) Toute famille dont l'un des vecteur est nul est liée.

3) $(1, i)$ est libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, mais liée dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ où i est le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

1.3.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 1.4. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si :

• $0_E \in F$,

• $x + y \in F$ pour tous $x, y \in F$,

• $\lambda.x \in F$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $x \in F$.

Remarques 1.1. • La première condition signifie que le vecteur nul de E doit aussi être dans F.

• La deuxième condition, c'est à dire que F est stable pour l'addition.

• La troisième condition, c'est à dire que F est stable pour la multiplication par un scalaire.

Théorème 1.14. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est lui-même un K-espace vectoriel pour les lois induites par E.*

Proposition 1.2. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E alors $F \cap G$ est encore un sous-espace vectoriel de E.

Définition 1.5. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A une partie de E, l'intersection de tous les sous-espace vectoriels contenant A est le plus petit sous-espace vectoriel contenant A. On l'appelle sous-espace vectoriel engendré par A et on le note $Vect\,(A)$.

Définition 1.6. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On appelle somme de F et G l'espace vectoriel noté $F + G$ défini par

$$F + G = \{x + y;\ x \in F,\ y \in G\}.$$

Définition 1.7. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On dit que F et G sont supplémentaires lorsque les deux propriétés suivantes sont satisfaites :

(i) $F + G = E$.

(ii) $F \cap G = 0_E$.

Si c'est le cas, on note $E = F \oplus G$ et on dit que la somme est directe.

1.4 Applications linéaires

Définition 1.8. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application f de E dans F est une application linéaire si elle satisfait aux deux conditions suivantes :

1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tous $x, y \in E$;

2) $f(\lambda.x) = \lambda.f(x)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et pour tout $x \in E$.

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F, et $\mathcal{L}(E)$ si $E = F$.

Remarques 1.2. 1) Si $E = F$, alors f est un endomorphisme.

2) Si $F = \mathbb{K}$, alors f est une forme linéaire sur E.

3) Si f est bijective alors f est un isomorphisme de plus $f^{-1} \in \mathcal{L}(E,F)$ (f^{-1} réciproque de f).

4) Si f est bijective et si $E = F$, alors f est un automorphisme.

5)Toute combinaison linéaire d'applications linéaires est linéaire. La composée d'applications linéaires est linéaire.

2) Une application linéaire de E dans F est aussi appelée morphisme ou homomorphisme d'espaces vectoriels.

Proposition 1.3. (Caractérisation d'une application linéaire) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application de E dans F. L'application f est linéaire si et seulement si, pour tous vecteurs x et y de E et pour tous λ et μ de $\mathbb{K}$,

$$f(\lambda.x + \mu.y) = \lambda.f(x) + \mu.f(y).$$

Définition 1.9. (Noyau, Image) Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

1) Le noyau de F noté $\ker(f)$ est la partie de E définie par $\ker(f) = \{x \in E;\ f(x) = 0_F\}$.

2) L'image de f notée $Im(f)$ est la partie de F définie par $Im(f) = \{f(x)\,;\ x \in E\}$.

Propriétés 1.3. Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1) $Im(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

2) $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

3) f est surjective si et seulement si $Im(f) = F$.

4) f est injective si et seulement si $\ker(f) = 0_E$.

1.5 Bases

Définition 1.10. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une famille $\mathscr{B} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ de vecteurs de E est une base de E si $\mathscr{B}$ est une famille libre et génératrice.

Théorème 1.15. *Soit $\mathscr{B} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ une base de l'espace vectoriel E. Tout vecteur $v \in E$ s'exprime de façon unique comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathscr{B}$. Autrement dit, il existe des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$ uniques tels que :*

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n.$$

Remarque 1.3. 1) $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ s'appellent les coordonnées du vecteur v dans la base $\mathscr{B}$.

2) l'application

$$\varphi : \mathbb{K}^n \longrightarrow E$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \mapsto \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$$

est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ vers l'espace vectoriel E.

Exemples 1.2. 1) Dans $\mathbb{K}^n$, posons $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ avec 1 en i-ème position. Alors la famille $\{e_i\}_{i \in \{1,...,n\}}$ forme une base, appelée la base canonique de E.

2) $(1, X, ..., X^n)$ est la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

Théorème 1.16. *(base incomplète)[4] Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie est égale à n. Toute famille libre $C = (u_1, ..., u_p)$ $(p \leq n)$ de vecteurs de E peut être complétée en une base $C = (u_1, ..., u_p, u_p, ..., u_n)$ de E.*

Théorème 1.17. *Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. S'il existe une base de E de cardinal $n < \infty$, toutes les bases de E ont ce même cardinal n, qu'on appelle alors la dimension de E. Dans ce cas, E est un espace de dimension finie.*

Proposition 1.4. Deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement s'ils ont la même dimension.

Définition 1.11. 1) On appelle rang d'une famille de vecteurs $\mathscr{F}$ que l'on note $rg(\mathscr{F})$ la dimension de l'espace vectoriel qu'il engendre $(rg(\mathscr{F}) = \dim Vect(\mathscr{F}))$.

2) On appelle rang d'une application la dimension de son image $(rg(f) = \dim Im(f))$.

Cela nous conduit à énoncer le théorème du rang, qui un résultat très utile.

Théorème 1.18. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et F un espace vectoriel de dimension quelconque. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors*

$$rg\,(f) + \dim \ker (f) = \dim E.$$

Proposition 1.5. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie vérifiant $\dim E = \dim F$. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors

$$f\ est\ injective \Leftrightarrow f\ est\ surjective \Leftrightarrow f\ est\ bijective.$$

Remarque 1.4. L'équivalence n'est pas vraie en dimension infinie. Par exemple, l'application dérivée sur l'espace des polynômes est surjective, mais pas injective. La multiplication par X sur ce même espace est injective, mais pas surjective.

Propriétés 1.4. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(e_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E.

1) Si f est injective et si la famille $(e_i)_{i \in I}$ est libre dans E, alors la famille $(f(e_i))_{i \in I}$ est libre dans F.

2) Si f est surjective et si la famille $(e_i)_{i \in I}$ est génératrice de E, alors la famille $(f(e_i))_{i \in I}$est génératrice de F.

3) En particulier, si f est bijective, l'image d'une base de E est une base de F.

Dans le reste de ce chapitre, on travaille dans des espaces de dimension finie.

1.6 Matrices

Soient E et F deux espaces vectoriels munis, respectivement, des bases $\mathscr{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ et $\mathscr{B}' = (f_1, f_2, ..., f_m)$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors pour $j = 1, 2, ..., n$, chacun des vecteurs $f(e_j)$ a des composantes sur la base $\mathscr{B}'$. On peut noter ces composantes

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i.$$

Le tableau d'éléments $a_{ij} \in \mathbb{K}$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(e_1) & f(e_2) & .. & f(e_j) & .. & f(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_m \end{array}$$

s'appelle la matrice associée au application linéaire f par rapport aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ et que l'on note $A = (a_{ij})$. Le terme situé sur la $i-$ème ligne et la $j-$ème colonne est a_{ij}.

On désigne par $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ à l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ possédant m lignes et n colonnes.

Remarque 1.5. - Si $m = n$, la matrice A est dite carrée d'ordre n et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

- Si m= 1,on dit que A est une matrice ligne ou encore un vecteur ligne.

- Si $n = 1$, on dit que A est une matrice colonne ou encore un vecteur colonne.

- Si $m = n$ et si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$, on dit que A est diagonale.

– Si $m = n$ et si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$ et $a_{ii} = 1$, A s'appelle la matrice identité et l'on note souvent par I_n.

– Si $m = n$ et si $a_{ij} = 0$ pour $i < j$, on dit que A est triangulaire inférieure.

– Si $m = n$ et si $a_{ij} = 0$ pour $i > j$, on dit que A est triangulaire supérieure.

- L'ensemble $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ muni des lois $(+)$ et $(.)$ est un anneau. Il est non commutatif.

Définition 1.12. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On appelle matrice transposée de A, la matrice de $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ notée ${}^tA$ et définie par : ${}^tA = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$

Définition 1.13. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, A une matrice carrée d'ordre n. On appelle trace de $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ et on note $tr(A)$, la somme des coefficients diagonaux de A, c'est-à-dire

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Définition 1.14. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est inversible lorsqu'il existe une matrice B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$. Dans ce cas B est unique et on l'appelle l'inverse de A et on la note A^{-1}.

Notation : On note $\mathbb{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n et inversibles.

Propriétés 1.5. Soit A dans $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice A est inversible si et seulement si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

• il existe B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = I_n$;

• il existe B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = I_n$;

• le noyau de A est réduit à 0, c'est-à-dire la seule solution de l'équation $AX = 0$ pour X dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, est la matrice colonne $X = 0$;

• elle est la matrice dans une certaine base d'un endomorphisme bijectif ;

• son rang est égal à n ;

• son déterminant est non nul.

1.6.1 Écriture matricielle d'une application linéaire

Soit $x \in E$ avec $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$. On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} \left(x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) f_i. \end{aligned}$$

Si on représente le vecteur x dans la base $\mathscr{B}$ par une matrice colonne X et le vecteur y dans la base $\mathscr{B}'$ par une matrice colonne Y, on a alors

$$y = f(x) \Longleftrightarrow Y = AX \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.6. L'application

$$M : \mathcal{L}(E, F) \longrightarrow \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$$

$$f \longmapsto M(f)_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Remarque 1.6. On a donc, pour toutes les applications linéaires f et g de E dans F et tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$M(f+g) = M(f) + M(g)$$

$$M(\lambda f) = \lambda M(f)$$

et M est bijective.

Proposition 1.7. $\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim E \times \dim F$

Démonstration. Deux espaces isomorphes ont même dimension, d'où le résultat. $\square$

Propriété 1.2. Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K}$, $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, $\mathscr{B}' = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$ et $\mathscr{B}''\{g_1, g_2, ..., g_n\}$ des bases de E, F et G respectivement. Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$, on a

$$M(g \circ f)_{\mathscr{B},\mathscr{B}''} = M(g)_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''} M(f)_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} .$$

Corollaire 1.19. *Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K}$, $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ et $\mathscr{B}' = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$ des bases de E, et F respectivement. Soit $f : E \longrightarrow F$ un isomorphisme. L'inverse de f noté f^{-1}, est un isomorphisme de F dans E et on a :*

$$M\left(f^{-1}\right)_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} = \left(M(f)_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\right)^{-1}.$$

1.6.2 Changement de base

Définition 1.15. (Matrice de passage). Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie dont on considère deux bases $\mathscr{B} = \{e_i\}_{1 \le i \le n}$, et $\mathscr{B}' = \{e_j\}_{1 \le j \le n}$. On appelle matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ la matrice carrée d'ordre n dont la j-ème colonne est constituée des coordonnées de e'_j dans la base $\mathscr{B} = e_{i1 \leq i \leq n}$. On la note $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$.

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1j} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2j} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{i1} & p_{i2} & \dots & p_{ij} & \dots & p_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nj} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

où $e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$, pour tout $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Remarque 1.7. Une matrice de passage est toujours inversible et on a

$$(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'})^{-1} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}.$$

Exemples 1.3. 1) Dans $\mathbb{R}^2$, si $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ est la base canonique et si

$$(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'})^{-1} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}.$$

$$X = PX'.$$

$\mathscr{B}' = \left(e'_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, e'_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, alors :

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2) Dans $\mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2, considérons les bases $\mathscr{B} = \{X^i\}_{0\leq i\leq 2}$ et $\mathscr{B}' \left\{(X-1)^i\right\}_{0\leq i\leq 2}$. Alors

$$\begin{cases} 1 = 1\times 1 + 0\times X + 0\times X^2 \\ X-1 = (-1)\times 1 + 1\times X + 0\times X^2 \\ (X-1)^2 = 1\times 1 + (-2)\times X + 1\times X^2 \end{cases}$$

d'où

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} 1 & (X-1) & (X-1)^2 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array} \end{array}$$

Proposition 1.8. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, x un élément de E, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E, $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, X et X' les matrices colonnes des coordonnées de x dans $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ respectivement , alors

$$X = PX'.$$

Proposition 1.9. Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\mathscr{B}_E = (e_1, e_2, ..., e_n)$ et $\mathscr{B}'_E = (e'_1, e'_2, ..., e'_n)$ deux bases de E et $\mathscr{B}_F = (f_1, f_2, ..., f_m)$ et $\mathscr{B}'_F = (f'_1, f'_2, ..., f'_m)$ deux bases de F. Notons $A = M(f)_{\mathscr{B}_E}, \mathscr{B}_F$, $A' = M(f)_{\mathscr{B}'_E}, \mathscr{B}'_F$ et $P = P_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}$ et $Q = P_{\mathscr{B}'_E,\mathscr{B}'_F}$. Alors,

$$A' = Q^{-1}AP.$$

Corollaire 1.20. *Soientt $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathscr{B}_E = (e_1, e_2, ..., e_n)$, $\mathscr{B}'_E = (e'_1, e'_2, ..., e'_n)$ deux bases de E. Notons*

$$A \;=\; M(f)_{\mathscr{B}_E},\; A' = M(f)_{\mathscr{B}'_E} \text{ et } P = P_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}'_E}.$$

On a

$$A' = P^{-1}AP.$$

Définition 1.16. Deux matrices A et A' sont dites semblables s'il existe une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A' = P^{-1}AP$.

Chapitre 2

Réduction d'un endomorphisme

Dans ce chapitre, on considère E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

2.1 Éléments propres

2.1.1 Éléments propres d'un endomorphisme

Définition 2.1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit qu'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f s'il existe un vecteur non nul $v \in E$ tel que $f(v) = \lambda v$. Ce vecteur v est appelé vecteur propre associé à la valeur propre λ.

On dit qu'un vecteur non nul $v \in E$ est un vecteur propre de f s'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(v) = \lambda v$.

On appelle spectre de f, et on note $Sp(f)$ l'ensemble des valeurs propres de f.

Exemple 2.1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (-2x - 2y + 2z, -3x - y + 3z, -x + y + z).$$

On a $f(1,1,0) = (-4,-4,0)$, c'est-à-dire $f(v_1) = -4v_1$ où $v_1 = (1,1,0)$, ce qui signifie que v_1 est un vecteur propre de f associé à la valeur propre $\lambda_1 = -4$.

De même, on a $f(v_2) = 2v_2$ et $f(v_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$ où $v_2 = (0,1,1)$ et $v_3 = (1,0,1)$, v_2 et v_3 sont des vecteurs propres de f associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 0$.

Il résulte que $Sp(f) = \{-4, 2, 0\}$.

Définition 2.2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in Sp(f)$. On appelle sous-espace propre associé à λ le sous-espace vectoriel de E, noté E_λ et défini par

$$E_\lambda = \{v \in E : \; f(v) = \lambda v\} = \ker(u - \lambda I_E).$$

Remarque 2.1. 1) $0_E \in E_\lambda$.

2) Si $\lambda \notin Sp(f)$, alors $E_\lambda = \{0_E\}$.

Proposition 2.1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$; on a :

$$\lambda \in Sp(f) \Longleftrightarrow f - \lambda Id_E \, n'est\, pas\, injectif.$$

Démonstration. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\begin{aligned}
\lambda \in Sp(f) &\Longleftrightarrow \exists x \in E \setminus \{0_E\}, \; f(x) = \lambda x \\
&\Longleftrightarrow \exists x \in E \setminus \{0_E\}, \; f(x) - \lambda x = 0_E \\
&\Longleftrightarrow \exists x \in E \setminus \{0_E\}, \; (f - \lambda Id_E)\, x = 0_E \\
&\Longleftrightarrow \exists x \in E \setminus \{0_E\}, \; x \in \ker(f - \lambda Id_E) \\
&\Longleftrightarrow \ker(f - \lambda Id_E) \neq \{0_E\} \\
&\Longleftrightarrow f - \lambda Id_E \, n'est\, pas\, injectif.
\end{aligned}$$

□

Remarque 2.2. De cette dernière proposition, on conclut que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\dim E_\lambda \geq 1$.

Propriété 2.1. On a l'équivalence

$$0 \in Sp(f) \Longleftrightarrow f\, n'est\, pas\, injectif.$$

De plus on a $\dim(E_0) = \dim(E) - rg(f)$.

Définition 2.3. (Sous-espace stable)

1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Un sous-espace vectoriel F de E est stable par f si $f(F) \subset F$.

2) Si f est un sous-espace stable, l'endomorphisme $g : F \longrightarrow F$ défini par $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in F$ est appelé endomorphisme induit par f sur F.

On notera aussi $g = f_{|F}$ cette restriction de f à F.

Exemple 2.2. Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, $im(f)$ et $\ker(f)$ (et plus généralement $\ker(P(f))$ pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$) sont stables par f.

Proposition 2.2. Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in Sp(f)$. Alors, E_λ *est stable par* f.

Démonstration. Soit $v \in E_\lambda$.

