

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

---

Centre Universitaire Ahmed Zabana de Relizane



Institut des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques

# Géométrie

Géométrie Affine et Euclidienne

2<sup>ème</sup> Année LMD Mathématiques

ZAGANE ABDERRAHIM

Année universitaire 2019-2020

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Géométrie affine</b>	<b>4</b>
1.1 Espaces affines	4
1.2 Barycentres	7
1.3 Sous espace affine	9
1.4 Applications affines	12
1.5 Translation, homothétie, symétrie	16
Exercices	22
<b>2 Espace affine Euclidien</b>	<b>24</b>
2.1 Espace Euclidien	24
2.1.1 Structure d'espace euclidien	24
2.1.2 Norme, distance euclidienne et angle	25
2.1.3 Orthogonalité, Sous espaces orthogonaux	27
2.1.4 Hiperplans, droites	33
2.1.5 Applications dans les espaces euclidiens	34
2.1.6 Orientation, produit mixte, produit vectoriel	39
2.2 Espace affine euclidien affine	43
2.2.1 Structure d'espace euclidien affine	43
2.2.2 Sous espaces affines orthogonaux	44
2.2.3 Applications dans les espaces affines euclidiens	45
Exercices	49
<b>3 Paramétrisation des courbes et surfaces</b>	<b>51</b>
3.1 Courbe paramétrée :Généralités	51
3.2 Étude locale des courbes planes	58
3.2.1 Tangente	58
3.2.2 Allure de la courbe	59
3.2.3 Branches infinies	61
3.2.4 Courbes planes en coordonnées polaires	62
3.2.5 Courbure	64
3.3 Tracé des courbes paramétrée planes	67

---

3.3.1	Courbes paramétrées planes en coordonnées cartésiennes . . . . .	67
3.3.2	Courbes paramétrées planes en coordonnées polaires . . . . .	68
3.4	Étude locale des courbes gauches . . . . .	69
3.4.1	Tangente, plan osculateur et plan normal . . . . .	69
3.4.2	Courbure, torsion . . . . .	73
3.5	Paramétrisation des surfaces . . . . .	75
3.5.1	Surfaces paramétrées . . . . .	75
3.5.2	Plan tangent à une surface paramétrée . . . . .	76
3.5.3	Première forme fondamentale . . . . .	79
3.6	Exemples de courbes et de surfaces . . . . .	83
3.6.1	Exemples de courbes . . . . .	83
3.6.2	Exemples de surfaces . . . . .	86
	Exercices . . . . .	88
	<b>Bibliographie</b>	<b>90</b>

# Introduction

Ce polycopié présente les bases de la géométrie affine et euclidienne. Il est destiné aux étudiants de la Licence de Mathématiques.

Le contenu de ce polycopié regroupe le programme enseigné de licence mathématiques. Il est rédigé sous forme de cours détaillés avec des exercices résolus. Il est présenté avec un style très simple qui permet aux étudiants une compréhension très rapide.

L'organisation générale de ce polycopié est décomposé en (trios) chapitres.

Dans le premier chapitre nous présentons les notions de base suivantes sur la géométrie affine : espaces affines, barycentres, sous espaces affines, applications affines, translation-homothétie-symétrie. Nous proposons tout au long du chapitre des exemples et exercices résolus.

Dans le deuxième chapitre nous aborderons les espaces affines Euclidiens. Nous présentons les notions suivantes : le produit scalaire, orthogonalité, orientation, produit mixte, produit vectoriel, endomorphismes d'un espace euclidien. Tout en donnant quelques exemples et exercices résolus bien détaillés.

Dans le troisième chapitre nous expliquons la paramétrisation des courbes et surfaces et nous aborderons les notions suivantes : courbe paramétrée (Généralités), étude locale des courbes planes, étude locale des courbes gauches, surfaces paramétrées, exemples de courbes et de surfaces. Tout en donnant quelques exemples et exercices résolus bien détaillés.

Pour approfondir la compréhension, nous donnons à la fin de chaque chapitre une série des exercices non résolus de degré de difficulté différente.

# Chapitre 1

## Géométrie affine

### Sommaire

1.1	Espaces affines . . . . .	4
1.2	Barycentres . . . . .	7
1.3	Sous espace affine . . . . .	9
1.4	Applications affines . . . . .	12
1.5	Translation, homothétie, symétrie . . . . .	16
	Exercices . . . . .	22

Dans ce chapitre,  $\mathbb{K}$  est un corps commutatif, ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ) ou ( $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ) et  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Nous signalerons quand l'hypothèse est faite que la dimension de  $E$  est finie.

### 1.1 Espaces affines

#### Définitions 1.1.1.

Un  $\mathbb{K}$ -espace affine est un ensemble  $\mathcal{E}$  non vide associé à  $E$  et à une application

$$\begin{aligned} + : \mathcal{E} \times E &\longrightarrow \mathcal{E} \\ (A, u) &\longmapsto A + u \end{aligned}$$

vérifiant les conditions suivantes

1. Pour tout  $A \in \mathcal{E}$ ,  $A + 0_E = A$ .
  2. Pour tout  $A \in \mathcal{E}$  et  $u, v \in E$  :  $A + (u + v) = (A + u) + v$ .
  3. Pour tout  $A, B \in \mathcal{E}$ , il existe un unique  $u \in E$  tel que  $B = A + u$ .
- On dit que  $E$  est l'espace directeur de  $\mathcal{E}$ .
  - Les éléments de  $\mathcal{E}$  sont appelés les points.
  - La dimension de  $\mathcal{E}$  est par définition la dimension de  $E$  et note  $\dim \mathcal{E} = \dim E$ .

#### Remarque 1.1.1.

D'après la condition 3 de la définition précédente on note par  $u = B - A$  ou  $u = \overrightarrow{AB}$ , ainsi on a :

$$B = A + \overrightarrow{AB}$$

**Exemple 1.1.1.**

Tout  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  est muni naturellement d'une structure d'un  $\mathbb{K}$ -espace affine, grâce à l'application

$$\begin{aligned} + : E \times E &\longrightarrow E \\ (u, v) &\longmapsto u + v \end{aligned}$$

**Exercice corrigé 1.1.1.**

Démontrer que l'ensemble  $\mathcal{E}$  des points du plan de coordonnées  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  est un  $\mathbb{R}$ -espace affine dirigé par  $E = \mathbb{R}^2$ .

**Solution .**

Soit l'application

$$\begin{aligned} + : \mathcal{E} \times E &\longrightarrow \mathcal{E} \\ ((x, y), (a, b)) &\longmapsto (x, y) + (a, b) = (x - a, y - b) \end{aligned}$$

Nous vérifions facilement que

1. Pour tout  $(x, y) \in \mathcal{E}$ ,  $(x, y) + (0, 0) = (x, y)$ .
2. Pour tout  $(x, y) \in \mathcal{E}$  et  $(a, b), (a', b') \in E$ ,

$$\begin{aligned} (x, y) + ((a, b) + (a', b')) &= (x, y) + (a + a', b + b') \\ &= (x - a - a', y - b - b') \\ &= (x - a, y - b) + (a', b') \\ &= ((x, y) + (a, b)) + (a', b'). \end{aligned}$$

3. Pour tout  $(x, y), (x', y') \in \mathcal{E}$ , il existe un unique  $(a, b) \in E$  tel que

$$\begin{aligned} (x', y') = (x, y) + (a, b) &\Rightarrow (x', y') = (x - a, y - b) \\ &\Rightarrow (a, b) = (x - x', y - y'). \end{aligned}$$

**Proposition 1.1.1.**

Soit  $\mathcal{E}$  un  $\mathbb{K}$ -espace affine de direction  $E$ , alors pour tout  $u \in E$  et  $A \in \mathcal{E}$  les applications

$$\begin{array}{ccc} \varphi : \mathcal{E} &\longrightarrow & \mathcal{E} & \quad & \psi : E &\longrightarrow & \mathcal{E} \\ A &\longmapsto & A + u & \quad & u &\longmapsto & A + u \end{array} \quad ,$$

sont des bijections

**Preuve .**

On prouve que l'application  $\varphi$  est bijective

- 1) Pour tout  $u \in E$ , soit  $A, B \in \mathcal{E}$  telle que  $A + u = B + u$ .

$$A = A + 0 = A + (u - u) = (A + u) + (-u) = (B + u) + (-u) = B + (u - u) = B$$

donc  $\varphi$  est injective.

- 2) Pour tout  $B \in \mathcal{E}$ , il existe  $A \in \mathcal{E}$  telle que  $A + u = B$   
 $B + (-u) = (A + u) + (-u) = A + (u - u) = A + 0 = A$   
 donc  $\varphi$  est surjective.

De même pour l'application  $\psi$ .

**CQFD**

**Proposition 1.1.2.**

Soit  $\mathcal{E}$  un  $\mathbb{K}$ -espace affine de direction  $E$ , alors pour tous points  $A, B, C$  et  $D \in \mathcal{E}$  on a,

- 1)  $\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow A = B$ ,
- 2)  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow B = C$ ,
- 3)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$  (relation de Chasles),
- 4)  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$  (règle de parallélogramme).

**Preuve .**

En utilisant directement la définition 1.1.1, on obtient :

- 1)  $\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow B = A + 0 \Leftrightarrow B = A$ .
- 2)  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow A + \overrightarrow{AB} = A + \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow B = C$ .
- 3) On a  $C = A + \overrightarrow{AC}$ ,  
 d'autre part  $C = B + \overrightarrow{BC} = A + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ ,  
 d'où  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .
- 4) On a  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}$   
 Donc  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}$   
 d'où  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ .

**CQFD**

**Définition 1.1.1.**

On appelle droite affine tout espace affine de dimension 1 et plan affine tout espace affine de dimension 2.

**Définitions 1.1.2.**

Soit  $\mathcal{E}$  un  $\mathbb{K}$ -espace affine de direction  $E$ .

- On appelle repère cartésien de  $\mathcal{E}$  tout couple  $\mathcal{R} = (O, B)$  où  $O$  un point de  $\mathcal{E}$  et  $B$  est une base de  $E$ .
- On dit alors que  $O$  est l'origine du repère  $\mathcal{R}$  et que  $B$  la base associée au repère  $\mathcal{R}$ .
- On appelle coordonnées artésiennes d'un point  $M$  de  $\mathcal{E}$  dans le repère, les composantes du vecteurs  $\overrightarrow{OM}$  dans la base  $B$ .

**Remarque 1.1.2.**

1) Si  $(x_1, \dots, x_n)$  les composantes de  $\overrightarrow{OM}$  dans la base  $B = \{e_i\}_{i=1, \dots, n}$ , i.e  $\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  alors  $M$  s'écrit de façon unique

$$M = O + \overrightarrow{OM} = O + \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

et on note  $M(x_1, \dots, x_n)$ .

2) Si  $M(x_1, \dots, x_n)$ , on peut définir la matrice des coordonnées de  $M$  dans le repère  $\mathcal{R}$  par la matrice des composantes de  $\overrightarrow{OM}$  dans la base  $B$  et on note

$$X_M = X_{\overrightarrow{OM}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

2) Si  $A$  et  $M$  deux points de  $\mathcal{E}$ , alors

$$X_M = X_A + X_{\overrightarrow{AM}} \quad \text{i.e} \quad X_{\overrightarrow{AM}} = X_M - X_A.$$

**Proposition 1.1.3.**

Soient  $\mathcal{E}$  un  $\mathbb{K}$ -espace affine de direction  $E$ ,  $\mathcal{R} = (O, B)$ ,  $\mathcal{R}' = (O', B')$  deux repères cartésiens de  $\mathcal{E}$  et  $P$  la matrice de passage de  $B$  à  $B'$ . Si  $M \in \mathcal{E}$ , notons  $X_M$ , (resp.  $X'_M$ ) la matrice des coordonnées de  $M$  dans  $\mathcal{R}$  (resp.  $\mathcal{R}'$ ). Alors  $X_M = P.X'_M + X_{O'}$ .  
où  $X_{O'}$  la matrice des coordonnées de  $O'$  dans le repère  $\mathcal{R}$ .

**Preuve .**

Nous avons  $X_{\overrightarrow{O'M}} = X_M - X_{O'}$  dans la base  $B$  et que  $X_{\overrightarrow{O'M}} = X'_M$  dans la base  $B'$  et comme  $P = \text{passage}(B, B')$ , alors  $X_M - X_{O'} = P.X'_M$  d'où  $X_M = P.X'_M + X_{O'}$  **CQFD**

**Exemple 1.1.2.**

Soit  $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2)$  et  $\mathcal{R}' = (O', e'_1, e'_2)$  deux repères d'un espace affine  $\mathcal{E}$  tels que  $O' = O + 2e_1 + 3e_2$ ,  $e'_1 = 2e_1 + e_2$  et  $e'_2 = -e_1 + e_2$ .

On a  $X_{O'} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  dans  $\mathcal{R}$  et  $P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  matrice passage de  $\{e_1, e_2\}$  vers  $\{e'_1, e'_2\}$ .

Si  $M \in \mathcal{E}$  tel que  $X_M = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  dans  $\mathcal{R}$  et  $X'_M = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$  dans  $\mathcal{R}'$  alors

$$X_M = P.X'_M + X_{O'} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x' - y' + 2 \\ y = x' + y' + 3 \end{cases}$$

## 1.2 Barycentres

Soient  $\mathcal{E}$  un  $\mathbb{R}$ -espace affine de direction  $E$ .

**Définition 1.2.1.**

Soit  $\{A_i\}_{i \in I}$  une famille de points de  $\mathcal{E}$  et  $\{\lambda_i\}_{i \in I}$  une famille de scalaires où  $I$  une partie finie (non vide) de  $\mathbb{N}$ .

- La famille  $\{(A_i, \lambda_i)\}_{i \in I}$  est appelée famille massique ou un système de points pondérés.
- Le scalaire  $\lambda_i$  est la masse ou le coefficient du point  $A_i$ .
- Le scalaire  $\lambda = \sum_{i \in I} \lambda_i$  est la masse totale ou le coefficient total de la famille.

**Théorème 1.2.1.**

Soit  $\{(A_i, \lambda_i)\}_{i \in I}$  une famille massique de masse totale  $\lambda = \sum_{i \in I} \lambda_i \neq 0$ , alors il existe un unique point  $G$  de  $\mathcal{E}$ , tel que :

$$\sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = 0 \quad (1.1)$$

De plus pour tout point  $M$  de  $\mathcal{E}$ , on a :

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{MA_i} = 0 \quad (1.2)$$

**Preuve .**

Pour tous  $M, N \in \mathcal{E}$ , on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{NA_i} &= \sum_{i \in I} \lambda_i (\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MA_i}) \\ &= - \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{MN} + \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{MA_i} \\ &= - \left( \sum_{i \in I} \lambda_i \right) \overrightarrow{MN} + \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{MA_i} \\ &= - \lambda \overrightarrow{MN} + \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{MA_i} \end{aligned}$$

Alors pour que  $\sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{NA_i} = 0$  il suffit  $\lambda \overrightarrow{MN} = \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$

Il existe donc un unique point  $G \in \mathcal{E}$  vérifiant l'équation (1.1), il est donné par l'équation (1.2). **CQFD**

**Définition 1.2.2.**

Soit  $\{(A_i, \lambda_i)\}_{i \in I}$  une famille massique de masse totale  $\lambda = \sum_{i \in I} \lambda_i \neq 0$ . L'unique point  $G$  défini par l'équation (1.1) est appelé le barycentre de la famille massique  $\{(A_i, \lambda_i)\}_{i \in I}$ . On le note  $G = \text{Bar}\{(A_i, \lambda_i)\}_{i \in I}$  **i.e**

$$G = \text{Bar}\{(A_i, \lambda_i)\}_{i \in I} \Leftrightarrow \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = 0.$$

**Remarque 1.2.1.**

Si tous les coefficients  $\lambda_i$  sont égaux, on dit que  $G$  est l'isobarycentre de la famille massique  $\{(A_i, \lambda_i)\}_{i \in I}$ .

**Exemple 1.2.1.**

Soient  $A, B$  deux points du plan affine  $\mathbb{R}^2$ , le barycentre de la famille  $\{(A, 1), (B, 1)\}$  est le milieu du segment  $[AB]$ , puis que  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 0 \Leftrightarrow G$  est le milieu de  $[AB]$ .

**Remarque 1.2.2.**

Il est clair que si  $G$  est un barycentre de deux points  $A$  et  $B$ , alors  $G, A, B$  sont alignés. En particulier, si  $A \neq B$ , on a  $G \in (AB)$ .

**Proposition 1.2.1.**

Soient  $\mathcal{E}$  un  $\mathbb{K}$ -espace affine muni d'un repère  $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$  et  $\{(A_i, \lambda_i)\}_{i \in I}$  une famille massique de masse totale  $\lambda \neq 0$ . Si  $X_{A_i}$  les matrices des coordonnées de  $\{A_i\}_{i \in I}$  dans  $\mathcal{R}$ , alors  $X_G$  la matrice des coordonnées de  $G$  dans  $\mathcal{R}$  est donnée par :

$$X_G = \frac{1}{\lambda} \sum_{i \in I} \lambda_i X_{A_i} \quad (1.3)$$

**Preuve .**

D'après le théorème 1.2.1, pour tout  $M \in \mathcal{E}$ , on a :  $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$ .

alors pour le point  $O$  on a  $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$

Donc  $X_G = X_{\overrightarrow{OG}} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i \in I} \lambda_i X_{\overrightarrow{OA_i}} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i \in I} \lambda_i X_{A_i}$  CQFD

**Exemple 1.2.2.**

Soient  $A(0, -2, 2), B(1, -1, 2), C(1, -1, -1)$  trois points dans  $\mathbb{R}^3$  muni le repère  $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$  où  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et  $G = \text{Bar}\{(A, -3), (B, 2), (C, 4)\}$ , alors

$$X_G = \frac{1}{3}(-3X_A + 2X_B + 4X_C) = - \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

**Proposition 1.2.2.**

Soit  $\{(A_i, \lambda_i)\}_{i \in I}$  une famille massique de masse totale  $\lambda = \sum_{i \in I} \lambda_i \neq 0$ .

- **Homogénéité** : Si  $G = \text{Bar}\{(A_i, \lambda_i)\}_{i \in I}$  et  $\alpha \neq 0$ , alors  $G = \text{Bar}\{(A_i, \alpha \lambda_i)\}_{i \in I}$ .
- **Associativité** : Soit  $(I_j)_{j \in J}$  une partition de  $I$  telle que pour tout  $j \in J$ ,  $\mu_j = \sum_{i \in I_j} \lambda_i \neq 0$ .

Notons pour tout  $j \in J$ ,  $G_j = \text{Bar}\{(A_i, \lambda_i)\}_{i \in I_j}$ , Alors  $G = \text{Bar}\{(A_i, \lambda_i)\}_{i \in I}$  si, et seulement si  $G = \text{Bar}\{(G_j, \mu_j)\}_{j \in J}$ .

**Preuve .**

- **Homogénéité** :  $G = \text{Bar}\{(A_i, \lambda_i)\}_{i \in I} \Leftrightarrow \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = 0$   
 $\Leftrightarrow \sum_{i \in I} \alpha \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = 0$   
 $\Leftrightarrow G = \text{Bar}\{(A_i, \alpha \lambda_i)\}_{i \in I}$ .

$$\begin{aligned}
\bullet \text{ Associativité : } G = \text{Bar}\{(A_i, \lambda_i)\}_{i \in I} &\Leftrightarrow \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{j \in J} \left( \sum_{i \in I_j} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{j \in J} \left( \sum_{i \in I_j} \lambda_i (\overrightarrow{GG_j} + \overrightarrow{G_j A_i}) \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{j \in J} \left( \left( \sum_{i \in I_j} \lambda_i \right) \overrightarrow{GG_j} + \sum_{i \in I_j} \lambda_i \overrightarrow{G_j A_i} \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{j \in J} \mu_j \overrightarrow{GG_j} = 0, \quad \left( G_j = \text{Bar}\{(A_i, \lambda_i)\}_{i \in I_j} \right) \\
&\Leftrightarrow G = \text{Bar}\{(G_j, \mu_j)\}_{j \in J}.
\end{aligned}$$

CQFD

**Exercice corrigé 1.2.1.**

Soient  $ABC$  un triangle dans le plan affine  $\mathbb{R}^2$ , et  $G = \text{Bar}\{(A, 1), (B, 1), (C, 1)\}$  est le centre de gravité du triangle  $ABC$ .

Démontrer que  $G$  est le d'intersection des médianes.

**Solution .**

En effet : Soit  $A' = \text{Bar}\{(B, 1), (C, 1)\}$ , alors  $A'$  est le milieu de  $[BC]$  i.e  $(AA')$  est la médiane du segment  $[BC]$ . alors  $G = \text{Bar}\{(A, 1), (A', 2)\}$  i.e  $G$  est appartient donc à la médiane  $(AA')$ . On montre de même manière qu'il appartient aux deux autres médianes.

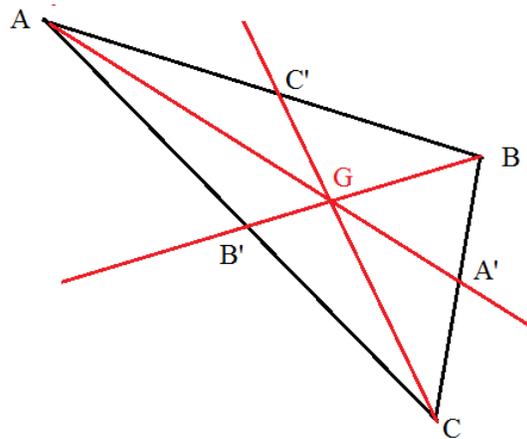


FIGURE 1.1 – Centre de gravité d'un triangle.

**1.3 Sous espace affine**

Soient  $\mathcal{E}$  un  $\mathbb{K}$ -espace affine de direction  $E$ .

**Définition 1.3.1.**

Une partie  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{E}$  est un sous espace affine de  $\mathcal{E}$ , s'il existe un point  $A$  de  $\mathcal{E}$  et un sous espace vectoriel  $F$  de  $E$  tels que  $\mathcal{F} = A + F$  *i.e*

$$\mathcal{F} = \{A + u, u \in F\}.$$

**Remarque 1.3.1.**

Soit  $\mathcal{F} = A + F$  un sous espace affine de  $\mathcal{E}$  et  $A \in \mathcal{E}$ . Si  $\{u_i\}_{i=1,p}$  une base de  $F$ , alors un point  $M$  appartient à  $\mathcal{F}$  si et seulement si, il existe  $\{\lambda_i\}_{i=1,p} \subset \mathbb{R}$  tels que  $M = A + \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p$ .

**Exemples 1.3.1.**

1) Les points de  $\mathcal{E}$  sont des sous-espaces affines, car pour tout  $A \in \mathcal{E}$ ,  $A = A + 0$ .

*i.e*  $\{A\} = A + \{0\}$

2)  $\mathcal{F} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x + 3y = 3\}$  est un sous espace affine de  $\mathbb{R}^2$ . En effet

$$M(x, y) \in \mathcal{F} \Leftrightarrow 2x + 3y = 3 \Leftrightarrow 2x = 3(1 - y) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = k \\ 3(1 - y) = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k}{2} \\ y = \frac{-k}{3} + 1 \end{cases}$$

D'où  $(x, y) = (0, 1) + k(\frac{1}{2}, \frac{-1}{3})$  *i.e*  $M = A + ku$  où  $A(0, 1)$ ,  $u(\frac{1}{2}, \frac{-1}{3})$  et  $\mathcal{F} = A + \text{vect}(u)$ .

3)  $\mathcal{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + 3z = 1\}$  est un sous espace affine de  $\mathbb{R}^3$ . En effet

$$M(x, y, z) \in \mathcal{F} \Leftrightarrow x - y + 3z = 1 \Leftrightarrow x = 1 + y - 3z \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \alpha - 3\beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$$

Donc  $(x, y, z) = (1, 0, 0) + \alpha(1, 1, 0) + \beta(-3, 0, 1)$  *i.e*  $M = A + \alpha u_1 + \beta u_2$  où  $A(1, 0, 0)$ ,  $u_1(1, 1, 0)$ ,  $u_2(-3, 0, 1)$  et  $\mathcal{F} = A + \text{vect}(u_1, u_2)$ .

**Proposition 1.3.1.**

Soit  $\mathcal{F} = A + F$  un sous espace affine de  $\mathcal{E}$  et  $A \in \mathcal{E}$ , alors :

1)  $\mathcal{F} \neq \phi$ .

2) Pour tout  $B \in \mathcal{E}$ , on a :  $B \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \in F \Leftrightarrow \mathcal{F} = B + F$ .

3)  $F = \{\overrightarrow{AM}, M \in \mathcal{F}\} = \{\overrightarrow{NM}, N, M \in \mathcal{F}\}$ .

4) Si  $G$  est un autre sous-espace vectoriel de  $E$  tel que  $\mathcal{F} = A + G$ , alors  $G = F$ .

**Preuve .**

1) Pour tout  $A \in \mathcal{E}$ ,  $A = A + 0 \in A + F = \mathcal{F}$ .

2) Pour tout  $B \in \mathcal{E}$ .

a) Démontrons  $B \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \in F$ .

$B \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \exists u \in F, B = A + u \Leftrightarrow \exists u \in F, \overrightarrow{AB} = u \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \in F$ .

b) Démontrons  $\overrightarrow{AB} \in F \Rightarrow \mathcal{F} = B + F$ .

Supposons que :  $\overrightarrow{AB} \in F$ , soit  $M \in \mathcal{E}$

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{F} &\Leftrightarrow \exists u \in F, M = A + u \\ &\Leftrightarrow \exists u \in F, M = (B + \overrightarrow{BA}) + u \\ &\Leftrightarrow \exists u \in F, M = B + (\overrightarrow{BA} + u) \\ &\Leftrightarrow \exists v \in F, M = B + v, \quad v = \overrightarrow{BA} + u \in F \\ &\Leftrightarrow M \in B + \mathcal{F}. \end{aligned}$$

c) Démontrons  $\mathcal{F} = B + F \Rightarrow B \in \mathcal{F}$ . trivial ( $B = B + 0 \in B + F = \mathcal{F}$ ).

3) i) Démontrons  $F = \{\overrightarrow{AM}, M \in \mathcal{F}\}$ , soit  $u \in E$

$$\begin{aligned} u \in F &\Leftrightarrow A + u \in \mathcal{F} \\ &\Leftrightarrow \exists M \in \mathcal{F}, M = A + u \\ &\Leftrightarrow \exists M \in \mathcal{F}, u = \overrightarrow{AM} \\ &\Leftrightarrow u \in \{\overrightarrow{AM}, M \in \mathcal{F}\}. \end{aligned}$$

ii) Démontrons  $F = \{\overrightarrow{MN}, M, N \in \mathcal{F}\}$

soit  $u \in F$  alors  $u = \overrightarrow{AM}$  et  $M \in \mathcal{F}$ , d'après i), on prend  $N = A$  d'où  $F \subset \{\overrightarrow{NM}, N, M \in \mathcal{F}\}$

Soient  $N, M \in \mathcal{F}$  alors  $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AM} \in F$  d'après i).

d'où  $\{\overrightarrow{NM}, N, M \in \mathcal{F}\} \subset F$ .