Si $v = 0_E$, on a facilement $f(v) = 0_E \in E_\lambda$.

Si $v \neq 0_E$, alors $f(v) = \lambda v \in E_\lambda$ car $v \in E_\lambda$. On conclut que

$$f(E_\lambda) \subset E_\lambda,\ pour\ tout\ \lambda \in E_\lambda.$$

$\square$

Théorème 2.1. *Soit* $f \in \mathcal{L}(E)$. *Soient* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ *des valeurs propres deux à deux distinctes de* f *et soit* v_i *vecteur propre associé à* λ_i *(pour* $1 \leq i \leq r$*). Alors, la famille* $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ *est libre dans* E.

Démonstration. Raisonnons par récurrence sur r, le nombre de valeurs propres.

Initialisation. Pour $r = 1$, la famille constituée du seul vecteur $\{v_1\}$ est toujours une famille libre, car v_1 est un vecteur non nul par définition.

Hérédité. Supposons que $\{v_1, v_2, ..., v_{r-1}\}$ soient des vecteurs propres linéairement indépendants (pour $r \geq 2$). Soit λ_r une autre valeur propre, et soit v_r un vecteur propre associé. Soient $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{r-1}, \alpha_r \in \mathbb{K}$ tels que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_{r-1} v_{r-1} + \alpha_r v_r = 0. \tag{2.1.1}$$

On applique f à l'égalité (2.1.1) et par linéarité, il vient :

$$\alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + ... + \alpha_{r-1} f(v_{r-1}) + \alpha_r f(v_r) = 0.$$

Or, on a par définition $f(v_i) = \lambda_i v_i$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., r\}$, donc

$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + ... + \alpha_{r-1} \lambda_{r-1} + \alpha_r \lambda_r v_r = 0. \tag{2.1.2}$$

Le calcul de l'expression (2.1.2)-λ_r(2.1.1) nous donne

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_r) v_1 + \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_r) v_2 + ... + \alpha_{r-1} (\lambda_{r-1} - \lambda_r) v_r = 0. \tag{2.1.3}$$

Par hypothèse, la famille $\{v_1, v_2, ..., v_{r-1}\}$ est libre, cela implique que

$$\alpha_i (\lambda_i - \lambda_r) = 0 \, \textit{pour tout} \, i \in \{1, 2, ..., r-1\}.$$

Sachant que les valeurs propres sont deux à deux distinctes, alors $\lambda_i - \lambda_r \neq 0$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., r-1\}$. Ainsi

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_{r-1} = 0.$$

Comme tout vecteur propre est non nul, il découle de l'équation (2.1.1) que

$$\alpha_r = 0.$$

Cela entraîne que la famille $\{v_1, v_2, ..., v_{r-1}\}$ est une famille libre. □

Proposition 2.3. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K})$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de f. Alors, les sous-espaces propres de associées aux $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, ..., E_{\lambda_r}$ sont en somme directe.

2.2 Éléments propres d'une matrice

Considérons E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathfrak{B}$ une base de E, $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Comme $f \longmapsto M(f)_{\mathscr{B}}$ est un isomorphisme, cela nous permet d'étendre les notions définies pour f à toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 2.4. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

(i) On dit qu'un élément λ de $\mathbb{K}$ est une valeur propre de A s'il existe un vecteur non nul $V \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$AV = \lambda V.$$

(ii) Le vecteur est alors appelé vecteur propre de A associé à λ.

(iii) L'ensemble des valeurs propres de A est appelé spectre de A et on note $Sp(A)$.

Exemple 2.3. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

-1 est une valeur propre de A. En effet

$$A \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2.3 Polynôme caractéristique

Dans les deux sections précédentes, aucune méthode a été donné pour calculer les valeurs propres. C'est ce qui l'on introduira dans la définition suivante.

Définition 2.5. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathfrak{B}$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de f dans la base $\mathfrak{B}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

(i) On appelle polynôme caractéristique de A le déterminant $\det(A - \lambda I_n)$ et est noté $P_A(\lambda)$.

(ii) Le polynôme caractéristique de f est égal au polynôme caractéristique de A c'est-à-dire

$$P_f(\lambda) = P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n).$$

Remarque 2.3. Le polynôme caractéristique ne dépend pas de la base choisie. En effet, si B une matrice de f dans une autre base $\mathfrak{B}'$, alors il existe une matrice $P \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I_n) \\ &= \det\left(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P\right) \\ &= \det\left(P^{-1}\right)\det(A - \lambda I_n)\det(P) \\ &= \det(A - \lambda I_n)\det\left(P^{-1}\right)\det(P) \\ &= \det(A - \lambda I_n) \quad \left(car\ \det\left(P^{-1}\right) \times \det(P) = 1\right) \\ &= P_A(\lambda). \end{aligned}$$

Définition 2.6. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle polynôme caractéristique de f le polynôme $\det(f - \lambda Id_E)$ où $\lambda \in \mathbb{K}$

Remarque 2.4. Le degré du polynôme caractéristique est égal à la dimension de l'espace E.

Définition 2.7. L'ordre de multiplicité d'une valeur propre λ d'un endomorphisme f d'un espace vectoriel de dimension finie est sa multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique $P_f(\lambda)$ et on note $m(\lambda)$.

Théorème 2.2. *Soit f un endomorphisme de E et P_f son polynôme caractéristique admettant dans $\mathbb{K}$ une racine λ d'ordre de multiplicité k, alors $1 \leq \dim E \leq k$.*

Démonstration. Soient λ valeur propre de f et $m(\lambda) = k$. Supposons que $\dim E_\lambda = n$. Alors E_λ contient r vecteurs propres linéairement indépendants $v_1, v_2, ..., v_r$. Complétons le système $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ pour obtenir une base de E, et soit cette base $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, ..., v_r, v_{r+1}, v_{r+2}, ..., v_n\}$. Alors

$$\begin{aligned}
f(v_1) &= \lambda v_1 \\
f(v_2) &= \lambda v_2 \\
f(v_r) &= \lambda v_r \\
f(v_{r+1}) &= a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + ... + a_{1r}v_r + a_{1r+1}v_{r+1} + ... + a_{1n}v_n \\
f(v_{r+2}) &= a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + ... + a_{2r}v_r + a_{2r+1}v_{r+1} + ... + a_{2n}v_n \\
f(v_n) &= a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + ... + a_{nr}v_r + a_{nr+1}v_{r+1} + ... + a_{nn}v_n.
\end{aligned}$$

Ainsi la matrice de f dans la base $\mathfrak{B}$ est

$$M(f)_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & a_{1r} & a_{2r} & \dots & a_{nr} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{1r+1} & a_{12+1} & \dots & a_{nr+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{1r+2} & a_{2r+2} & \dots & a_{nr+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Notons

$$B = \begin{pmatrix} a_{1r+1} & a_{12+1} & \dots & a_{nr+1} \\ a_{1r+2} & a_{2r+2} & \dots & a_{nr+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n-r}(\mathbb{K})$$

et I_{n-r} la matrice unité d'ordre $n-r$.

$P_f(x) = \det(M(f)_{\mathfrak{B}} - xI_n) = (\lambda - x)^r \det(B - xI_{n-r}) = (\lambda - x)^r P_B(x)$ où

$\deg(P_B) = n - r$.

Donc $(\lambda - x)^r$ divise P_f, et comme k le plus grand entier tel que $(\lambda - x)^k$ divise P_f .

Alors : $r \leq k$. □

Corollaire 2.3. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.*

1) A admet au plus n valeurs propres.

2) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ admet au moins une valeur propre.

Démonstration. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Si A admet m valeurs propres distinctes deux à deux avec $m > n$ et $e_1, e_2, ..., e_m$

les vecteurs propres associés aux λ_i $(1 \leq i \leq m)$. D'après la proposition 2.1 la famille $\{e_1, e_2, ..., e_m\}$ est libre, or que $m > n$ entraine que $\{e_1, e_2, ..., e_m\}$ est lié car $\dim E = n$, d'où contradiction.

2) D'après le théorème d'Alembert-Gauss, tout polynôme non constant de $\mathbb{C}_n[X]$ admet au moins une racine complexe. $\square$

Exemple 2.4. 1) Considérons dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Calculons le polynôme caractéristique de A :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = (1-\lambda)^2(4-\lambda)$$

2) Déterminons les valeurs propres de A :

$$\begin{aligned} \lambda \in Sp(A) &\Longleftrightarrow P_A(\lambda) = 0 \\ &\Longleftrightarrow (1-\lambda)^2(4-\lambda) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \lambda = 1 \ \vee \ \lambda = 4. \end{aligned}$$

D'où $Sp(A) = \{1, 4\}$.

3) Déterminons les vecteurs propres de A :

Soit E_1 le sous-espace propre associé à la valeur $\lambda_1 = 1$, puis nous avons

$$E_1 = \left\{ V \in \mathbb{R}^3 : \ AV = V \right\}.$$

où V est la matrice colonne telle que

$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

et on réécrit l'égalité $AV = V$ comme suit :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 2x + y + z \\ x + 2y + z \\ x + y + 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

cela est équivaut à

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \\ z = -x - y \end{cases} .$$

Alors

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 :\ z = -x - y \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} ;\ x, y \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} ;\ x, y \in \mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}
$$

Ainsi, le sous-espace propre E_1 est engendré par deux vecteurs linéairement indépendants $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs forment une base de E_1. Alors, $\dim E_1 = 2$.

Soit E_4 le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 4$.

Considérons la matrice colonne $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Alors

$$E_4 = \left\{ V \in \mathbb{R}^3 :\ AV = 4V \right\}.$$

L'égalité $AV = 4V$ est équivalente à

$$\left\{ \begin{array}{l} -2x + y + z = 0 \\ x + -2y + z = 0 \\ x + y + -2z = 0 \end{array} \right. .$$

En sommant la première équation avec la deuxième équation et la deuxième équation avec la troisième équation, on obtient

$$\begin{cases} -x - y + = 0 \\ -y - z = 0 \\ x + y + -2z = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} x = -y \\ z = -y \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Donc

$$\begin{aligned} E_4 &= \left\{ \begin{pmatrix} -y \\ y \\ -y \end{pmatrix}, \ y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ y \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Alors, E_4 est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur libre $V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ce dernier vecteur est base de E_4.

La famille (V_1, V_2, V_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 2.5. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure telle que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \ddots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \ddots & a_{ij}-\lambda & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n}(a_{ii}-\lambda) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n}(\lambda - a_{ii}).$$

Donc, $Sp(A) = \{a_{ii};\ 1 \leq i \leq n\}$. On conclut :

Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont exactement ses éléments diagonaux.

2.4 Diagonalisation

Définition 2.8. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

(i) Un endomorphisme f de E est diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.

(ii) Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si elle semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire s'il existe une matrice $P \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Proposition 2.4. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à n. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice d'un endomorphisme f de E dans une base quelconque $\mathfrak{B}$ alors :

$$f \text{ diagonisable} \Longleftrightarrow A \text{ diagonisable.}$$

Démonstration. (i) $\Longrightarrow$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable.

Si D est la matrice de f dans la base $\mathfrak{B} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ formée de vecteurs propres, alors D est une matrice diagonale. En effet, comme $f(v_i) = \lambda_i v_i$, la matrice D est diagonale et le i-ème élément de la diagonale est λ_i.

Si A est la matrice de f dans une base $\mathfrak{B}$ quelconque, alors A est semblable à la matrice D. Il existe donc $P\mathbb{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.

(ii) $\Longleftarrow$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable.

L'endomorphisme f , considéré comme une application $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$, s'écrit $f(V) = AV$ où les coordonnées de V s'expriment dans la base canonique $(e_1, e_2, ..., e_n)$:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $P \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $D = P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale. Notons $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ les éléments diagonaux de D. Notons $(V_1, V_2, ..., V_n)$ les vecteurs colonnes de P. Ils s'obtiennent aussi comme $V_i = Pe_i$. Montrons que V_i est un vecteur propre de f associé à λ_i avec $1 \leq i \leq n$:

$$f(V_i) = AV_i = \left(PDP^{-1}\right)(Pe_i) = PDe_i = P(\lambda_i e_i) = \lambda_i (Pe_i) = \lambda_i V_i.$$

Comme P est inversible, alors $(V_1, V_2, ..., V_n)$ est une base de vecteurs propres. $\square$

Proposition 2.5. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. f est diagonalisable si et seulement si E est somme directe des sous-espaces propres de f.

Démonstration. Soient $\dim E = n$, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ les valeurs propres de f (les valeurs propres sont deux à deux distinctes) $1 \leq r \leq n$ et $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, ..., E_{\lambda_r}$ les sous-espaces propres associée aux valeurs propres.

(i) $\Longrightarrow$. En vertu de la proposition 2.3, les sous-espaces E_{λ_i} pour $1 \leq i \leq r$ sont en somme directe. Notons $E' = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus ... \oplus E_{\lambda_r}$. Comme f est diagonalisable, alors il existe une base de E formée de vecteurs propres de f . Ces vecteurs propres sont aussi des éléments de E'. Ainsi E' contient une base de E. On en déduit que $E = E' = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus ... \oplus E_{\lambda_r}$.

(ii) $\Longleftarrow$. Maintenant, nous supposons que les sous-espaces E_{λ_i} avec $1 \leq i \leq r$ sont en somme directe dans E. choisissons une base pour chacun des sous-espaces propres E_{λ_i} $(1 \leq i \leq r)$. Les vecteurs de chacune de ces bases sont des vecteurs propres de f . L'union de ces bases est une base de E formée de vecteurs propres de f , ainsi f est diagonalisable. □

Proposition 2.6. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ possède n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable.

Démonstration. La preuve de ce résultat découle de l'utilisation de la proposition 2.3, du théorème 2.2 et la proposition 2.5 □

Proposition 2.7. Soient $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme. une condition nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable est que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

1) le polynôme caractéristique P_f de f est scindé sur $\mathbb{K}$.

2) si on note $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ les racines distinctes de P_f et $m(\lambda_1), m(\lambda_2), , ..., m(\lambda_r)$ leurs ordres de multiplicité respectifs, E_{λ_i}, $1 \leq i \leq r$, les sous-espaces propres associés, alors $\dim E_{\lambda_i} = m(\lambda_i)$ pour $1 \leq i \leq r$.

Démonstration. Condition nécessaire :

Supposons que f est diagonalisable. On note $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de P_f. Donc, il existe une base de E formée des vecteurs propres de f. En regroupant les vecteurs propres associés à une même valeur propre, on obtient une base dans laquelle la matrice associée à f est diagonale

$$D = M(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{m_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_r I_{m_r} \end{pmatrix}$$

où m_i est la dimension de E_{λ_i}. Le polynôme caractéristique de f est

$$P_f(x)(-1)^n = (x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_1)^{m_2} ... (x-\lambda_1)^{m_r}.$$

Cela prouve que le polynôme caractéristique de f est scindé dans $\mathbb{K}$ et que $\sum_{i=1}^r m(\lambda_i) = \sum_{i=1}^r m_i = n = \dim E$ d'une part, et d'autre part, comme E est somme directe des sous-espaces E_{λ_i}, $1 \leq i \leq r$ et $1 \leq \dim E_{\lambda_i} \leq m(\lambda_i)$, on en déduit que $m(\lambda_i) = m_i$.

Condition suffisante :

On va montrer par récurrence que les sous-espaces propres E_{λ_i}, $1 \leq i \leq j$ sont en somme directe pour $1 \leq i < r$.

C'est vraie pour $j = 1$. Supposons que la propriété soit vraie pour un entier j, $1 \leq i < r$

et montrons quelle est vraie pour $j+1$. Notons

$$S_j = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus ... \oplus E\lambda_j.$$

Il suffit de montrer que $S_j \cap E_{\lambda_{j+1}} = \{0_E\}$.

Soit $v \in S_j \cap E_{\lambda_{j+1}}$. On a d'une part

$$f(v) = \lambda_{j+1} v$$

et d'autre part v s'écrit

$$v = v_1 + v_2 + ... + v_j \tag{2.4.1}$$

avec $v_i \in E_{\lambda_i}$ pour $1 \leq i \leq j$. En calculant l'image des deux membres de l'égalité (2.4.1), nous obtenons

$$\lambda_{j+1} v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_j v_j. \tag{2.4.2}$$

La différence ((2.4.2)-λ_{j+1}(2.4.1)), nous donne

$$0 = (\lambda_1 - \lambda_{j+1}) v_1 + ... + (\lambda_j - \lambda_{j+1}) v_j.$$

L'hypothèse de récurrence implique que les termes de la somme du second membre de cette dernière égalité sont tous nuls. On en déduit que $v_1, v_2, ..., v_j$ sont nuls, d'où v est nul.

Ainsi, les E_{λ_i}, $1 \leq i \leq r$, sont en somme directe dans E. Puisque $\sum_{i=1}^{r} \dim E_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{r} m_{\lambda_i} = n$, on remarque que $E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus ... \oplus E_{\lambda_r}$, donc E est somme directe de ses sous-espaces propres et f est diagonalisable. $\square$

Pratique de la diagonalisation

Pour diagonaliser une matrice A :

1) on calcule le polynôme caractéristique $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$.

2) on cherche les valeurs propres, en résolvant l'équation : $P_A(\lambda) = 0$.

3) Pour chaque racine λ_j de cette équation, on cherche le sous-espace propre associé, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs non nuls X tels que $(A - \lambda_i I_n) X = 0$ et une base de ce sous-espace.

4) i) Si la réunion de ces bases comporte moins de n vecteurs, A n'est pas diagonalisable.

ii) Si elle en comporte n, elle constitue une base de vecteurs propres ; la matrice P dont les colonnes sont ces vecteurs propres est appelée matrice de passage. $A = PDP^{-1}$ où D est la matrice diagonale des valeurs propres.

Exemple 2.6. Considérons l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini dans la base canonique par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminons les valeurs propres de f :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda+1)^2.$$

$$P_A(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0 \, ou \, \lambda = -1.$$

Donc, le spectre de A est $Sp(A) = \{-1, 0\}$.

Déterminons les vecteurs propres de f :

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est

$$E_0 = \left\{ v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; Av = 0 \right\}.$$

Ainsi

$$v=(x,y,z)\in E_0 \Longleftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x-y=0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} z=y \\ y\in\mathbb{R} \\ y=x \end{cases} \cdot$$

Alors, $E_0 = \{y\,(1,1,1)\,,: y\in\mathbb{R}\}$. Le sous-espace E_0 est engendré par le vecteur $v_1 = (1,1,1)$ $\dim E_0 = 1$.

Le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est

$$E_{-1}=\Big\{v=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ Av=-v\Big\}.$$

Ainsi

$$v=(x,y,z)\in E_{-1} \Longleftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = x + z \\ x \in \mathbb{R} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} .$$

alors,

$$E_{-1} = \{(x, x+z, z)\,, : y \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{x\,(1,1,0) + z\,(0,1,1)\,,\ x, z \in \mathbb{R}\}\,.$$

Le sous-espace propres E_{-1} est engendré par les deux vecteurs $v_2 = (1,1,0)$, $v_3 = (0,1,1)$,

$\dim E_{-1} = 2$.

Donc, (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est diagonale, et cette matrice s'écrit

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Montrons que f est diagonalisable :

Comme $\dim E_0 + \dim E_{-1} = \dim \mathbb{R}^3$,(ou bien $\dim E_0 = m\,(0) = 1$ et $\dim E_{-1} = m\,(-1) = 2$, alors f diagonalisable.

La matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base (v_1, v_2, v_3) est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et elle vérifie $D = P^{-1}AP$.

2.5 Trigonlisation

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n supérieure ou égale à 1.

Définition 2.9. Un endomorphisme de E est trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle il est représenté par une matrice triangulaire.

Définition 2.10. Une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire, autrement dit s'il existe une matrice triangulaire T de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = T$.

Théorème 2.4. *Une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable, si et seulement si, son polynôme caractéristique P_A est scindé sur $\mathbb{K}$.*

Démonstration. Condition nécessaire.

Si A est trigonalisable, elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & t_{n-1n} \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de la matrice T est scindé :

$$P_T(x) = (-1)^n (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_n).$$

D'après la remarque 2.3, A et T ayant le même polynôme caractéristique, alors $P_A(x) = P_T(x)$, d'où P_A est scindé sur $\mathbb{K}$.

Condition suffisante.

Procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 1$, la propriété est vraie car toute matrice $\mathscr{M}_1 \in (\mathbb{K})$ est trigonalisable.

On supposons que tout matrice de $\mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$, dont le polynôme caractéristique est scindé, est trigonalisable, montrons que cela est vrai pour toute matrice de $\mathscr{M}_n \in (\mathbb{K})$.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, telle que le polynôme P_A soit scinde sur $\mathbb{K}$. P_A possède donc au moins une racine λ dans $\mathbb{K}$. Soit v un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. D'après le théorème de la base incomplète, il existe une base $\mathcal{B}$ de E de la forme $\mathcal{B} = (v, e_2, ..., e_n)$. Par rapport à cette base, la matrice de f est de la forme

$$M(f)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

La famille $\mathcal{B}_1 = (e_2, ..., e_n)$ est une base du sous-espace $F = Vect(\mathcal{B}_1)$ de E. Notons $g : F \longrightarrow F$ l'endomorphisme défini par

$$A_1 = M(g)_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Comme $P_{M(f)_{\mathcal{B}}}(x) = (\lambda - x) P_C(x)$, le polynôme caractéristique de A_1 est scindé. Comme $\dim F = n - 1$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence : il existe donc une base $\mathcal{B}_2 = (v_2, ..., v_n)$ de F telle que $M(g)_{\mathcal{B}_1}$ soit triangulaire supérieure. Si on pose $\mathcal{B}_1 = (v_1, v_2, ..., v_n)$, $M(f)_{\mathcal{B}'}$ est triangulaire supérieure. □

Remarque 2.5. Pour trigonaliser une matrice :

1) On cherche les valeurs propres et les sous-espaces propres : dans ceux qui sont de dimension égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée.

2)On choisit une base des vecteurs propres ; dans les autres, une base incomplète de vecteurs propres : on complète ce système par des vecteurs non propres, souvent des vecteurs de la base canonique. il n'y a pas de méthode globale à connaître a priori.

3)Toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable car son polynôme caractéristique est scindé.

Exemple 2.7. Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de A est $P_A(\lambda) = (1+\lambda)(3-\lambda)^2$.

Le spectre de A est $Sp(A) = \{3, -1\}$.

Le sous-espace propre E_3 associé à 3 est $E_3 = Vect(v_1(1,2,2))$.

Le sous-espace propre E_{-1} associé à la valeur propre -1 est défini par

$$E_{-1} = \left\{ v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, Av = -v \right\}.$$

On résout le système $Av = v$ avec $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, donc

$$(x,y,z) \in E_{-1} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y + 4z = 0 \\ 4x - 6y + 8z = 0 \\ 6x - 7y\text{+4z=0} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y \in \mathbb{R} \\ z = x \end{cases},$$

ainsi $E_{-1} = \{y(1,2,1)\,,\ y \in \mathbb{R}\}$.

Donc E_{-1} est la droite vectorielle engendré par le vecteur propre $v_2(1,2,1)$, il donc de dimension 1 inférieure à l'ordre de multiplicité de la valeur propre -1 qui est égale à 2.

On en déduit que A n'est pas diagonalisable.

En prenant pour base (v_1, v_2, v_3) où v_3 est un vecteur quelconque indépendant de v_1 et v_2, on aura la matrice triangulaire semblable à A :

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour préciser la matrice de passage ainsi que a et b, prenons pour v_3 par exemple e_1 de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (base où A définit un endomorphisme f). On a $e_1 \notin E_3$ et $e_1 \notin E_{-1}$ car

$$\det(v_1, v_2, e_1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

On peut choisir $v_3 = e_2 = (0, 1, 0)$, mais ce n'est pas le cas pour $v_3 = e_3 = (0, 0, 1)$.

La matrice de passage est donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut déterminer a et b en utilisant $T = P^{-1}AP$.

Comme A et T représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes, il est plus simple de remarquer que $Ae_1 = Te_1$, ceci implique

$$av_1 + bv_2 - e_1 = e_1 + 4e_2 + 6e_3$$

avec $v_1 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$, $v_1 = e_1 + 2e_2 + 2e$, $v_3 = e_1$.

On obtient le système

$$\begin{cases} a+b-1=1 \\ 2a+2b=4 \\ 2a+b=6 \end{cases}$$

ainsi $a=4$ et $b=-2$ et

$$T=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour éviter le calcul de P^{-1} dans la vérification de l'égalité $T=P^{-1}AP$, on peut calculer sa forme équivalente $PT=AP$.

2.6 Polynômes d'endomorphisme

Définition 2.11. Soit $P(X)=a_0+a_1X+...+a_nX^n \in \mathbb{K}[X]$. Si f est un endomorphisme de E, on note $P(f)$ l'endomorphisme de E tel que

$$P(X)=a_0+a_1X+...+a_nX^n \in \mathbb{K}[X]$$

où $f^0=Id_E$ et pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $f^k=f\circ f^{k-1}$. On appelle polynôme en f tout endomorphisme de la forme $P(f)$.

Remarque 2.6. 1. Si $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note $P(A)$ l a matrice

$$a_0I_n+a_1A+...+a_nA^n=\sum_{i=1}^{n}a_iA^i$$

où $A^0=I_n$ et pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $A^k=A\circ A^{k-1}$.

2. Pour tous $P,Q\in\mathbb{K}[\mathbb{X}]$, $f\in\mathcal{L}(E)$:

$$(P.Q)(f) = (P \circ Q)(f).$$

Exemple 2.8. Pour le polynôme $P(X) = X^2 - 3X + 2$ et un endomorphisme f, l'endomorphisme $P(f)$ est défini comme suit

$$P(X) = f^2 - 3f + 2f^0 = f^2 - 3f + 2Id.$$

Proposition 2.8. [14] Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. L'application Φ qui à un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ associe l'endomorphisme $P(f) \in \mathcal{L}(E)$ est linéaire, de plus, pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[\mathbb{X}]$, on a

$$\Phi(PQ) = \Phi(P)\Phi(Q).$$

Proposition 2.9. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et deux polynômes P et Q. Alors, les endomorphismes $P(f)$ et $Q(f)$ commutent.

Démonstration. Par linéarité, il suffit de noter que, pour tous $m, n \in \mathbb{N}$,

$$f^m \circ f^n = f^{m+n} = f^n \circ f^m.$$

□

Définition 2.12. Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[\mathbb{X}]$. Le polynôme P est annulateur de f si l'endomorphisme $P(f)$ est nul. De même, le polynôme P est annulateur de A si la matrice $P(A)$ est la matrice nulle.

Exemple 2.9. Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme $P(X) = X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de A. En effet

$$P(A) = A^2 - 2A + I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition 2.10. [10] Tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie admet un polynôme annulateur non nul.

Définition 2.13. Un endomorphisme f de E est dit nilpotent s'il existe un entier r tel que $f^r = 0$ et $f^{r-1} \neq 0$. Le plus petit r vérifiant cette propriété est appelé indice de nilpotence de f.

Proposition 2.11. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si f est un endomorphisme nilpotent alors $Sp(f) = \{0\}$.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ d'indice r. Supposons que $Sp(f)$ ne contient pas 0, alors $\ker f = \{0_E\}$.

Soit $x \in E$, alors $f^r(x) = 0$ donc $f(f^{r-1}(x)) = 0$ d'où $f^{r-1}(x) = 0$. Une récurrence élémentaire permet de montrer que

$$f^r(x) = f^{r-1}(x) = ... = f(x) = x = 0_E,$$

ce qui est absurde puisque E n'est pas réduit à $\{0_E\}$. Donc $\{0\} \subset Sp(f)$.

Montrons $Sp(f) \subset \{0\}$. Soit $\lambda \in Sp(f)$ et v un vecteur propre associé à λ. On a pour tout entier $k \geq 1$

$$f^r(v) = \lambda^r v.$$

En particulier $f^r(v) = \lambda^r v = 0_E$. Donc $\lambda^r = 0$, d'où $\lambda = 0$. $\square$

Lemme 2.5. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice non nul r. Pour chaque $i \in \{0, 1, 2, ..., r\}$, on pose $E_i = \ker(f^i)$. Alors*

1) $\{0\} = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq ... \subsetneq E_{r-1} \subsetneq E_r = E$.

2) Pour chaque $i \in \{0, 1, 2, ..., r-1\}$, $f(E_{i-1}) \subseteq E_i$.

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout $i \in \{0, 1, 2, ..., r-1\}$, on a $E_{i+1} \neq E_i$. Pour cela, supposons par absurde qu'il existe $i \in \{0, 1, 2, ..., r-1\}$, tel que $E_{i+1} = E_i$. Soit $x \in E$ comme f est nilpotent d'indice r, alors

$$0 = f^r(x) = f^{i+1} \circ f^{q-i-1}(x) = u^{i+1}\left(f^{r-i-1}(x)\right),$$

donc $f^{r-i-1}(x) \in E_{i+1}$. Comme $E_{i+1} = E_i$, alors $f^{r-i-1}(x) \in E_{i+1}$ donc on aura pour tout $x \in E$

$$0 = f^{r-1}(x) = f^i \circ f^{r-i-1}(x) = f^i\left(f^{r-i-1}(x)\right),$$

donc $f^{r-1} = 0$, ce qui est absurde, car $f^{r-1} \neq 0$.

2) Soit $x \in E_{i+1}$ alors on a $f^{i+1}(x) = 0$, donc $0 = f^i(f(x))$, par suite $f(x) \in E_i$. □

Définition 2.14. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est nilpotente s'il existe un $r \in \mathbb{N}$ tel que $A^r = O_n$ et $A^{r-1} \neq O_n$. Le plus petit r vérifiant cette propriété est appelé indice de nilpotence de A.

Proposition 2.12. Une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente si et seulement si l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ de matrice A par rapport à la base canonique est nilpotent.

Démonstration. Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On utilise la formule $M_{\mathcal{B}}\left(f^k\right) = (M_{\mathcal{B}}(f))^k$ vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$. □

Proposition 2.13. Si une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente, alors $Sp(A) = \{0_{\mathbb{K}}\}$.

Démonstration. On considère l'endormorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ de matrice A par rapport à la base canonique de $\mathbb{K}^n$, et on applique la proposition 2.11. □

Proposition 2.14. Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[\mathbb{X}]$. Si P est un polynôme annulateur de f, alors

$$Sp(f) \subseteq \{\, racines\ de\ P \,\}.$$

De même, si P est un polynôme annulateur de A, alors

$$Sp\,(A) \subseteq \{racines\ de\ P\}\,.$$

Démonstration. Soit $\lambda \in Sp\,(f)$ et v un vecteur associé à λ, alors

$$f\,(v) = \lambda v$$

ainsi

$$\forall k \geq 0,\ f^k\,(v) = \lambda^k v.$$

et plus généralement :

$$Q\,(f)\,(v) = Q\,(\lambda)\,v$$

pour tout $Q \in \mathbb{K}\,[\mathbb{X}]$. En particulier :

$$P\,(f)\,(v) = 0$$

ceci implique

$$P\,(\lambda)\,v = 0$$

d'où $P\,(\lambda) = 0$ car $v \neq 0_E$. □

Proposition 2.15. Soient f un endomorphisme de E et $v \in E$. Le petit sous-espace stable par f contenant v est le sous-espace engendré par la famille $\left(f^k\,(v)\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

Démonstration. Notons E_v le plus petit sous-espace stable par f contenant v. Comme $Vect\left(f^k\,(v)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est un sous-espace de E contenant v et stable par f, alors $E_v \subset Vect\left(f^k\,(v)\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

Réciproquement, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^k\,(v) \in E_v$ (par récurrence, car $v \in E_v$ et E_v est stable par f).

D'où $E_v = Vect\left(f^k\,(v)\right)_{k\in\mathbb{N}}$. □

Théorème 2.6. *(Cayley-Hamilton) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.*

(i) Si f un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est P_f alors :

$$P_f(f) = 0.$$

(ii) Si M une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique est P_M alors :

$$P_M(M) = 0.$$

Démonstration. Soient $v \in E$, F_v le plus petit sous-espace vectoriel stable par f et contenant v (c'est-à-dire le sous-espace engendré par la famille $\left(f^k(v)\right)_{k\in\mathbb{N}}$, d'après la proposition 2.15) et g l'endomorphisme induit par f sur F_v. Nous allons d'abord montrer que $P_g(f) = 0$, puis que P_g divise P_f, ce qui montrera que $P_f(f) = 0$.
Soit $p = \dim E_v$. Par construction, $\mathcal{B} = \left(f^k(v)\right)_{k\leq p-1}$ est une base de F_v et $f^p(v)$ admet une décomposition que l'on note $f^p(v) = \sum_{k=0}^{p} a_k f^k(v)$. Écrivons la matrice A' de g dans la base $\mathcal{B}$. Rappelons que les vecteurs colonnes de A' sont les images par f des vecteurs de la base. Il en découle que

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 0 & a_{p-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & a_{p-1} \end{pmatrix},$$

donc

$$P_g(\lambda) = \det(A' - \lambda I_p) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & -\lambda & & & \vdots & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & 1 & -\lambda & a_{p-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & a_{p-1} \end{vmatrix}$$

en développant par rapport à la première ligne ou la première colonne : on trouve alors

$P_g(\lambda) = (-1)^p [\lambda^p - a_0 - a_1\lambda - \dots - a_{p-1}\lambda^{p-1}] = (-1)^p \left[\lambda^p - \sum_{k=0}^{p-1} a_k\lambda^k\right].$

Alors, $P_g(f)(v) = (-1)^p \left[f^p(v) - \sum_{k=0}^{p-1} a_k f^k(v)\right]$, de la décomposition de $f^p(v)$ sur la base $\mathcal{B}$, il résulte que $P_g(f) = 0$. D'après le théorème 1.16, on peut compléter la base $\mathcal{B}$ en une base $(v, f(v), ..., f^{p-1}(v), e_{p+1}, ..., e_n)$ de E. Dans cette base, la matrice A de f sera de la forme

$$A = \begin{pmatrix} A' & B \\ O_p & C \end{pmatrix}$$

où O_p est la matrice carrée nulle d'ordre p, $C \in \mathscr{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{n-p,p}(\mathbb{K})$. On remarque que la matrice A est triangulaire, il résulte que $P_f(\lambda) = P_g(\lambda) P_C(\lambda)$.