4) Supposons  $\mathcal{F} = A + F = A + G$ . Alors d'après i)  $G = \{\overrightarrow{AM}, M \in \mathcal{F}\}$  donc  $G = F$ . **CQFD**

### Corollaire 1.3.1.

Soit  $\mathcal{F} = A + F$  un sous espace affine de  $\mathcal{E}$  et  $A \in \mathcal{E}$ , alors  $\mathcal{F}$  est naturellement muni d'une structure d'espace affine, pour laquelle sa direction  $F = \{\overrightarrow{AM}, M \in \mathcal{F}\}$ .

### Définition 1.3.2.

Soit  $\mathcal{F} = A + F$  un sous espace affine de  $\mathcal{E}$  et  $A \in \mathcal{E}$ . L'espace vectoriel  $F = \{\overrightarrow{AM}, M \in \mathcal{F}\}$  est appelé espace directeur de  $\mathcal{F}$ , de sorte que, pour tout point  $B \in \mathcal{F}$ ,  $\mathcal{F} = B + F$ . dans ce la dimension de  $\mathcal{F}$  est la dimension de  $F$  et note  $\dim \mathcal{F} = \dim F$ .

### Définition 1.3.3.

Soit  $\mathcal{F}$  un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$ .

- 1) Si  $\dim \mathcal{F} = 1$ , on dit que  $\mathcal{F}$  est une droite affine de  $\mathcal{E}$ .
- 2) Si  $\dim \mathcal{F} = 2$ , on dit que  $\mathcal{F}$  est un plan affine de  $\mathcal{E}$ .
- 3) Si  $\dim \mathcal{F} = \dim \mathcal{E} - 1$ , on dit que  $\mathcal{F}$  est un hyperplan affine de  $\mathcal{E}$ .

### Exemples 1.3.2.

1)  $\mathcal{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x - 1 = y = 2z - 5\}$  est une droite affine de  $\mathbb{R}^3$ . En effet On a  $(x, y, z) = (0, -1, 2) + x(1, 2, 1)$  i.e  $\mathcal{F} = A + \text{vect}(u)$  où  $A(0, 1, 2), u(1, 2, 1)$ .

2)  $\mathcal{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + 3z = 1\}$  est un plan affine (hyperplan affine) de  $\mathbb{R}^3$ . En effet

$$M(x, y, z) \in \mathcal{F} \Leftrightarrow x - y + 3z = 1 \Leftrightarrow x = 1 + y - 3z \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \alpha - 3\beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$$

Donc  $(x, y, z) = (1, 0, 0) + \alpha(1, 1, 0) + \beta(-3, 0, 1)$

i.e  $\mathcal{F} = A + \text{vect}(u_1, u_2)$  où  $A(1, 0, 0), u_1(1, 1, 0), u_2(-3, 0, 1)$ . comme  $u_1, u_2$  sont libres, alors  $\dim \mathcal{F} = 2 = \dim \mathbb{R}^3 - 1$

### Proposition 1.3.2.

Soient  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  deux sous espaces affines de  $\mathcal{E}$  dirigés respectivement par  $F, G$  alors

- 1) Si  $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$  alors  $F \subset G$ .
- 2) Si  $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$  et  $\dim \mathcal{F} = \dim \mathcal{G}$  alors  $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ .
- 3) Si  $F \subset G$  et  $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$  alors  $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ .
- 4) Si  $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$  alors  $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$  est sous espace affine de  $\mathcal{E}$  dirigé par  $F \cap G$ .
- 5) Si  $E = F \oplus G$  alors  $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$  se réduit à un point (singleton).

**Preuve .**

1) Soit  $A \in \mathcal{F}$  alors  $A \in \mathcal{G}$ , donc  $\mathcal{F} = A + F$  et  $\mathcal{G} = A + G$ , soit  $u \in E$

$$\begin{aligned} u \in F &\Rightarrow A + u \in \mathcal{F} \subset \mathcal{G} \\ &\Rightarrow A + u \in \mathcal{G} \\ &\Rightarrow u \in G. \end{aligned}$$

2) Soit  $A \in \mathcal{F}$  alors  $A \in \mathcal{G}$ , donc  $\mathcal{F} = A + F$  et  $\mathcal{G} = A + G$

D'autre part  $F \subset G$  et  $\dim \mathcal{F} = \dim \mathcal{G}$  (i.e  $\dim F = \dim G$ ) alors  $F = G$ .

d'où  $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ .

3) On a  $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset \Rightarrow \exists A \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$  donc  $\mathcal{F} = A + F$  et  $\mathcal{G} = A + G$ , soit  $M \in \mathcal{E}$ .

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{F} &\Rightarrow \exists u \in F \subset G, M = A + u \\ &\Rightarrow \exists u \in G, M = A + u \\ &\Rightarrow M \in \mathcal{G}. \end{aligned}$$

4) On a  $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset \Rightarrow \exists A \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ , soit  $M \in \mathcal{E}$ .

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G} &\Rightarrow M \in \mathcal{F} \text{ et } M \in \mathcal{G} \\ &\Rightarrow \overrightarrow{AM} \in F \text{ et } \overrightarrow{AM} \in G \\ &\Rightarrow \overrightarrow{AM} \in F \cap G \\ &\Rightarrow A + \overrightarrow{AM} \in A + F \cap G \\ &\Rightarrow M \in A + F \cap G. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M \in A + F \cap G &\Rightarrow \exists u \in F \cap G, M = A + u \\ &\Rightarrow u \in F \text{ et } u \in G, M = A + u \\ &\Rightarrow A + u \in A + F \text{ et } A + u \in A + G \\ &\Rightarrow M \in \mathcal{F} \text{ et } M \in \mathcal{G} \\ &\Rightarrow M \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}. \end{aligned}$$

5) Puisque  $E = F \oplus G$  alors  $F \cap G = \{0\}$ . On sait que  $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$ . De plus,  $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$  est un espace affine de direction  $F \cap G$ . Donc  $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$  est un singleton. **CQFD**

**Définition 1.3.4.**

Soient  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  deux sous espaces affines de  $\mathcal{E}$  dirigés respectivement par  $F, G$  alors

- 1) On dit que  $\mathcal{F}$  est parallèle à  $\mathcal{G}$  lorsque  $F$  est inclus dans  $G$ .
- 2) On dit que  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  sont parallèles lorsque  $\mathcal{F}$  est parallèle à  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{G}$  est parallèle à  $\mathcal{F}$  c'est-à-dire lorsque  $F = G$ .

**Proposition 1.3.3.**

Soient  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  deux sous espaces affines de  $\mathcal{E}$ . Si  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  sont parallèles alors ils sont confondus ou disjoints.

**Preuve .**

Comme  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  sont parallèles, on a  $F = G$ . Supposons que  $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$  et choisissons  $A \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ . Alors  $\mathcal{F} = A + F = A + G = \mathcal{G}$ . **CQFD**

## 1.4 Applications affines

**Définition 1.4.1.**

Soient  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  deux espaces affines dirigés respectivement par  $E$  et  $F$ .

- 1) Une application  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  est dite affine s'il existe une application linéaire  $L_f \in \mathcal{L}(E, F)$  vérifiant, pour tout  $A \in \mathcal{E}, u \in E$

$$f(A + u) = f(A) + L_f(u). \quad (1.4)$$

L'application linéaire  $L_f$  s'appelle la partie linéaire de  $f$ .

**Remarque 1.4.1.**

La formule (1.4) peut encore s'écrire, pour tout  $A, B \in \mathcal{E}$

$$f(B) = f(A) + L_f(\overrightarrow{AB}). \quad (1.5)$$

ou

$$\overrightarrow{f(A)f(B)} = L_f(\overrightarrow{AB}). \quad (1.6)$$

En effet : pour tout  $A \in \mathcal{E}, u \in E$ , on pose  $B = A + u$  ainsi  $u = \overrightarrow{AB}$ , d'où

$$f(A + u) = f(A) + L_f(u) \Leftrightarrow f(B) = f(A) + L_f(\overrightarrow{AB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{f(A)f(B)} = L_f(\overrightarrow{AB}).$$

**Définition 1.4.2.**

Soient  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  deux espaces affines dirigés respectivement par  $E$  et  $F$ .

- 1) Une application affine de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{E}$  s'appelle un endomorphisme affine de  $\mathcal{E}$ .
- 2) Une application affine de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathbb{K}$  s'appelle une forme affine de  $\mathcal{E}$ .

- 3) Une application affine bijective s'appelle un isomorphisme affine (une transformation affine). Dans ce cas  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{F}$  sont dits isomorphes.
- 4) Un endomorphisme affine bijectif s'appelle un automorphisme affine.

**Notation 1.4.1.**

- 1) L'ensemble des applications affines de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{F}$  est naturellement muni d'une structure d'espace affine, de direction  $\mathcal{L}(E, F)$  et noté  $\mathcal{A}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ .
- 2) L'ensemble des endomorphismes affines de  $\mathcal{E}$  se note  $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ .
- 3) L'ensemble des automorphismes affines de  $\mathcal{E}$  est un groupe pour la loi de composition, appelé le groupe affine de  $\mathcal{E}$  et noté  $\mathcal{GA}(\mathcal{E})$ .

**Exemples 1.4.1.**

- 1) Si  $\mathcal{E} = \mathcal{F} = \mathbb{R}$ , les applications affines sont les applications de la forme  $x \mapsto ax + b$  de partie linéaire est  $x \mapsto ax$ .
- 2) L'identité  $Id_{\mathcal{E}}$  est affine, de partie linéaire  $Id_E$ .
- 3) Une application constante d'un  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  est affine, de partie linéaire nulle 0.

**Exercice corrigé 1.4.1.**

Soient  $\mathcal{P}$  un plan affine muni repère  $\mathcal{R} = (O, B)$  et l'application

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P} &\longrightarrow \mathcal{P} \\ M(x, y) &\longmapsto f(M)(2x + 3y - 1, -x - y + 2) \end{aligned}$$

Démontrer que  $f$  est application affine.

**Solution .**

En effet, soient  $X_M = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ,  $X_{f(M)} = \begin{bmatrix} 2x + 3y - 1 \\ -x - y + 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} X_{f(M)} &= \begin{bmatrix} 2x + 3y - 1 \\ -x - y + 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} X_M + X_{f(O)} \end{aligned}$$

On a  $X_M = X_{\overrightarrow{OM}}$  et  $X_{\overrightarrow{f(O)f(M)}} = X_{f(M)} - X_{f(O)}$ , d'où

$$X_{\overrightarrow{f(O)f(M)}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} X_{\overrightarrow{OM}} \Leftrightarrow \overrightarrow{f(O)f(M)} = L_f(\overrightarrow{OM})$$

où  $L_f$  l'application linéaire représentée par la matrice  $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ .

**Définition 1.4.3.**

Soient  $\mathcal{E}$  un espace affine dirigé par  $E$ ,  $f \in \mathcal{A}(\mathcal{E})$  et  $M$  un point de  $\mathcal{E}$ .  
 $M$  est un point fixe de  $f$  (invariant par  $f$ ) si et seulement si  $f(M) = M$ .

**Proposition 1.4.1.**

Soient  $\mathcal{E}$  un espace affine dirigé par  $E$  et  $f \in \mathcal{A}(\mathcal{E})$ .

Si l'ensemble des points fixes de  $f$  est non vide, c'est un sous espace affine de  $\mathcal{E}$  dirigé par

$$\ker(L_f - Id_E) = \{u \in E, L_f(u) = u\}. \quad (1.7)$$

**Preuve .**

Soit  $\mathcal{F} = \{M \in \mathcal{E}, f(M) = M\}$ , supposons  $\mathcal{F} \neq \emptyset$ , alors il existe  $A \in \mathcal{F}$ ,  $f(A) = A$ .

Soit  $M \in \mathcal{E}$  alors  $M = A + \overrightarrow{AM}$ .

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{F} &\Leftrightarrow f(M) = M \\ &\Leftrightarrow f(A + \overrightarrow{AM}) = A + \overrightarrow{AM} \\ &\Leftrightarrow f(A) + L_f(\overrightarrow{AM}) = A + \overrightarrow{AM} \\ &\Leftrightarrow A + L_f(\overrightarrow{AM}) = A + \overrightarrow{AM} \\ &\Leftrightarrow L_f(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{AM} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \in \ker(L_f - Id_E) \\ &\Leftrightarrow M = A + \overrightarrow{AM} \in A + \ker(L_f - Id_E). \end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{F} = A + \ker(L_f - Id_E)$ .

**CQFD**

**Proposition 1.4.2.**

Soient  $\mathcal{E}, \mathcal{F}$  deux espaces affines dirigés respectivement par  $E, F$  et  $f \in \mathcal{A}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ .

1) Soit  $\mathcal{G}$  un sous espace affine de  $\mathcal{E}$  dirigé par  $G$ , alors  $f(\mathcal{G})$  est un sous espace affine de  $\mathcal{F}$  dirigé par  $L_f(G)$ .

2) Soit  $\mathcal{H}$  un sous espace affine de  $\mathcal{F}$  dirigé par  $H$ , alors  $f^{-1}(\mathcal{H})$  est, soit vide, soit un sous espace affine de  $\mathcal{E}$  dirigé par  $(L_f)^{-1}(H)$ .

**Preuve .**

1) Pour tout  $A \in \mathcal{G}$ ,  $\mathcal{G} = A + G$

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{G} &\Leftrightarrow M = A + u, u \in G \\ &\Leftrightarrow f(M) = f(A) + L_f(u), u \in G \\ &\Leftrightarrow f(M) = f(A) + v, v \in L_f(G) \\ &\Leftrightarrow f(M) \in f(A) + L_f(G). \end{aligned}$$

2) Si  $f^{-1}(\mathcal{H})$  n'est pas vide, soit  $A \in f^{-1}(\mathcal{H})$  i.e  $f(A) \in \mathcal{H}$ ,  $\mathcal{H} = f(A) + H$

$$\begin{aligned} M \in f^{-1}(\mathcal{H}) &\Leftrightarrow f(M) \in \mathcal{H} \\ &\Leftrightarrow f(M) = f(A) + L_f(\overrightarrow{AM}), L_f(\overrightarrow{AM}) \in H \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \in (L_f)^{-1}(H) \\ &\Leftrightarrow M \in A + (L_f)^{-1}(H). \end{aligned}$$

**CQFD**

**Proposition 1.4.3.**

Soient  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  des espaces affines dirigés respectivement par  $E$ ,  $F$  et  $G$ .

1) Soient  $f \in \mathcal{A}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$  et  $g \in \mathcal{A}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ , alors  $g \circ f \in \mathcal{A}(\mathcal{E}, \mathcal{G})$  et  $L_{g \circ f} = L_g \circ L_f$ .

2) Soit  $f \in \mathcal{A}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ , alors

i)  $f$  est injective (resp. surjective, resp. bijective) si et seulement si  $L_f$  l'est.

ii) Si  $f$  est un isomorphisme, alors  $f^{-1}$  est isomorphisme et  $L_{f^{-1}} = L_f^{-1}$ .

**Preuve .**

1) Pour tout  $A \in \mathcal{E}$  et  $u \in E$ .

$$\begin{aligned} (g \circ f)(A + u) &= g(f(A + u)) \\ &= g(f(A) + L_f(u)) \\ &= g(f(A)) + L_g(L_f(u)) \\ &= (g \circ f)(A) + (L_g \circ L_f)(u). \end{aligned}$$

i.e  $L_{g \circ f}(u) = (L_g \circ L_f)(u)$ .

2) Pour tout  $A \in \mathcal{E}$  et  $u \in E$ .

$$\begin{aligned} u \in \ker L_f &\Rightarrow L_f(u) = 0 \\ &\Rightarrow f(A) + L_f(u) = f(A) \\ &\Rightarrow f(A + u) = f(A) \\ &\Rightarrow A + u = A \\ &\Rightarrow u = 0. \end{aligned}$$

3) De même  $f$  est surjective si et seulement si  $f(\mathcal{E}) = \mathcal{F}$ . Mais  $f(\mathcal{E})$  est un sous-espace affine de  $\mathcal{F}$  de direction  $L_f(E)$ , c'est donc si et seulement si  $L_f(E) = F$ , i.e si et seulement si  $L_f$  est surjective.

4) Pour tout  $B \in \mathcal{F}$  et  $v \in F$  il existe  $A \in \mathcal{E}$  et  $u \in E$  tels que  $B = f(A)$  et  $v = L_f(u)$ .

$$\begin{aligned} f(A + u) = f(A) + L_f(u) &\Leftrightarrow A + u = f^{-1}(f(A) + L_f(u)) \\ &\Leftrightarrow f^{-1}(B) + (L_f)^{-1}(v) = f^{-1}(B + v) \\ &\Leftrightarrow f^{-1}(B + v) = f^{-1}(B) + (L_f)^{-1}(v). \end{aligned}$$

$$L_{f^{-1}}(v) = (L_f)^{-1}(v).$$

**CQFD**

**Proposition 1.4.4.**

Soient  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{F}$  deux espaces affines dirigés respectivement par  $E$ ,  $F$ .

Pour que l'application  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  soit affine, il faut et il suffit, qu'elle conserve le barycentre, ce qui signifie que, pour toute  $\{(A_i, \lambda_i)\}_{i \in I}$  famille massique dans  $\mathcal{E}$  de masse totale  $\sum_{i \in I} \lambda_i \neq 0$

telle que  $G = \text{Bar}\{(A_i, \lambda_i)\}_{i \in I}$ , alors  $f(G) = \text{Bar}\{(f(A_i), \lambda_i)\}_{i \in I}$  dans  $\mathcal{F}$ .

**Preuve .**

La condition est nécessaire :

Considérons  $f \in \mathcal{A}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ , le barycentre  $G$  est vérifie la relation  $\sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = 0$ , et donc

$L_f(\sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{GA_i}) = 0$  c'est à dire  $\sum_{i \in I} \lambda_i L_f(\overrightarrow{GA_i}) = 0$ . En utilisant  $\overrightarrow{f(G)f(A_i)} = L_f(\overrightarrow{GA_i})$ , on en déduit que  $\sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{f(G)f(A_i)} = 0$ . Ce qui montre que  $f(G) = \text{Bar}\{(f(A_i), \lambda_i)\}_{i \in I}$ .

La condition est suffisante :

Soit une application  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  qui conserve le barycentre. Choisissons  $A \in \mathcal{E}$  et définissons l'application  $\varphi : E \rightarrow F$  par pour tout  $u \in E$ ,  $\varphi(u) = \overrightarrow{f(A+u)f(A)}$ . Il s'agit de prouver que  $\varphi$  est linéaire.

pour tout  $u, v \in E$  et  $\alpha \in \mathbb{K}$  nous avons  $\varphi(\alpha u + v) = \overrightarrow{f(G)f(A)}$  où  $G = A + (\alpha u + v)$ .

Or  $G = \text{Bar}\{(A, -\alpha), (B, \alpha), (C, 1)\}$  où  $B = A + u, C = A + v$ , alors

$f(G) = \text{Bar}\{(f(A), -\alpha), (f(B), \alpha), (f(C), 1)\}$ , donc

$$-\alpha \overrightarrow{f(G)f(A)} + \alpha \overrightarrow{f(G)f(B)} + \overrightarrow{f(G)f(C)} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{f(G)f(A)} = \alpha \overrightarrow{f(B)f(A)} + \overrightarrow{f(C)f(A)}$$

i.e  $\overrightarrow{f(G)f(A)} = \alpha \varphi(u) + \varphi(v)$ , ce qui montre que  $\varphi$  est linéaire.

**CQFD**

## 1.5 Translation, homothétie, symétrie

### Définition 1.5.1.

Soient  $\mathcal{E}$  un espace affine dirigé par  $E$  et  $u \in E$ . L'application

$$\begin{aligned} \tau : \mathcal{E} &\longrightarrow \mathcal{E} \\ M &\longmapsto \tau(M) = M + u \end{aligned}$$

s'appelle la translation de vecteur  $u$ .

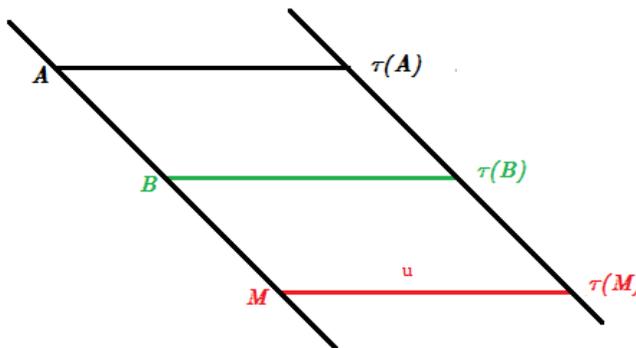


FIGURE 1.2 – Translation de vecteur  $u$ .

### Remarque 1.5.1.

$$\tau(M) = M + u \Leftrightarrow \overrightarrow{M\tau(M)} = u.$$

### Proposition 1.5.1.

Soient  $\mathcal{E}$  un espace affine dirigé par  $E$  et  $\tau$  la translation de vecteur  $u \in E$ . Alors

1) La translation  $\tau$  est un automorphisme affine, de partie linéaire  $L_\tau = Id_E$ .

2) Si  $u \neq 0$  la translation  $\tau$  n'a pas de point fixe.

**Preuve .**

1) Pour tout  $A, B \in \mathcal{E}$ , on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\tau(A)\tau(B)} &= \overrightarrow{\tau(A)A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\tau(B)} \\ &= -u + \overrightarrow{AB} + u \\ &= \overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

La partie linéaire de  $\tau$  est  $Id_E$ .

2) Soit  $M \in \mathcal{E}$ , on a :

$$\tau(M) = M \Leftrightarrow M + u = M \Leftrightarrow u = 0, \text{ contradiction.}$$

**CQFD**

**Définition 1.5.2.**

Soient  $\mathcal{E}$  un espace affine dirigé par  $E$ ,  $\Omega \in \mathcal{E}$  et  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ . L'application

$$\begin{aligned}h : \mathcal{E} &\longrightarrow \mathcal{E} \\ M &\longmapsto h(M) = \Omega + \lambda \overrightarrow{\Omega M}\end{aligned}$$

s'appelle l'homothétie de centre  $\Omega$  et de rapport  $\lambda$ .

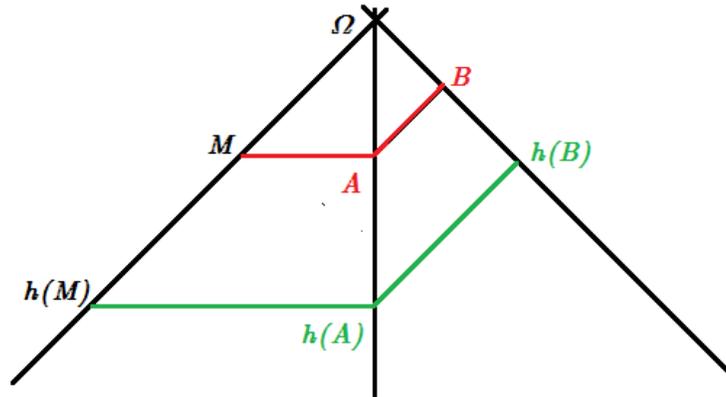


FIGURE 1.3 – Homothétie de centre  $\Omega$  et rapport  $\lambda$ .

**Remarque 1.5.2.**

1)  $h(M) = \Omega + \lambda \overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega h(M)} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}$ .

2) Les points  $\Omega, M$  et  $h(M)$  sont alignés.

**Proposition 1.5.2.**

Soient  $\mathcal{E}$  un espace affine dirigé par  $E$  et  $h$  l'homothétie de centre  $\Omega$  et de rapport  $\lambda$ . Alors

1) l'homothétie  $h$  est un automorphisme affine, de partie linéaire l'homothétie vectorielle  $L_h = \lambda Id_E$ .

2) Si  $\lambda \neq 1$  l'homothétie  $h$  admet un unique point fixe le centre  $\Omega$ .

**Preuve .**

1) Pour tout  $A, B \in \mathcal{E}$ , on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{h(A)h(B)} &= \overrightarrow{h(A)\Omega} + \overrightarrow{\Omega h(B)} \\ &= -\lambda\overrightarrow{\Omega A} + \lambda\overrightarrow{\Omega B} \\ &= \lambda\overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$

La partie linéaire de  $h$  est l'homothétie vectorielle  $\lambda Id_E$ .

2) Soit  $M \in \mathcal{E}$ , on a :

$$h(M) = M \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} = \lambda\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow (1 - \lambda)\overrightarrow{\Omega M} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} = 0 \Leftrightarrow M = \Omega.$$

**CQFD**

**Définition 1.5.3.**

Soient  $\mathcal{E}$  un espace affine dirigé par  $E$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$  deux sous espaces affines de  $\mathcal{E}$  dirigés respectivement par  $F$ ,  $G$  telles que  $E = F \oplus G$ . La projection sur  $\mathcal{F}$ , parallèlement à  $\mathcal{G}$ , est l'application  $p$  qui à tout point  $M \in \mathcal{E}$  associe l'unique point  $p(M)$  de  $\mathcal{F} \cap (M + G)$ .

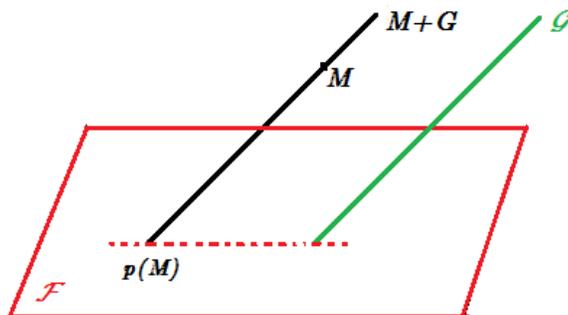


FIGURE 1.4 – Projection sur  $\mathcal{F}$ , parallèlement à  $\mathcal{G}$ .

**Remarque 1.5.3.**

Si  $M \in \mathcal{F}$ , alors  $p(M) = M$  car  $M \in \mathcal{F} \cap (M + G)$ . *i.e* l'ensemble des points fixe de  $p$  est  $\mathcal{F}$ .

**Proposition 1.5.3.**

1) La projection sur  $\mathcal{F}$ , parallèlement à  $\mathcal{G}$  est une application affine idempotente, dont la partie linéaire  $L_p$  est la projection vectorielle de  $E$  sur  $F$ , parallèlement à  $G$ .

2) Toute application affine idempotente est une projection. Plus précisément, c'est la projection sur son image parallèlement au noyau de sa partie linéaire.

**Preuve .**

1) Il est clair que  $p \circ p = p$  car pour tout  $M \in \mathcal{E}$ , on a  $p(M) \in \mathcal{F} \cap (M + G)$  et d'après la remarque 1.5.3 comme  $p(M) \in \mathcal{F}$  alors  $p(p(M)) = p(M)$ .