Comme $P_g(f) = 0$, on a $P_f(f)(v) = P_g(f) \circ P_C(f)(v) = 0$.

D'où, pour tout $v \in E$, $P_f(f)(v) = 0$. □

Définition 2.15. Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme minimal de f ou de A est un polynôme annulateur et unitaire de degré minimal

Proposition 2.16. Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et M_f un polynôme de f. Alors, M_f divise tous les polynômes annulateurs de f.

Démonstration. Soit P un polynôme annulateur de f. Faisons la division euclidienne de

P sur M_f

$$P = Q.M_f + R$$

où $\deg R < \deg M_f$. On a

$$0 = P(f) = Q(f) .M_f(f) + R(f) .$$

Comme $M_f(f) = 0$, alors $R(f) = 0$.

D'où $R \equiv 0_{\mathbb{K}}$. Par conséquent M_f divise P. □

Proposition 2.17. Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et M_f un polynôme minimal de f. Les racines de M_f sont exactement les valeurs propres de f c'est à dire :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ M_f(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda \in Sp(f) .$$

Démonstration. D'après la proposition 2.14, on a

$$Sp(f) \subseteq \{\, racines\ de\ M_f \,\} .$$

Il reste à montrer que si $M_f(\lambda) = 0$, alors λ est une valeur propre de f. Si λ est une racine de M_f, alors il existe $Q \in \mathbb{K}[\mathbb{X}]$ tel que $M_f(X) = (X - \lambda) .Q(X)$ avec $\deg Q < \deg M_f$. Alors

$$0 = M_f(f) = (f - \lambda Id_E) Q(f) .$$

Par minimalité de f, $(f - \lambda Id_E) = 0$ car $Q(f) \neq 0$, ce qui signifie que $(f - \lambda Id_E)$ n'est pas injective et donc λ est une valeur propre de f. □

Lemme 2.7. *Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P, Q \in \mathbb{K}[\mathbb{X}]$ tels que P divise Q. Alors* $\ker(P(f)) \subset \ker(Q(f))$

Théorème 2.8. *Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ les valeurs propres de f qui sont deux à deux distincts. On suppose que le polynôme caractéristique de f est scindé :*

$$P_f(X) = (-1)^r \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}.$$

où $m_i \geq 1$ pour $i \in \{1, 2, ..., r\}$. Alors, son polynôme minimal est :

$$M_f(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{l_i}.$$

pour certains entiers : $1 \leq l_i \leq m_i$, $i = 1, ..., r$.

Démonstration. D'après le théorème de Cayley-Hamilton et la minimalité de M_f, M_f divise P_f. Puisque les polynômes de degré 1 sont irréductibles,

$$M_f(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{l_i},$$

où pour tout $i = 1, \ldots, k$, $0 \leqslant l_i \leqslant m_i$. Montrons que $l_i > 0$ pour tout i.

On a l_i est l'ordre de multiplicité de λ_i dans $M_f(X)$ pour $i = 1, 2, ..., r$ et comme $M_f(\lambda_i) = 0$, il résulte que $l_i \geq 1$. □

Théorème 2.9. *Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ les valeurs propres de f qui sont deux à deux distincts. On suppose que le polynôme caractéristique de f est scindé :*

$$P_f(X) = (-1)^r \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}.$$

où $m_i \geq 1$ pour $i \in \{1, 2, ..., r\}$. L'endomorphisme est diagonalisable si et seulement si $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont racines simples de son polynôme minimal, c'est-à-dire

$$M_f(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i).$$

Démonstration. Supposons que f soit diagonalisable. Soient $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de f. Considérons le polynôme $N(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) ... (X - \lambda_r)$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, il est scindé dans $\mathbb{K}$ et n'a que des racines simples.

Soit v un vecteur propre de f, associé à la valeur propre λ_i. Donc

$$N(f)(v) = (\lambda_i - \lambda_1)(\lambda_i - \lambda_2) \ldots (\lambda_i - \lambda_r)\, v = 0.$$

Si f est diagonalisable, alors il existe une base de E formée des vecteurs propres de f. Si un endomorphisme s'annule sur tous les éléments d'une base, il est identiquement nul. Donc le polynôme N est annulateur de f, donc multiple de M_f. Or par le théorème 2.8, N divise M_f. Donc $N = M_f$.

Réciproquement, supposons que le polynôme minimal de f soit

$$M_f(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \ldots (X - \lambda_r)$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. Notons E_i le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_i pour certain $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$. On doit démontrer que E est en somme directe des sous-espaces propres de f. D'après la proposition 2.3, les sous-espaces E_i $(1 \leq i \leq r)$ sont en somme directe. Nous devons simplement démontrer que tout vecteur de E est une somme de vecteurs propres. la décomposition en éléments simples de la fraction $\frac{1}{M_f(X)}$ donne :

$$\frac{1}{M_f(X)} = \frac{a_1}{X - \lambda_1} + \ldots + \frac{a_r}{X - \lambda_r} \tag{2.6.1}$$

où $a_i \in \mathbb{K}$ pour tout $1 \leq i \leq r$. On multiplie par $M_f(X)$ les deux membres de l'égalité (2.6.1) :

$$1 = \frac{a_1 M_f(X)}{X - \lambda_1} + \ldots + \frac{a_r M_f(X)}{X - \lambda_r}.$$

On définit les polynômes :

$$Q_i(X) = \frac{M_f(X)}{X - \lambda_i} = \prod_{j=1, j \neq i}^{r} (X - \lambda_j).$$

Donc

$$1 = a_1 Q_1 (X) + ... + a_r Q_r (X) .$$

En appliquant f à cette égalité, on obtient

$$Id_E = a_1 Q_1 (f) + ... + a_r Q_r (f) .$$

Donc pour tout vecteur $v \in E$:

$$v = a_1 Q_1 (f) (v) + ... + a_r Q_r (f) (v) . \tag{2.6.2}$$

Il nous reste à montrer que pour tout $i = 1, ..., r$, $Q_i (f) (v) \in E_i$.

Par hypothèse $M_f (X) = (X - \lambda_i) Q_i (X)$. Donc

$$M_f (f) (v) = (f - \lambda_i Id_E) (Q_i (f) (v)) = 0.$$

Par conséquent, l'égalité (2.6.2) implique que

$$v \in E_1 + E_2 + ... + E_r$$

pour tout $v \in E$. Donc

$$E = E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_r.$$

Ceci signifie que f est diagonalisable $\square$

Exemple 2.10. Considérons la matrice A de $\mathscr{M}_4 (\mathbb{R})$ associée au endomorphisme f :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alors, $P_f (X) = X^4$, le sous-espace propre associé à $X = 0$ est $E_0 = Vect (V_1 = (1, 0, 0, 0) , \ V_2 (0, 0, 1, 0))$.

alors $\dim E = 2$. $M (X) = X^2$

Exemple 2.11. (Polynôme minimal d'une matrice diagonale).

Soit

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Alors, $\prod_{\lambda \in Sp(D)} (X - \lambda)$ où $Sp(D) = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ et les valeurs propres sont comptées sans multiplicité. Par exemple, si

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Alors, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = -1$. $P_D(X) = -(1-X)^2(-1-X)$ cependant $M_D(X) = -(1-X)(-1-X)$.

Proposition 2.18. Si deux matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables. Alors, A et B ayant le même polynôme minimal.

Démonstration. Comme A et B sont semblables, alors il existe $S \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = S^{-1}AS$, d'où $A = SBS^{-1}$. On a

$M_A(B) = S^{-1}M_A(A)S = S^{-1}0S = 0$, donc M_A est polynôme annulateur de B, alors $M_B(X)$ divise $M_A(X)$ pour tout $X \in \mathbb{K}$.

$M_B(A) = SM_B(B)S^{-1} = S0S^{-1} = 0$, donc M_B est polynôme annulateur de A, alors $M_A(X)$ divise $M_B(X)$ pour tout $X \in \mathbb{K}$.

On conclut que $M_A(X) = M_B(X)$. $\square$

Théorème 2.10. *Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$.*

Démonstration. Supposons que A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$. Alors, A est semblable à une matrice diagonale D. D'après la proposition 2.18, les deux matrices A et B ont le même polynôme minimal c'est-à-dire $M_A(X) = M_D(X)$ □

Corollaire 2.11. *Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si elle admet un polynôme annulateur scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$. .*

Exemple 2.12. Considérons la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Montrons que 1 et -1 sont des valeurs propres de A :

$$\det(A - I_3) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \det(A + I_3) = 0.$$

Donc, 1 et -1 sont des valeurs propres de A.

Déterminons les dimensions des sous-espaces propres associés à ces valeurs propres :

$$E_{-1} = \left\{V = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ AV = -V\right\}.$$

Alors

$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y - 2z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \\ z = x + y \end{cases} .$$

Donc, $E_{-1} = Vect\left(V_1 = (1,0,1), V_2(0,1,1)\right)$, alors $\dim E_{-1} = 2$. Comme $\dim E_1 \geq 1$, les sous-espaces E_{-1}, E_1 sont en somme directe et $\dim E_{-1} + \dim E_1 \leq \dim \mathbb{R}^3$, on conclut que $\dim E_1 = 1$. Par conséquent, A est diagonalisable, alors le polynôme minimal M_A est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$. Ainsi

$$\forall X \in \mathbb{K},\ M_A(X) = (X+1)(X-1).$$

D'une autre côté, comme A est diagonalisable, il résulte que $m(-1) = 2$ et $m(1) = 1$ et

$$P_A(X) = -(X+1)^2(X-1).$$

Exemple 2.13. Considérons la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de B est

$$P_B(X) = (-1-X)^3.$$

$Sp(B) = \{-1\}$. Si, on suppose que A est diagonalisable, alors son polynôme minimal est scindé à racine simple, c'est-à-dire, l'expression du polynôme minimal est $(X+1)$, mais la matrice $B + I_3 \neq \mathscr{O}_3$. Cela nous conduit à dire que B n'est diagonalisable, alors le polynôme minimal ne peut être que $(X+1)^3$ ou $(X+1)^2$. Comme $(B+I_3)^2 = 0$, alors $M_B(X) = (X+1)^2$.

Proposition 2.19. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f est nilpotent si et seulement si son polynôme minimal $M_f(X) = X^r$ pour tout $X \in \mathbb{K}$.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et M_f son polynôme minimal.

Si f est nilpotent d'indice r, alors pour tout $X \in \mathbb{K}$ $f^{r-1}(X) \neq 0$ et $f^r(X) = 0$, alors le polynôme $P(X) = X^r$ est un polynôme annulateur de f, donc M_f divise P. Ainsi, il existe $r' \in \mathbb{N}$, tel que $M_f(X) = X^{r'}$ avec $r' \leq r$ et par minimalité de l'indice r, on en déduit que $r = r'$.

Si $M_f(X) = X^r$, alors $M_f(f) = f^r = 0$. Par minimalité de M_f, on a $f^{r-1} \neq 0$, il résulte que f est nilpotent d'indice r. □

2.7 Réduction de Jordan

2.7.1 Sous-espace caratéristique

Définition 2.16. (Sous-espace caractéristique) Soient f un endomorphisme de E et P_f son polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{K}$ tel que

$$P_f(x) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{m_1} (X - \lambda_2)^{m_2} ... (X - \lambda_r)^{m_r}$$

où $\lambda_1, ..., \lambda_r$ sont les racines deux à deux distinctes de P_f. Le sous-espace caractéristique de f pour la valeur propre λ_i est

$$N_i = (f - \lambda Id_E)^{m_i}.$$

Lemme 2.12. *(lemme des noyaux)([5]) Soit f un endomorphisme de E. Soient P_1, P_2 deux éléments de $\mathbb{K}[\mathbb{X}]$ premiers entre eux. Alors :*

$$\ker(P_1 P_2(f)) = \ker(P_1(f)) \oplus \ker(P_2(f)).$$

Plus généralement, soient $P_1, ..., P_r$ des éléments de $\mathbb{K}[\mathbb{X}]$ premiers entre eux. Alors

$$\ker(P_1, ..., P_r)(f) = \ker(P_1(f)) \oplus ... \oplus \ker(P_r(f)).$$

Théorème 2.13. *Soit f un endomorphisme de E tel que son polynôme caractéristique P_f est scindé sur $\mathbb{K}$. Notons $P_f(x) = (X-\lambda_1)^{m_1}(X-\lambda_2)^{m_2}\dots(X-\lambda_r)^{m_r}$ et, pour $1 \leq i \leq r$, N_i le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre λ_i. Alors :*

1. Chaque N_i est stable par f.

2. $E = N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_r$

3. $\dim N_i = m_i$.

Démonstration. 1. Soit $x \in N_i = \ker(f-\lambda_i Id_E)^{m_i}$. On a $(f-\lambda_i Id_E)^{m_i}(x) = 0$, donc

$$(f-\lambda_i Id_E)^{m_i} \circ f(x) = f \circ (f-\lambda_i Id_E)^{m_i}(x) = 0,$$

d'où $f(x) \in N_i$.

2. On a dans le polynôme P_f les polynômes $(X-\lambda_i)^{m_i}$ sont premiers entre eux pour tout $i \in \{1,2,\dots,r\}$. Par le lemme des noyaux, on obtient

$$\ker P_f(f) = \ker(f-\lambda_1 Id_E)^{m_1} \oplus \dots \oplus \ker(f-\lambda_1 Id_E)^{m_r}$$

et d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $P_f(f) = 0$, donc $\ker P_f(f) = 0$, par conséquent

$$E = N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_r.$$

3. Notons $g_i = f_{|N_i}$ pour $i \in \{1,2,\dots,r\}$ et posons $n_i = \dim(N_i)$. Pour $i \neq j$, $N_i \cap N_j = \{0\}$. Or $E_{\lambda_i} \subset N_i$, donc la seule valeur propre possible de g_i est λ_i. Le polynôme caractéristique de g_i est scindé et sa seule racine est la seule valeur propre de g_i, c'est-à-dire λ_i. Ainsi, $P_{g_i}(X) = (X-\lambda_i)^{n_i}$. De plus,

$$(X-\lambda_1)^{m_1}\dots(X-\lambda_r)^{m_r} = P_f(X) = P_{g_1}(X)\dots P_{g_r}(X) = (X-\lambda_1)^{n_1}\dots(X-\lambda_r)^{n_r}.$$

D'où, en identifiant les exposants des facteurs irréductibles, $n_i = \dim(N_i) = m_i$, pour $i \in \{1,2,\dots,r\}$. $\square$

Théorème 2.14. *(Réduction de Jordan d'un endomorphisme nilpotent) Soit g un endomorphisme nilpotent. Alors il existe une base $\mathfrak{B}$ de E dans laquelle la matrice de g a la forme*

$$M(g)_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \delta_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \delta_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \forall i \in \{1, 2, ..., n-1\},\ \delta_i \in \{0, 1\}.$$

Démonstration. Soit $r \in \mathbb{N}^*$ l'indice de nilpotence de g. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on note $N_i = \ker(g^i)$.

On divise la preuve en quatre parties :

1) D'après le lemme 2.5, on a

(i) $\{0\} = N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq ... \subsetneq N_{r-1} \subsetneq N_r = E$.

(ii) Pour chaque $i \in \{0, 1, 2, ..., r\}$, $g(E_{i-1}) \subseteq E_i$.

2) Dans cette partie, nous montrerons l'existence des sous-espaces vectoriels $G_1, G_2, ..., G_r, H_1, ..., H_{r-1}$ vérifiant :

(i) Pour tout $i \in \{1, 2, ..., r\}$, $N_i = G_i \oplus H_i$.

(ii) Pour tout $i \in \{1, 2, ..., r-1\}$, g $g : G_{i+1} \longrightarrow N_i$ est injective.

(iii) Pour tout $i \in \{1, 2, ..., r-1\}$, $G_i = g(G_{i+1}) \oplus H_i$.

Soit G_r un supplémentaire de N_{r-1} dans N_r, telle que $N_r = G_r \oplus N_{r-1}$. On a

$$\begin{cases} (\ker(g)) \cap G_r = N_1 \cap G_r \subset N_{r-1} \cap G_r = \{0\} \\ g(G_r) \subset g(N_r) \subset N_{r-1} \end{cases}$$

donc $g : G_r \longrightarrow N_{r-1}$ est injective.

$g(G_r) \cap N_{r-2} = \{0\}$. En effet, soit $v \in g(G_r) \cap N_{r-2}$. Il existe $z \in G_r$ tel que $g(z) = v$, et on a $0 = g^{r-2}(v) = g^{r-1}(z)$, donc $z \in N_{r-1} \cap G_r = \{0\}$, par suite $y = 0$, d'où $v = g(z) = 0$.

On a donc $g(G_r) \oplus N_{r-2} \subset N_{r-1}$. Il existe donc un sous-espace vectoriel H_{r-1} de N_{r-1} tel que $g(G_r) \oplus N_{r-2} \oplus H_{r-1} = N_{r-1}$. Si on pose $G_{r-1} = g(G_r) \oplus H_{r-1}$, on a donc $N_{r-1} = G_{r-1} \oplus F_{r-2}$, et $g : G_r \longrightarrow N_{r-1}$ est injective.

Par conséquent, (i), (ii) et (iii) sont démontrés pour $i = r$. Maintenant, nous allons démontrer pour $i \in \{1, 2, ..., r-2\}$, par une récurrence descendante. Supposons que le résultat est vraie pour $i + 1 \in \{2, ..., r-2\}$ et prouvons le pour i.

On a

$$\begin{cases} (\ker(g)) \cap G_{i+1} = N_1 \cap G_{i+1} \subset N_i \cap G_{i+1} = \{0\} \\ g(G_{i+1}) \subset g(N_{i+1}) \subset N_i \end{cases}$$

donc $g : G_{i+1} \longrightarrow N_i$ est injective.

$g(G_{i+1}) \cap N_{i-1} = \{0\}$. En effet, soit $v \in g(G_{i+1}) \cap N_{i-1}$. Il existe $z \in G_{i+1}$ tel que $v = g(z)$. Or $v \in N_{i-1}$ donc $0 = g^{i-1}(v) = g^i(z)$, donc $z \in N_i \cap G_{i+1} = \{0\}$, cela signifie que $z = 0$, d'où $v = g(z) = 0$.

Alors, $g(G_{i+1}) \cap N_{i-1} \subset N_i$, donc il existe un sous-espace vectoriel H_i tel que $g(G_{i+1}) \oplus N_{i-1} \oplus H_i = N_i$. On pose $G_i = g(G_{i+1}) \oplus H_i$, de sorte que $N_i = G_i \oplus N_{i-1}$ et $g : G_{i+1} \longrightarrow G_i$ est injective.

Les sous-espaces vectoriels $G_r, ..., G_1$ et $H_{r-1}, ..., H_1$ sont ainsi construits de proche en proche.

Les propriétés (i) et (iii) pour indice $i = 1$ sont

$$\begin{cases} \ker(g) = N_1 = G_1 \oplus N_0 = G_1 \oplus \{0\} = G_1, \\ G_1 = g(G_2) \oplus H_1. \end{cases}$$

Alors, la suite $G_1, ..., G_r$ vérifie

$$\begin{cases} E = G_r \oplus G_{r-1} \oplus ... \oplus G_1, \\ G_1 = N_1 = \ker(g), \\ \textit{Pout tout } i \in \{2, ..., r\}, \ g : G_i \longrightarrow G_{i-1} \textit{ est injective.} \end{cases}$$

Soit $\mathfrak{B}_i = (e_{i,1}, ..., e_{i,m_i})$ une base de G_i. Comme $g : G_i \longrightarrow G_{i-1}$ est injective et d'après la propriété 1.4, $(g(e_{i,1}), ..., g(e_{i,m_i}))$ est une partie libre de G_{i-1}, donc on peut la compléter en une base de G_{i-1} qu'on note $\mathfrak{B}_{i-1} = \left(e_{i-1,1}, ..., e_{i-1,m_{i-1}}\right)$, alors on a

$$\forall j \in \{1, 2, ..., m_i\} : \ e_{i-1,j} = g(e_i, j).$$

$\mathfrak{B}_{i-1} = \left(e_{i-1,1}, ..., e_{i-1,m_{i-1}}\right)$ une base de G_{i-1}. Comme $g : G_{i-1} \longrightarrow G_{i-2}$ est injective, alors $\left(g(e_{i-1,1}), ..., g\left(e_{i-1,m_{i-1}}\right)\right)$ est une partie libre de G_{i-12}, donc on peut la compléter en une base de G_{i-2} qu'on note $\mathfrak{B}_{i-2} = \left(e_{i-2,1}, ..., e_{i-1,m_{i-2}}\right)$, alors on a

$$\forall j \in \{1, 2, ..., m_{i-1}\} : \ e_{i-2,j} = g(e_{i-1}, j).$$

Ainsi par induction, pour tout $i \in \{2, ..., r\}$, à partir d'une base $\mathfrak{B}_i = (e_{i,1}, ..., e_{i,m_i})$ de G_i on obtient une base $\mathfrak{B}_{i-1} = \left(e_{i-1,1}, ..., e_{i-1,m_{i-1}}\right)$ de G_{i-1}, telle que

$$\forall j \in \{1, 2, ..., m_i\}, \ e_{i-1,j} = g(e_{i,j}).$$

On a $E = G_1 \oplus G_2 \oplus ... \oplus G_r$, alors $\mathfrak{B} = \cup_{i=1}^{r} \mathfrak{B}_i$ forme une base de E. Écrivons les éléments de $\mathfrak{B}$ dans le tableau suivant :

G_r	$e_{r,1}$	$\cdots$	$e_{r;m_r}$					
G_{r-1}	$e_{r-1,1}$	$\cdots$	$e_{r-1;m_r}$	$\cdots$	$e_{r-1;m_{r-1}}$			
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
G_1	$e_{1,1}$	$\cdots$	e_{1,m_r}	$\cdots$	$e_{1,m_{r-1}}$	$\cdots$	$\cdots$	e_{1,m_1}

4) En utilisant le tableau précédent, pour chaque $k^{ième}$ colonne de bas en haut, nous obtenons un nouvel ordre $\left(l_{k,1},...,l_{k,n_j}\right)$ des vecteurs de cette base et on aura

$$\begin{cases} g\left(l_{k,1}\right)=0, \\ g\left(l_{k,d}\right)=l_{k,d-1},\ pour\ d\in\{2,...,n_j\}. \end{cases}$$

Par conséquent, La base $\mathfrak{B}\left(l_{k,1},...,l_{k,n_j}\right)$ convient pour le théorème. □

Théorème 2.15. *(Réduction de Jordan d'un endomorphisme). Soit f un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique P_f est scindé sur $\mathbb{K}$. On suppose que $P_f(X)=(-1)^n(X-\lambda_1)^{m_1}...(X-\lambda_r)^{m_r}$, où $\lambda_1,...,\lambda_r$ sont les racines deux à deux distinctes de P_f. Alors il existe une base $\mathfrak{B}$ de E, appelée base de Jordan de f, dans laquelle la matrice J de f, s'écrit sous la forme suivante :*

$$J=M(f)_{\mathfrak{B}}=\begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & J_r \end{pmatrix}$$

où pour tout $i\in\{1,2,...,r\}$, on a

$$J_i=\begin{pmatrix} \lambda_i & v_{i,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & v_{i,m_{i-1}} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{m_i}(\mathbb{K})$$

avec pour tout (i,j), $v_{i,j}\in\{0,1\}$

Démonstration. Pour tout i, on note $N_i=\ker(f-\lambda_i Id)^{r_i}$ les sous-espaces caractéristiques de f. On a $E=N_1\oplus N_2\oplus...\oplus N_r$ et les N_i sont stables par f. Pour tout i, on pose $f_i = f_{|N_i}$. On a $f \in \mathcal{L}(N_i)$ et $(f_i - \lambda_i Id)^{r_i} = 0$, donc $n_i = f_i - \lambda_i Id$ est nilpotent. D'après le théorème précédent, il existe donc une base $\mathfrak{B}_i$ de N_i telle que

$$M(n_i)_{B_i} = \begin{pmatrix} 0 & v_{i,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & v_{i,r_{i-1}} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$M(f_i)_{\mathfrak{B}_i} = M(\lambda_i Id_{N_i} + n_i)_{\mathfrak{B}_i} \begin{pmatrix} \lambda_i & v_{i,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & v_{i,r_{i-1}} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}$$

avec pour tout j, $1 \leq j \leq r_{i-1}$, $v \in \{0, 1\}$. Comme $E = N_1 \oplus N_2 \oplus ... \oplus N_r$, on voit que $\mathfrak{B} = (\mathfrak{B}_1, ..., \mathfrak{B}_r)$ est une base de E et que

$$M(f)_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} M(f_1)_{\mathfrak{B}_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & M(f_r)_{\mathfrak{B}_r} \end{pmatrix}$$

d'où le résultat en posant, pour tout i, $J_i = M(f_i)_{\mathfrak{B}_i}$. $\square$

Remarque 2.7. Il se peut que

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

la matrice J_i est appelé bloc de Jordan. Si J_i est d'ordre 1, on écrit $J_i = (\lambda_i)$.

Corollaire 2.16. *Pour toute matrice carrée A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice de Jordan J et il existe une matrice inversible P , telles que $A = PJP^{-1}$.*

2.7.2 Technique de jordanisation d'un endomorphisme

Pour trouver la réduite de Jordan d'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ (où d'une matrice $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$), ainsi q'une matrice de passage, on peut suivre les étapes suivantes :

• Calculer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de A.

• Pour chaque $\lambda \in Sp(A)$, calculer le sous-espace propre $E_\lambda = (A - \lambda I_n)$ et trouver une base de E_λ. Le nombre de blocs de Jordan associés à λ est $\dim E_\lambda$ et qu'il y a au moins un bloc de Jordan son ordre est égal à l'ordre de multiplicité l_i de λ dans le polynôme minimal et chaque autre bloc à d'ordre inférieur ou égal l'ordre de multiplicité l_i.

• Pour chaque vecteur propre de la base de E_λ, on construit le bloc de Jordan associé :

— Si $v_1 \in E_\lambda$ est un vecteur propre de la base de E_λ, alors on cherche $v_2 \in \mathbb{K}^n$ tel que $(A - \lambda I_n) v_2 = v_1$.

— Puis on cherche s'il existe $v_3 \in \mathbb{K}^n$ tel que $(A - \lambda I_n) v_3 = v_1$.

— On arrête le processus lorsqu'il n'y pas de solution.

— On a $Av_1 = \lambda v_1$, $Av_2 = v_1 + \lambda v_2$, ..., $Av_p = v_{p-1}$.

— Donc, dans le sous-espace engendré par $(v_1,\ v_2,...,v_p)$, la matrice associée à A, dans cette base, est exactement le bloc de Jordan :

$$J_1 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} Av_1 & Av_2 & ... & & Av_p \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_p \end{array} & \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \end{array}.$$

— On peut aussi savoir quand s'arrêter en utilisant le fait que le bloc de Jordan est toujours d'une taille p inférieure ou égale à l'ordre de multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique (et même du polynôme minimal).

• On recommence avec v_1', un autre vecteur de la base de E_λ : on construit $v_2', v_3', ...$ ce qui conduit à un autre bloc de Jordan pour la valeur λ. On procède ainsi de suite pour tous les vecteurs de la base de E_λ et ensuite bien sûr pour les autres valeurs propres.

Exemples 2.1. I. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à la matrice A dans la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminons sa réduite de Jordan J et une matrice de passage telle que $J = P^{-1}AP$.

1) Tout d'abord, on calcule le polynôme caractéristique de f :

$$P_f(\lambda) = P_A(\lambda)$$

$$= \det(A - \lambda I_3)$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\,(\lambda-1)^2 .$$

Donc $Sp\,(f) = \{0, 1\}$.

2) Déterminons les sous-espaces propres :

Pour $\lambda = 0$, $E_0 = \ker(A) = \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; Av = 0\}$, alors le sous-espace propre E_0 est engendré par le vecteur $v_1 = (1, -1, -1)$. Comme $\dim E_0 = 1$ et l'ordre de multiplicité de $\lambda = 0$ est 1, alors, on a un bloc de Jordan d'ordre 1 associé à la valeur propre 0.

Pour $\lambda = 1$, $E_1 = \ker(A - I_3) = \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; Av = v\}$, alors le sous-espace propre E_1 est engendré par le vecteur $v_2 = (-1, 0, 1)$. Comme $\dim E_0 = 1$ et l'ordre de multiplicité de $\lambda = 1$ est 2, alors, on a un bloc de Jordan d'ordre 2 associé à la valeur propre 2.

3) On cherche un vecteur v_3 tel que $(A - I_3)\,v_3 = v_2$. Si $v_3 = (x, y, z)$, alors

$$(A - I_3)\,v_3 = v_2 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ -x - y - z = 0 \\ -y = 1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -1 \\ z = -x + 1 \end{cases} .$$

En prenant par exemple $x = 0$, on aura $v_3\,(0, -1, 1)$.

4) On détermine la matrice de Jordan :

Dans la base, (v_1, v_2, v_3), on a $Av_1 = 0v_1$, $Av_2 = v_2$ et comme $(A - I_3)\, v_3 = v_2$, alors $Av_3 = v_2 + v_3$.

La matrice associée à A dans la base (v_1, v_2, v_3) est donc :

$$J = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Av_1 & Av_2 & Av_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

où $J = P^{-1}AP$ et P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base (v_1, v_2, v_3) telle que

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{et on a} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & -1 & -11 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

II) Considérons g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ et A sa matrice par rapport à la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Le polynôme caractéristique de A est :

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^4.$$

La matrice A possède une seule valeur propre $\lambda_1 = 1$ d'ordre de multiplicité 4.

On calcule les vecteurs propres associés à λ_1. Alors

$\ker(A - I_4) = E_1 = \{V = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \ AV = V\}$.

$$\begin{cases} -x + y + z + t = 0 \\ -x + y + 2t = 0 \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} X = y + 2t \\ Y \in \mathbb{R} \\ Z = T \\ T \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Alors, $E_1 = \{(y + 2t, y, T, T), \ y, t\} = \{y(1, 1, 0, 0) + t(2, 0, 1, 1)\}$. Le sous-espace propre E_1 est engendré par les deux vecteurs libres $v_1 = (1, 1, 0, 0)^t$, $v_2 = (2, 0, 1, 1)^t$. Comme $\dim E_1 = 2 < \dim \mathbb{R}^4$, A n'est diagonalisable. Ainsi $\dim E_1 = 2$ et comme l'ordre de multiplicité de la valeur propre $\lambda = 1$ dans $P_A(\lambda)$ est 4. Il y'a donc deux blocs de Jordan à la valeur propre 1, il reste à déterminer l'ordre de chaque bloc.

2) Déterminons la matrice de Jordan :

On cherche un vecteur $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $(A - I_3) = v_2$. Pour $v = (x, y, z, t)$, alors

$$(A - I_4) v = v_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} -x + y + z + t = 2 \\ -x + y + 2t = 0 \\ 0 = 1 \\ 0 = 1 \end{cases}.$$

Le système $(A - I_4) v = v_2$ n'a aucune solution, alors le processus pour le vecteur v_2 s'arrête là. On passe au vecteur propre v_1 et on cherche un vecteur $v_3 \in \mathbb{R}^4$ tel que

$(A - I_4)\, v_3 = v_1$. Pour $v_3\,(x, y, z, t)$, on a

$$(A - I_4)\, v_3 = v_2 \iff \begin{cases} -x + y + z + t = 1 \\ -x + y + 2t = 1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 1 + x - 2t \\ z = t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

En prenant par exemple $x = 0$ et $t = 0$, on choisit $v_3 = (0, 1, 0, 0)$. On obtient un bloc de Jordan d'ordre 1.

On continue le processus avec v_3, on cherche un vecteur $v_4 \in \mathbb{R}^4$ tel que $(A - I_4)\, v_4 = v_3$. Pour $v_4 = (x, y, z, t)$, on a

$$(A - I_4)\, v_4 = v_3 \iff \begin{cases} -x + y + z + t = 0 \\ -x + y + 2t = 1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 1 + x - 2t \\ z = t - 1 \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

En prenant par exemple $x = 0$ et $t = 0$, on choisit $v_4 = (0, 1, -1, 0)$. Donc, on a un bloc d'ordre 3.

On a $Av_1 = v_1$, $Av_3 = v_1 + v_3$, $Av_4 = v_3 + v_4$, $Av_2 = v_2$.