Il reste de montrer que  $p$  est une application affine. *i.e* pour tout  $M \in \mathcal{E}$  et  $u \in E$ , l'application  $L_p$  définie sur  $E$  par  $L_p(u) = \overrightarrow{p(M)p(M+u)}$  est linéaire.

Si  $M \in \mathcal{E}$  et  $u_1 \in F$  alors  $p(M) + u_1 \in \mathcal{F}$ , et comme  $p(M) \in M + G$ , on a  $p(M) + u_1 \in (M + u_1) + G$  i.e  $p(M) + u_1 \in \mathcal{F} \cap ((M + u_1) + G)$  d'où  $p(M) + u_1 = p(M + u_1)$ . D'autre part si  $M \in \mathcal{E}$  et  $u_2 \in G$  on a  $M + G = M + (u_2 + G) = (M + u_2) + G$  alors  $\mathcal{F} \cap (M + G) = \mathcal{F} \cap ((M + u_2) + G)$  d'où  $p(M) = p(M + u_2)$ .

Pour tout  $M \in \mathcal{E}$  et  $u \in E$ , il existe  $u_1 \in F$  et  $u_2 \in G$  tels que  $u = u_1 + u_2$ . Alors  $p(M + u) = p(M + u_1 + u_2) = p(M + u_2) + u_1 = p(M) + u_1$  et donc  $L_p(u) = \overrightarrow{p(M)p(M + u)} = u_1$ . c'est à dire  $L_p$  est la projection vectorielle sur  $F$  parallèlement à  $G$ . Comme  $L_p$  est linéaire, l'application  $p$  est bien une application affine.

2) Soit  $f$  une application affine de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{E}$  telle que  $f \circ f = f$ . On a donc  $L_f \circ L_f = L_f$ . Si  $\mathcal{F} = f(\mathcal{E})$  et  $G = \ker L_f$ . On sait que  $\mathcal{F}$  est un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$  de direction  $F = L_f(E)$ .

Montrons que  $E = F \oplus G$ . soit  $u \in F \cap G$ . Alors  $u = L_f(v)$ ,  $v \in E$  et  $L_f(u) = 0$ , d'où  $u = L_f(v) = L_f \circ L_f(v) = L_f(u) = 0$  i.e  $F \cap G = \{0\}$ .

D'autre part si  $u \in E$ ,  $u = L_f(u) + u - L_f(u)$ . Or  $L_f(u - L_f(u)) = L_f(u) - L_f \circ L_f(u) = 0$  i.e  $u - L_f(u) \in G$  et  $L_f(u) \in F$ , donc  $u \in F + G$ , ainsi  $E = F \oplus G$ .

Soit  $M \in \mathcal{E}$  alors  $f(M) \in \mathcal{F}$  par définition de  $\mathcal{F}$  et  $f(M) \in M + G$  car  $\overrightarrow{Mf(M)} \in G$  puisque  $L_f(\overrightarrow{Mf(M)}) = \overrightarrow{f(M)(f \circ f)(M)} = \overrightarrow{f(M)f(M)} = 0$ . donc  $f(M) \in \mathcal{F} \cap (M + G)$  qui est un singleton,  $f$  est donc bien la projection sur  $\mathcal{F}$  parallèlement à  $G$ . **CQFD**

### Exercice corrigé 1.5.1.

Soient  $\mathbb{R}^3$  muni le repère canonique  $\mathcal{R} = (O, B)$  et l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ M(x, y, z) &\longmapsto M'(-2y - 2z - 1, x + 3y + 2z + 1, -x - 2y - z - 1) \end{aligned}$$

Démontrer que  $f$  est une projection, et la caractériser.

#### Solution .

En effet soit  $M(x, y, z)$ ,  $M'(x', y', z') = f(M)$  et  $M''(x'', y'', z'') = (f \circ f)(M)$

$$\begin{aligned} M'' = (f \circ f)(M) &\Leftrightarrow M'' = f(M') \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x'' = -2y' - 2z' - 1 \\ y'' = x' + 3y' + 2z' + 1 \\ z'' = -x' - 2y' - z' - 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x'' = -2(x + 3y + 2z + 1) - 2(-x - 2y - z - 1) - 1 \\ y'' = (-2y - 2z - 1) + 3(x + 3y + 2z + 1) + 2(-x - 2y - z - 1) + 1 \\ z'' = -(-2y - 2z - 1) - 2(x + 3y + 2z + 1) - (-x - 2y - z - 1) - 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x'' = -2y - 2z - 1 \\ y'' = x + 3y + 2z + 1 \\ z'' = -x - 2y - z - 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow f \circ f = f. \end{aligned}$$

Cherchons  $\mathcal{F}$  l'ensemble des points fixe de  $f$ .

$$\begin{aligned} M = f(M) &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y - 2z - 1 \\ y = x + 3y + 2z + 1 \\ z = -x - 2y - z - 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x + 2y + 2z + 1 = 0 \end{aligned}$$

$\mathcal{F}$  est le plan d'équation  $x + 2y + 2z + 1 = 0$ .

Cherchons  $G = \ker L_f$ , si  $u(x, y, z), u'(x', y', z')$  alors,

$$u' = L_f(u) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -2y - 2z \\ y' = x + 3y + 2z \\ z' = -x - 2y - z \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u \in G &\Leftrightarrow \begin{cases} -2y - 2z - 1 = 0 \\ x + 3y + 2z + 1 = 0 \\ -x - 2y - z - 1 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ y = -z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = -y = z. \end{aligned}$$

$G$  est la droite vectorielle engendrée par le vecteur  $(1, -1, 1)$ .

#### Définition 1.5.4.

Soient  $\mathcal{E}$  un espace affine dirigé par  $E, \mathcal{F}, \mathcal{G}$  deux sous espaces affines de  $\mathcal{E}$  dirigés respectivement par  $F, G$  telles que  $E = F \oplus G$  et  $p$  la projection sur  $\mathcal{F}$ , parallèlement à  $\mathcal{G}$ . La symétrie par rapport à  $\mathcal{F}$ , parallèlement à  $\mathcal{G}$ , est l'application  $s$  qui à tout point  $M \in \mathcal{E}$  associe le point

$$s(M) = M + 2\overrightarrow{Mp(M)}. \quad (1.8)$$

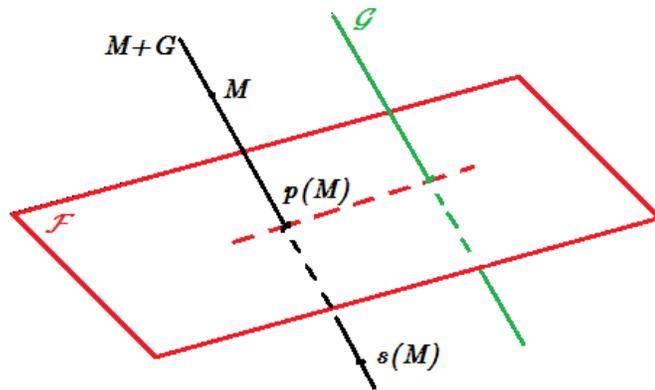


FIGURE 1.5 – Symétrie par rapport à  $\mathcal{F}$ , parallèlement à  $\mathcal{G}$ .

#### Remarque 1.5.4.

De la relation 1.8, on a

- 1) Le point  $p(M)$  est le milieu du segment  $[M, s(M)]$ ,
- 2)  $s(M) = p(M) + \overrightarrow{Mp(M)}$ ,

3)  $p(s(M)) = p(M)$ .

**Proposition 1.5.4.**

1) La symétrie par rapport à  $\mathcal{F}$ , parallèlement à  $\mathcal{G}$  est une application affine involutive, dont la partie linéaire  $L_s$  est la symétrie vectorielle de  $E$  par rapport à  $F$ , parallèlement à  $G$ .

2) Toute application affine involutive est une symétrie. Plus précisément, c'est la symétrie par rapport à l'ensemble de ses points fixes parallèlement au noyau de  $L_s + Id_E$ .

**Preuve .**

1) Pour tout  $M \in \mathcal{E}$

$$\begin{aligned} (s \circ s)(M) &= s(s(M)) \\ &= p(s(M)) + \overrightarrow{s(M)p(s(M))} \\ &= p(M) + \overrightarrow{s(M)p(M)} \\ &= p(M) + \overrightarrow{p(M)M} \\ &= M. \end{aligned}$$

d'où  $s \circ s = Id_{\mathcal{E}}$ . **i.e**  $s$  est une involutive.

Pour tout  $M \in \mathcal{E}$  et  $u \in E$

$$\begin{aligned} s(M + u) &= p(M + u) + \overrightarrow{(M + u)p(M + u)} \\ &= p(M) + L_p(u) + \overrightarrow{(M + u)(p(M) + L_p(u))} \\ &= p(M) + L_p(u) + \overrightarrow{(M + u)M} + \overrightarrow{Mp(M)} + \overrightarrow{p(M)(p(M) + L_p(u))} \\ &= p(M) + L_p(u) - u + \overrightarrow{Mp(M)} + L_p(u) \\ &= s(M) + 2L_p(u) - u \\ &= s(M) + (2L_p - Id_E)(u). \end{aligned}$$

où  $L_p$  est la projection vectorielle sur  $F$  parallèlement à  $G$ . Donc l'application  $s$  est affine, de partie linéaire  $L_s = 2L_p - Id_E$  est la symétrie vectorielle par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$ .

2) Soit  $f$  une application affine de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{E}$  telle que  $f \circ f = Id_{\mathcal{E}}$ . On a donc  $L_f \circ L_f = Id_E$ . Soit  $F = \ker(L_f - Id_E)$ ,  $G = \ker(L_f + Id_E)$  et  $\mathcal{F}$  est un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$  de direction  $F$ , d'après 1.4.1 on a  $\mathcal{F} = \{M \in \mathcal{E}, f(M) = M\}$ .

Montrons que  $E = F \oplus G$ . soit  $u \in F \cap G$ . Alors  $L_f(u) - u = 0$  et  $L_f(u) + u = 0$ , d'où  $u = 0$  **i.e**  $F \cap G = \{0\}$ .

D'autre part si  $u \in E$ ,  $u = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}L_f(u) + \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}L_f(u)$ .

On a  $(L_f - Id_E)(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}L_f(u)) = 0$  **i.e**  $\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}L_f(u) \in F$  et  $(L_f + Id_E)(\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}L_f(u)) = 0$

**i.e**  $\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}L_f(u) \in G$ , donc  $u \in F + G$ , ainsi  $E = F \oplus G$ .

Alors  $L_f$  est la symétrie vectorielle par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$ ,  $f$  est donc bien la symétrie par rapport à  $\mathcal{F}$  parallèlement à  $\mathcal{G}$ . **CQFD**

**Exercice corrigé 1.5.2.**

Dans  $\mathbb{R}^3$ , chercher la symétrie  $s$  par rapport au plan  $\mathcal{P}$  d'équation  $x + 2y + 2z + 1 = 0$ , et parallèlement à la droite vectorielle engendrée par le vecteur  $u(1, -1, 1)$ .

**Solution .**

Soit  $M(x, y, z)$  un point quelconque, et  $s(M) = M'(x', y', z')$  son image.

Il existe un réel  $\lambda$  tel que  $\overrightarrow{MM'} = \lambda u$ , donc  $x' = x + \lambda, y' = y - \lambda, z' = z + \lambda$ .

On écrit ensuite que le milieu du segment  $[M, M']$  appartient à  $\mathcal{P.i.e}$

$$\frac{1}{2}(x + x') + (y + y') + (z + z') = -1 \Rightarrow \lambda = -2(x + 2y + 2z + 1).$$

Alors l'expression analytique de  $s$

$$\begin{cases} x' = x + \lambda \\ y' = y - \lambda \\ z' = z + \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x - 4y - 4z - 2 \\ y' = 2x + 5y + 4z + 2 \\ z' = -2x - 4y - 3z - 2 \end{cases}$$

## Exercices

### Exercice 1.5.1.

Soit  $\mathcal{E}$  un  $\mathbb{K}$ -espace affine de direction  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Montrer que pour tout  $A, B, C, D \in \mathcal{E}$ .

- 1)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ ,
- 2)  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ ,
- 3) Le point  $M$  défini par  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$  ne dépend pas du point  $A$ .

### Exercice 1.5.2.

Dans l'espace affine  $\mathbb{R}^3$  muni le repère  $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ , où  $\mathcal{B}$  la base canonique. Soient les points  $A(-2, 0, 2)$ ,  $B(1, 1, 1)$ ,  $C(1, 1, -2)$  et  $G$  tels que :  $-3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + 4\overrightarrow{GC} = 0$ .

- 1) Déterminer  $\overrightarrow{OG}$  en fonction de  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$  et  $\overrightarrow{OC}$ .
- 2) Déterminer  $X_G$  la matrice des coordonnées de  $G$  dans le repère  $\mathcal{R}$ .
- 3) Déterminer  $X'_G$  dans le repère  $\mathcal{R}' = (O', \mathcal{B}')$  où  $O'(1, 1, 1)$ ,  $\mathcal{B}' = \{e'_1 = (1, 0, 1), e'_2 = (0, -1, 1), e'_3 = (1, 1, -1)\}$ .

### Exercice 1.5.3.

Montrer que :

- 1)  $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 2a + b - c & a - b + c \\ 1 + a + b - 2c & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$  est un hyperplan de  $M_2(\mathbb{R})$ .
- 2)  $\mathcal{F} = \{P(x) \in \mathbb{R}_2[X], P(1) = 2\}$  est un hyperplan de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

### Exercice 1.5.4.

Soient  $\mathcal{E}$  un espace affine dirigé par  $E$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Si  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  est une forme affine non-constante.

Montrer que  $H = \{M \in \mathcal{E}, f(M) = \lambda\}$  est hyperplan dirigé par  $\ker L_f$ .

### Exercice 1.5.5.

Soient  $A, B, C$  trois points de  $\mathbb{R}^3$  et  $f$  une application de  $\mathbb{R}^3$  sur  $\mathbb{R}^3$  définie par, pour tout point  $M$  de  $\mathbb{R}^3$  :

$$\overrightarrow{Mf(M)} = -3\overrightarrow{f(M)A} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}.$$

- 1) Déterminer  $\overrightarrow{f(M)f(N)}$  en fonction de  $\overrightarrow{MN}$ , pour tout point  $M$  et  $N$  de  $\mathbb{R}^3$ .
- 2) En déduire que  $f$  est une homothétie et donner ses caractéristiques géométriques.

### Exercice 1.5.6.

Soit  $\mathcal{E}$  un  $\mathbb{K}$ -espace affine de direction  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $f$  une application affine de  $\mathcal{E}$  vers  $\mathcal{E}$ . Soit  $A$  un point de  $\mathcal{E}$ , on pose

$$\mathcal{F} = \{A + \overrightarrow{Mf(M)}, M \in \mathcal{E}\}.$$

Démontrer que  $\mathcal{F}$  est un sous espace affine de  $\mathcal{E}$  et déterminer sa direction.

**Exercice 1.5.7.**

Dans l'espace affine  $\mathbb{R}^3$  muni le repère  $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ , où  $\mathcal{B}$  la base canonique. Soit l'application

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{définie par} \quad \begin{cases} x' = 3x + 2y - 2z - 2 \\ y' = x + 2y - z - 1 \\ z' = -x - y + 2z + 1 \end{cases}$$

$$M(x, y, z) \longmapsto f(M)(x', y', z')$$

- 1) Démontrer que  $f$  est une application affine.
- 2) Déterminer l'ensemble des points fixes par  $f$ .

**Exercice 1.5.8.**

Soient  $\mathcal{E}$  un espace affine dirigé par  $E$ ,  $f$  une automorphisme affine de  $\mathcal{E}$  et  $\tau$  la translation de vecteur  $u$  de  $E$ .

Montrer que  $f \circ \tau \circ f^{-1}$  est la translation de vecteur  $L_f(u)$ . où  $L_f(u)$  la partie linéaire de  $f$ .

**Exercice 1.5.9.**

Dans l'espace affine  $\mathbb{R}^3$  muni le repère  $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ , où  $\mathcal{B}$  la base canonique. Soit  $\mathcal{P}$  un plan et  $\mathcal{D}$  une droite tels que

$$\mathcal{P} : x + 2y + 2z = 0 \quad , \quad \mathcal{D} : \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - 2y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

- 1) Déterminer la projection  $p$  sur  $\mathcal{P}$  parallèlement à  $\mathcal{D}$ .
- 2) Déterminer la symétrie  $s$  par rapport à  $\mathcal{P}$  parallèlement à  $\mathcal{D}$ .

# Espace affine Euclidien

## Sommaire

---

<b>2.1 Espace Euclidien</b> . . . . .	<b>24</b>
2.1.1 Structure d'espace euclidien . . . . .	24
2.1.2 Norme, distance euclidienne et angle . . . . .	25
2.1.3 Orthogonalité, Sous espaces orthogonaux . . . . .	27
2.1.4 Hiperplans, droites . . . . .	33
2.1.5 Applications dans les espaces euclidiens . . . . .	34
2.1.6 Orientation, produit mixte, produit vectoriel . . . . .	39
<b>2.2 Espace affine euclidien affine</b> . . . . .	<b>43</b>
2.2.1 Structure d'espace euclidien affine . . . . .	43
2.2.2 Sous espaces affines orthogonaux . . . . .	44
2.2.3 Applications dans les espaces affines euclidiens . . . . .	45
<b>Exercices</b> . . . . .	<b>49</b>

---

Dans ce chapitre,  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

## 2.1 Espace Euclidien

### 2.1.1 Structure d'espace euclidien

**Définitions 2.1.1.**

Soit  $f : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  une application.

- 1)  $f$  est dite forme bilinéaire sur  $E$  si  $f$  est linéaire par rapport à chaque variable, *i.e*
  - i)  $\forall x, x', y \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : f(\alpha x + \beta x', y) = \alpha f(x, y) + \beta f(x', y)$  linéarité à gauche,
  - ii)  $\forall x, y, y' \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : f(x, \alpha y + \beta y') = \alpha f(x, y) + \beta f(x, y')$  linéarité à droite,
- 2)  $f$  est dite symétrique si :  $\forall x, y \in E : f(x, y) = f(y, x)$ ,
- 3)  $f$  est dite définie si :  $\forall x \in E : f(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$ ,
- 4)  $f$  est dite positive si :  $\forall x \in E : f(x, x) \geq 0$ ,

5) Un produit scalaire sur  $E$  est une forme bilinéaire symétrique, définie et positive sur  $E$ . que l'on note par  $\langle, \rangle$ .

### Exemples 2.1.1.

1)  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(u, v) \longmapsto \langle u, v \rangle = x_1y_1 + x_2y_2$  où  $u = (x_1, x_2)$  ,  $v = (y_1, y_2)$ .

Le produit scalaire canonique de  $\mathbb{R}^2$ .

2)  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$   $(u, v) \longmapsto \langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n x_iy_i$  où  $u = (x_1, \dots, x_n)$  ,  $v = (y_1, \dots, y_n)$ .

Le produit scalaire canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

### Définitions 2.1.2.

1) Un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  muni d'un produit scalaire  $\langle, \rangle$  est dit pré-hilbertien réel, noté  $(E, \langle, \rangle)$ .

2) Un espace pré-hilbertien réel de dimension finie est dit euclidien.

### Exemples 2.1.2.

1)  $(\mathbb{R}^n, \langle, \rangle)$  est un espace euclidien où  $\langle, \rangle$  le produit scalaire canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

2)  $E = (\mathcal{C}[a, b], \mathbb{R})$  muni le produit scalaire

$$\forall f, g \in E : \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

$E$  n'est pas un espace euclidien (espace pré-hilbertien).

3)  $M_n(\mathbb{R})$  muni le produit scalaire

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}) : \langle A, B \rangle = \text{tr}({}^t A, B)$$

$M_n(\mathbb{R})$  est un espace euclidien.

## 2.1.2 Norme, distance euclidienne et angle

### Définition 2.1.1.

Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien.

En posant,  $\forall x \in E : \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  est appelée norme euclidienne associée à  $\langle, \rangle$ .

### Lemme 2.1.1. (Inégalité de Cauchy Schwarz)

Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien , alors pour tout  $x, y \in E$

$$\|\langle x, y \rangle\| \leq \|x\| \|y\|. \quad (2.1)$$

**Preuve .**

Soit  $x, y \in E$

a) Si  $x = 0$  ou  $y = 0$ ,  $\|\langle x, y \rangle\| \leq \|x\|\|y\|$  est évidente.

b) Si  $x \neq 0$  pour  $\lambda \in \mathbb{R}$  on a :

$$\begin{aligned}\|\lambda x + y\|^2 &= \langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle \\ &= \lambda \langle x, \lambda x + y \rangle + \langle y, \lambda x + y \rangle \\ &= \lambda^2 \langle x, x \rangle + \lambda \langle x, y \rangle + \lambda \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 \lambda^2 + 2\langle x, y \rangle \lambda + \|y\|^2 \geq 0.\end{aligned}$$

est un trinôme positif du second degré en  $\lambda$ . Il en résulte que son discriminant  $\Delta' = \langle x, y \rangle^2 - \|x\|^2\|y\|^2$  est strictement négatif ou nul.

$$\begin{aligned}\Delta' \leq 0 &\Leftrightarrow (\|\langle x, y \rangle\| - \|x\|\|y\|)(\|\langle x, y \rangle\| + \|x\|\|y\|) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \|\langle x, y \rangle\| - \|x\|\|y\| \leq 0.\end{aligned}$$

c) Si  $x$  et  $y$  est colinéaires (liés)  $\Leftrightarrow \lambda x + y = 0$  i.e  $y = -\lambda x$  alors

$$\begin{aligned}\|y\| &= \|-\lambda x\| \\ &= \sqrt{\langle -\lambda x, -\lambda x \rangle} \\ &= \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} \\ &= \|\lambda\|\|x\|.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\langle x, y \rangle\| &= \|\langle x, -\lambda x \rangle\| = \|-\lambda \langle x, x \rangle\| \\ &= \|\lambda\|\|x\|^2 \\ &= \|x\|\|\lambda\|\|x\| \\ &= \|x\|\|y\|.\end{aligned}$$

**CQFD**

**Proposition 2.1.1.**

Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien, l'application :

$$\begin{aligned}\|\cdot\| : E &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto \|x\|\end{aligned}$$

est une norme sur  $E$ .

**Preuve .**

1)  $\forall x \in E : \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \geq 0$  car  $\langle, \rangle$  est positif.

2)  $\forall x \in E :$

$$\begin{aligned}\|x\| = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{\langle x, x \rangle} = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle x, x \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0.\end{aligned}$$

car  $\langle, \rangle$  est définie.

3)  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned}\|\lambda x\| &= \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} \\ &= \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} \\ &= |\lambda| \|x\|.\end{aligned}$$

car  $\langle, \rangle$  est bilinéaire.

4)  $\forall x, y \in E$  :  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  ( inégalité de Minkowski ou triangulaire)

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2,\end{aligned}$$

En utilisant Inégalité de Cauchy Schwarz (2.1), on obtient,

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &\leq (\|x\| + \|y\|)^2\end{aligned}$$

donc  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

**CQFD**

### Définition 2.1.2.

Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien, l'application

$$\begin{aligned}d : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y) = \|x - y\|\end{aligned}$$

est dite la distance euclidienne associée au  $\langle, \rangle$ .

### Propriété 2.1.1.

Pour tout  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  et  $x, y \in E$ .

- 1)  $\|\alpha x + \beta y\|^2 = \alpha^2 \|x\|^2 + 2\alpha\beta \langle x, y \rangle + \beta^2 \|y\|^2$ ,
- 2)  $\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} [\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2]$ ,
- 3)  $\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} [\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2]$ ,
- 4)  $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} [\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2]$ ,
- 5)  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2[\|x\|^2 + \|y\|^2]$  (Identité du parallélogramme).

**Preuve .**

La preuve découle immédiatement de la définition de la norme.

**CQFD**

### Proposition et définition 2.1.1.

Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien.

Pour tout  $x, y \in E$ , il existe un unique nombre réel noté  $\widehat{x, y} \in [0, \pi]$  tel que

$$\cos \widehat{x, y} = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}. \quad (2.2)$$

Le nombre  $\widehat{x, y}$  est appelé l'angle non orienté entre  $x$  et  $y$ .

**Preuve .**

En vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (2.1) si  $x, y \in E \setminus \{0\}$  sont, on a

$$\frac{\|\langle x, y \rangle\|}{\|x\|\|y\|} \leq 1,$$

et donc

$$-1 \leq \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|\|y\|} \leq 1,$$

Par conséquent, il existe un unique nombre réel  $\widehat{x, y} \in [0, \pi]$  tel que

$$\cos \widehat{x, y} = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|\|y\|}.$$

**CQFD**

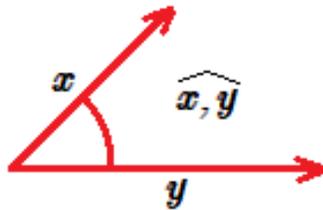


FIGURE 2.1 – Angle non orienté  $\widehat{x, y}$ .

### 2.1.3 Orthogonalité, Sous espaces orthogonaux

#### Définition 2.1.3.

Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien.

On dit que deux vecteurs  $x$  et  $y$  de  $E$  sont orthogonaux, si  $\langle x, y \rangle = 0$  et on note  $x \perp y$ .

Une famille de vecteurs  $(x_i)_{i=\overline{1, p}}$  de  $E$  est orthogonale si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

#### Proposition 2.1.2.

Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien.

Une famille orthogonale de vecteurs non nuls de  $E$  est libre.

**Preuve .**

Soient  $(x_i)_{i=\overline{1, p}}$  une famille de vecteurs non nuls de  $E$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ .

Supposons que  $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_p x_p = 0$ .

En considérant le produit scalaire avec  $x_i, i = \overline{1, p}$ .

On trouve,

$$\begin{aligned} \langle \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p, x_i \rangle &= \lambda_1 \langle x_1, x_i \rangle + \dots + \lambda_p \langle x_p, x_i \rangle \\ 0 &= \lambda_i \langle x_i, x_i \rangle \\ 0 &= \lambda_i \|x_i\|^2. \end{aligned}$$

donc  $\lambda_i = 0$ , pour tout  $i = \overline{1, p}$  (puis que  $\|x_i\| > 0, x_i \neq 0$ ).

**CQFD**

**Proposition 2.1.3.** ( Théorème de Pythagore )

Soient  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien,  $x$  et  $y$  deux vecteurs de  $E$ , on a,

$$x \perp y \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

**Preuve .**

Si  $x, y \in E : x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$ , alors

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2. \end{aligned}$$

Donc,  $x \perp y \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ .

**CQFD**

**Exemple 2.1.1.**

Soit  $E = \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$  et  $f, g \in E$  telles que  $f(t) = \cos(t)$ ,  $g(t) = t$ .

Alors on a,

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt \\ &= \int_0^{2\pi} t \cos t dt \\ &= \left[ \sin t \right]_0^{2\pi} + \left[ \cos t \right]_0^{2\pi} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc  $f \perp g$ .