La matrice de g dans la base (v_1, v_3, v_4, v_2) est

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tel que $J = P^{-1}AP$, où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Chapitre 3

Applications de la réduction

3.1 Puissances d'une matrice carrée

Propriété 3.1. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

Démonstration. On démontre par récurrence □

Propriété 3.2. Si $A, D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $P \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{K})$ et D est diagonale, alors

$$\forall k \in \mathbb{N} : \ A^k = PD^kP^{-1}.$$

Démonstration. On établit par récurrence la propriété pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Initialisation : La propriété est vraie pour car $A^0 = PD^0P^{-1} = I_n$.

Hérédité : Soit $k \geq 0$. On suppose que $A^k = PD^kP^{-1}$, alors

$$A^{k+1} = A.A^k = \left(PDP^{-1}\right).\left(PD^kP^{-1}\right) = P.D^{k+1}P^{-1}.$$

L'hérédité est établie.

La propriété est ainsi établie pour tout entier $k \geq 0$. $\square$

Exemple 3.1. Considérons la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & -8 \\ 9 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

La matrice A possède trois valeurs propres distinctes 8, -1 et 0. Les sous-espaces propres associés sont $E_8 = Vect\,(v_1\,(0,-1,1))$, $E_{-1} = Vect\,(v_2 = (-1,16,1))$ et $E_0 = Vect\,(v_3 = (0,1,0))$. Si P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base (v_1, v_2, v_3), alors

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 16 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 17 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors $A = PDP^{-1}$ telle que $D = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} (-1)^{n+2} + 17\;0 & 0 & 0 \\ -16(-1)^n + 17\; - 8^n & 0 & -8^n \\ (-1)^{n+1} + 17\;8^n & 0 & 8^n \end{pmatrix}.$$

Proposition 3.1. (Formule du binôme de Newton) Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent c'est-à-dire tels que $AB = BA$. Alors, pour tout entier naturel p, supérieur ou égal à 0, on a la formule

$$\forall p \in \mathbb{N},\ (A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^{p-k} B^k$$

où $C_p^k = \begin{pmatrix} p \\ \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{p!}{k!(p-k)!}$ et $k < p$.

Démonstration. On procède par récurrence pour la première égalité. Soit $\mathcal{H}(p)$ la proposition

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}.$$

Au rang $p = 0$, les deux membres de l'égalité sont égaux à la même matrice : I_n.

Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons que la proposition $\mathcal{H}(p)$ soit vraie. Alors :

$$\begin{array}{rcl}
(A+B)^{p+1} & = & (A+B)^p(A+B) \\
 & \overset{\mathcal{H}(p)}{=} & \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}\right)(A+B) \\
 & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k} A + \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k} B \\
 & \overset{AB=BA}{=} & \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^{k+1} B^{p-k} + \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p+1-k} \\
 & \overset{k'=k+1}{=} & \displaystyle\sum_{k'=1}^{p+1} \binom{p}{k'-1} A^k B^{p+1-k} + \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p+1-k} \\
 & = & \displaystyle\binom{p}{p} A^{p+1} B^0 + \sum_{k=1}^{p} \left[\binom{p}{k-1} + \binom{p}{k}\right] A^k B^{p+1-k} + \binom{p}{0} A^0 B^{p+1} \\
 & = & \displaystyle\binom{p+1}{p+1} A^{p+1} B^0 + \sum_{k=1}^{p} \binom{p+1}{k} A^k B^{p+1-k} + \binom{p+1}{0} A^0 B^{p+1} \\
 & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} A^k B^{p+1-k}
\end{array}$$

donc la proposition $\mathcal{H}(p+1)$ soit vraie. On conclut par le théorème de récurrence.

La seconde égalité s'obtient par changement de variable ($k' = p - k$) et avec la relation de symétrie des coefficients binomiaux :

$$\binom{p}{k} = \binom{p}{p-k}.$$

□

Théorème 3.1. *(décomposition de Dunford) Soit f un endomorphisme de E tel que son polynôme soit scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe un unique couple (n,d) de $\mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$ tel que :*

i) n est nilpotent et d est diagonalisable,

ii) $f = n + d$,

iii) $n \circ d = d \circ n$.

Remarque 3.1. d et n sont des polynômes en f. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ cette décomposition existe toujours.

Le théorème précédent peut encore s'écrire :

Théorème 3.2. *Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ayant un polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{K}$, il existe une unique matrice N nilpotente et une unique matrice D diagonalisable telles que*

$$A = N + D \text{ et } ND = DN.$$

3.2 Calcul de l'exponentielle d'une matrice

On considère l'application N de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{R}^+$ qui associe à chaque matrice A le réel positif $N(A)$ qu'on note parfois $\|A\|$. Cette application est dite norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, on peut considérer

$$\|A\| = \sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|.$$

Alors Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et pour tout $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

Remarque 3.2. On rappelle qu'une suite $(A_n)_{n\geq 0} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite de Cauchy, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N_\epsilon \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N},\ (n \geq N_\epsilon\ et\ m \geq N_\epsilon) \Longrightarrow \|A_n - A_m\| \leq \epsilon.$$

3.2.1 Exponentielle d'une matrice

La fonction exponentielle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et avec l'utilisation de la formule de Maclaurin, on peut montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

De même, $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Proposition 3.2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$ est convergente.

Démonstration. Soient $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$ et $p > q$, alors

$$\|U_p - U_q\| = \left\| \sum_{k=q+1}^{p} \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=q+1}^{p} \frac{\|A\|^k}{k!}.$$

Or la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!}$ est convergente, donc $\sum_{k=q+1}^{p} \frac{\|A\|^k}{k!}$ tend vers 0, lorsque p et q tendent vers $+\infty$, par conséquent $\|U_p - U_q\| \longrightarrow 0$ quand $p, q \longrightarrow +\infty$, alors $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. D'où, le résultat.

□

Définition 3.1. Soit la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. L'exponentielle de A est définie par

$$e^A = \exp(A) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Exemples 3.1. 1) Si la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonale avec

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

alors

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

2) Si A est une matrice nilpotente d'indice r, alors on a

$$e^A = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{A^k}{k!}.$$

Définition 3.2. (Produit de Cauchy) Etant donnée deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$, on définit leur série produit comme la série de terme général

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

Théorème 3.3. *[3] Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques convergentes, de somme S et T respectivement. Supposons que l'une au moins de ces deux séries soit absolument convergente. Alors la série produit est convergente et a pour somme le nombre ST. Si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, la série produit aussi est absolument convergente.*

Proposition 3.3. Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, telles que $AB = BA$, alors on a

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B).$$

Démonstration. Soient A et B deux matrices $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. D'après le théorème 3.3, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A+B)^n}{n!}$ converge et que $\exp(A+B) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A+B)^n}{n!}$, puis on a

$$\begin{aligned}
\exp(A+B) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{p!\,(n-p)!} A^p B^{n-p} \right) \qquad (\textit{loi du binome}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^{n} \frac{A^p}{p!} \frac{B^{n-p}}{(n-p)!} \right) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!} \right) \qquad (\textit{produit de Cauchy}) \\
&= \exp(A)\exp(B).
\end{aligned}$$

□

Le résultat suivant est une conséquence de la proposition 3.3.

Lemme 3.4. *Soit* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. *Alors* $\exp(A)$ *est inversible d'inverse* $\exp(-A)$

Proposition 3.4. Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et P une matrice de $\mathbb{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = P^{-1}BP$. Alors,

$$\exp(A) = P^{-1}\exp(B)P.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\exp(A) &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(P^{-1}BP)^k}{k!} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{-1}B^kP}{k!} \\
&= P^{-1} \left(\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{B^k}{k!} \right) P \\
&= P^{-1}.\exp(B)\,P.
\end{aligned}$$

□

Proposition 3.5. Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ayant un polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{K}$. Si on pose $\mathbb{K}[A] = \{P(A) : P \in \mathbb{K}[X]\}$, alors $\mathbb{K}[A]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, avec $\dim(\mathbb{K}[A]) = m$, où m est le degré du polynôme minimal de A.

Démonstration. On peut vérifier facilement que $\mathbb{K}[A]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit M_A le polynôme caractéristique de A et soit $B \in \mathbb{K}[A]$, alors il existe $P \in \mathbb{K}[\mathbb{X}]$ tel que $B = P(A)$.

Par l'utilisation de la division euclidienne de P par M_A, on a $P = QM_A + R$, avec $\deg(R) < \deg(M_A)$.

Soit $m = \deg(M_A)$, alors $R = \alpha_0 + \alpha_1 X + ... + \alpha_{m-1}X^{m-1}$, donc $B = \alpha_0 I + \alpha_1 A + ... + \alpha_{m-1}A^{m-1}$, avec $\alpha, \alpha_1, ..., \alpha_{m-1} \in \mathbb{K}$. On en déduit donc que $\{I, A, ..., A^{m-1}\}$ est une partie génératrice de $\mathbb{K}[A]$, de plus si on suppose que $\alpha_0 I + \alpha_1 A + ... + \alpha_{m-1}A^{m-1} = 0$, alors $R(A) = 0$, par suite M_A divise R, avec $\deg(R) < \deg(M_A)$, donc $R = 0$ et par conséquent, $\alpha_0 = \alpha_1 = ... = \alpha_{m-1} = 0$. D'où $(I, A, ..., A^{m-1})$ est une base de $\mathbb{K}[A]$, donc $\dim(\mathbb{K}[A]) = m$. □

Corollaire 3.1. Pour toute matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, l'exponentielle d'une matrice A est un polynôme de A.

Démonstration. Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $k \in \mathbb{N}$ par $A_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{A^n}{n!}$.

On a $\exp(A) = \lim_{k\longrightarrow\infty} A_k$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $A_k \in \mathbb{C}[A]$, avec $\mathbb{C}[A]$ fermé, car $\mathbb{C}[A]$ est un sous-espace de dimension finie, alors $\exp(A) \in \mathbb{C}[A]$, donc il existe $P \in \mathbb{C}[X]$, tel que $\exp(A) = P(A)$

□

Remarques 3.1. Soientt $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $P_A(X) = (X-\lambda_1)^{m_1}(X-\lambda_2)^{m_2}\dots(X-\lambda_r)^{m_r}$, où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ sont deux à deux distincts. Pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, on pose $P_i = \prod_{j=1,\, j\neq i}^{n} (X-\lambda_j)^{m_i}$, alors $P_1, P_2, \dots, P_r$ sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Bezout, il existe $Q_1, Q_2, \dots, Q_r \in \mathbb{C}[X]$, tels que $Q_1P_1 + P_2Q_2 + \dots + P_rQ_r = 1$.

1) pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, on a

$$(A-\lambda_i I_n)^{m_i} P_i(A)\, Q_i(A) = Q_i(A)\, P_A(A) = 0.$$

Donc pour tout $k \geq m_i$, on a $(A-\lambda_i I_n)\, Q_i(A)\, P_i(A) = 0$, par suite, on aura

$$\exp(A-\lambda_i I_n)\, Q_i(A)\, P_i(A) = \left(\sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{(A-\lambda_i I_n)^k}{k!}\right) Q_i(A)\, P_i(A).$$

On en déduit donc que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, on a

$$\begin{aligned}\exp(A)\, Q_i(A)\, P_i(A) &= \exp(\lambda_i I_n + (A-\lambda_i I_n))\, Q_i(A)\, P_i(A) \\ &= e^{\lambda_i} \exp(A-\lambda_i I_n)\, Q_i(A)\, P_i(A) \\ &= e^{\lambda_i} \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{(A-\lambda_i I_n)^k}{k!} Q_i(A)\, P_i(A).\end{aligned}$$

Or, on a $Q_1(A)\, P_1(A) + \dots + Q_r(A)\, P_r(A) = I_n$, donc on a

$$\exp(A) = \exp(A)\, Q_1(A)\, P_1(A) + \dots + \exp(A)\, Q_r(A)\, P_r(A)$$

par conséquent, on a

$$\exp(A) = \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i} \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{(A-\lambda_i I_n)^k}{k!} Q_i(A)\, P_i(A).$$

2) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, En substituant la matrice tA à la place de A, alors tA a pour valeurs propres $t\lambda_1, t\lambda_2, \dots, t\lambda_r$, donc donc on aura

$$\exp(tA) = \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i t} \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{t^k (A-\lambda_i I_n)^k}{k!} Q_i(tA)\, P_i(tA).$$

3) Si A possède une seule valeur propre λ, on a $P_A(X) = (X-\lambda)^n$ et d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $(A-\lambda I_n)^n = 0$, ainsi $A - \lambda I_n$ est une matrice nilpotente. Soit r l'indice de nilpotence de $A - \lambda I_n$, alors en remarquant que $A = \lambda I_n + (A - \lambda I_n)$, on aura

$$\exp(A) = \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(A-\lambda I_n)}{k!}$$

donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\exp(tA) = \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{t^k (A-\lambda I_n)^k}{k!}$$

3.3 Système différentiel du premier ordre

Définition 3.3. Un système différentiel homogène à coefficients constants est un système d'équations différentielles s'écrivant sous la forme suivante :

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + ... + a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + ... + a_{2n}x_n(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + ... + a_{nn}x_n(t) \end{cases} \quad (S_H)$$

où pour chaque $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $x_i : J \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction inconnue de classe C^1 et où $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque 3.3. On pose

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix},$$

alors $X : J \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ est une fonction inconnue de classe C^1 et le système (S_H) s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t)$$

où $\frac{dX(t)}{dt} = X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}$.

Théorème 3.5. *La solution générale du système (S_H) est sous la forme $X(t) = \exp(tA)X_0$ où $X_0 \in \mathbb{K}^n$.*

Démonstration. La fonction $X(t) = \exp(tA)X_0$ est solution du système (S_H).

En effet, $X'(t) = A\exp(tA)X_0 = AX(t)$.

Réciproquement, on la fonction Y définie par $Y(t) = \exp(-tA)X(A)$ est dérivable et $Y'(t) = -A\exp(-tA)X(t) + \exp(-tA)X'(t) = -A\exp(-tA)X(t) + A\exp(-tA)X(t) = 0$, donc Y est constante, alors $Y(0) = X(0)$, et si on note $X(0) = X_0$, on obtient $X(t) = \exp(tA)X_0$. □

Corollaire 3.2. Soient X_0 un vecteur de $\mathbb{K}^n$ et $t_0 \in \mathbb{R}$, la fonction $X(t) = \exp(t - t_0)X_0$ est l'unique solution de (S_H) qui vérifie $X(t_0) = X_0$.

Démonstration. La preuve de ce résultat découle du théorème 3.5. □

Théorème 3.6. *(Cas diagonisable) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. On note $(V_1, ..., V_n)$ une base de vecteurs propres et $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ les valeurs propres correspondantes. Alors les fonctions $X_i(t) = e^{\lambda_i t}V_i$ forment une base de l'espace des solutions du système (S_H).*

Démonstration. En vertu du théorème 3.5, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ les fonctions $X_i(t) = e^{\lambda_i t} V_i$ sont des solutions du système différentiel.

Soient $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha_1 X_1(t) + ... + \alpha_n X_n(t) = 0 \text{ } pour \text{ } t \in \mathbb{R}.$$

Si $t = 0$, cette égalité reste vraie et comme $X_i(0) = V_i$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$, alors

$$\alpha_1 V_1 + ... + \alpha_n V_n = 0.$$

Comme $(V_1, ..., V_n)$ est un système libre, on obtient

$$\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0.$$

D'où $(X_1(t), ..., X_n(t))$ est une base de l'espace des solutions.

Soit P la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $V_1, ..., V_n$. Alors la matrice $P^{-1}AP = D$ est diagonale.

• Soit $X(t)$ une solution du système différentiel (S_H). La matrice de passage P étant inversible, on note $Y = P^{-1}X$ (donc $X = PY$). Alors

$$Y' = P^{-1}X' = P^{-1}AX = P^{-1}APY = DY.$$

Ainsi Y est la solution d'un système différentiel diagonal :

$$\begin{cases} y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) \\ y_2'(t) = \qquad \lambda_2 y_2(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = \qquad\qquad \lambda_n y_n(t) \end{cases}$$

avec $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n() \end{pmatrix}$ et $Y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ \vdots \\ y_n^t(t) \end{pmatrix}$.

D'où $Y(t) = \begin{pmatrix} k_1 e^{\lambda_1 t} \\ k_2 e^{\lambda_{é} t} \\ \vdots \\ k_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$.

Comme les colonnes de P sont les vecteurs $V_1, ..., V_n$, alors

$$X(t) = PY(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + ... + k_n e^{\lambda_n t} V_n.$$

Par conséquent, n'importe quelle solution $X(t)$ est combinaison linéaire des $X_i(t)$. Ainsi la famille $(X_1, ..., X_n)$ est génératrice de l'espace des solutions.