**Définition 2.1.4.**

Soient  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien,  $F, G$  deux s.e.v de  $E$  et  $A$  une partie de  $E$ .

1) On dit que  $F$  et  $G$  sont orthogonaux et on note  $F \perp G$  si

$$\forall x \in F, \forall y \in G : x \perp y.$$

2) On appelle orthogonal de  $F$  et note  $F^\perp$ , l'ensemble :

$$F^\perp = \{x \in E / \forall y \in F, x \perp y\}.$$

3) On appelle orthogonal de  $A$  et on note  $A^\perp$ , l'ensemble :

$$A^\perp = \{x \in E / \forall y \in A, x \perp y\}.$$

**Proposition 2.1.4.**

Soient  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien et  $A, B$  deux partie de  $E$ ,

- 1)  $A^\perp$  est un s.e.v de  $E$ ,
- 2)  $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$ ,
- 3)  $A^\perp = (\text{vect}(A))^\perp$ ,
- 4)  $A \perp B \Leftrightarrow A \subset B^\perp \Leftrightarrow B \subset A^\perp$ ,

5) Si  $F, G$  deux s.e.v de  $E$ ,  $F \perp G \Rightarrow F \cap G = \{0\}$ .

**Preuve .**

1) Démontrons que  $A^\perp$  est un s.e.v de  $E$ . On a :  $A^\perp \neq \emptyset$  car  $0 \in A^\perp$  i.e  $\forall y \in A : \langle 0, y \rangle = 0$

Soient  $x, y \in A^\perp$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R} : \lambda x + \mu y \in A^\perp$

Soit  $z \in A : \langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle = 0$

donc  $\lambda x + \mu y \in A^\perp$ .

2) Démontrons que  $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$ .

Soit  $y \in E$  alors,

$$\begin{aligned} y \in B^\perp &\Rightarrow \forall z \in B, \langle y, z \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \forall z \in A \subset B, \langle y, z \rangle = 0 \\ &\Rightarrow y \in A^\perp \\ &\Rightarrow B^\perp \subset A^\perp. \end{aligned}$$

3) Démontrons que  $A^\perp = (\text{vect}(A))^\perp$

On a :  $A \subset \text{vect}(A) \Rightarrow (\text{vect}(A))^\perp \subset A^\perp$

Soit  $x \in A^\perp, \forall y \in \text{vect}(A) : y = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i$  où  $a_i \in A, \lambda_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, m}$

$$\langle x, y \rangle = \langle x, \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i \rangle = \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle x, a_i \rangle = 0.$$

Donc  $x \in (\text{vect}(A))^\perp \Rightarrow A^\perp \subset (\text{vect}(A))^\perp$

D'où  $A^\perp = [\text{vect}(A)]^\perp$ .

4) Démontrons que  $A \perp B \Leftrightarrow A \subset B^\perp \Leftrightarrow B \subset A^\perp$

On a :

$$\begin{aligned} A \perp B &\Leftrightarrow \forall x \in A, \forall y \in B, \langle x, y \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in A, x \in B^\perp \\ &\Leftrightarrow A \subset B^\perp. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \perp B &\Leftrightarrow \forall x \in A, \forall y \in B, \langle x, y \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall y \in B, y \in A^\perp \\ &\Leftrightarrow B \subset A^\perp. \end{aligned}$$

5) Démontrons que  $F \perp G \Rightarrow F \cap G = \{0\}$

Soit  $x \in E$ ,

$$\begin{aligned} x \in F \cap G &\Rightarrow x \in F \text{ et } x \in G \\ &\Rightarrow x \in F \text{ et } x \in F^\perp \\ &\Rightarrow x \in F \text{ et } \forall y \in F, \langle x, y \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle x, x \rangle = 0 \\ &\Rightarrow x = 0. \end{aligned}$$

i.e  $F \cap F^\perp = \{0\}$  donc  $F \cap G = \{0\}$ .

**CQFD**

**Définition 2.1.5.**

Soient  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien,  $F$  et  $G$  deux s.e.v de  $E$ .

On dit que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires orthogonaux dans  $E$  et on note  $E = F \oplus^\perp G$  si seulement si  $E = F \oplus G$  et  $F \perp G$ .

**Proposition 2.1.5.**

Soient  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien et  $F$  un s.e.v de  $E$  alors  $E = F \oplus^\perp F^\perp$ .

**Preuve .**

Supposons que  $\dim F = m \leq \dim E = n$  et  $B = \{e_1, \dots, e_m\}$  une base de  $F$ .

Il suffit de démontrer que

$$\begin{cases} F \perp F^\perp \\ F \cap F^\perp = \{0\} \\ \dim F + \dim F^\perp = \dim E \end{cases}$$

1) On a  $\forall x \in F^\perp, \forall y \in F, \langle x, y \rangle = 0$ , car  $F^\perp = \{x \in E / \forall y \in F, \langle x, y \rangle = 0\}$  i.e  $F \perp F^\perp$ .

2) Soit  $x \in E$ ,

$$\begin{aligned} x \in F \cap F^\perp &\Rightarrow x \in F \quad \text{et} \quad x \in F^\perp \\ &\Rightarrow x \in F \quad \text{et} \quad \forall y \in F, \langle x, y \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle x, x \rangle = 0 \\ &\Rightarrow x = 0. \end{aligned}$$

i.e  $F \cap F^\perp = \{0\}$ .

3)  $F + F^\perp$  est s.e.v de  $E$  alors  $\dim(F + F^\perp) \leq \dim E = n$ .

$\dim(F + F^\perp) = \dim F + \dim F^\perp - \dim(F \cap F^\perp) = \dim F + \dim F^\perp$  d'où :

$$\dim F + \dim F^\perp \leq n.$$

Il reste de montrer que  $\dim F + \dim F^\perp \geq n$ .

Soit l'application,

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ x &\longmapsto f(x) = (\langle x, e_1 \rangle, \dots, \langle x, e_m \rangle). \end{aligned}$$

Démontrons que  $\ker f = F^\perp$ .

En effet : Soit  $x \in \ker f \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \forall i = \overline{1, m}, \langle x, e_i \rangle = 0$

$$\forall y \in F, y = \sum_{i=1}^m \lambda_i e_i, \lambda_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, m}$$

$$\langle x, y \rangle = \langle x, \sum_{i=1}^m \lambda_i e_i \rangle = \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle x, e_i \rangle = 0,$$

d'où  $x \in F^\perp$  i.e  $\ker f \subset F^\perp$ .

Soit  $x \in E$ ,

$$\begin{aligned}
 x \in F^\perp &\Rightarrow \forall y \in F, \langle x, y \rangle = 0 \\
 &\Rightarrow \forall y \in F, y = \sum_{i=1}^m \lambda_i e_i, \lambda_i \in \mathbb{R}, \langle x, y \rangle = 0 \\
 &\Rightarrow \forall \lambda_i \in \mathbb{R}, \langle x, \sum_{i=1}^m \lambda_i e_i \rangle = 0 \\
 &\Rightarrow \forall \lambda_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle x, e_i \rangle = 0 \\
 &\Rightarrow \forall i = \overline{1, m}, \langle x, e_i \rangle = 0 \\
 &\Rightarrow x \in \ker f.
 \end{aligned}$$

**i.e**  $F^\perp \subset \ker f$ .

d'une part on a,

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E,$$

donc,

$$\dim F^\perp + \dim \operatorname{Im} f = n.$$

d'autre part on a,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}^m &\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f \leq m = \dim F \\
 &\Rightarrow \dim F^\perp + \dim \operatorname{Im} f \leq \dim F + \dim F^\perp \\
 &\Rightarrow n \leq \dim F + \dim F^\perp.
 \end{aligned}$$

**CQFD**

### Définition 2.1.6.

Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien de dimension  $n$ .

On appelle base orthonormée (orthonormale) de  $E$ , toute base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $E$  vérifiant ,

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

### Exemples 2.1.3.

1) La base canonique de  $\mathbb{R}^3$   $B_0 = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$  est une base orthonormale.

2)  $B = \{v_1 = (2, 1, 0), v_2 = (-3, 6, 0), v_3 = (0, 0, 2)\}$

i)  $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle = \langle v_2, v_3 \rangle = 0$  **i.e**  $B$  est une base orthogonale dans  $\mathbb{R}^3$ .

ii)  $\|v_1\| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \neq 1$  **i.e**  $B$  n'est pas une base orthonormale dans  $\mathbb{R}^3$ .

### Proposition 2.1.6. (Orthogonalisation de Gram-Schmidt)

Soient  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien de dimension  $n$  et  $\{v_i\}_{i=\overline{1, m}}$ , ( $m \leq n$ ) une famille libre de  $E$ , alors il existe une famille libre orthogonale  $\{w_i\}_{i=\overline{1, m}}$  telle que

$$\operatorname{vect}\{v_1, \dots, v_m\} = \operatorname{vect}\{w_1, \dots, w_m\}.$$

**Preuve .**

On construit les vecteurs de  $\{w_i\}_{i=\overline{1,m}}$  comme des combinaisons linéaires des vecteurs de  $\{v_i\}_{i=\overline{1,m}}$  par récurrence.

1) Si  $m = 2$ , on pose  $w_1 = v_1$  et  $w_2 = v_2 - \lambda v_1$ , où  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\langle w_2, w_1 \rangle = \langle v_2 - \lambda v_1, v_1 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle - \lambda \|v_1\|^2$$

$$\langle w_2, w_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} \Leftrightarrow w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1,$$

Alors  $w_2 \neq 0$ , sinon  $v_1$  et  $v_2$  sont liés, impossible. Donc  $\{w_1, w_2\}$  est orthogonale libre.

On va démontrer  $\text{vect}\{v_1, v_2\} = \{w_1, w_2\}$ , soit  $x \in E$

$$\begin{aligned} x \in \text{vect}\{w_1, w_2\} &\Leftrightarrow x = \alpha w_1 + \beta w_2, \text{ où } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow x = \alpha v_1 + \beta \left( v_2 - \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 \right) \\ &\Leftrightarrow x = \left( \alpha - \beta \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} \right) v_1 + \beta v_2 \\ &\Leftrightarrow x \in \text{vect}\{v_1, v_2\}, \end{aligned}$$

2) Supposons que  $\{w_i\}_{i=\overline{1,m}}$  construit à partir de  $\{v_i\}_{i=\overline{1,m}}$ , telle que

$$\text{vect}\{v_1, \dots, v_m\} = \text{vect}\{w_1, \dots, w_m\}.$$

3) Démontrons que  $\{w_i\}_{i=\overline{1,m+1}}$  construit à partir de  $\{v_i\}_{i=\overline{1,m+1}}$ , telle que :

$$\text{vect}\{v_1, \dots, v_{m+1}\} = \text{vect}\{w_1, \dots, w_{m+1}\},$$

on pose  $w_{m+1} = v_{m+1} - \sum_{i=1}^m \lambda_i w_i$ , où  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ,

pour tout  $j = \overline{1, m}$

$$\begin{aligned} \langle w_{m+1}, w_j \rangle &= \langle v_{m+1} - \sum_{i=1}^m \lambda_i w_i, w_j \rangle \\ &= \langle v_{m+1}, w_j \rangle - \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle w_i, w_j \rangle \\ &= \langle v_{m+1}, w_j \rangle - \lambda_j \|w_j\|^2, \end{aligned}$$

$$\langle w_{m+1}, w_j \rangle = 0 \Leftrightarrow \lambda_j = \frac{\langle v_{m+1}, w_j \rangle}{\|w_j\|^2} \Leftrightarrow w_{m+1} = v_{m+1} - \sum_{i=1}^m \frac{\langle v_{m+1}, w_i \rangle}{\|w_i\|^2} w_i.$$

Alors  $w_{m+1} \neq 0$  car les vecteurs  $\{w_i\}_{i=\overline{1,m}}$  sont combinaisons linéaires des vecteurs  $\{v_i\}_{i=\overline{1,m}}$ ,  $v_{m+1}$  ne peut être combinaison linéaire de ceux-ci (car  $\{v_i\}_{i=\overline{1,m+1}}$  est libre), donc  $\{w_i\}_{i=\overline{1,m+1}}$  est orthogonale libre.

On va démontrer  $\text{vect}\{v_1, \dots, v_{m+1}\} = \text{vect}\{w_1, \dots, w_{m+1}\}$ , soit  $x \in E$

$$\begin{aligned}
x \in \text{vect}\{w_1, \dots, w_{m+1}\} &\Leftrightarrow x = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_m w_m + \alpha_{m+1} w_{m+1}, \text{ où } \alpha_i \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow x = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_m w_m + \alpha_{m+1} v_{m+1} - \alpha_{m+1} \sum_{i=1}^m \lambda_i w_i \\
&\Leftrightarrow x = \sum_{i=1}^m (\alpha_i - \lambda_i) w_i + \alpha_{m+1} v_{m+1} \\
&\Leftrightarrow x \in \text{vect}\{v_1, \dots, v_{m+1}\}.
\end{aligned}$$

CQFD

**Définition 2.1.7.**

Soient  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien de dimension  $n$  et  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  une base de  $E$ , Pour tout  $k = \overline{1, n}$  on pose

$$w_1 = v_1, \quad w_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, w_i \rangle}{\|w_i\|^2} w_i, \quad k \geq 2 \quad (2.3)$$

$B' = \{w_1, \dots, w_n\}$  est appelée l'orthogonalisée de  $B$ .

$B'' = \left\{ \frac{w_1}{\|w_1\|}, \dots, \frac{w_n}{\|w_n\|} \right\}$  est appelée l'orthonormalisée de  $B$ .

**Corollaire 2.1.1.**

Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien, alors  $E$  admet au moins une base orthonormée.

**Preuve .**

D'après l'orthogonalisation de Gram-Schmidt, on peut à partir d'une base donnée  $\{v_1, \dots, v_n\}$  de  $E$  construire une base orthogonale  $\{w_1, \dots, w_n\}$  de  $E$ , il est clair que  $\left\{ \frac{w_1}{\|w_1\|}, \dots, \frac{w_n}{\|w_n\|} \right\}$  est alors orthonormée. CQFD

**Exercice corrigé 2.1.1.**

$\mathbb{R}^3$  muni sa structure euclidienne usuelle.

Orthogonaliser la famille  $B = \{u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (1, 0, 1), u_3 = (0, 1, 1)\}$ .

**Solution .**

On a  $\det(u_1, u_2, u_3) = 2 \neq 0$  donc  $B$  est une base de  $\mathbb{R}^3$

On pose :  $w_1 = u_1 = (1, 1, 0)$

$$\begin{aligned}
w_2 &= u_2 - \frac{\langle u_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 \\
&= (1, 0, 1) - \frac{1}{2}(1, 1, 0) \\
&= \left( \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_3 &= u_3 - \frac{\langle u_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle u_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2 \\
&= (0, 1, 1) - \frac{1}{2}(1, 1, 0) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 1\right) \\
&= \left(\frac{-2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)
\end{aligned}$$

donc  $B' = \{w_1, w_2, w_3\}$  est l'orthogonalisée de  $B$ .

### 2.1.4 Hiperplans, droites

#### Définitions 2.1.3.

Soient  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien de dimension  $n$  et  $F$  un s.e.v de  $E$ .

- 1) On dit que  $F$  est une droite vectorielle si  $\dim F = 1$ ,
- 2) On dit que  $F$  est un hyperplan vectoriel si  $\dim F = n - 1$ .

#### Remarque 2.1.1.

Soit  $F$  un s.e.v de  $E$  comme  $F \oplus F^\perp = E$ , alors

- 1) Si  $F$  est un hyperplan  $\Rightarrow F^\perp$  est une droite,
- 2) Si  $F$  est une droite  $\Rightarrow F^\perp$  est un hyperplan.

#### Définition 2.1.8.

Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien.

La normale à un hyperplan  $H$  de  $E$  est par définition la droite vectorielle  $H^\perp$ . Tout vecteur non nul de cette droite est dit vecteur normal à  $H$ .

#### Proposition 2.1.7.

Soient  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien et  $\{e_1, \dots, e_n\}$  une base orthogonale de  $E$ .

Si  $H$  un hyperplan de  $E$  et  $v = \sum_{i=1}^n a_i e_i$  un vecteur normal à  $H$ . Alors  $H$  est définie par l'équation  $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$ .

#### Preuve .

Si  $x = \sum_{i=1}^n a_i e_i \in E$  alors

$$\begin{aligned}
u \in H &\Leftrightarrow u \perp x \\
&\Leftrightarrow \langle u, x \rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0.
\end{aligned}$$

CQFD

#### Exercice corrigé 2.1.2.

Soient  $u_1 = (3, -1, 1)$ ,  $u_2 = (3, 0, -3)$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  et  $H = \text{vect}(u_1, u_2)$ . Déterminer une équation cartésienne de  $H$ .

**Solution .**

On détermine un vecteur normal  $n = (\alpha, \beta, \gamma)$  à  $H$

$$\begin{cases} \langle n, u_1 \rangle = 0 \\ \langle n, u_2 \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha - \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha - 3\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 4\gamma \\ \alpha = \gamma \end{cases}$$

On prend :  $\gamma = 1 \Rightarrow \beta = 4$  et  $\alpha = 1$ ,  $n = (1, 4, 1)$   
 $u = (x, y, z) \in H \Leftrightarrow \langle u, n \rangle = 0 \Leftrightarrow x + 4y + z = 0$ .  
d'où  $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 4y + z = 0\}$ .

**2.1.5 Applications dans les espaces euclidiens****Projection orthogonale, symétries orthogonales, réflexions****Définition 2.1.9.**

Soient  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien et  $F, G$  deux s.e.v supplémentaires dans  $E$ .  
Tout  $x \in E$  s'écrit sous la forme (unique)  $x = x_F + x_G$  où  $x_F \in F, x_G \in G$ .

1) L'application

$$\begin{aligned} P : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto x_F \end{aligned}$$

est appelée projection sur  $F$  dans la direction  $G$ .

1) L'application

$$\begin{aligned} S : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto x_F - x_G \end{aligned}$$

est appelée symétrie par rapport à  $F$  dans la direction  $G$ .

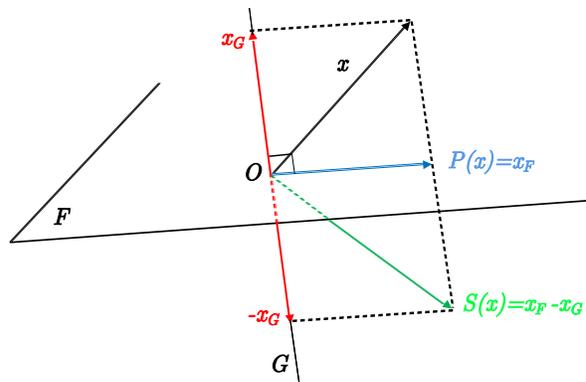


FIGURE 2.2 – Projection sur  $F$ , symétrie par rapport à  $F$  dans la direction  $G$ .

**Propriétés 2.1.1.**

Soient  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien,  $F, G$  deux s.e.v supplémentaires dans  $E$  et  $P$  ( resp.,  $S$ ) la projection sur  $F$  dans la direction  $G$  ( resp., la symétrie par rapport à  $F$  dans la direction  $G$ ), alors

- 1)  $P^2 = P$ ,
- 2)  $S^2 = Id$ ,
- 3)  $S = 2P - Id_E$ ,
- 4)  $\ker P = G = \ker(S + Id_E)$ ,
- 5)  $ImP = F = \ker(S - Id_E)$ .

**Preuve .**

Soit  $x \in E$  tel que  $x = x_F + x_G$  alors,

$$\begin{aligned}
 1) P^2(x) &= P(P(x)) \\
 &= P(x_F) \\
 &= P(x_F + 0) \\
 &= x_F \\
 &= P(x),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) S^2(x) &= S(S(x)) \\
 &= S(x_F - x_G) \\
 &= S(x_F) - S(x_G) \\
 &= (x_F - 0) - (0 - x_G) = x_F + x_G \\
 &= x,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) (2P - Id_E)(x) &= 2P(x) - x \\
 &= 2x_F - (x_F + x_G) \\
 &= x_F - x_G \\
 &= S(x),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \bullet x \in \ker P &\Leftrightarrow P(x) = 0 \\
 &\Leftrightarrow x_F = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = x_G \in G,
 \end{aligned}$$

$$\bullet S = 2P - Id_E \Leftrightarrow P = \frac{1}{2}(S + Id_E) \quad \text{d'où } G = \ker(S + Id_E).$$

$$\begin{aligned}
 5) \bullet y \in ImP &\Leftrightarrow \exists x \in E, y = P(x) \\
 &\Leftrightarrow \exists x_F \in F, y = P(x) = x_F \\
 &\Leftrightarrow y \in F,
 \end{aligned}$$

- $y \in F \Leftrightarrow y \in \text{Im}P$
- $\Leftrightarrow y \in \text{Im}(S + \text{Id}_E)$
- $\Leftrightarrow \exists x \in E, y = S(x) + x$
- $\Leftrightarrow \exists x \in E, S(y) = S^2(x) + S(x)$
- $\Leftrightarrow \exists x \in E, S(y) = x + S(x)$
- $\Leftrightarrow S(y) = y$
- $\Leftrightarrow (S - \text{Id}_E)(y) = 0$
- $\Leftrightarrow y \in \ker(S - \text{Id}_E)$ .

CQFD

**Définition 2.1.10.**

Soient  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien et  $F$  un s.e.v de  $E$ .

On appelle projection orthogonale (ou projecteur orthogonal) sur  $F$ , noté  $P_F$  la projection sur  $F$  dans la direction (parallèlement) à  $F^\perp$ .

**Théorème 2.1.1.**

Soient  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien,  $B = \{e_1, \dots, e_m\}$  une base orthonormée de  $F$  et  $P_F$  la projection orthogonale sur  $F$ , alors pour tout  $x \in E$  :  $p_F(x) = \sum_{i=1}^m \langle x, e_i \rangle e_i$ .

**Preuve .**

Complétons la base  $\{e_1, \dots, e_m\}$  de  $F$  en une base orthonormée  $\{e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$  de  $E$ , alors  $F^\perp$  admet  $\{e_{m+1}, \dots, e_n\}$  pour base orthonormée.

Pour tout  $x \in E$ ,

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^m \langle x, e_i \rangle e_i \\ &= \sum_{i=1}^m \langle x, e_i \rangle e_i + \sum_{i=m+1}^n \langle x, e_i \rangle e_i \\ &= x_F + x_{F^\perp} \end{aligned}$$

$$P_F(x) = x_F = \sum_{i=1}^m \langle x, e_i \rangle e_i.$$

CQFD

**Définition 2.1.11.**

Soient  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien et  $F$  un s.e.v de  $E$ .

On appelle symétrie orthogonale par rapport à  $F$ , noté  $S_F$  la symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $F^\perp$ .

Si  $F$  est un hyperplan, la symétrie orthogonale par rapport à  $F$  est dite réflexion noté  $R_F$ .  $F$  est appelé hyperplan de la réflexion (axe de la réflexion si  $E$  est de dimension 2).

**Exercice corrigé 2.1.3.**

Déterminer dans  $\mathbb{R}^3$  euclidien canonique la symétrie orthogonale par rapport à

$$F = \{(x, y, z), x + 2y - z = 0\}.$$

**Solution .**

- $v = (x, y, z) \in F \Leftrightarrow v = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 2)$  alors :  
 $F = \text{vect}(v_1, v_2)$  où  $v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (0, 1, 2)$   
 donc  $\{v_1, v_2\}$  est une base de  $F$   
 D'après l'orthogonalisation de Gram-Schmidt,  
 on a  $\{u_1, u_2\}$  est une base orthonormale de  $F$ , où

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1), \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1).$$

- la projection orthogonale  $P_F$  sur  $F$ , pour tout  $v \in \mathbb{R}^3, v = (x, y, z)$

$$\begin{aligned} P_F(v) &= \langle v, u_1 \rangle u_1 + \langle v, u_2 \rangle u_2 \\ &= \frac{1}{2}(x+y)(1, 0, 1) + \frac{1}{3}(-x+y+z)(-1, 1, 1) \\ &= \frac{1}{6}(5x-2y+z, -2x+2y+2z, x+2y+5z) \end{aligned}$$

- La symétrie orthogonale par rapport à  $F$ ,  $S_F = 2P_F - Id_E$   
 pour tout  $v \in \mathbb{R}^3, v = (x, y, z)$

$$\begin{aligned} S_F(v) &= 2P_F(v) - v \\ &= \frac{1}{3}(2x-2y+z, -2x-y+2z, x+2y+2z) \end{aligned}$$

Comme  $\dim F = 2$ ,  $F$  est un hyperplan donc  $S_F = R_F$  est une réflexion.

## Isométries vectorielles, similitudes

### Définition 2.1.12.

Soient  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On dit que  $f$  est une isométrie vectorielle si  $f$  conserve le produit scalaire *i.e* pour tout  $x, y \in E$

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle. \quad (2.4)$$

### Remarque 2.1.2.

Si  $f$  isométrie vectorielle, on dit aussi que  $f$  est un automorphisme orthogonal, l'ensemble des automorphismes orthogonaux de  $E$  et noté  $\mathcal{O}(E)$ .

### Exemple 2.1.2.

- 1)  $Id_E$  et  $-Id_E$  sont des isométries,
- 2) Les symétries orthogonales sont des isométries.

### Théorème 2.1.2.

Soient  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien et  $f \in \mathcal{L}(E)$ , les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1)  $f$  est une isométrie vectorielle,

- 2)  $\forall x \in E$ ,  $\|f(x)\| = \|x\|$  ( $f$  conserve la norme),  
 3) Il existe une base orthonormée  $B$  de  $E$ , telle que  $f(B)$  soit une base orthonormée de  $E$ ,  
 4) Pour toute base orthonormée  $B$  de  $E$ ,  $f(B)$  est une base orthonormée de  $E$ .

**Preuve .**

I) 1)  $\Rightarrow$  4)

Soit  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  une base orthonormée de  $E$ , on a  $f(B) = \{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$

pour tous  $i, j = \overline{1, n} : \langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \gamma_{ij}$

donc  $f(B)$  est une base orthonormée de  $E$ ,

II) 4)  $\Rightarrow$  3) évident,

III) 3)  $\Rightarrow$  2)

Soit  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  une base orthonormée de  $E$  alors  $f(B)$  est une base orthonormée de  $E$ .

Pour tout  $x \in E$ ,  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  on a :

$$\|f(x)\| = \left\| f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \|x\|.$$

IV) 2)  $\Rightarrow$  1)

Supposons  $f$  préserve la norme Pour tout  $x, y \in E$

$$\begin{aligned} \langle f(x), f(y) \rangle &= \frac{1}{2} [\|f(x) + f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2] \\ &= \frac{1}{2} [\|f(x+y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2] \\ &= \frac{1}{2} [\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2] \\ &= \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

**CQFD**

### Exemple 2.1.3.

L'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y\right) \end{aligned}$$

est une isométrie.