D'où $(X_1, ..., X_n)$ est une base de solutions. □

Exemple 3.2. On veut résoudre le système différentiel $X'(t) = AX(t)$ avec $X_0 = X(0)$ où

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Les propres de A sont $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ et $\lambda_3 = 5$. Les vecteurs propres associés sont

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage de la base canonique du $\mathbb{R}^3$ à la base (V_1, V_2, V_3) est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $A = P^{-1}DP$ telle que

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

On pose $X = PY$, alors $Y = P^{-1}X$ et $Y' = DY$, ainsi la solution du système

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) \\ y_2'(t) = -2y_2(t) \\ y_3'(t) = 5y_3(t) \end{cases}$$

d'où

$$Y(t) = \begin{pmatrix} k_1 e^{t} \\ k_2 e^{-2t} \\ k_3 e^{5t} \end{pmatrix}, \; k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}.$$

Alors, nous obtenons les solutions $X_1(t) = e^t V_1 = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix}$, $X_2(t) = e^{-2t} V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$,

$X_3(t) = e^{5t} V_3 = \begin{pmatrix} e^{5t} \\ e^{5t} \\ 0 \end{pmatrix}$ d'où les solutions du système $X'(t) = AX(t)$ sont donc les fonctions de la forme

$$X(t) = PY(t) = k_1 X_1(t) + k_2 X_2(t) + k_3 X_3(t).$$

On cherche la solution qui vérifie $X(0) = X_0$.

$$X(0) = k_1 X_1(0) + k_2 X_2(0) + k_3 X_3(0) = \begin{pmatrix} k_1 + k_3 \\ k_1 + k_2 + k_3 \\ k_1 + k_2 \end{pmatrix}.$$

On a

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

alors

$$\begin{cases} k_1 + k_3 = 1 \\ k_1 + k_2 + k_3 = 2 \\ k_1 + k_2 = 3 \end{cases}.$$

On obtient $k_1 = 2$, $k_2 = 1$, $k_3 = -1$. Ainsi l'unique solution qui vérifie le système et $X(0) = X_0$ est

$$X(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{5t} \\ 2e^t + e^{-2t} - e^{5t} \\ 2e^t + e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Chapitre 4

Exercices

Exercice 4.1. Trouver les couples (x, y) dans $\mathbb{C}^2$ tels que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

admette le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ pour vecteur propre.

Solution 4.1. On détermine trois réels x, y et la valeur propre associée λ tels que

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+5 \\ 2y+4 \\ 6 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On en déduit

$$\begin{cases} x+5=\lambda \\ 2y+4=2\lambda \\ 3\lambda=6 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} x=-3 \\ y=0 \\ \lambda=2 \end{cases}.$$

Exercice 4.2. Soit φ l'endomorphisme qui a pour matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^4$,

$$A=\begin{pmatrix} \mathbf{O}_2 & -I_2 \\ I_2 & \mathbf{O}_2 \end{pmatrix}$$

En appliquant la définition, montrer que i et $-i$ sont des valeurs propres de φ et déterminer les vecteurs propres associés.

En déduire tous les sous-espaces propres de A. ($\mathbf{O}_2$ et $\mathbf{I}_2$ sont respectivement la matrice nulle et la mtrice identité de $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$).

Solution 4.2. On cherche le vecteur $V=(x,y,z,t)^t$ tel que $AV=iV$. Alors

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=i\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

puis

$$\begin{cases} z = -ix \\ t = -iy \\ x = iz \\ y = it \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} x = iz \\ y = it \end{cases}$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre i est $E_i = \{(iz, it, z, t)\,,\ z, t \in \mathbb{C}\} = \{z\,(i, 0, 1, 0) + t\,(0, i, 0, 1)\,,\ z, t \in \mathbb{C}\}$, alors E_i est engendré par les deux vecteurs propres $V_1 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. et $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Avec, la résolution du système $AV = -iV$, on obtient que le sous-espace propre E_{-i} associé à la valeur propre $-i$ engendré par les deux vecteurs propres $V_3 = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. et $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4.3. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice invesible.

1. Si λ est une valeur propre de A, alors $\lambda \neq 0$.

2. Si $0 \notin Sp(A)$, exprimer le polynôme caractéristique de A^{-1} (inverse de A) en fonction de celui de A.

Solution 4.3. 1) Voir la propriété 2.1.

2) On rappelle que $\det(A^{-1}A) = 1 = \det(A^{-1})\det(A)$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de A^{-1}, alors

$$
\begin{aligned}
P_{A^{-1}}(\lambda) &= \det\left(A^{-1} - \lambda I_n\right) = \det\left(A^{-1} - \lambda A^{-1}A\right) \\
&= \det\left(\lambda A^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}I_n - A\right)\right) \\
&= \det\left(\lambda A^{-1}\right)\det\left(\frac{1}{\lambda}I_n - A\right) \\
&= -\lambda \det\left(A^{-1}\right)\det\left(A - \frac{1}{\lambda}I_n\right) \\
&= \frac{-\lambda}{\det(A)} P_A\left(\frac{1}{\lambda}\right)
\end{aligned}
$$

Exercice 4.4. Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est :

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}
$$

1. Déterminer les éléments propres de T.

2. Trouver une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de T.

3. Donner la matrice de T dans $\mathcal{B}'$.

Solution 4.4. 1. On calcule le polynôme caractéristique de A.

$$\begin{aligned}
P_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)\begin{vmatrix} -5-\lambda & 3 \\ -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 4-\lambda \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & -5-\lambda \\ 6 & -6 \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)\left(-2+\lambda+\lambda^2\right) + 3(-6-3\lambda) + 3(12+6\lambda) \\
&= -(1-\lambda)(2+\lambda)(1-\lambda) - 9(2+\lambda) + 18(2+\lambda) \\
&= -(2+\lambda)\left[(1-\lambda)(1-\lambda) + 9 - 18\right] \\
&= -(2+\lambda)\left(\lambda^2 - 2\lambda - 8\right) \\
&= -(2+\lambda)^2(4+\lambda).
\end{aligned}$$

$$\lambda \in Sp(A) \Longleftrightarrow P_A(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda = -2 \ ou\ \lambda = 4.$$

On détermine les sous-espaces propres :

$E_{-2} = \{V = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ AV = -2V\}$. Alors, la résolution du système $AV = -2V$, nous donne

$$\begin{cases} x = y - z \\ y \in \mathbb{R} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Alors $E_{-2} = \{(y-z, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ AV = -2V\} = \{y(1,1,0) + z(-1,0,1)\}$, donc (V_1, V_2) est une base du sous-espace propre E_{-2} associé à la valeur propre $\lambda = -2$ telle que $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pour $\lambda = 4$, $E_4 = \{V = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ AV = 4V\} = \{y\,(1, 1, 2)\,,\ y \in \mathbb{R}\}$. Le vecteur libre $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est une base du sous-espace propre E_4.

2. Une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres V_1, V_2, V_3 de T, alors $\mathcal{B}' = (V_1, V_2, V_3)$.

3. Soit la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

alors, P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}'$. Donc, la matrice de T dans la base $\mathcal{B}'$ est

$$D = PAP^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

avec

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.5. On considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & 1+a & 3 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$$

1. Déterminer a pour que 2 soit valeur propre de B.

2. Montrer alors que B est diagonalisable et déterminer ses éléments propres.

Solution 4.5. 1. On calcule $P_B(\lambda)$ le polynôme caractéristique de B.

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I_3) \\ &= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 6\lambda + 2a + 2. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} 2 \in Sp(B) &\Longleftrightarrow P_B(2) = 0 \\ &\Longleftrightarrow a = -1. \end{aligned}$$

2. Pour $a = -1$, on a $P_B(\lambda) = -\lambda(3-\lambda)(2-\lambda)$. Donc B possède trois valeurs propres distinctes $0, 2, 3$ ce qui signifie que B est diagonalisable.

On détermine les sous-espaces propres de B.

$E_0 = \ker(B) = \{V = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ AV = 0\}$, alors

$$AV = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ 3z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = x \\ z = 0 \end{cases}$$

et on implique que $E_0 = Vect\left(V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

$E_2 = \ker(B2I_3) = \{V = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ AV = 2V\}$

$$AV = 2V \Longleftrightarrow \begin{cases} -x - y = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -x \\ z = 0 \end{cases}$$

$E_2 = Vect\left(V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

Un calcul de la même manière, nous donne $E_3 = Vect\left(V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}\right)$.

Alors, les vecteurs propres V_1, V_2, V_3 forment une base de $\mathbb{R}^3$. Si on désigne par P à la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base (V_1, V_2, V_3), on aura

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

et la matrice $D = P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ où $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Exercice 4.6. Soit M la matrice réelle 3×3 suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de M, puis déduire que M est diagonalisable.

2. Déterminer une base de vecteurs propres et P la matrice de passage.

3. On a $D = P^{-1}MP$, pour $k \in \mathbb{N}$ exprimer M^k en fonction de D^k puis calculer M^k.

Solution 4.6. 1. On vérifie facilement que $P_M(\lambda) = -(1-\lambda)(4+\lambda)(2-\lambda)$. Donc $Sp(A) = \{1, 2, -4\}$. Comme A admet trois valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable.

2. Déterminons les sous-espaces propres.

Pour $\lambda = 4$, on a $E_1 = \ker(A - I_3) = \{V = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; AV = V\}$

$$AV = V \Longleftrightarrow \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 3x - 3y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = x \\ z = x \end{cases}.$$

Alors $E_1 = Vect\left(V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

On vérifie de la même façon que $E_2 = Vect\left(V_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$ et $E_{-4} = Vect\left(V_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$.

Les vecteurs propres V_1, V_2, V_3 forment une base de $\mathbb{R}^3$, la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base (V_1, V_2, V_3) est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. On a $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ où $P^{-1} = \frac{-1}{30}\begin{pmatrix} 0 & -12 & -18 \\ -5 & 0 & 5 \\ -5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^k \end{pmatrix}.$$

et

$$M^k = PD^kP^{-1} = \begin{pmatrix} -5.2^{k+1} - 10\,(-4)^k & -12 + 12\,(-4)^k & -18 + 5.2^{k+2} - 2\,(-4)^k \\ -15.2^k - 15\,(-4)^k & -12 - 18\,(-4)^k & -18 + 5.2^{k+2} + 3\,(-4)^k \\ 5.2^{k+1} - 10\,(-4)^k & -12 + 12\,(-4)^k & -18 - 5.2^{k+2} - 2\,(-4)^k \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.7. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $u\,(e_2)$, $u\,(e_1 + e_3)$ et $u\,(e_1 - e_3)$.

2. En déduire que u est diagonalisable et écrire la matrice de u dans une base de vecteurs propres.

Solution 4.7. 1. On a

$$A.e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

alors, $u\,(e_2) = e_2$, et cela signifie que e_2 est un vecteur propre de u associé à la valeur propre 1.

On trouve aussi $u\,(e_1 + e_3) = e_1 + e_3$ et $u\,(e_1 - e_3) = -e_1 + e_3 = -\,(e_1 - e_3)$. Alors, $e_1 + e_3$ est aussi un vecteur propre de u associé à la valeur propre 1, mais $e_1 - e_3$ est un vecteur propre de u associé à l a valeur propre -1.

2. L'endomorphisme u possède deux valeurs propres distinctes 1 et -1 d'une coté. D'une autre coté le sous-espace E_1 associé à $\lambda = 1$ est de dimension deux et $\dim E_{-1} = 1$, alors la matrice A diagonalisable.

La matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base des vecteurs propres $(e_2, e_1 + e_3, e_1 - e_3)$

est $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et la matrice de u dans la base $(e_2, e_1 + e_3, e_1 - e_3)$ est

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

où $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Exercice 4.8. Soit m un nombre réel et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$$

1. Quelles sont les valeurs propres de f ?

2. Pour quelles valeurs de m l'endomorphisme est-il diagonalisable ?justifier.

3. On suppose $m = 2$. Diagonaliser la matrice A.

Solution 4.8. 1. On calcule le polynôme caractéristique de A.

$P_f(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)(m-\lambda)$. Alors, $Sp(f) = \{1, 2, m\}$.

2. On distingue trois cas.

Cas 1. Si $m \in \mathbb{R}-\{1,2\}$, f admet trois valeurs propres distinctes, d'où f est diagonalisable.

Cas 2. Si $m = 2$, on a $P_f(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)^2$. Dans ce cas, f est diagonalisable si la dimension du sous-espace propre E_2 associé à la valeur propre 2 est égale à 2. Soit $V=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

$$f(V)=2V \Longleftrightarrow AV=2V \Longleftrightarrow \begin{cases} -x+z=0 \\ -x+z=0 \\ 0=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ y\in\mathbb{R} \\ z=x \end{cases}.$$

$E_2=\ker(f-2Id_{\mathbb{R}^3})=\{(x,y,x)\,,\ x,y\in\mathbb{R}\}=\{x(1,0,1)+y(0,1,0)\,,\ x,y\in\mathbb{R}\}$ d'où $E_1=Vect(V_1,V_2)$ où $V_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $V_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, donc $\dim E_2=2$. Par conséquent, f est diagonalisable.

Cas 3. Si $m=1$, on a $P_f(\lambda)=(1-\lambda)^1(2-\lambda)$. Soit $V=(x,y,z)$

$$f(V)=V \Longleftrightarrow AV=V \Longleftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ -x+y+z=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ y=x \\ z=0 \end{cases}.$$

$E_1=\ker(f-Id_{\mathbb{R}^3})=\{(x,x,0)\,,\ x,y\in\mathbb{R}\}=\{x(1,0,1)\,,\ x\in\mathbb{R}\}$.

$E_1=Vect(V_0)$ où $V_0=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, donc $\dim E_1=1$. Comme l'ordre de multiplicité de la valeur propre 1 dans $P_f(\lambda)$ est 2, f n'est pas diagonalisable pour $m=1$.

3. On a vu que pour $m=2$ l'endomorphisme f est diagonalisable et que ses vecteurs propres sont V_0,V_1,V_2, alors la matrice de f dans cette base est

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix},$$

et la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base (V_1, V_2, V_3) est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $A = PDP^{-1}$ où

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.9. I) Diagonaliser les matrices suivantes :

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

II) Montrer que la matrice $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

III) Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est non diagonisable dans $\mathbb{R}$ et diagonisable dans $\mathbb{C}$.

Solution 4.9. Pour les questions I) et II), on utilise la même méthode de résolution dans les exercices précédents.

III) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, un calcul simple du polynôme caractéristique de C, nous donne $P_C(\lambda) = \lambda^2 + 1$.

L'équation $\lambda^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$, mais elle admet deux solutions distinctes i, $-i$. Donc, la matrice M ne possède pas aucune valeur propre dans $\mathbb{R}$, mais elle admet deux valeurs propres distinctes dans $\mathbb{C}$. D'où le résultat.

Exercice 4.10. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.

2. Montrer que A n'est pas diagonalisable.

3. Trigonaliser la matrice A.

Solution 4.10. 1. le polynôme caractéristique de A :

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3.$$

2. On détermine le sous-espace propre associé à la valeur propre 1.

Comme A a une seule valeur propre et si on suppose qu'il existe une matrice inversible P pour laquelle la matrice diagonale $D = I_3$ vérifie $A = PI_3P^{-1} = I_3$, ceci est faux, d'où A n'est pas diagonalisable.

Ou pourra aussi résoudre cette question avec la méthode suivante :

On détermine le sous-espace propre E_1 associé à la valeur propre 1.

$E_1 = \{V = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; AV = V\}$, alors

$$(x, y, z) \in E_1 \Longleftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ -x + z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

alors E_1 est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Comme $\dim E_1 = 1 < m(1) = 3$, A n'est pas diagonalisable.

3. On cherche à construire une base $\mathfrak{B}' = (V_1, V_2, V_3)$ de $\mathbb{R}^3$, on a $AV_1 = V_1$, on essaye de trouver un vecteur V_2 tel que $(A - I_3) V_2 = V_1$. Pour $V_2(x, y, z)$,

$$\begin{aligned} (A - I_3) V_2 = V_1 &\Longleftrightarrow AV_2 = V_2 + V_1 \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \\ z+1 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} x - z = 1 \\ -x + z = -1 \\ -y - z = 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Si on prend $z = 0$, on trouve $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On cherche aussi un vecteur $V_3 = (x, y, z)$ tel que $AV_3 = V_3 + V_2$, alors

$$\begin{aligned} AV_2 = V_2 + V_1 &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2x - z \\ -x + y + z \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} x - z = 1 \\ -x + z = -1 \\ -y - z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Si, on prend $z = 0$, on trouve $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

La matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathfrak{B}'$ est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et une matrice triangulaire supérieure T vérifiant $T = P^{-1}AP$ telle que T est formée des vecteurs colonnes AV_1, AV_2 et AV_3 par rapport à la base $\mathfrak{B}'$, c'est à dire

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.11. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, A_α la matrice réelle 3×3 suivante :

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha + 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

1. Factoriser le polynôme caractéristique $P_{A_\alpha}(X)$ en produit de facteurs du premier degré.

2. Déterminer selon la valeur du paramètre α les valeurs propres distinctes de A_α et leur ordre de multiplicité.

3. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la matrice A_α est diagonalisable.