En effet, pour tout  $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$  :

$$\begin{aligned} \langle f(x, y), f(x', y') \rangle &= \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)\left(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'\right) \\ &= xx' + yy' \\ &= \langle (x, y), (x', y') \rangle. \end{aligned}$$

**Proposition 2.1.8.**

Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace vectoriel euclidien et  $f : E \rightarrow E$  une application qui conserve le produit scalaire. Alors  $f$  est linéaire.

**Preuve .**

Supposons que  $f$  conserve le produit scalaire **i.e** pour tout  $x, y \in E$   $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ , entraîne que pour tout  $x, y \in E$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \|f(\alpha x + y) - \alpha f(x) - f(y)\|^2 &= \|f(\alpha x + y)\|^2 + \alpha^2 \|f(x)\|^2 + \|f(y)\|^2 + 2\alpha \langle f(x), f(y) \rangle \\ &\quad - 2\alpha \langle f(\alpha x + y), f(x) \rangle - 2 \langle f(\alpha x + y), f(y) \rangle \\ &= \|\alpha x + y\|^2 + \alpha^2 \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\alpha \langle x, y \rangle \\ &\quad - 2\alpha \langle \alpha x + y, x \rangle - 2 \langle \alpha x + y, y \rangle \\ &= \|\alpha x + y\|^2 - \|\alpha x + y\|^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

**CQFD**

**Proposition 2.1.9.**

Soient  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien,  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $A$  la matrice de  $f$  dans une base orthonormée  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  de  $E$ . Alors

$$f \in \mathcal{O}(E) \Leftrightarrow {}^t A.A = I_n. \quad (2.5)$$

**Preuve .**

Notons  $C = {}^t A.A$ , le coefficient  $c_{ij}$  de  $C$  égal à  $c_{ij} = L_i({}^t A).C_j(A) = {}^t C_i(A).C_j(A)$

Mais la colonne  $C_j(A)$  est les coordonnées de  $f(e_j)$  dans la base  $B$ .

d'où  $c_{ij} = \langle f(e_i), f(e_j) \rangle$ , par suite

$$\begin{aligned} {}^t A.A = I_n &\Leftrightarrow \langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \delta_{ij} \\ &\Leftrightarrow \text{La famille } \{f(e_1), \dots, f(e_n)\} \text{ est une base orthonormée de } E \\ &\Leftrightarrow f \in \mathcal{O}(E). \end{aligned}$$

**CQFD**

**Proposition 2.1.10.**

Soient  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien et  $f \in \mathcal{O}(E)$  alors.

$$|\det(f)| = 1.$$

**Preuve .**

Si  $f \in \mathcal{O}(E)$  et  $A$  sa matrice dans une base orthonormée.

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{O}(E) &\Rightarrow {}^t A.A = I_n \\ &\Rightarrow \det({}^t A.A) = \det(I_n) = 1 \\ &\Rightarrow [\det(A)]^2 = 1 \\ &\Rightarrow |\det(A)| = 1 \\ &\Rightarrow |\det(f)| = 1. \end{aligned}$$

**CQFD**

**Définition 2.1.13.**

Soient  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien et  $f \in \mathcal{O}(E)$ .

- Les éléments de  $\mathcal{O}(E)$  tels que  $\det(f) = 1$  sont appelés les isométries vectorielles directes.
- Les éléments de  $\mathcal{O}(E)$  tels que  $\det(f) = -1$  sont appelés les isométries vectorielles indirectes.

**Définition 2.1.14.**

Soient  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien.

Un endomorphisme  $f \in \mathcal{L}(E)$  est une similitude vectorielle, s'il existe un réel  $k > 0$ , appelé rapport de la similitude tel que, pour tout  $x \in E$ ,  $\|f(x)\| = k\|x\|$ .

**Exemple 2.1.4.**

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (\sqrt{3}x - y, x + \sqrt{3}y) \end{aligned}$$

est une similitude de rapport  $k = 2$ . En effet, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  :

$$\|f(x, y)\| = \sqrt{(\sqrt{3}x - y)^2 + (x + \sqrt{3}y)^2} = \sqrt{4(x^2 + y^2)} = 2\|(x, y)\|.$$

**Proposition 2.1.11.**

Soient  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien. Pour toute similitude  $f$  de rapport  $k$ , il existe une unique isométrie  $g$  telle que  $f = kg$ .

**Preuve .**

Soit  $f$  une similitude de rapport  $k$ , comme  $k > 0$ , on définit  $g$  par  $g = \frac{1}{k} \cdot f$  (unique),

pour tout  $x \in E$ ,  $\|g(x)\| = \frac{1}{k}\|f(x)\| = \frac{1}{k} \cdot k\|x\| = \|x\|$ .

**CQFD**

**Définition 2.1.15.**

Soient  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien.

Les similitudes de déterminant positif sont appelées similitudes directes. Les similitudes de déterminant négatif sont appelées similitudes indirectes.

**2.1.6 Orientation, produit mixte, produit vectoriel****Lemme 2.1.2.**

Soient  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien,  $\mathcal{B}$  l'ensemble des bases de  $E$  et pour toute  $B, B' \in \mathcal{B}$ ,  $P$  est la matrice de passage de  $B$  à  $B'$ . La relation binaire  $\mathcal{R}$  définie sur  $\mathcal{B}$  par,

$$B \mathcal{R} B' \Leftrightarrow \det(P) > 0. \quad (2.6)$$

est une relation d'équivalence, pour cette relation il y a exactement deux classes d'équivalences.

**Preuve .**

On vérifie aisément que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.

1) La réflexivité : résulte du fait que si  $B \in \mathcal{B}$ , la matrice de passage de  $B$  à  $B$  est la matrice unité  $I_n$  et  $\det(I_n) = 1$ .

2) La symétrie : résulte du fait que si  $B, B' \in \mathcal{B}$ , la matrice de passage de  $B'$  à  $B$  est l'inverse de la matrice de passage  $P$  de  $B$  à  $B'$ , et comme  $\det(P^{-1}) = \frac{1}{\det(P)}$ .

3) La transitivité : résulte du fait que si  $B, B', B'' \in \mathcal{B}$ , la matrice de passage de  $B$  à  $B''$  est le produit  $PQ$  des matrices de passage  $P$  de  $B$  à  $B'$  et  $Q$  de  $B'$  à  $B''$ , et comme  $\det(PQ) = \det(P) \cdot \det(Q)$ .

Soient enfin  $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  une base de  $E$  et  $B' = \{-e_1, e_2, \dots, e_n\}$ . Le déterminant de la matrice de passage  $P$  de  $B$  à  $B'$  est  $-1$ , ce qui montre qu'il existe au moins deux classes d'équivalences. Soient  $B''$  une troisième base de  $E$  et  $Q$  la matrice de passage de  $B'$  à  $B''$ .

La formule  $\det(PQ) = \det(P) \cdot \det(Q)$  montre que soit  $\det(Q) > 0$ , soit  $\det(PQ) > 0$ , et donc que la classe d'équivalence de  $B''$  est soit celle de  $B'$ , soit celle de  $B$ . **CQFD**

#### Définitions 2.1.4.

Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien.

1) Une orientation de  $E$  est une classe d'équivalence pour la relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  définie par la formule (2.6).

2) L'espace  $E$  est orienté lorsqu'un choix est fait d'une orientation de  $E$ .

3) Une base de  $E$  est dite directe si elle est dans l'orientation de  $E$ , indirecte ou rétrogrades dans le cas contraire.

#### Exemples 2.1.4.

Supposons que  $(u, v)$  soit une base directe de  $E$ , avec  $\dim E = 2$ .

- Les bases  $(u, v)$ ,  $(-u, -v)$  et  $(-v, u)$  sont directes.
- Les bases  $(-u, v)$ ,  $(v, u)$  et  $(-v, -u)$  sont indirectes.

#### Définition 2.1.16.

Soient  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien orienté de dimension  $n \geq 2$ ,  $H$  un hyperplan de  $E$  et  $\mathbf{n}$  un vecteur normal à  $H$ . L'ensemble des bases  $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$  de  $H$  telle que la base  $\{e_1, \dots, e_{n-1}, \mathbf{n}\}$  soit une base directe de  $E$  est l'une des deux orientations de  $H$  appelée orientation normale de  $H$  associée au vecteur  $\mathbf{n}$ . Toute base de  $H$  appartenant à cette orientation s'appelle base directement orthogonale à  $\mathbf{n}$ .

#### Lemme 2.1.3.

Soient  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien orienté,  $B, B'$  deux bases orthonormées directes de  $E$  et  $P$  la matrice de passage de  $B$  à  $B'$ . Alors  ${}^t P P = I_n$  et  $\det(P) = 1$ .

**Preuve .**

Soient  $B' = \{e_1, \dots, e_n\}$  et  $C_i$  la matrice des coordonnées de  $e_i$  dans  $B$  on a  $P = (C_1 \dots C_n)$ . Par suite,

$${}^t P P = \begin{pmatrix} {}^t C_1 \\ \vdots \\ {}^t C_n \end{pmatrix} (C_1 \dots C_n) = (\langle e_i, e_j \rangle) = (\delta_{ij}) = I_n.$$

On en déduit,

$$1 = \det(I_n) = \det({}^t P P) = \det({}^t P) \det(P) = \det(P)^2,$$

Comme,  $B$  et  $B'$  sont deux bases orthonormées directes, donc  $\det(P) > 0$ , d'où  $\det(P) = 1$ .

CQFD

**Lemme 2.1.4.**

Soient  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien orienté,  $B$  et  $B'$  deux bases orthonormées directes de  $E$ . Pour toute famille  $(x_1, \dots, x_n)$  de vecteurs de  $E$ , on a

$$\det(x_1, \dots, x_n)_B = \det(x_1, \dots, x_n)_{B'}.$$

**Preuve .**

Soit  $(A$  resp.  $A')$  la matrice des coordonnées de  $(x_1, \dots, x_n)$  dans la base  $(B$  resp.  $B')$  et  $P$  la matrice de passage de  $B$  à  $B'$ , on a  $A = PA'$  d'où

$$\det(x_1, \dots, x_n)_B = \det(A) = \det(PA') = \det(P) \det(A') = 1 \cdot \det(A') = \det(x_1, \dots, x_n)_{B'}.$$

CQFD

**Définition 2.1.17.**

Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien orienté de dimension  $n$ . Le produit mixte des vecteurs  $x_1, \dots, x_n$  (dans cet ordre) est le réel  $\det(x_1, \dots, x_n)_B$ , où  $B$  est une base orthonormée directe quelconque, on le note  $[x_1, \dots, x_n]$ . **i.e**  $[x_1, \dots, x_n] = \det(x_1, \dots, x_n)_B$ .

**Remarques 2.1.1.**

- 1) Le produit mixte est une forme  $n$ -linéaire alternée sur  $E$ ,
- 2)  $[x_1, \dots, x_n] = 0$  si et seulement si  $x_1, \dots, x_n$  sont linéairement dépendants,
- 3) Si  $[x_1, \dots, x_n] > 0$  (resp.  $[x_1, \dots, x_n] < 0$ ),  $\{x_1, \dots, x_n\}$  est une base directe (resp. indirecte).

**Lemme 2.1.5.**

Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien, alors pour toute forme linéaire  $\varphi$  de  $E$ , il existe un unique  $y \in E$ , tel que pour tout  $x \in E$ ,  $\varphi(x) = \langle x, y \rangle$ .

**Preuve .**

On sait que le produit scalaire sur  $E$  est, en particulier, une forme bilinéaire symétrique non dégénéré, donc l'application  $\psi : E \rightarrow E^*$  définie par pour tous  $x, y \in E$ ,  $\psi(y)(x) = \langle x, y \rangle$  est bijective. Donc pour chaque  $\varphi \in E^*$ , il existe un unique  $y \in E$ , tel que  $\psi(y) = \varphi$  et ainsi, on aura pour tout  $x \in E$ ,  $\varphi(x) = \psi(y)(x) = \langle x, y \rangle$ .

CQFD

**Proposition et définition 2.1.2.**

Soient  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien orienté de dimension 3 et  $u, v$  deux vecteurs de  $E$ . L'unique vecteur  $a \in E$  tel que, pour tout  $w \in E$ ,  $[u, v, w] = \langle a, w \rangle$ , s'appelle le produit vectoriel de  $u$  et  $v$  (dans cet ordre) est noté  $u \wedge v$ , **i.e**  $[u, v, w] = \langle u \wedge v, w \rangle$ .

**Preuve .**

Considérons l'application  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$  définie par pour tout  $w \in E$ ,

$$\varphi(w) = [u, v, w] = \det(u, v, w)$$

Puisque le déterminant est une forme multilinéaire, alors  $\varphi$  est une forme linéaire sur  $E$ , donc d'après le lemme précédent, il existe un unique  $a \in E$ , tel que, pour tout  $w \in E$ ;  $\varphi(w) = \det(u, v, w) = \langle a, w \rangle$ .

CQFD

**Propriétés 2.1.2.**

Soit  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien orienté de dimension 3, alors

- 1) L'application  $(u, v) \longrightarrow u \wedge v$  est bilinéaire antisymétrique,
- 2) Pour tous  $u, v, w$  de  $E$ , alors  $\langle u \wedge v, w \rangle = \langle u, v \wedge w \rangle$ ,
- 3) Pour tous  $u, v$  de  $E$ , le vecteur  $u \wedge v$  est orthogonal à  $u$  et à  $v$ ,
- 4) Si  $u, v$  sont libres, alors la famille  $\{u, v, u \wedge v\}$  est une base directe,
- 5)  $u, v$  sont liés, si et seulement si  $u \wedge v = 0$ .

**Preuve .**

1) • La bilinéarité du produit vectoriel résulte immédiatement de la bilinéarité du produit scalaire et de la linéarité du produit mixte par rapport à chaque variable.

• Pour tout  $w \in E$ , on a  $\langle u \wedge v + v \wedge u, w \rangle = [u, v, w] + [v, u, w] = [u, v, w] - [u, v, w] = 0$ , donc le vecteur  $u \wedge v + v \wedge u$  est orthogonal à tout le monde, il est nul. **i.e**  $u \wedge v = -v \wedge u$

2) Pour tous  $u, v, w \in E$ , alors

$$\langle u \wedge v, w \rangle = [u, v, w] = -[v, u, w] = [v, w, u] = \langle v \wedge w, u \rangle = \langle u, v \wedge w \rangle.$$

3) Pour tous  $u, v$  de  $E$ ,  $\langle u \wedge v, u \rangle = [u, v, u] = 0$ , de même  $\langle u \wedge v, v \rangle = [u, v, v] = 0$  (car le produit mixte est un déterminant), d'où le vecteur  $u \wedge v$  est orthogonal à  $u$  et à  $v$ .

4) Si  $u, v$  sont libres, on la complète en une base  $\{u, v, w\}$ , alors  $\langle u \wedge v, w \rangle = [u, v, w] \neq 0$  ce qui prouve que  $u \wedge v \neq 0$ . En particulier, on a

$$[u, v, u \wedge v] = \langle u \wedge v, u \wedge v \rangle = \|u \wedge v\|^2 > 0$$

ce qui prouve que  $\{u, v, u \wedge v\}$  est une base directe de  $E$ .

5) • Si  $u, v$  sont liés, alors Pour tout  $w \in E$ , on a  $\langle u \wedge v, w \rangle = [u, v, w] = 0$  (car le produit mixte est un déterminant), donc le vecteur  $u \wedge v$  est orthogonal à tout le monde, **i.e**  $u \wedge v = 0$ .

• Réciproquement, il suffit de démontrer que  $u, v$  sont libres, alors  $u \wedge v \neq 0$ . Cela a été démontré dans la propriété 4. **CQFD**

**Proposition 2.1.12.**

Soient  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien orienté de dimension 3 et  $\{e_1, e_2, e_3\}$  une base orthonormée directe de  $E$ . Alors :

- 1)  $e_1 \wedge e_2 = e_3, e_2 \wedge e_3 = e_1$  et  $e_3 \wedge e_1 = e_2$ .
- 2) Pour tous  $u = (u_1, u_2, u_3)$  et  $v = (v_1, v_2, v_3)$ , alors

$$u \wedge v = \left( \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right).$$

**Preuve .**

1) On a,  $\langle e_1 \wedge e_2 - e_3, e_1 \rangle = [e_1, e_2, e_1] - \langle e_1, e_3 \rangle = 0$ , donc  $e_1 \wedge e_2 - e_3$  est orthogonal à  $e_1$ . de même il est orthogonal à  $e_2$  et à  $e_3$ . il est orthogonal à tout le monde, **i.e**  $e_1 \wedge e_2 = e_3$ . Les deux autres formules s'en déduisent car  $\{e_2, e_3, e_1\}$  et  $\{e_3, e_1, e_2\}$  sont aussi des bases

orthonormées directes.

2) Pour tous  $u = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $v = (v_1, v_2, v_3)$  et  $w = (w_1, w_2, w_3)$ . alors

$$\begin{aligned} \langle u \wedge v, w \rangle &= [u, v, w] \\ &= \det(u, v, w) \\ &= \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} w_1 - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} w_2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} w_3. \end{aligned}$$

$$\text{d'où } u \wedge v = \left( \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

**CQFD**

**Proposition 2.1.13.**

Soient  $(E, \langle, \rangle)$  un espace euclidien orienté de dimension 3 et  $u, v, w \in E$ . alors,

- 1)  $u \wedge (v \wedge w) = \langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w$  (formule du double produit vectoriel),
- 2)  $u \wedge (v \wedge w) + v \wedge (w \wedge u) + w \wedge (u \wedge v) = 0$  (identité de Jacobi),
- 3)  $\|u \wedge v\|^2 + \langle u, v \rangle^2 = \|u\|^2 \|v\|^2$  (identité de Lagrange).
- 4)  $\|u \wedge v\| = \|u\| \|v\| \sin \theta$ ,  $\theta \in [0, \pi]$  l'angle non orienté entre  $u$  et  $v$ .

**Preuve .**

1) *i)* Si l'un des trois vecteurs est nul, alors il est clair que la proposition est vérifiée. Donc dans la suite, on peut supposer que les trois vecteurs sont non nuls.

*ii)* Si  $(v, w)$  est lié, alors  $v \wedge w = 0$ , donc  $u \wedge (v \wedge w) = 0$ .

D'autre part, puisque  $v$  et  $w$  sont non nuls, alors il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$ , tel que  $w = \alpha v$ , donc on aura  $\langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w = \langle u, \alpha v \rangle v - \langle u, v \rangle \alpha v = \alpha \langle u, v \rangle v - \alpha \langle u, v \rangle v = 0$

Donc, dans ce cas, la proposition est vérifiée.

*iii)* Si  $(v, w)$  est libre, alors la famille  $\{v, w, v \wedge w\}$  est une base directe de  $E$ , soit  $\{e_1, e_2, e_3\}$  son orthonormalisée, c'est encore une base directe. Écrivons les coordonnées dans cette base,  $v = \alpha e_1$ ,  $w = \beta e_1 + \gamma e_2$  et  $u = \lambda e_1 + \mu e_2 + \eta e_3$ . On a alors,

$$u \wedge (v \wedge w) = (\lambda e_1 + \mu e_2 + \eta e_3) \wedge (\alpha \gamma e_3) = -\lambda \alpha \gamma e_2 + \mu \alpha \gamma e_1,$$

et

$$\langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w = \alpha(\lambda \beta + \mu \gamma) e_1 - \alpha \lambda (\beta e_1 + \gamma e_2) = -\lambda \alpha \gamma e_2 + \mu \alpha \gamma e_1.$$

D'où le résultat.

2) En utilisant la formule du double produit vectoriel, on aura

$$\begin{aligned} u \wedge (v \wedge w) + v \wedge (w \wedge u) + w \wedge (u \wedge v) &= \langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w + \langle v, u \rangle w \\ &\quad - \langle v, w \rangle u + \langle w, v \rangle u - \langle w, u \rangle v \\ &= 0. \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}
\|u \wedge v\|^2 &= \langle u \wedge v, u \wedge v \rangle \\
&= [u, v, u \wedge v] \\
&= [v, u \wedge v, u] \\
&= \langle v \wedge (u \wedge v), u \rangle \\
&= \langle \langle v, v \rangle u - \langle v, u \rangle v, u \rangle \\
&= \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle - \langle u, v \rangle \langle u, v \rangle \\
&= \|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2.
\end{aligned}$$

4) En utilisant l'identité de Lagrange et la formule (2.2), on obtient

$$\begin{aligned}
\|u \wedge v\|^2 + \langle u, v \rangle^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 &\Rightarrow \|u \wedge v\|^2 + \|u\|^2 \|v\|^2 \cos^2 \theta = \|u\|^2 \|v\|^2 \\
&\Rightarrow \|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\
&\Rightarrow \|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 \sin^2 \theta
\end{aligned}$$

D'où  $\|u \wedge v\| = \|u\| \|v\| \sin \theta$ .

CQFD

## 2.2 Espace affine euclidien affine

Dans cette partie  $\mathcal{E}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace affine de direction  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

### 2.2.1 Structure d'espace euclidien affine

#### Définition 2.2.1.

Un espace affine euclidien est un  $\mathbb{R}$ -espace affine  $\mathcal{E}$ , sa direction  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel euclidien. *i.e*  $E$  de dimension finie et muni d'un produit scalaire, et on note  $(\mathcal{E}, E, \langle, \rangle)$ .

#### Proposition et définition 2.2.1.

Soient  $(\mathcal{E}, E, \langle, \rangle)$  un espace affine euclidien et  $d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$  une application définie par  $d(A, B) = \|\overline{AB}\|$ . Alors  $d$  est une distance sur  $\mathcal{E}$ , *i.e* elle vérifie : pour tous  $A, B, C \in \mathcal{E}$ ,

- 1)  $d(A, B) \geq 0$  (positivité),
- 2)  $d(A, B) = d(B, A)$  (symétrie),
- 3)  $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$  (inégalité triangulaire),
- 4)  $d(A; B) = 0 \Leftrightarrow A = B$  (séparation).

On l'appelle distance sur  $\mathcal{E}$  associée à la norme euclidienne  $\|\cdot\|$  de  $E$ , ou plus simplement, distance euclidienne sur  $\mathcal{E}$ .

#### Preuve .

La preuve découle immédiatement de la proposition 2.1.1.

CQFD

#### Remarque 2.2.1.

L'espace affine euclidien  $(\mathcal{E}, E, \langle, \rangle)$  est muni la distance  $d$ , et donc muni d'une topologie métrique.

**Définition 2.2.2.**

Soient  $(\mathcal{E}, E, \langle, \rangle)$  un espace affine euclidien.

L'angle géométrique (non orienté) de deux vecteurs non nuls  $x$  et  $y$  de  $E$  est le réel

$$\widehat{x, y} = \arccos \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \in [0, \pi]. \quad (2.7)$$

Si  $A, B, C$  sont trois points de  $\mathcal{E}$  avec  $A$  distinct de  $B$  et  $C$ , on pose

$$\widehat{ABC} = \widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}. \quad (2.8)$$

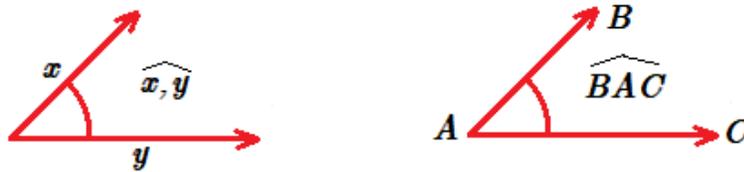


FIGURE 2.3 – Angle non orienté  $\widehat{ABC}$ .

**2.2.2 Sous espaces affines orthogonaux****Définition 2.2.3.**

Soient  $(\mathcal{E}, E, \langle, \rangle)$  un espace affine euclidien et  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  deux sous espaces affines de  $\mathcal{E}$  dirigés respectivement par  $F, G$  ( $F, G$  deux sous espaces vectoriels de  $E$ ).

- 1) On dit que  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  sont orthogonaux si  $F$  et  $G$  le sont. On note alors  $\mathcal{F} \perp \mathcal{G}$ .
- 2) On dit que  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  sont supplémentaires orthogonaux si  $F$  et  $G$  le sont. On note alors  $\mathcal{E} = \mathcal{F} \oplus^\perp \mathcal{G}$ .

**Proposition 2.2.1.**

Soient  $(\mathcal{E}, E, \langle, \rangle)$  un espace affine euclidien et  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  deux sous espaces affines de  $\mathcal{E}$  dirigés respectivement par  $F, G$ , alors

- 1) Si  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  sont orthogonaux alors  $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$  est soit vide, soit un singleton.
- 2) Si  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  sont supplémentaires orthogonaux alors  $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$  est un singleton.

**Preuve .**

- 1) Si  $\mathcal{F} \perp \mathcal{G}$  alors  $F \perp G$ , d'après la proposition 2.1.4 donc  $F \cap G = \{0\}$ . Par suite, si  $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$  n'est pas vide, c'est un sous-espace de dimension 0, c'est-à-dire un singleton.
- 2) L'hypothèse  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  sont supplémentaires orthogonaux suffit à garantir le résultat, comme on le sait déjà 1.3.2 **CQFD**

**Définition 2.2.4.**

Soient  $(\mathcal{E}, E, \langle, \rangle)$  un espace affine euclidien et  $\mathcal{H}$  un hyperplan affine de  $\mathcal{E}$  dirigé par  $H$  ( $H$  un hyperplan vectoriel de  $E$ ).

- 1) On appelle vecteur normal à  $\mathcal{H}$  tout vecteur non nul orthogonal à  $H$ .
- 2) Une droite affine  $\mathcal{D}$  orthogonal à un hyperplan affine  $\mathcal{H}$  a pour vecteur directeur un vecteur normal à  $\mathcal{H}$ .

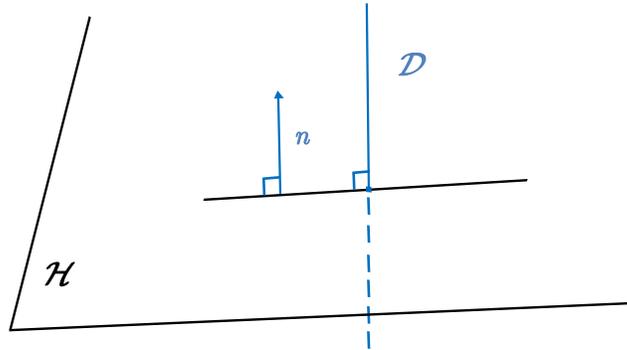


FIGURE 2.4 – Hyperplan affine orthogonal à une droite affine.

**Remarque 2.2.2.**

Une droite  $\mathcal{D}$  et un hyperplan  $\mathcal{H}$  orthogonaux sont automatiquement supplémentaires car  $D \cap H = \{0\}$  et  $\dim D + \dim H = \dim E$ , donc sécants en un point. Où  $\mathcal{D}$  (resp.  $\mathcal{H}$ ) est dirigé par  $D$  une droite vectorielle de  $E$  ( resp.  $H$  un hyperplan vectoriel de  $E$  ).

**Exemple 2.2.1.**

Dans  $\mathbb{R}^3$ , le plan affine d'équation  $2x - y + z - 3 = 0$  passe par le point  $(1, 0, 1)$  et possède comme vecteur normal le vecteur  $n = (2, -1, 1)$ .

**Définition 2.2.5.**

Soient  $(\mathcal{E}, E, \langle, \rangle)$  un espace affine euclidien et  $\mathcal{D}$  une droite affine de  $\mathcal{E}$  et  $A$  un point de  $\mathcal{E}$ . On appelle distance de  $A$  à  $\mathcal{D}$  le réel

$$d(A, \mathcal{D}) = \inf_{M \in \mathcal{D}} \|\overrightarrow{AM}\|. \quad (2.9)$$

**Proposition 2.2.2.**

Soit  $\mathcal{D}$  une droite affine de  $\mathcal{E}$  d'équation affine  $ax + by + c = 0$ , et soit  $A = (x_0, y_0) \in \mathcal{E}$  Alors :

$$d(A, \mathcal{D}) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (2.10)$$

**Preuve .**

Le vecteur  $n = (a, b)$  est un vecteur normal à  $\mathcal{D}$ , et  $M(x, y)$  est le projeté orthogonal de  $A$  sur  $\mathcal{D}$ , alors  $\overrightarrow{AM} // n$  et  $M \in \mathcal{D}$ , si bien que :

$$d(A, \mathcal{D}) = \|\overrightarrow{AM}\| = \left| \left\langle \frac{n}{\|n\|}, \overrightarrow{AM} \right\rangle \right| = \frac{|a(x - x_0) + b(y - y_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax + by - ax_0 - by_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

et on conclut grâce au fait que  $-ax_0 - by_0 = c$ , puisque  $M \in \mathcal{D}$ .

**CQFD**

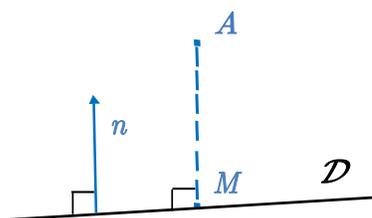


FIGURE 2.5 – Distance d'un point à une droite.

**Exemple 2.2.2.**

La distance entre le point  $A(2, 3)$  et la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $2x + y + 3 = 0$  est

$$d(A, \mathcal{D}) = \frac{|4 + 3 + 3|}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}.$$

**2.2.3 Applications dans les espaces affines euclidiens****Isométrie affine**

**Définition 2.2.6.** Soient  $(\mathcal{E}, E, \langle, \rangle)$  un espace affine euclidien.

Une isométrie affine de  $\mathcal{E}$  est une application affine  $f$  de  $\mathcal{E}$  dans lui même qui conserve les distances

$$\forall M, N \in \mathcal{E}, \|\overrightarrow{f(M)f(N)}\| = \|\overrightarrow{MN}\|. \quad (2.11)$$

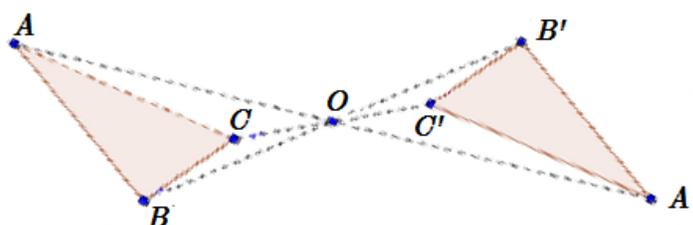


FIGURE 2.6 – Isométrie affine

**Exemple 2.2.3.** L'application  $id_{\mathcal{E}}$ , translation affine sont des isométries affines.

**Théorème 2.2.1.**

Soient  $(\mathcal{E}, E, \langle, \rangle)$  un espace affine euclidien. et  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  une application. Alors  $f$  est une isométrie affine de  $\mathcal{E}$  si et seulement si  $f$  est affine et sa partie linéaire  $L_f$  est une isométrie vectorielle de  $E$ .

**Preuve .**

- 1) Soit  $f$  une isométrie affine. Fixons  $O \in \mathcal{E}$ , et définissons  $L_f : E \rightarrow E$  par pour tout  $x \in E$ ,  $L_f(x) = \overrightarrow{f(O)f(O+x)}$ , puisque  $f$  conserve la distance alors  $\|L_f(x)\| = \|\overrightarrow{f(O)f(O+x)}\| = \|\overrightarrow{O(O+x)}\| = \|x\|$  i.e  $L_f$  conserve la norme, d'après la proposition 2.1.8,  $L_f$  est linéaire. Ainsi  $f$  est affine de partie linéaire  $L_f$ .
- 2) Réciproquement, si  $f$  est affine de partie linéaire  $L_f$  qui conserve la norme, alors pour tous  $M, N \in E$ ,  $\|\overrightarrow{f(M)f(N)}\| = \|L_f(\overrightarrow{MN})\| = \|\overrightarrow{MN}\|$  **CQFD**

**Définition 2.2.7.**

Soient  $(\mathcal{E}, E, \langle, \rangle)$  un espace affine euclidien et  $f$  une isométrie affine de  $\mathcal{E}$ .  
 On dit que  $f$  est un déplacement ou une isométrie affine directe de  $\mathcal{E}$  si  $L_f$  est une isométrie vectorielle directe de  $E$ .  
 On dit que  $f$  est un antidéplacement ou une isométrie affine indirecte de  $\mathcal{E}$  si  $L_f$  est une isométrie vectorielle indirecte de  $E$ .

**Similitude affine**

**Définition 2.2.8.**

Soient  $(\mathcal{E}, E, \langle, \rangle)$  un espace affine euclidien.  
 Une application  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  est une similitude s'il existe  $k > 0$  tel que

$$\forall M, N \in E, \|\overrightarrow{f(M)f(N)}\| = k\|\overrightarrow{MN}\| \tag{2.12}$$

Le réel  $k$  sera appelé le rapport de la similitude  $f$ .

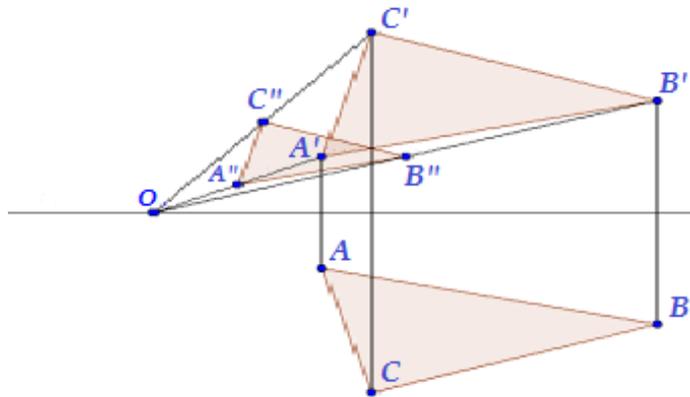


FIGURE 2.7 – Similitude affine

**Exemples 2.2.1.**

- 1) Une homothétie de rapport  $\lambda$  est une similitude de rapport  $|\lambda|$ .
- 2) Une isométrie est une similitude de rapport 1

**Théorème 2.2.2.**

Soient  $(\mathcal{E}, E, \langle, \rangle)$  un espace affine euclidien et  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  une application. Alors  $f$  est une similitude affine de  $\mathcal{E}$  si et seulement si  $f$  est une application affine et sa partie linéaire  $L_f$  est une similitude vectorielle de  $E$ .

**Preuve .**

1) Soient  $f$  une similitude affine,  $h$  l'homothétie affine de centre  $A \in \mathcal{E}$  et de rapport  $\frac{1}{k}$  où  $k > 0$  et l'application  $g = h \circ f$ , alors pour tout  $M \in \mathcal{E}$ ,  $g(M) = h(f(M)) = A + \frac{1}{k} \overrightarrow{Af(M)}$

i.e  $\overrightarrow{Ag(M)} = \frac{1}{k} \overrightarrow{Af(M)}$ . Donc pour tout  $M, N \in \mathcal{E}$ , on a

$$\|\overrightarrow{g(M)g(N)}\| = \|\overrightarrow{g(M)A} + \overrightarrow{Ag(N)}\| = \|\frac{1}{k} \overrightarrow{f(M)A} + \frac{1}{k} \overrightarrow{Af(N)}\| = \frac{1}{k} \|\overrightarrow{f(M)f(N)}\| = \|\overrightarrow{MN}\|.$$

Ainsi,  $g$  est une isométrie affine, d'après le théorème 2.2.1,  $g$  est affine et sa partie linéaire  $L_g$  est une isométrie vectorielle de  $E$ , donc  $f = h^{-1} \circ g$  est affine et d'après la proposition 2.1.11,  $L_f = kL_g$  est une similitude vectorielle sur  $E$ .

2) Réciproquement, si  $f$  est affine et sa partie linéaire  $L_f$  est une similitude vectorielle de  $E$ , alors pour tous  $M, N \in E$ ,  $\|\overrightarrow{f(M)f(N)}\| = \|L_f(\overrightarrow{MN})\| = k\|\overrightarrow{MN}\|$ . **CQFD**

**Théorème 2.2.3.**

Soient  $(\mathcal{E}, E, \langle, \rangle)$  un espace affine euclidien.

Une similitude affine de  $\mathcal{E}$  conserve les angles géométriques (non orientés).

**Preuve .**

Nous allons prouver que si  $A', B'$  et  $C'$  sont les images respectives des points  $A, B$  et  $C$  par une similitude alors  $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ , en calculant les produits scalaires  $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle$  et  $\langle \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'} \rangle$  de deux manières différentes.

1) Par définition, le produit scalaire des vecteurs  $u$  et  $v$  on a

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2} [\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2]$$

Appliquons cette formule au produit scalaire des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$ , alors

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle &= -\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA} \rangle \\ &= -\frac{1}{2} [\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{CA}\|^2] \\ &= -\frac{1}{2} [\|\overrightarrow{CB}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{CA}\|^2] \\ &= \frac{1}{2} [\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{BC}\|^2] \end{aligned}$$

De la même manière, on établit que  $\langle \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'} \rangle = \frac{1}{2} [\|\overrightarrow{A'B'}\|^2 + \|\overrightarrow{A'C'}\|^2 - \|\overrightarrow{B'C'}\|^2]$ .

Une similitude de rapport  $k$  multiplie toutes les distances par  $k$ . Par conséquent,

$$\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{B'C'} = k\overrightarrow{BC}.$$

Il vient alors

$$\begin{aligned}\langle \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'} \rangle &= \frac{1}{2} [\|\overrightarrow{A'B'}\|^2 + \|\overrightarrow{A'C'}\|^2 - \|\overrightarrow{B'C'}\|^2] \\ &= \frac{1}{2} [k^2 \|\overrightarrow{AB}\|^2 + k^2 \|\overrightarrow{AC}\|^2 - k^2 \|\overrightarrow{BC}\|^2] \\ &= k^2 \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle\end{aligned}$$

2) Le produit scalaire peut aussi s'exprimer avec le cosinus. Nous avons alors

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = \|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AC}\| \cos \widehat{BAC} \quad \text{et} \quad \langle \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'} \rangle = \|\overrightarrow{A'B'}\| \|\overrightarrow{A'C'}\| \cos \widehat{B'A'C'}$$

De la première étape nous avons  $\langle \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'} \rangle = k^2 \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle$ . Par suite,

$$\|\overrightarrow{A'B'}\| \|\overrightarrow{A'C'}\| \cos \widehat{B'A'C'} = k^2 \|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AC}\| \cos \widehat{BAC}, \text{ alors}$$

$$\cos \widehat{B'A'C'} = \cos \widehat{BAC}, \text{ d'où } \widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}.$$

**CQFD**

### Définition 2.2.9.

Soient  $(\mathcal{E}, E, \langle, \rangle)$  un espace affine euclidien et  $f$  une similitude affine de  $\mathcal{E}$ .

On dit que  $f$  est une similitude affine directe de  $\mathcal{E}$  si  $L_f$  est une similitude vectorielle directe de  $E$ .

On dit que  $f$  est une similitude affine indirecte de  $\mathcal{E}$  si  $L_f$  est une similitude vectorielle indirecte de  $E$ .

### Théorème 2.2.4.

Soient  $(\mathcal{E}, E, \langle, \rangle)$  un plan affine euclidien.

1) La transformation algébrique  $f$  du plan complexe  $\mathbb{C}$ ,  $f(z) = az + b$ ,  $a, b \in \mathbb{C}$  et  $a \neq 0$  est une similitude affine directe.

2) La transformation algébrique  $g$  du plan complexe  $\mathbb{C}$ ,  $g(z) = a\bar{z} + b$ ,  $a, b \in \mathbb{C}$  et  $a \neq 0$  est une similitude affine indirecte.

#### Preuve .

1) Soient  $A$  et  $B$  deux points du plan affine euclidien d'affixes  $z_A$  et  $z_B$ . Leurs images respectives  $A'$  et  $B'$  par la transformation  $f$  ont pour affixes respectives  $z_{A'} = f(z_A)$  et  $z_{B'} = f(z_B)$ .

$$\|\overrightarrow{A'B'}\| = |z_{B'} - z_{A'}| = |a.z_B + b - a.z_A - b| = |a| \cdot |z_B - z_A| = |a| \cdot \|\overrightarrow{AB}\|.$$

Donc  $f$  est une similitude de rapport  $|a|$ .

Si  $z = x + iy$ ,  $z' = f(z) = x' + iy'$ ,  $a = a_1 + ia_2$  et  $b = b_1 + ib_2$ , alors

$$z' = az + b \Leftrightarrow \begin{cases} x' = a_1x - a_2y + b_1 \\ y' = a_2x + a_1y + b_2 \end{cases}$$

d'après le théorème 2.2.2,  $f$  est une application affine et sa partie linéaire  $L_f$  est une similitude vectorielle de déterminant  $\det(L_f) = a_1^2 + a_2^2 > 0$  d'où  $f$  est une similitude affine directe.

2) De la même manière, on démontre que  $g$  est une similitude affine indirecte.

**CQFD**

### Exercice corrigé 2.2.1.

Déterminer la similitude directe correspond à la transformation algébrique du plan complexe  $\mathbb{C}$  qui envoie  $z_1 = 1 + i$  à  $z'_1 = -2 - 2i$  et  $z_2 = 2 + i$  à  $z'_2 = 1 + 2i$ .

#### Solution .

Soit  $f(z) = az + b$  la similitude recherchée. On doit résoudre  $az_1 + b = z'_1$  et  $az_2 + b = z'_2$ ,

on trouve immédiatement  $a = \frac{z'_1 - z'_2}{z_1 - z_2} = 3 + 4i$  et  $b = z'_1 - az_1 = -1 - 9i$ .

## Exercices

### Exercice 2.2.1.

Soit l'application

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) &\longmapsto \text{Tr}({}^t A \cdot B) \end{aligned}$$

- 1) Montre que  $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \langle , \rangle)$  est un espace euclidien,
- 2) Montre que  $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : |\text{Tr}({}^t A)| \leq \sqrt{n \cdot \text{Tr}({}^t A \cdot A)}$ ,
- 3) Déterminer  $(\text{Vect}(I_n))^\perp$ .

### Exercice 2.2.2.

Dans  $\mathbb{R}^4$  muni du produit scalaire usuel, on pose :  $V_1 = (1, 2, -1, 1)$  et  $V_2 = (0, 3, 1, -1)$ .

On pose  $F = \text{Vect}(V_1, V_2)$ .

Déterminer une base orthonormale de  $F$  et un système d'équations de  $F$  ?

### Exercice 2.2.3.

Dans  $\mathbb{R}^3$  muni sa structure euclidien usuelle.

Soit le famille  $B = \{u_1 = (1, 0, 0), u_2 = (1, 1, 0), u_3 = (1, 1, 1)\}$

Vérifier que  $B$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  et l'orthonormalisée.

### Exercice 2.2.4.

Soient  $E$  un espace euclidien orienté de dimension 3 et  $u, v, w \in E$ .

Montrer que

- 1)  $u \wedge (v \wedge w) = (u \wedge v) \wedge w$  si seulement si  $\{u, v, u \wedge w\}$  est une famille lié.
- 2)  $[u \wedge v, v \wedge w, w \wedge u] = [u, v, w]^2$ .

### Exercice 2.2.5.

Soient  $(E, \langle , \rangle)$  un espace euclidien de dimension  $n$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On dit que  $f$  est symétrique si seulement si pour tout  $x, y \in E : \langle x, f(y) \rangle = \langle y, f(x) \rangle$ . supposons que  $f$  est symétrique.

- 1) Montrer que La matrice de  $f$  dans toute base orthonormale de  $E$  est symétrique.
- 2) Montrer que  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$  sont supplémentaires orthogonaux dans  $E$ .
- 3) Montre que si  $\forall x \in E : \langle x, f(x) \rangle = 0$  alors  $f = 0$ .

### Exercice 2.2.6.

Dans  $\mathbb{R}^3$  euclidien canonique .Déterminer la matrice de la projection orthogonale et la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à  $F$  dans les cas suivantes.

- 1)  $F$  est la droite d'équations  $3x = 6y = 2z$ .
- 2)  $F_1$  est engendré par le vecteur unitaire  $n = (a, b, c)$ .
- 3)  $F_2$  est le plan d'équations  $ax + by + cz = 0$

### Exercice 2.2.7.

Soit  $f$  une application affine d'un espace affine  $\mathcal{E}$  dans lui-même qui transforme toute droite affine en une droite parallèle.

Montrer que  $f$  est une translation ou une homothétie.

**Exercice 2.2.8.**

Ecrire les transformations affines suivantes sous forme d'opérations algébriques du plan complexe  $\mathbb{C}$

$$1) f : (x, y) \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$2) g : (x, y) \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 2.2.9.**

Le plan affine euclidien  $\mathcal{P}$  est rapporté au repère orthonormé  $(O, i, j)$ . Soit  $f$  l'application de

$\mathcal{P}$  dans  $\mathcal{P}$  qui à tout point  $M(x, y)$  associe le point  $M'(x', y')$  tels que :  $\begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x + 2 \end{cases}$

Montrer que  $f$  est une isométrie affine.  $f$  est-elle un déplacement ? un antidéplacement ?

**Exercice 2.2.10.**

Soit  $f$  une transformation du plan  $\mathcal{P}$  dans lui même et  $M(x, y)$  d'image  $M'(x', y')$  par  $f$  deux points du plan  $\mathcal{P}$  tel que

$$\begin{cases} x' = x + 4 \\ y' = y - 5 \end{cases}$$

Soit  $N(x_1, y_1)$  d'image  $N'(x'_1, y'_1)$  par  $f$  deux points du plan  $\mathcal{P}$ .

1. Calculer les distances  $d(M, N)$  et  $d(M', N')$ .
2. Comparer ces distances trouvées.
3. Quelle conclusion peut-on tirer de la transformation  $f$ .

**Exercice 2.2.11.**

Déterminer la perpendiculaire commune aux droites

$$\mathcal{D} \begin{cases} x + y - 3z + 4 = 0 \\ 2x - z + 1 = 0 \end{cases}, \quad \mathcal{D}' \begin{cases} x = z - 1 \\ y = z - 1 \end{cases}$$

**Exercice 2.2.12.**

1) Soient  $P$  un point et  $\mathcal{D}$  la droite passant par  $A$  et dirigée par  $u$ . Montrer que

$$d(\mathcal{D}, M) = \frac{\|\overrightarrow{PA} \wedge u\|}{\|u\|}.$$

2) Déterminer la distance du point  $P(1, 1, 1)$  à la droite passant par le point de coordonnées  $(-1, 2, 3)$  et dirigée par le vecteur de composantes  $(2, -1, 2)$ .

Chapitre
3

# Paramétrisation des courbes et surfaces

## Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Courbe paramétrée :Généralités . . . . .</b>	<b>51</b>
<b>3.2</b>	<b>Étude locale des courbes planes . . . . .</b>	<b>58</b>
3.2.1	Tangente . . . . .	58
3.2.2	Allure de la courbe . . . . .	59
3.2.3	Branches infinies . . . . .	61
3.2.4	Courbes planes en coordonnées polaires . . . . .	62
3.2.5	Courbure . . . . .	64
<b>3.3</b>	<b>Tracé des courbes paramétrée planes . . . . .</b>	<b>67</b>
3.3.1	Courbes paramétrées planes en coordonnées cartésiennes . . . . .	67
3.3.2	Courbes paramétrées planes en coordonnées polaires . . . . .	68
<b>3.4</b>	<b>Étude locale des courbes gauches . . . . .</b>	<b>69</b>
3.4.1	Tangente, plan osculateur et plan normal . . . . .	69
3.4.2	Courbure, torsion . . . . .	73
<b>3.5</b>	<b>Paramétrisation des surfaces . . . . .</b>	<b>75</b>
3.5.1	Surfaces paramétrées . . . . .	75
3.5.2	Plan tangent à une surface paramétrée . . . . .	76
3.5.3	Première forme fondamentale . . . . .	79
<b>3.6</b>	<b>Exemples de courbes et de surfaces . . . . .</b>	<b>83</b>
3.6.1	Exemples de courbes . . . . .	83
3.6.2	Exemples de surfaces . . . . .	86
<b>Exercices</b>	<b>. . . . .</b>	<b>88</b>

---

Dans ce chapitre  $\mathbb{R}^n$ , ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) muni du produit scalaire usuel noté  $\langle , \rangle$  et  $\|.\|$  la norme euclidienne induite.

## 3.1 Courbe paramétrée :Généralités

### Définitions 3.1.1.

Une courbe paramétrée de  $\mathbb{R}^n$  est une application

$$\begin{aligned}\gamma : I &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto \gamma(t)\end{aligned}$$

de classe  $C^\infty$ , où  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

1.  $t$  est appelé le paramètre de la courbe paramétrée.
2. L'image de  $I$  par  $\gamma$  est appelée la trace de  $\gamma$  ou le support de  $\gamma$ , noté  $\gamma(I) = \Gamma$ .
3.  $(\gamma, I)$  est appelé un paramétrage (paramétrisation) de  $\Gamma$ .
4. Si  $[a, b] \subset I$ , la restriction de  $\gamma$  sur  $[a, b]$ ,  $\gamma|_{[a, b]}$  est appelé un arc de  $\gamma$  compris entre les points  $\gamma(a)$  et  $\gamma(b)$ .
5. La dérivée  $\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t))$  est appelée le vecteur tangent à la courbe paramétrée  $\gamma$  au point  $\gamma(t)$ .

### Exemples 3.1.1.

1. Soit  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^\infty$  sur l'intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .  
L'application

$$\begin{aligned}\gamma : I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \gamma(t) = (t, f(t))\end{aligned}$$

est une courbe paramétrée de  $\mathbb{R}^2$ , son support est le graphe de  $f$ .  
Le vecteur tangent de  $\gamma$  est  $\gamma'(t) = (1, f'(t))$ , où  $f'$  est la dérivée de  $f$ .

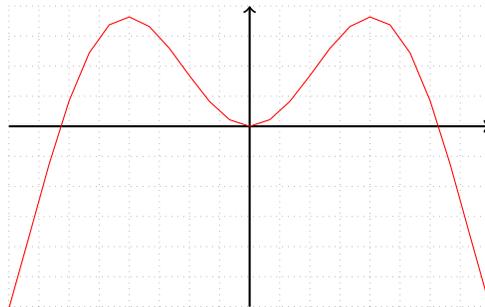
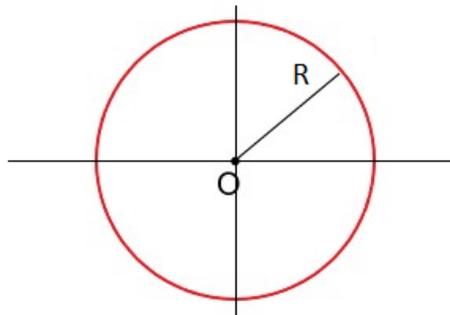


FIGURE 3.1 – Graphe de la fonction  $f : t \longmapsto f(t) = t \sin t$  dans  $] - 4, 4[$ .

2. L'application

$$\begin{aligned}\delta : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \delta(t) = (R \cos t, R \sin t) \quad , R > 0.\end{aligned}$$

est une courbe paramétrée son support est le cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$ .  
Le vecteur tangent de  $\delta$  est  $\delta'(t) = (-R \sin t, R \cos t)$ .

FIGURE 3.2 – Cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$ .

## 3. L'application

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \alpha(t) = (R \cos t, R \sin t, rt) \quad , R > 0, r \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

est une courbe paramétrée son support est l'hélice circulaire de rayon  $R$  et de pas  $r$ .  
Le vecteur tangent de  $\alpha$  est  $\alpha'(t) = (-R \sin t, R \cos t, r)$ .

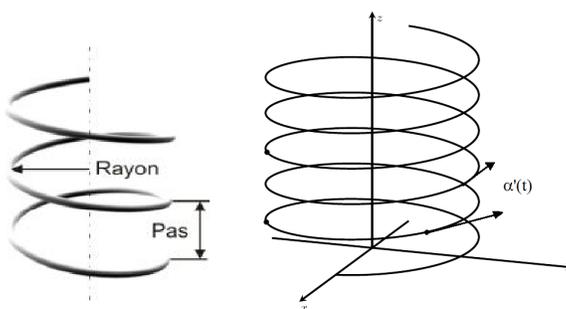


FIGURE 3.3 – Hélice circulaire.

**Définition 3.1.1.**

Soient  $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe paramétrée et  $t_0 \in I$   
La courbe  $\gamma$  a un point régulier en  $t_0$  si  $\gamma'(t_0) \neq 0$ . Sinon,  $\gamma$  a un point stationnaire en  $t_0$ .  
La courbe  $\gamma$  est régulière si  $\gamma'(t) \neq 0$  pour tout  $t \in I$ .

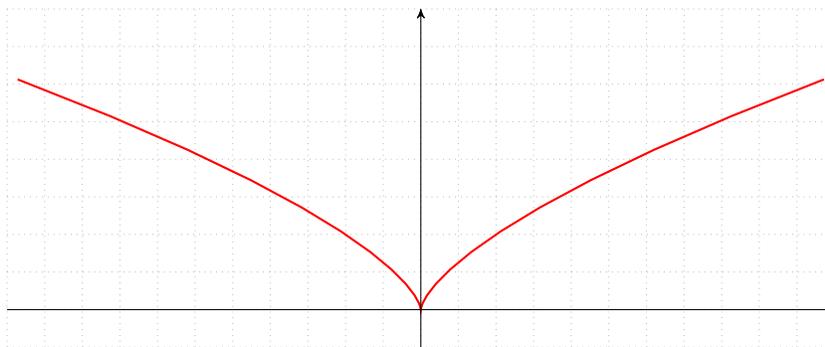
**Exemple 3.1.1.**

Soit la courbe paramétrée

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \gamma(t) = (t^3, t^2). \end{aligned}$$

Le vecteur tangent de  $\gamma$  est  $\gamma'(t) = (3t^2, 2t)$ .