4. Déterminer selon la valeur de α le polynôme minimal de A_α .

Solution 4.11. 1. On calcule le polynôme caractéristique de A_α :

$$P_{A_\alpha}(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & \alpha-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & \alpha+1 \\ -1-\lambda & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & \alpha-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & \alpha+1 \\ 0 & -2-\lambda & -\alpha-1 \\ 0 & 1 & \alpha-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1-\lambda)[(-2-\lambda)(\alpha-\lambda)+\alpha+1]$$

$$= -(\lambda+1)[\lambda^2+(2-\alpha)\lambda+1-\alpha].$$

Le discriminant du polynôme $\lambda^2+(2-\alpha)\lambda+1-\alpha$, $\Delta=\alpha^2$, donc ce polynôme a deux racines distinctes $\lambda_1 = \frac{\alpha-2-\alpha}{2} = -1$ et $\lambda_2 = \frac{\alpha-2+\alpha}{2} = \alpha-1$. Alors,

$$P_{A_\alpha}(\lambda) = -(\lambda+1)^2(\lambda-\alpha+1).$$

2. On a $Sp\,(A) = \{-1, \alpha-1\}$.

(i) Si $\alpha=0$, $P_{A_0}(\lambda) = -(\lambda+1)^3$, A_0 admet une valeur propre -1 d'ordre de multiplicité égal à 3.

(ii) Si $\alpha \neq 0$, A_α a deux valeurs propres distinctes, l'une est -1 d'ordre de multiplicité égal à 2 et l'autre est $\alpha-1$ d'ordre de multiplicité égal à 1.

3. Si $\alpha=0$, on a $Sp\,(A_0) = \{-1\}$ et $m\,(-1)=3$. On suppose qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$. Dans ce cas

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -I_3.$$

Alors, $A = P(-I_3)P^{-1} = -I_3$, ce qui n'est pas juste. Par conséquent, A_α n'est pas diagonalisable pour $\alpha = 0$.

2. Si $\alpha \neq 0$, $Sp(A_\alpha) = \{-1, \alpha - 1\}$, avec $m(-1) = 2$. Alors, on détermine le sous-espace propre associé à -1. $E_{-1} = \ker(A_\alpha + I_3) = \{V = (x, y, z),\ (A + I_3)V = 0\}$. Alors

$$(x, y, z) \in E_{-1} \Longleftrightarrow \begin{cases} (\alpha+1)z = 0 \\ x - y = 0 \\ -x + y + (\alpha+1)z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = x \\ (\alpha+1)z = 0 \end{cases}.$$

On distingue deux cas : $\alpha = -1$, $\alpha \neq -1$.

Pour $\alpha = -1$, $E_{-1} = \{(x, x, z), x, z \in \mathbb{R}\} = \{x(1,1,0) + z(0,0,1)\}$. donc $E_{-1} = Vect(V_1, V_2)$ où $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors, $m(-1) = \dim E_{-1} = 2$, d'où A_{-1} est diagonalisable.

Pour $\alpha \neq -1$, $E_{-1} = \{(x, x, 0), x \in \mathbb{R}\} = Vect(V)$ où $V^t = (1,1,0)$, donc $\dim E_{-1} = 1 \neq m(-1)$. D'où A_α n'est diagonalisable.

4. D'après le théorème 2.10, A_α est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si son polynôme minimal m_{A_α} est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$. On a déjà démontrait que A_α est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\alpha = -1$. Donc, on a

- Pour $\alpha = -1$, A_α est diagonalisable, d'où $m_{A_{-1}}(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-\alpha+1) = (\lambda+1)(\lambda+2)$.

Pour $\alpha \neq -1$, on distingue deux cas $\alpha = 0$, $\alpha \neq 0$.

Pour $\alpha = 0$, $P_{A_0}(\lambda) = -(\lambda+1)^3$ et comme A_0 n'est pas diagonalisable, donc -1 n'est pas un racine simple de m_{A_0}, alors

$$(A+I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{O}_3$$

donc $m_{A_0}(\lambda) = (\lambda)^3$.

Pour $\alpha \neq 0$, A_α n'est pas diagonalisable et comme P_{A_α} admet deux racines, -1 un racine double et $\alpha - 1$ un racine simple, alors $m_{A_\alpha} = (\lambda+1)^2(\lambda - \alpha + 1)$.

Exercice 4.12. Soit f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ présenter respectivement par les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que les deux matrices A et B ne sont pas diagonalisables.

2) Sont-elles trigonalisables ? justifier

3) trigonaliser les deux matrices A et B.

4) Déterminer le polynôme minimal de A puis de B

Solution 4.12. 1) On détermine le polynôme caractéristique de chacune des matrices A

et B :

$$\begin{aligned}
P_A(\lambda) &= \det(A-\lambda I_3) \\
&= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \quad C_1 \longleftarrow C_1 - C_3 \\
&= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ \lambda & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (4-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) + \lambda(2-\lambda) \\
&= (2-\lambda)\left(4-4\lambda+\lambda^2\right) = (2-\lambda)^3.
\end{aligned}$$

Alors, $Sp(A) = \{2\}$. On détermine le sous-espace propre E_2 associé à la valeur propre 2.

$E_2 = \{V = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ AV = 2V\}$

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in E_2 &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a $E_2 = Vect(V_1)$ où $V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $\dim E_2 = 1 < m(2) = 3$, ceci signifie que A n'est pas diagonalisable.

Maintenant, on calcule le polynôme caractéristique de B.

$$\begin{aligned}
P_B(\lambda) &= \det(B-\lambda I_3)\\
&= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \quad C_2 \longleftarrow C_2 + C_3\\
&= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} \quad L_2 \longleftarrow L_2 - L_3\\
&= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1+\lambda \\ 1 & 1-\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix}\\
&= (1-\lambda)(2-\lambda)^2.
\end{aligned}$$

Alors, $Sp(B) = \{1, 2\}$. Pour vérifier que B n'est pas diagonalisable, on étudie le sous-espace propre E_2' associé à la valeur propre 2.

$E_2' = \{V = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ BV = 2V\}$

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in E_2' &\iff BV = 2V\\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\\
&\iff \begin{cases} x = y \\ y \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Donc, $E'_2 = Vect\,(V'_1)$ où $V'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, $\dim E'_2 = 1 < m\,(2) = 2$, B n'est pas diagonalisable.

2) Comme les polynômes caractéristiques P_A et P_B sont scindés sur $\mathbb{R}$, les matrices A et B sont trogonalisables dans $\mathscr{M}_n\,(\mathbb{R})$.

3) Trigonaliser la matrice A consiste à trouver deux vecteurs V_2 et V_3 pour que (V_1, V_2, V_3) soit une base de $\mathbb{R}^3$ afin que A soit semblable à une matrice T telle que

$$T = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

et $A = PTP^{-1}$ où P est la matrice de passage du base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base (V_1, V_2, V_3). On a

$$TV_2 = aV_1 + 2V_2 = \begin{pmatrix} a+x \\ a+y \\ z \end{pmatrix},$$

d'une autre côté pour $V_2 = (x, y, z)$, on a

$$AV_2 = \begin{pmatrix} 3x+y-z \\ x-y+z \\ 2x+2z \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\begin{cases} 3x+y-z = a+2x \\ x-y+z = a+2y \\ 2x+2z = 2z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y-z = a \\ -3y+z = a \\ x = 0 \end{cases}.$$

On prend $a \neq 0$, par exemple $a = 1$, on on trouve $V_2\,(0, -1, -2)$.

On cherche $V_3\,(x, y, z)$ et il vérifie

$$AV_3 = \begin{pmatrix} 3x + y - z \\ x - y + z \\ 2x + 2z \end{pmatrix}$$

avec

$$TV_3 = bV_3 + 2V_3 = \begin{pmatrix} 2x \\ -b + 2y \\ -2b + 2z \end{pmatrix}$$

puis

$$\begin{cases} 3x + y - z = 2x \\ x - y + z = -b + 2y \\ 2x + 2z = -2b + 2z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 3y + z = -b \\ x = -b \end{cases}.$$

On prend $b = -1$, on trouve $V_3 = (-2, -1, -3)$.

Alors,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Trigonalisation de la matrice B :

Tout d'abord, on détermine le sous-espace propre E'_1 associé à la valeur propre 1.

On a $E_1' = \{V = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ BV = V\}$, alors

$$(x, y, z) \in E_1' \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y \in \mathbb{R} \\ z = y \end{cases}.$$

Donc $E_1' = Vect\,(V_2')$ où $V_2' = (0, 1, 1)^t$.

En ajoutant $e_1 = (1, 0, 0)^t$ aux vecteurs V_1' et V_2' pour que $\mathcal{B}' = (V_1', V_2', e_1)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$, alors la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}'$ est

$$P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

puis T' une matrice semblable B telle que

$$T' = P'^{-1} B P' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer la dernière colonne, il faut exprimer Be_1 dans la base $\mathcal{B}'$.

$$Be_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donc

$$\begin{cases} a + 2 = 1 \\ a + b = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

puis $a = -1$ et $b = 1$. D'ou

$$T' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4) On pose $M = A - 2I_3$, alors

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

et d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $M^3 = 0$. Alors, le polynôme minimal de A est $M_A(\lambda) = (\lambda - 2)^3$.

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme caractéristique P_B de B est un polynôme annulateur de B, et d'après la minimalité du polynôme minimal M_B du B, on a M_B divise P_B. On a deux possibilités pour M_B :

$$M_B(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2), \qquad M_B(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2.$$

Le calcul suivant nous donne

$$(B - I_3)(B - 2I_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mais, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $(B - I_3)(B - 2I_3)^2 = \mathbb{O}_{\mathbb{R}^3}$. Alors, le polynôme minimal de B est $M_B(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$.

Exercice 4.13. Soit A la matrce de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. Montrer que A n'est pas diagonalisable.
3. Calculer le polynôme minimal de A et en déduire l'expression de A^{-1}.

Solution 4.13. 1) Le polynôme caractéristique de A : $P_A(\lambda) = (3 + \lambda)^4$.

2) On a $Sp(A) = \{-3\}$, on démontre par l'absurde, c'est-à-dire, on suppose que A est diagonalisable, ce qui veut dire qu'il existe une matrice inversible P telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

on a donc $P^{-1}AP = -3I_4$, c'est-à-dire :

$$A = P(-3I_4)P^{-1} = -3PP^{-1} = -3I_4$$

ceci est impossible, alors A n'est pas diagonalisable.

3) On pose $M = A + 3I_4$. On a

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \, et \, M^3 = O_{\mathbb{R}^4}.$$

Alors, le polynôme minimal de A est $M_A(\lambda) = (\lambda + 3)^3$.

On a $(A + 3I_4)^3 = 0$,

c'est-à-dire $A^3 + 9A^2 + 27A + 27I_4 = 0$,

on peut donc écrire que $A(A^2 + 9A + 27I_4) = -27I_4$,

c'est-à-dire que A est inversible et sa matrice inverse A^{-1} est définie par

$$A^{-1} = \frac{-1}{27}\left(A^2 + 9A + 27I_4\right)$$

Exercice 4.14. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3 et soit l'application $u : E \to E$ définie par

$$\forall P \in E, \; u(P) = \left(X^2 - 1\right) P'' + (2X + 1) P'.$$

où P'et P'' dsignent respectivement la dérivée première et la dérivée seconde de P.

1) Vérifier que u est un endomorphisme de E.

2) Soit $B = \{e_1 = 1, \; e_2 = X, \; e_3 = X^2, \; e_4 = X^3\}$ la base canonique de E. Décomposer dans la base B les polynômes $u(e_i)$, pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

3) En déduire la matrice A de u relativement à la base B.

4) Monter que A est diagonalisable. Quel est son polynôme minimal.

5) Calculer A^n, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution 4.14. 1) Tout d'abord, pour $P \in \mathbb{R}_3[X]$, $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$, on trouve que $u(P) \in \mathbb{R}_3[X]$. Il reste à démontrer que u est linéaire.

Pour tout $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ et pour tout $P, Q \in E$, on a

$$\begin{aligned} u(\alpha P + \beta Q) &= \left(X^2 - 1\right)(\alpha P + \beta Q)'' + (2X+1)(\alpha P + \beta Q)' \\ &= \left(X^2 - 1\right)(\alpha P'' + \beta Q'') + (2X+1)(\alpha P' + \beta Q') \\ &= \alpha \left[\left(X^2 - 1\right) P'' + (2X+1) P'\right] + \beta \left[\left(X^2 - 1\right) Q'' + (2X+1) Q'\right] \\ &= \alpha u(P) + \beta u(Q). \end{aligned}$$

D'où u est un endomorphisme.

2) $u(e_1) = 0$, $u(e_2) = 1 + 2X$, $u(e_3) = -2 + 2X + 6X^2$, $u(e_4) = -6x + 3X^2 + 12X^3$.

3)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

4) A est une matrice triangulaire supérieure, donc son polynôme caractéristique est $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_4) = -\lambda(2-\lambda)(6-\lambda)(12-\lambda)$. Il résulte que $Sp(A) = \{0, 2, 6, 12\}$. Comme A possède quatre valeurs propres deux à deux distinctes, A est diagonalisable. Son polynôme minimal est

$$M_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 2)(\lambda - 6)(\lambda - 12).$$

5) Tout d'abord, on diagonalise la matrice A.

Les sous-espaces propres de A sont $E_0 = Vect(V_1(1,0,0,0))$, $E_2 = Vect(V_2 = (1,2,0,0))$, $E_6 = Vect(V_3 = (-1,2,4,0))$, $E_{12} = Vect(V_2 = (-1,-4,4,8))$. La matrice de passage de la base canonique de E à la base $(u(e_1), u(e_2), u(e_3), u(e_4))$ est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

et

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

$A = PDP^{-1}$, par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = PD^nP^{-1}$. Alors

$$A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.15. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) + z(t) \\ y'(t) = x(t) \\ z'(t) = x(t) + y(t) + z(t) \end{cases}$$

Solution 4.15. C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 homogène d'équation matricielle $X = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \; et \; X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

$Sp\,(A) = \{-1, 2, 0\}$. Donc A possède trois valeurs propres deux à deux distinctes, alors A est diagonalisable.

$$E_{-1} = Vect\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\; E_2 = Vect\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},\; E_0 = Vect\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On a $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}\; et\; D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En posant $Y = P^{-1}X$, on obtient

$$X' = AX \Longleftrightarrow Y' = DY.$$

Or

$$Y' = DY \Longleftrightarrow Y\,(t) = \begin{pmatrix} k_1 e^{-t} \\ k_2 e^{2t} \\ k_3 \end{pmatrix}\; avec\, k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}.$$

Donc

$$X' = AX \Longleftrightarrow X\,(t) = k_1\begin{pmatrix} -e^{t} \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \\ 3e^{2t} \end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\; avec\, k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$\begin{cases} x\,(t) = -k_1 e^{-t} + 2k_2 e^{2t} \\ y\,(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^{2t} + k_3 \\ z\,(t) = 3k_2 e^{2t} - k_3 \end{cases}$$

Bibliographie

[1] E. Azoulay et J. Avignant, Mathématiques. Rappels de cours et exercices résolus IUT-BTS, Tome 2- Algèbre et géométrie. Dunod (2007)

[2] Cottet-Emard, François. Algèbre linéaire et bilinéaire : cours et exercices corrigés. Bruxelles : De Boeck , DL 2005

[3] M. El Amrani, Suites et séries numériques, Suites et séries de fonctions.Ellipses, Paris, 2011.

[4] J-P. Escofier, Toute l'algèbre de la licence (Cour et exercices corrigés). Dunod, Paris, 2006.

[5] X. Gourdan, les maths en tête : Algèbre, deuxième édition. Ellipses, Paris, 2009.

[6] B. Guerrien, Algèbre linéaire pour économistes. Economica (1997).

[7] J-F. Havet, Algèbre bilinéaire et géométrie euclidienne. Université d'Orléans. Janvier 2013.

[8] O. Glass. Algèbre linéaire 3. Université Paris-Dauphine. (2010)

[9] M. HOUIMDI. Algèbre linéaire. Université Cadi Ayyad, Maroc, septembre 2018.

[10] R. Mansuy et R. Mneimné, Algèbre linéaire : Réduction des endomorphismes. Vuibert, Paris, 2012.

[11] F. Margairaz et N. Cuneo, Algèbre linéaire I & I I. Ecole Polytechnique Fedérale de Lausanne, 2010.

[12] V. Prasolov, Problèmes et théorèmes d'algèbre linéaire.Traduction, Eric Kouris (2008).

[13] J. René Deheuvels, formes quadratiques et groupes classiques, puf (1981).

[14] A. Tchoudjem, Algèbre-III : Réduction des endomorphismes. Université Lyon I, 2011.