On a  $\gamma'(0) = (0, 0)$ , ainsi  $\gamma(0)$  est un point stationnaire, donc  $\gamma$  n'est pas régulière sur  $\mathbb{R}$ .

FIGURE 3.4 – Courbe paramétrée  $\gamma(t) = (t^3, t^2)$  dans  $\mathbb{R}$ .**Définition 3.1.2.**

On dit que deux courbes paramétrées  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  sont équivalentes, s'il existe un  $C^\infty$ -difféomorphisme  $\phi : J \rightarrow I$  tel que  $\alpha = \gamma \circ \phi$ .

On dira que  $\phi$  est un changement de paramétrage.

**Remarque 3.1.1.**

1.  $\gamma$  et  $\alpha$  ont même support.
2.  $\gamma$  est régulière  $\Leftrightarrow \alpha$  est régulière.
3. Si  $\phi'(t) > 0$  pour tout  $t \in J$ , on dit que  $\gamma$  et  $\alpha$  définissent la même orientation, sinon on dit qu'elles définissent des orientations opposées.

**Exemple 3.1.2.**

Les courbes paramétrées :

$$\gamma : \begin{array}{l} ]-1, 1[ \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longmapsto (t, \sqrt{1-t^2}) \end{array},$$

$$\alpha : \begin{array}{l} ]0, \pi[ \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longmapsto (\cos t, \sin t) \end{array}$$

sont équivalentes.

En effet, l'application

$$\phi : \begin{array}{l} ]0, \pi[ \longrightarrow ]-1, 1[ \\ t \longmapsto \cos t. \end{array}$$

est un  $C^\infty$ -difféomorphisme car la fonction  $\cos$  est de classe  $C^\infty$  et strictement décroissante sur  $]0, \pi[$  et sa réciproque  $\arccos$  est de classe  $C^\infty$ .

De plus  $\alpha = \gamma \circ \phi$ , d'où  $\phi$  est un changement de paramétrage.

*i.e*  $\gamma$  et  $\alpha$  sont équivalentes.

Pour tout  $t \in ]0, \pi[$ ,  $\phi'(t) = -\sin t < 0$ .

Donc  $\gamma$  et  $\alpha$  définissent des orientations opposées.

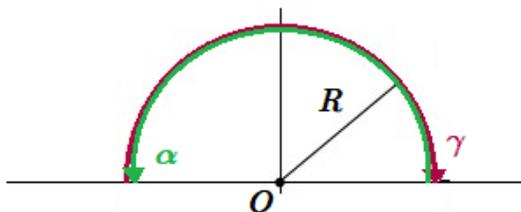


FIGURE 3.5 – Demi cercle.

**Définition 3.1.3.**

Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  une courbes paramétrées et  $[a, b]$  un intervalle incluse dans  $I$ .

1. La longueur de l'arc  $\gamma_{/[a,b]}$  est définie par

$$l_{\gamma_{/[a,b]}} = \int_a^b \|\gamma'(u)\| du.$$

2. L'abscisse curviligne d'origine  $\gamma(a)$  de  $\gamma$  est la fonction

$$\begin{aligned} \varphi : I &\rightarrow ]\mathbb{R} \\ t &\mapsto \varphi(t) = \int_a^t \|\gamma'(u)\| du = l_{\gamma_{/[a,t]}}. \end{aligned}$$

**Exemple 3.1.3.**

Soit l'application

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \alpha(t) = (R \cos t, R \sin t, rt) \quad , R > 0, r \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

La longueur de l'arc  $\gamma_{/[0,1]}$  d'hélice circulaire est donné par

$$l_{\gamma_{/[0,1]}} = \int_0^1 \|\gamma'(u)\| du = \int_0^1 \sqrt{R^2 + r^2} du = \sqrt{R^2 + r^2}.$$

**Exercice corrigé 3.1.1.**

Soit l'application

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \alpha(t) = (t^3, t^2) \end{aligned}$$

Déterminer l'abscisse curviligne d'origine  $\gamma(0)$  de  $\gamma$ .

**Solution .**

L'abscisse curviligne d'origine  $\gamma(0)$  de  $\gamma$  est donné par  $\varphi(t) = \int_0^t \|\gamma'(u)\| du$

$$\begin{aligned}
 \varphi(t) &= \int_0^t \|\gamma'(u)\| du \\
 &= \int_0^t \sqrt{9u^4 + 4u^2} du \\
 &= \int_0^t 3u \sqrt{u^2 + \frac{4}{9}} du \\
 &= \frac{3}{2} \int_0^t 2u \sqrt{u^2 + \frac{4}{9}} du \\
 &= \left[ \sqrt{\left(u^2 + \frac{4}{9}\right)^3} \right]_0^t \\
 &= \sqrt{\left(t^2 + \frac{4}{9}\right)^3} - \frac{8}{27}
 \end{aligned}$$

#### Définition 3.1.4.

Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  une courbes paramétrées régulière. On dit que  $\gamma$  est paramétrée par sa longueur (naturellement) ou  $(\gamma, I)$  une paramétrisation naturelle si pour tout  $a, b \in I, a < b$ ,  $l_{\gamma/[a,b]} = b - a$ .

#### Exemple 3.1.4.

Soit l'application

$$\begin{aligned}
 \alpha : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\
 t &\mapsto \alpha(t) = \left( r \cos \frac{t}{r}, r \sin \frac{t}{r} \right), \quad r > 0.
 \end{aligned}$$

On a  $\alpha'(t) = \left( -\sin \frac{t}{r}, \cos \frac{t}{r} \right)$  et  $\|\gamma'(t)\| = 1$ ,  
pour tout  $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ , on a

$$\begin{aligned}
 l_{\gamma/[a,b]} &= \int_a^b \|\gamma'(u)\| du \\
 &= \int_a^b 1 du \\
 &= b - a.
 \end{aligned}$$

#### Proposition 3.1.1.

Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  une courbes paramétrées régulière. Alors  $\gamma$  est paramétrée par sa longueur si et seulement si pour tout  $s \in I, \|\gamma'(s)\| = 1$ .

**Preuve .**

1. Supposons que pour tout  $s \in I$ ,  $\|\gamma'(s)\| = 1$ , alors pour tout  $a, b \in I$ ,  $a < b$ , on a

$$\begin{aligned} l_{\gamma/[a,b]} &= \int_a^b \|\gamma'(u)\| du \\ &= \int_a^b 1 du \\ &= b - a. \end{aligned}$$

2. Réciproquement, supposons que  $\gamma$  est paramétrée par sa longueur.

Soit  $a \in I$ ,  $a$  (fixé).

i) Pour tout  $s \geq a$ , on a  $l_{\gamma/[a,s]} = s - a$ , d'autre part  $l_{\gamma/[a,s]} = \int_a^s \|\gamma'(u)\| du$ , mais la fonction  $s \mapsto l_{\gamma/[a,s]}$  est dérivable de dérivée égale à  $\|\gamma'(s)\|$ .

Donc Pour tout  $s \geq a$ ,  $\left(\int_a^s \|\gamma'(u)\| du\right)' = (s - a)'$ , d'où  $\|\gamma'(s)\| = 1$ .

ii) Pour tout  $s \leq a$ , on a  $l_{\gamma/[s,a]} = a - s$ , d'autre part  $l_{\gamma/[s,a]} = \int_s^a \|\gamma'(u)\| du = -\int_a^s \|\gamma'(u)\| du$ , mais la fonction  $s \mapsto l_{\gamma/[s,a]}$  est dérivable de dérivée égale à  $-\|\gamma'(s)\|$ .

Donc Pour tout  $s \leq a$ ,  $\left(-\int_a^s \|\gamma'(u)\| du\right)' = (a - s)'$ , d'où  $\|\gamma'(s)\| = 1$ . **CQFD**

### Proposition 3.1.2.

Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe paramétrée régulière. Alors il existe une courbe paramétrée par sa longueur  $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  équivalente à  $\gamma$ .

**Preuve .**

Soient  $a \in I$ ,  $\varphi$  l'abscisse curviligne d'origine  $\gamma(a)$ .

$$\begin{aligned} \varphi : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \varphi(t) = \int_a^t \|\gamma'(u)\| du = l_{\gamma/[a,t]}. \end{aligned}$$

Posons  $J = \varphi(I)$ , nous allons montrer que  $\varphi : I \rightarrow J$  est un  $C^\infty$ -difféomorphisme et que  $\alpha = \gamma \circ \varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  équivalente à  $\gamma$ . En effet,

$\varphi$  est surjective par définition, puisque  $\varphi$  est de classe  $C^\infty$ , et  $\varphi'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0$  pour tout  $t \in I$ , alors  $\varphi$  est croissante donc est injective, d'où  $\varphi$  est bijective et  $\varphi^{-1}$  est de classe  $C^\infty$ .

Donc  $\varphi$  est  $C^\infty$ -difféomorphisme.

D'autre part on a, pour tout  $t \in I$  il existe  $s \in J$ ,  $s = \varphi(t) \Leftrightarrow t = \varphi^{-1}(s)$

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= (\gamma \circ \varphi^{-1})'(s) \\ &= \gamma'(\varphi^{-1}(s))(\varphi^{-1}(s))' \\ &= \gamma'(t) \frac{1}{\varphi'(t)} \\ &= \gamma'(t) \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \end{aligned}$$

d'où pour tout  $s \in J$ ,  $\|\alpha'(s)\| = 1$ . **CQFD**

### Lemme 3.1.1.

Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe paramétrée par sa longueur, alors pour tout  $s \in I$ ,  $\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle = 0$  i.e  $\gamma'(s) \perp \gamma''(s)$ .

**Preuve .**

On a, pour tout  $s \in I, \|\gamma'(s)\| = 1 \Leftrightarrow \langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle = 1$

En dérivant cette égalité on obtient  $2\langle \gamma'(s), \gamma''(s) \rangle = 0 \Leftrightarrow \gamma'(s) \perp \gamma''(s).$

**CQFD**

**Définition 3.1.5.**

Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe paramétrée régulière.

Le vecteur  $T(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$  est appelé le vecteur tangent unitaire de  $\gamma$  en  $t$ .

Le vecteur  $N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$  est appelé le vecteur normal unitaire de  $\gamma$  en  $t$ .

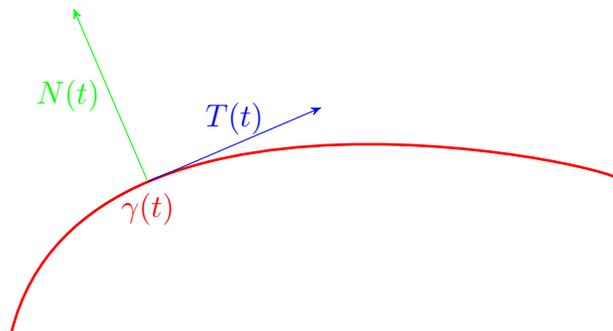


FIGURE 3.6 – Vecteur tangent  $T(t)$  et vecteur normal  $N(t)$  au point  $\gamma(t)$ .

**Proposition 3.1.3.**

Soient  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  deux courbes paramétrées régulières sont équivalentes (il existe un  $C^\infty$ -difféomorphisme  $\varphi : I \rightarrow J$  tel que  $\gamma(t) = \alpha \circ \varphi(t) = \alpha(s)$  où  $t \in I, s \in J$ ), alors

$$T_\gamma(t) = \pm T_\alpha(s), \quad N_\gamma(t) = N_\alpha(s), \quad T'_\gamma(t) = |\varphi'(t)|T'_\alpha(s).$$

**Preuve .**

Soient  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  deux courbes paramétrées régulières sont équivalentes, alors il existe un  $C^\infty$ -difféomorphisme  $\varphi : I \rightarrow J$  tel que  $\gamma = \alpha \circ \phi$ .

On a pour tout  $t \in I$  il existe  $s \in J, s = \varphi(t) \Leftrightarrow t = \varphi^{-1}(s)$ .

$$T_\gamma(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, \quad T_\alpha(s) = \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|} \text{ et } \gamma'(t) = \alpha'(\varphi(t))\varphi'(t) = \alpha'(s)\varphi'(t).$$

Donc

$$T_\gamma(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{\alpha'(s)\varphi'(t)}{\|\alpha'(s)\|\|\varphi'(t)\|} = \frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|}T_\alpha(s) = \pm T_\alpha(s).$$

De même  $N_\gamma(t) = \frac{T'_\gamma(t)}{\|T'_\gamma(t)\|}$  et  $N_\alpha(s) = \frac{T'_\alpha(s)}{\|T'_\alpha(s)\|}$ , alors

$$T'_\gamma(t) = \pm(T_\alpha(s))' = \pm(T_\alpha(\varphi(t)))' = \pm T'_\alpha(\varphi(t))\varphi'(t) = \frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|}T'_\alpha(s)\varphi'(t) = |\varphi'(t)|T'_\alpha(s).$$

et donc

$$N_\gamma(t) = \frac{T'_\gamma(t)}{\|T'_\gamma(t)\|} = \frac{|\varphi'(t)|T'_\alpha(s)}{\| |\varphi'(t)|T'_\alpha(s) \|} = \frac{T'_\alpha(s)}{\|T'_\alpha(s)\|} = N_\alpha(s).$$

**CQFD**

### Corollaire 3.1.1.

*Le signe du vecteur tangent unitaire dépend de l'orientation du paramétrisation choisie, par contre lorsqu'il existe le vecteur normal unitaire ne dépend pas du paramétrisation choisie.*

## 3.2 Étude locale des courbes planes

Le plan affine  $\mathbb{R}^2$  est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Un point  $M$  de coordonnées  $(x, y)$  est le point  $M = O + x\vec{i} + y\vec{j}$ .

### 3.2.1 Tangente

#### Définition 3.2.1.

Soient  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe paramétrée,  $t_0 \in I$  et  $u_0 \in \mathbb{R}^2$ .

La droite passant par le point  $\gamma(t_0)$  et dirigée par le vecteur  $u_0$  en  $t_0$  est appelée tangente à  $\gamma$  en  $t_0$  si

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \lambda(t)u_0 + \lambda(t)\varepsilon(t) \quad (3.1)$$

où  $\lambda$  une fonction définie sur  $I$ ,  $\varepsilon$  une fonction vectorielle définie sur  $I$  et  $\lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t) = (0, 0)$ .

#### Exemple 3.2.1.

La courbe paramétrée

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \alpha(t) = (\sin t, t^3) \end{aligned}$$

admet une tangente horizontale en  $t = 0$  dirigée par le vecteur  $u_0 = (1, 0)$ .

En effet : on a,  $\alpha(t) = \alpha(0) + \sin t(1, 0) + \sin t(0, \frac{t^3}{\sin t})$  et  $(0, \frac{t^3}{\sin t}) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} (0, 0)$ .

#### Proposition 3.2.1.

Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe paramétrée régulière, alors  $\gamma$  admet une tangente dirigée par le vecteur  $\gamma'(t_0)$  en tout  $t_0 \in I$ .

**Preuve .**

Puisque  $\gamma$  est dérivable en tout  $t_0 \in I$  alors

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)\gamma'(t_0) + (t - t_0)\varepsilon(t) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t) = (0, 0).$$

Revenir à la définition 3.2.1 d'une tangente en posant  $u_0 = \gamma'(t_0)$  et  $\lambda(t) = (t - t_0)$ . **CQFD**

**Remarque 3.2.1.**

Dans le cas d'un point stationnaire, il y a généralement une tangente, la proposition suivante le montre.

**Proposition 3.2.2.**

Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe paramétrée, supposons qu'il existe un entier  $p \geq 1$  et un vecteur  $u_0 \neq (0, 0)$  tels que :

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)^p u_0 + (t - t_0)^p \varepsilon(t) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t) = (0, 0).$$

alors  $\gamma$  a une tangente dirigée par le vecteur  $u_0$  en  $t_0$ .

**Preuve .**

Revenir à la définition 3.2.1 d'une tangente en posant  $\lambda(t) = (t - t_0)^p$ .

**CQFD**

**Exemple 3.2.2.**

La courbe paramétrée

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \gamma(t) = (t^3, t^3 + t^4) \end{aligned}$$

admet une tangente en  $t = 0$  dirigée par le vecteur  $u_0 = (1, 1)$ .

En effet : on a,  $\gamma(t) = (0, 0) + t^3(1, 1) + t^3(0, t)$  et  $(0, t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} (0, 0)$ .

**3.2.2 Allure de la courbe****Définition 3.2.2.**

Soient  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe paramétrée et  $D$  une droite qui passe par  $\gamma(t_0)$  avec  $t_0 \in I$ . La courbe

- 1) bute sur la droite  $D$  en  $t_0$  si pour  $t \neq t_0$  suffisamment proche de  $t_0$ , les points  $\gamma(t)$  sont tous du même côté de  $D$ ,
- 2) traverse la droite  $D$  en  $t_0$  si pour  $t > t_0$  suffisamment proche de  $t_0$ , les points  $\gamma(t)$  se situent tous du même côté de  $D$ , et pour  $t < t_0$  suffisamment proche de  $t_0$ , les points  $\gamma(t)$  se situent tous de l'autre côté de  $D$ .

**Définition 3.2.3.**

Soient  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe paramétrée ayant une tangente  $D$  en  $t_0 \in I$ . La courbe paramétrée a

- 1) un point ordinaire en  $t_0$  si en  $t_0$ , la courbe bute sur la tangente et traverse toutes les autres droites qui passent par  $\gamma(t_0)$ ,
- 2) un point d'inflexion en  $t_0$  si en  $t_0$ , la courbe traverse toutes les droites qui passent par  $\gamma(t_0)$ , (y compris la tangente),
- 3) un point de rebroussement de première espèce en  $t_0$  si en  $t_0$ , la courbe traverse la tangente et bute sur toutes les autres droites qui passent par  $\gamma(t_0)$ ,

4) un point de rebroussement de seconde espèce en  $t_0$  si en  $t_0$ , la courbe bute sur toutes les droites qui passent par  $\gamma(t_0)$  (y compris la tangente).

**Proposition 3.2.3.**

Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe paramétrée, supposons qu'il existe deux entiers  $q > p \geq 2$  et deux vecteurs non colinéaires  $u_p$  et  $v_q$  tels que

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)^p u_p + (t - t_0)^q v_q + (t - t_0)^q \varepsilon(t) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t) = (0, 0). \quad (3.2)$$

- 1) Si  $p$  est impair et  $q$  est pair, la courbe  $\gamma$  a un point ordinaire en  $t_0$ ,
- 2) Si  $p$  est impair et  $q$  est impair, la courbe  $\gamma$  a un point d'inflexion en  $t_0$ ,
- 3) Si  $p$  est pair et  $q$  est impair, la courbe  $\gamma$  a un point de rebroussement de première espèce en  $t_0$ ,
- 4) Si  $p$  est pair et  $q$  est pair, la courbe  $\gamma$  a un point de rebroussement de seconde espèce en  $t_0$ .

**Preuve .**

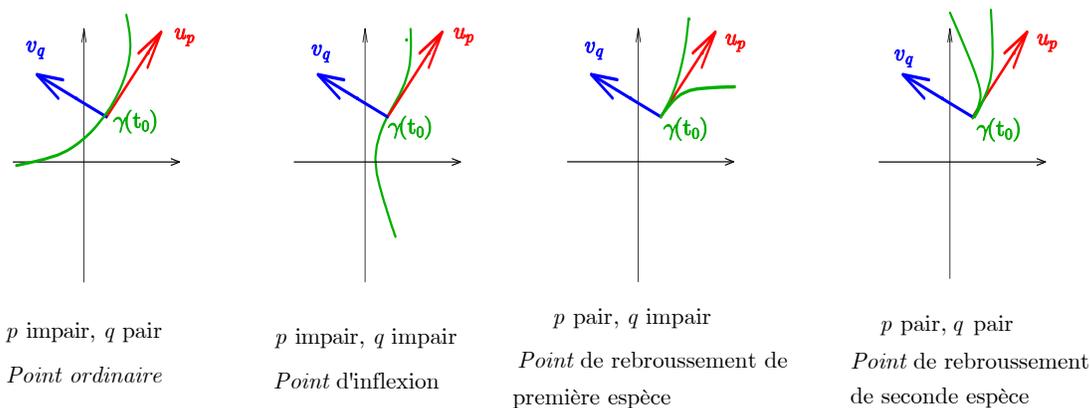


FIGURE 3.7 – Les quatre cas possibles pour l'allure d'un point stationnaire.

En utilisant la formule (3.2) nous avons

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)^p u_p + (t - t_0)^p \varepsilon_1(t) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon_1(t) = (0, 0).$$

D'après la proposition 3.2.2, la courbe admet une tangente  $D$  dirigée par le vecteur  $u_p$  en  $t_0$ . Soit  $D' \neq D$  une droite passant par  $\gamma(t_0)$ . Le vecteur  $u_p$  ne dirige pas la droite  $D'$ .

Si  $p$  est pair,  $(t - t_0)^p$  est positif pour  $t \neq t_0$  suffisamment proche de  $t_0$ , le point  $\gamma(t)$  est du même côté de la droite  $D'$  que le point  $\gamma(t_0) + u_p$ . Donc, la courbe bute sur la droite  $D'$ .

Si  $p$  est impair,  $(t - t_0)^p$  change de signe avec  $t - t_0$ . Pour  $t > t_0$ , le point  $\gamma(t)$  est du même côté de  $D'$  que le point  $\gamma(t_0) + u_p$  et pour  $t < t_0$ , le point  $\gamma(t)$  est de l'autre côté de la droite  $D'$ . La courbe traverse donc la droite  $D'$ .

Ensuite,

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + u(t) + v(t),$$

où  $u(t) = (t - t_0)^p u_p$  et  $v(t) = (t - t_0)^q (v_q + \varepsilon(t))$  avec  $\lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t) = (0, 0)$ .

Le vecteur  $u(t)$  est colinéaire à  $u_p$ . Le point  $\gamma(t_0) + u(t)$  appartient donc à la tangente  $D$ .

Si  $q$  est pair,  $(t - t_0)^q$  est positif et pour  $t \neq t_0$  suffisamment proche de  $t_0$ , le point  $\gamma(t)$  est du même côté de  $D$  que le point  $\gamma(t_0) + v_q$ . La courbe bute donc sur sa tangente.

Si  $q$  est impair,  $(t - t_0)^q$  change de signe avec  $t - t_0$ . Pour  $t > t_0$ , le point  $\gamma(t)$  est du même côté de  $D$  que le point  $\gamma(t_0) + v_q$  et pour  $t < t_0$ , le point  $\gamma(t)$  est de l'autre côté de  $D$ . La courbe traverse donc sa tangente. **CQFD**

### Exemple 3.2.3.

1) Soit la courbe paramétrée

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \gamma(t) = (-t^3 + t^4, t^3) \end{aligned}$$

En  $t = 0$ , nous avons  $\gamma(t) = \gamma(0) + t^3(-1, 1) + t^4(1, 0) + t^4\varepsilon(t)$ , donc il y a un point ordinaire.

2) Soit la courbe paramétrée

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \gamma(t) = (3(\sin t - t), t^3 + t^5) \end{aligned}$$

En  $t = 0$ , nous avons  $\gamma(t) = \gamma(0) + t^3(-\frac{1}{2}, 1) + t^5(\frac{1}{40}, 1) + t^5\varepsilon(t)$ , donc il y a un point d'inflexion.

3) Soit la courbe paramétrée

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \gamma(t) = (t^2, t^2 + t^3) \end{aligned}$$

En  $t = 0$ , nous avons  $\gamma(t) = \gamma(0) + t^2(1, 1) + t^3(0, 1) + t^3\varepsilon(t)$ , donc il y a un point de rebroussement de première espèce.

4) Soit la courbe paramétrée

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \gamma(t) = (\cos t - 1, t^2 + t^4 + t^5) \end{aligned}$$

En  $t = 0$ , nous avons  $\gamma(t) = \gamma(0) + t^2(-\frac{1}{2}, 1) + t^4(\frac{1}{24}, 1) + t^4\varepsilon(t)$ , donc il y a un point de rebroussement de deuxième espèce.

### Corollaire 3.2.1.

Soient  $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe paramétrée et  $q > p \geq 2$  les deux plus petits entiers tel que  $\gamma^{(p)}(t_0)$  et  $\gamma^{(q)}(t_0)$  ne soient pas colinéaires, alors

- 1) Si  $p$  est impair et  $q$  est pair, la courbe  $\gamma$  a un point ordinaire en  $t_0$ ,
- 2) Si  $p$  est impair et  $q$  est impair, la courbe  $\gamma$  a un point d'inflexion en  $t_0$ ,

- 3) Si  $p$  est pair et  $q$  est impair, la courbe  $\gamma$  a un point de rebroussement de première espèce en  $t_0$ ,
- 4) Si  $p$  est pair et  $q$  est pair, la courbe  $\gamma$  a un point de rebroussement de seconde espèce en  $t_0$ .

**Preuve .**

En utilisant la formule Taylor-Young, on a

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)^p \gamma^{(p)}(t_0) + (t - t_0)^q \gamma^{(q)}(t_0) + (t - t_0)^q \varepsilon(t) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t) = (0, 0).$$

D'après la proposition 3.2.3 on a le résultat.

**CQFD**

### 3.2.3 Branches infinies

**Définition 3.2.4.**

Soient  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe paramétrée telle que pour tout  $t \in I$ ,  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  et  $t_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  est une borne de l'intervalle  $I$ , (il se peut que  $I$  soit ouvert en  $t_0$ ).

- 1) On dit que la courbe paramétrée  $\gamma$  admet  $\gamma_0 \in \mathbb{R}^2$  comme point d'arrêt en  $t_0$  si  $\lim_{t \rightarrow t_0} \gamma(t) = \gamma_0$ .
- 2) On dit que la courbe paramétrée  $\gamma$  admet une branche infinie en  $t_0$  si  $\lim_{t \rightarrow t_0} \|\gamma(t)\| = +\infty$ .
- 3) La droite  $D$  d'équation  $ax + by + c = 0$  est asymptote à  $\gamma$  si  $\lim_{t \rightarrow t_0} d(\gamma(t), D) = 0$  i.e  $\lim_{t \rightarrow t_0} (ax(t) + by(t) + c) = 0$ .

**Remarque 3.2.2.**

Voici comment mener l'étude des branches infinies

- 1) Si  $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm\infty$  et  $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = l \in \mathbb{R}$  la droite d'équation  $y = l$  est asymptote horizontale à la courbe en  $t_0$ .
- 2) Si  $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = l \in \mathbb{R}$  et  $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm\infty$  la droite d'équation  $x = l$  est asymptote verticale à la courbe en  $t_0$ .
- 3) Si  $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm\infty$  et  $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm\infty$  on étudie  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)}$
- i) Si  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$  on dit que la courbe admet une branche parabolique de direction asymptotique  $x = 0$  en  $t_0$ .
  - ii) Si  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$  on dit que la courbe admet une branche parabolique de direction asymptotique  $y = 0$  en  $t_0$ .
  - iii) Si  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = a \in \mathbb{R}^*$  et  $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) - ax(t) = \pm\infty$  on dit que la courbe admet une branche parabolique de direction asymptotique  $y = ax$  en  $t_0$ .
  - iii) Si  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = a \in \mathbb{R}^*$  et  $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) - ax(t) = b$  on dit que la courbe admet une asymptote oblique d'équation  $y = ax + b$  en  $t_0$ .

**Exemple 3.2.4.**

1) La courbe paramétrée

$$\begin{aligned}\gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \gamma(t) = (\sqrt{t+1}, (t-1)\sqrt{t+1})\end{aligned}$$

i) admet  $(0, 0)$  comme point d'arrêt en  $t = -1$ .ii) admet une branche parabolique de direction asymptotique  $x = 0$  en  $t \rightarrow +\infty$ .

2) La courbe paramétrée

$$\begin{aligned}\gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \gamma(t) = \left(t^2 + \frac{1}{t}, t + \frac{2}{t}\right)\end{aligned}$$

i) admet une asymptote oblique d'équation  $y = 2x$  en  $t \rightarrow 0$ .ii) admet une branche parabolique de direction asymptotique  $y = 0$  en  $t \rightarrow +\infty$ .**3.2.4 Courbes planes en coordonnées polaires****Définition 3.2.5.**

Un point  $M$  du plan affine est repéré par ses coordonnées cartésiennes  $(x, y)$ . Dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , il peut également être repéré par des couples  $(\rho, \theta)$  tels que

$$x = \rho \cos \theta \text{ et } y = \rho \sin \theta.$$

Nous dirons alors que  $(\rho, \theta)$  est un couple de coordonnées polaires du point  $M$ .

Si  $\rho$  est positif, le point  $M$  est situé sur le rayon vecteur d'angle  $\theta$ , à distance  $\rho$  de l'origine. Si  $\rho$  est négatif,  $M$  est situé sur le rayon vecteur d'angle  $\theta + \pi$ , à distance  $-\rho$  de l'origine. Dans tous les cas  $\rho = \|\vec{OM}\|$ .

Pour  $\theta \in \mathbb{R}$ , on définit les vecteurs  $u_\theta = (\cos \theta, \sin \theta)$  et  $v_\theta = (\sin \theta, -\cos \theta)$ . Le point  $M$  est de coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$  si et seulement si  $M = O + \rho(\theta)u_\theta$ .

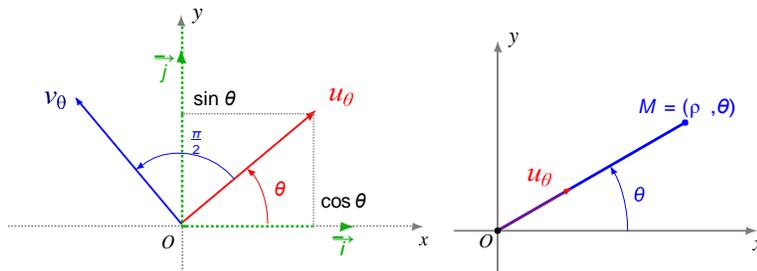


FIGURE 3.8 – Coordonnées polaires.

**Définition 3.2.6.**

Une courbe paramétrée  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  est définie en coordonnées polaires par

$$\gamma(\theta) = O + \rho(\theta)u_\theta = (\rho(\theta) \cos \theta, \rho(\theta) \sin \theta).$$

pour tout  $\theta \in I$ , où  $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de classe  $C^\infty$ . L'équation  $\rho = \rho(\theta)$  est l'équation polaire de la courbe.

**Exemples 3.2.1.**

- 1) Un cercle centré en  $O$  et de rayon  $R$  admet  $\rho = R$  pour équation polaire.
- 2) Une Droite ne passant pas par l'origine a pour équation Cartésienne  $y = ax + b$  où  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $a \neq 0$ . En remplaçant,  $x = \rho \cos \theta$  et  $y = \rho \sin \theta$  dans l'équation  $y = ax + b$ , on obtient l'équation polaire

$$\rho = \frac{b}{\sin \theta - a \cos \theta}.$$

**Proposition 3.2.4.**

Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe paramétrée définie par l'équation polaire  $\rho = \rho(\theta)$ , alors

- 1) Tout point de  $\gamma$  distinct de l'origine  $O$  est un point régulier et la tangente en  $\gamma(\theta)$  est dirigée par le vecteur

$$\gamma'(\theta) = \rho'(\theta)u_\theta + \rho(\theta)v_\theta \quad (3.3)$$

- 2) Si  $\rho'(\theta) \neq 0$ , l'angle orienté  $\varphi$  entre le vecteur  $u_\theta$  et la tangente vérifie

$$\tan \varphi = \frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)}. \quad (3.4)$$

- 3) Si  $\rho'(\theta) = 0$ ,  $\varphi \equiv \frac{\pi}{2} [\text{mod } \pi]$  i.e la tangente est dirigée par le vecteur  $v_\theta$ .

**Preuve .**

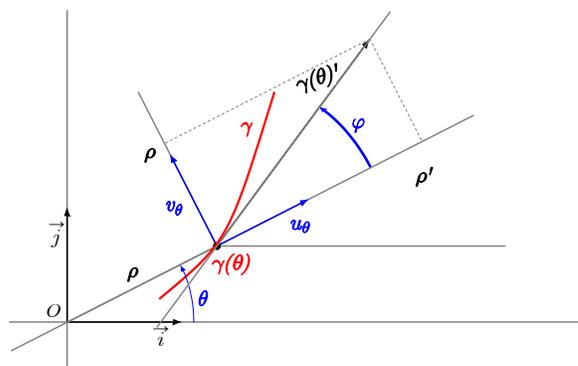


FIGURE 3.9 – Tangent en coordonnées polaires.

1) En dérivant  $\gamma(\theta) = O + \rho(\theta)u_\theta = (\rho(\theta) \cos \theta, \rho(\theta) \sin \theta)$ . par rapport à  $\theta$ , on obtient :

$$\gamma'(\theta) = \rho'(\theta)u_\theta + \rho(\theta)v_\theta$$

Puisque les vecteurs  $u_\theta$  et  $v_\theta$  ne sont pas colinéaires alors

$$\gamma'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \rho(\theta) = \rho'(\theta) = 0.$$

Maintenant, comme  $\rho(\theta) = 0 \Leftrightarrow \gamma(\theta) = O$  on en déduit que tout point distinct de l'origine est un point régulier.

2) Puisque  $\rho \neq 0$  on obtient que  $\frac{1}{\tan \varphi} = \frac{\rho'(\theta)}{\rho(\theta)}$ , si  $\rho'(\theta) \neq 0$  alors

$$\tan \varphi = \frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)}.$$

3) Si  $\rho'(\theta) = 0$  alors  $\frac{1}{\tan \varphi} = 0$  et  $\varphi \equiv \frac{\pi}{2} [\text{mod } \pi]$

i.e la tangente est dirigée par le vecteur  $v_\theta$ .

**CQFD**

### Exercice corrigé 3.2.1.

Soit  $\gamma$  courbe paramétrée définie par l'équation polaire  $\rho = 1 - 2 \cos \theta$ .

Déterminer la tangente  $T$  à la courbe paramétrée  $\gamma$  en  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

**Solution .**

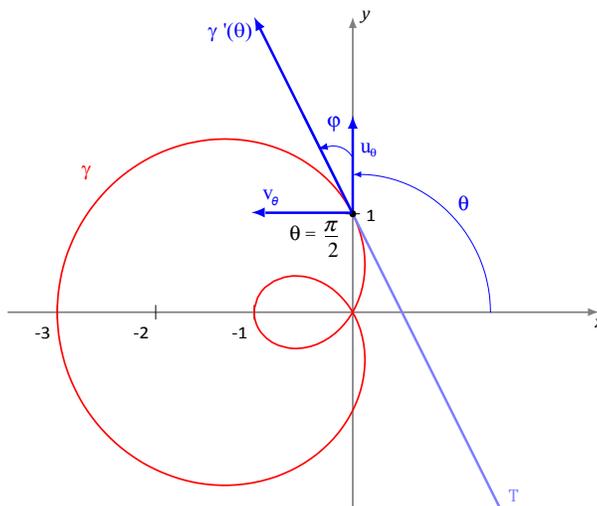


FIGURE 3.10 – Tangent à la courbe d'équation polaire  $\rho = 1 - 2 \cos \theta$ .

On va déterminer la tangente  $T$  à la courbe paramétrée  $\gamma$  en  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

l'angle orienté  $\varphi$  entre le vecteur  $u_\theta$  et la tangente  $T$  vérifie

$$\tan \varphi = \frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)} = \frac{1 - 2 \cos \theta}{2 \sin \theta}$$

En  $\theta = \frac{\pi}{2}$  on a  $\tan \varphi = \frac{1}{2}$  alors  $\varphi = \arctan \frac{1}{2}$ , la tangente  $T$  à la courbe paramétrée  $\gamma$  au point de coordonnées polaires  $(1, \frac{\pi}{2})$  et d'angle orienté  $\varphi = \arctan \frac{1}{2}$ .

**Définition 3.2.7.**

Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe paramétrée définie par l'équation polaire  $\rho = \rho(\theta)$ .

Si  $\theta_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  est une borne de l'intervalle  $I$ .

On dit que la courbe paramétrée  $\gamma$  admet une branche infinie en  $\theta_0$  si  $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} |\rho(\theta)| = +\infty$ .

**Exercice corrigé 3.2.2.**

Soit  $\gamma$  courbe paramétrée définie par l'équation polaire  $\rho = \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta}$ .

Étudier les branches infinies.

**Solution .**

La fonction  $\rho$  est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

On va étudier la branche infinie en  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , on a

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \left| \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta} \right| = +\infty \text{ Car } \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \text{ et } \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \sin \theta - \cos \theta = 0^+$$

donc  $x(\theta) = \rho(\theta) \cos \theta$  et  $y(\theta) = \rho(\theta) \sin \theta$  tendent vers  $+\infty$ . On a donc une branche infinie.

On regarde alors  $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \frac{y(\theta)}{x(\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \tan \theta = 1$  et  $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} y(\theta) - x(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}$

De même  $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \left| \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta} \right| = +\infty$ ,  $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{y(\theta)}{x(\theta)} = 1$  et  $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} y(\theta) - x(\theta) = \frac{1}{2}$ .

on a donc une asymptote d'équation  $y = x + \frac{1}{2}$ .

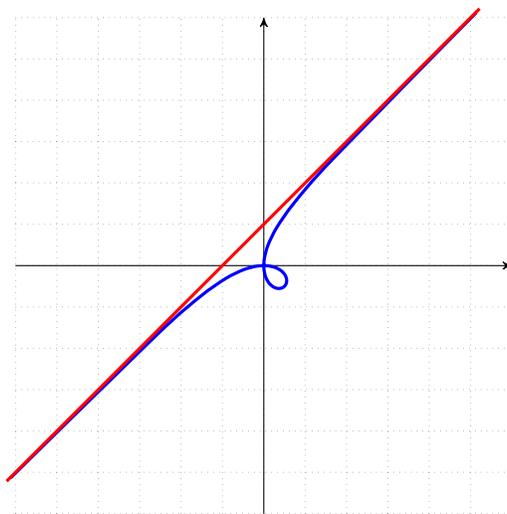


FIGURE 3.11 – Asymptote d'une courbe en coordonnées polaires.

**3.2.5 Courbure****Définition 3.2.8.**

Soient  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe paramétrée régulière et  $T(t)$  (resp.  $N(t)$ ) le vecteur tangent

unitaire (resp. normal unitaire) à  $\gamma$ .

Le repère  $(\gamma(t), T(t), N(t))$  est de Frenet de  $\gamma$  en  $t \in I$  si  $(T(t), N(t))$  est une base orthonormée directe de  $\mathbb{R}^2$ .

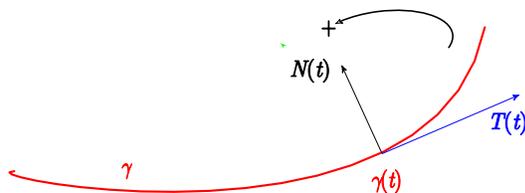


FIGURE 3.12 – Repère de Frenet dans  $\mathbb{R}^2$ .

### Théorème et définition 3.2.1.

Soient  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe par sa longueur et  $(\gamma(s), T(s), N(s))$  le repère de Frenet en  $s \in I$ , alors il existe une fonction  $k : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$  telle que pour tout  $s \in I$

$$T'(s) = k(s)N(s)$$

- 1) Le nombre  $k(s)$  est appelé la courbure algébrique de  $\gamma$ .
- 2) Le nombre  $K(s) = |k(s)|$  est appelé la courbure de  $\gamma$ .
- 3) Le nombre  $R(s) = \frac{1}{K(s)}$  est appelé la courbure de  $\gamma$ .

#### Preuve .

On a pour tout  $s \in I$   $\|\gamma'(s)\| = 1$  et  $T(s) = \gamma'(s)$ .

En dérivant  $\langle T(s), T(s) \rangle = 1$  on obtient  $2\langle T'(s), T(s) \rangle = 0$  i.e  $T'(s)$  et  $T(s)$  sont orthogonaux, alors  $T'(s)$  et  $N(s)$  sont colinéaires c'est-à-dire il existe une fonction  $k : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$  telle que pour tout  $s \in I$

$$T'(s) = k(s)N(s).$$

**CQFD**

### Remarque 3.2.3.

Pour tout  $s \in I$ ,  $K(s) = \|T'(s)\| = \|\gamma''(s)\|$ .

### Exemple 3.2.5.

Soit la courbe paramétrée

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \gamma(s) = \left(r \cos\left(\frac{s}{r}\right), r \sin\left(\frac{s}{r}\right)\right), \quad (r > 0) \end{aligned}$$

$\gamma$  est paramétrée par sa longueur car  $\gamma'(s) = \left(-\sin\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right)\right)$ ,  $\|\gamma'(s)\| = 1$

$\gamma''(s) = \left(\frac{-1}{r} \sin\left(\frac{s}{r}\right), \frac{-1}{r} \cos\left(\frac{s}{r}\right)\right)$  et  $K(s) = \|T'(s)\| = \|\gamma''(s)\| = \frac{1}{r}$ .

**Proposition 3.2.5.**

Soient  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe paramétrée par sa longueur et  $(\gamma(s), T(s), N(s))$  le repère de Frenet en  $s \in I$  si  $K(s)$  la courbure de  $\gamma$ , alors

$$\begin{cases} T'(s) &= K(s)N(s) \\ N'(s) &= -K(s)T(s) \end{cases} \quad (3.5)$$

**Preuve .**

1) Puis que  $N(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|}$  et  $K(s) = \|T'(s)\|$  alors  $T'(s) = K(s)N(s)$ .

2) En dérivant  $\langle N(s), N(s) \rangle = 1$  nous obtenons  $\langle N'(s), N(s) \rangle = 0$  alors  $N'(s)$  et  $N(s)$  sont orthogonaux, ainsi il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $N'(s) = aT(s)$ .

En dérivant  $\langle T(s), N(s) \rangle = 1$  nous obtenons

$$\begin{aligned} \langle T'(s), N(s) \rangle + \langle T(s), N'(s) \rangle &= 0 \Leftrightarrow \langle K(s)N(s), N(s) \rangle + \langle T(s), aT(s) \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow K(s)\langle N(s), N(s) \rangle + a\langle T(s), T(s) \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow a = -K(s) \end{aligned}$$

**CQFD**

**Définition 3.2.9.**

Soient  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe paramétrée régulière et  $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe par sa longueur telles que  $\gamma$  et  $\alpha$  sont équivalentes (*i.e* il existe  $\phi : I \rightarrow J$   $C^\infty$  difféomorphisme tel que  $\gamma(t) = \alpha(\phi(t)) = \alpha(s)$ ).

La courbure  $K_\gamma(t)$  de  $\gamma$  est définie par  $K_\gamma(t) = K_\alpha(s) = K_\alpha(\phi(t))$ , où  $K_\alpha(s)$  est la courbure de  $\alpha$ .

**Proposition 3.2.6.**

Soient  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe paramétrée régulière et  $(\gamma(t), T(t), N(t))$  le repère de Frenet en  $t \in I$ , si  $K(t)$  la courbure de  $\gamma$ , alors

$$K(t) = \frac{|\det(\gamma'(t), \gamma''(t))|}{\|\gamma'(t)\|^3}.$$

**Preuve .**

Soit  $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe par sa longueur telle que  $\gamma$  et  $\alpha$  sont équivalentes (*i.e* il existe  $\varphi : I \rightarrow J$   $C^\infty$  difféomorphisme tel que  $\gamma(t) = \alpha(\varphi(t)) = \alpha(s)$ ),  $t \in I$  et  $s \in J$ ,  $\varphi'(t) = \|\gamma'(t)\|$ .

Notons  $v(t) = \|\gamma'(t)\|$ , on a  $T_\gamma(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$  donc  $\gamma'(t) = v(t)T_\gamma(t)$ ,

en dérivant  $\gamma'(t) = v(t)T_\gamma(t)$  on obtient,  $\gamma''(t) = v'(t)T_\gamma(t) + v(t)T'_\gamma(t)$ ,

en utilisant la Proposition 3.1.3, on a,

$$T'_\gamma(t) = \|\gamma'(t)\|T'_\alpha(s) = v(t)K_\alpha(s)N_\alpha(s) = v(t)K_\gamma(t)N_\gamma(t)$$

et donc  $\gamma''(t) = v'(t)T_\gamma(t) + v(t)^2K_\gamma(t)N_\gamma(t)$  et

$$|\det(\gamma'(t), \gamma''(t))| = v(t)^3K_\gamma(t)|\det(T_\gamma(t), N_\gamma(t))| = \|\gamma'(t)\|^3K_\gamma(t), \text{ car } \det(T_\gamma(t), N_\gamma(t)) = 1$$

ce qui implique

$$K_\gamma(t) = \frac{|\det(\gamma'(t), \gamma''(t))|}{\|\gamma'(t)\|^3}.$$

**CQFD**

**Exercice corrigé 3.2.3.**

On considère la courbe paramétrée

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \gamma(t) = (R \cos^3 t, R \sin^3 t) \quad , \quad R \in \mathbb{R}_+^* \end{aligned}$$

- 1) Déterminer les points où la courbe  $\gamma$  est régulière.
- 2) Déterminer la courbure.

**Solution .**

1) On a  $\gamma'(t) = (-3R \sin t \cos^2 t, 3R \cos t \sin^2 t)$  et  $\|\gamma'(t)\| = 3R |\sin t \cos t|$ , alors  $\|\gamma'(t)\| = 0 \Leftrightarrow t = k\pi$  ou  $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$  où  $k \in \mathbb{Z}$ .

Ainsi la courbe est régulière sauf les points  $t = k\pi$  ou  $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$  où  $k \in \mathbb{Z}$ .

2) On a  $\gamma''(t) = (-3R(\cos^3 t - 2 \sin^2 t \cos t), 3R(-\sin^3 t + 2 \cos^2 t \sin t))$  et  $|\det(\gamma'(t), \gamma''(t))| = 9R^2 \sin^2 t \cos^2 t$  d'où  $K(t) = \frac{1}{3R |\sin t \cos t|}$

### 3.3 Tracé des courbes paramétrée planes

#### 3.3.1 Courbes paramétrées planes en coordonnées cartésiennes

Le plan d'étude d'une courbe paramétrée plane en coordonnées cartésiennes

$$\begin{aligned} \gamma : I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \gamma(t) = (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

est donné par les étapes essentielle suivantes.

1. Commencer par rechercher l'ensemble de définition commun aux fonctions  $x$  et  $y$ .
2. Essayer de réduire l'ensemble d'étude en utilisant les périodicités de  $x$  et de  $y$ , ainsi que leurs parités ou leurs symétries.
3. Dresser le tableau de variation des fonctions  $x$  et  $y$ .
4. Rechercher les points stationnaires et étudier l'allure de la courbe au voisinage de ces points.
5. Rechercher et étudier les points d'arrêt et les branches infinies.
6. Tracer la courbe.

**Exercice corrigé 3.3.1.**

Tracer le support  $\Gamma$  de la courbe paramétrée

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \gamma(t) = (\sin(2t), \sin(3t)) \end{aligned}$$

**Solution .**

Les fonctions  $x : t \mapsto \sin(2t)$  et  $y : t \mapsto \sin(3t)$  sont définies et continues sur  $\mathbb{R}$ . La fonction  $x$  est périodique de période  $\pi$  et la fonction  $y$  est périodique de période  $\frac{2\pi}{3}$ . La plus petite période commune est  $2\pi$ . Il nous suffit donc de tracer  $\Gamma$  sur un intervalle de longueur  $2\pi$ .

Les fonctions  $x$  et  $y$  sont impaires, on en déduit que le point  $(x, y)$  est de  $\Gamma$  si, et seulement si, le point  $(-x, -y)$  est de  $\Gamma$ . Nous pouvons donc restreindre l'ensemble d'étude à l'intervalle  $[0, \pi]$ . Nous tracerons  $\Gamma$  sur l'intervalle  $[0, \pi]$ , le reste du  $\Gamma$  s'obtenant par la symétrie centrale par rapport à  $(0, 0)$ .

Notons enfin que  $x(\pi - t) = -x(t)$  et  $y(\pi - t) = y(t)$ . Par conséquent, il nous suffit d'étudier  $\Gamma$  sur l'intervalle  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . la portion de  $\Gamma$  sur l'intervalle  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$  s'obtient alors par la symétrie par rapport à l'axe  $Oy$ .

Dressons maintenant le tableau de variations des fonctions  $x$  et  $y$  sur l'intervalle  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

$t$	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'$	2	+	1	+	0	-	-2
$x$	0	↗ $\frac{\sqrt{3}}{2}$		↘ 1		↘ 0	
$y'$	3	+	0	-	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	-	0
$y$	0	↗ 1		↘ $\frac{\sqrt{2}}{2}$		↘ -1	

On trace  $\Gamma$  sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , puis son symétrique par rapport à l'axe  $Oy$ , puis son symétrique par rapport à  $(0, 0)$ .

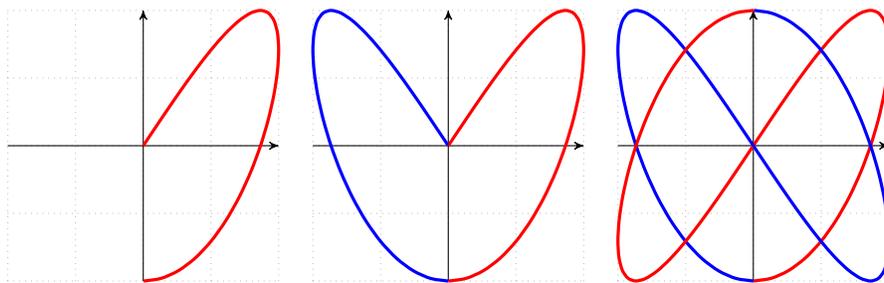


FIGURE 3.13 – Le support de la courbe paramétrée  $\gamma(t) = (\sin(2t), \sin(3t))$ .

**3.3.2 Courbes paramétrées planes en coordonnées polaires**

le plan d'étude d'une courbe paramétrée plane en coordonnées polaires  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par l'équation polaire  $\rho = \rho(\theta)$ , est donné par les étapes essentielle suivantes.

1. Ensemble de définition, période, symétries, ensemble d'étude.
2. Tableau de variations ,  $\theta$ ,  $\rho(\theta)$ , signe de  $\rho$  et  $\rho'$ .
3. Branches infinies.
4. Points essentiels et leurs tangentes.
5. Tracé de la courbe

**Exercice corrigé 3.3.2.**

Construire la courbe paramétrée plane d'équation polaire  $\rho(\theta) = 1 - \cos \theta$ .

**Solution .**

On va étudier la courbe d'équation  $\rho(\theta) = 1 - \cos \theta$  en coordonnées polaires.

$\rho(\theta)$  est définie sur  $\mathbb{R}$ ,  $2\pi$  périodique et paire. On va donc étudier la fonction sur  $[0, \pi]$  et il faudra compléter la courbe par une symétrie par rapport à Ox.

On a  $\rho'(\theta) = \sin \theta$  qui permet d'avoir le tableau de variation

$\theta$	0		$\pi$
$\rho'$	0	+	0
$\rho$	0	2	

$$\tan \varphi = \frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ i.e } \varphi = \frac{\theta}{2}.$$

En  $\theta = 0$ ,  $\rho = 0$  et  $\varphi = 0$  i.e la tangente en  $\theta = 0$  est horizontale.

En  $\theta = \pi$ ,  $\rho = 2$  et  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  i.e la tangente en  $\theta = \pi$  est verticale.

Comme  $0 \leq \rho \leq 2$  alors la courbe est bornée, incluse dans le disque de rayon 2, centré à l'origine. Il n'y a pas de branches infinies.

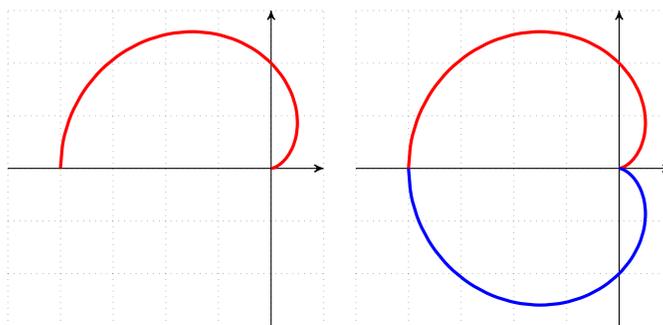


FIGURE 3.14 – Le support de la courbe d'équation polaire  $\rho(\theta) = 1 - \cos \theta$ .

### 3.4 Étude locale des courbes gauches

L'espace affine  $\mathbb{R}^3$  est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

### 3.4.1 Tangente, plan osculateur et plan normal

#### Définition 3.4.1.

Soient  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe paramétrée,  $t_0 \in I$  et  $u_0 \in \mathbb{R}^3$ .

La droite  $D = \gamma(t_0) + \text{vect}(u_0)$  est tangente à  $\gamma$  en  $t_0$  si  $\gamma(t) = \gamma(t_0) + \lambda(t)u_0 + \lambda(t)\varepsilon(t)$  où  $\lambda$  une fonction définie sur  $I$ ,  $\varepsilon$  une fonction vectorielle définie sur  $I$  et  $\lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t) = (0, 0, 0)$ .

#### Définition 3.4.2.

Soient  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe paramétrée,  $t_0 \in I$  et  $u_0, v_0 \in \mathbb{R}^3$ .

Le plan  $P = \gamma(t_0) + \text{vect}(u_0, v_0)$  est osculateur à  $\gamma$  en  $t_0$  si

- 1)  $\gamma$  admet une tangente dirigée par  $u_0$  en  $t_0$ ,
- 2)  $\gamma(t) = \gamma(t_0) + \alpha(t)u_0 + \beta(t)v_0 + \beta(t)\varepsilon(t)$ , où  $\alpha, \beta$  sont des fonctions définies sur  $I$ ,  $\varepsilon$  une fonction vectorielle définie sur  $I$  et  $\lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t) = (0, 0, 0)$ .

#### Exemple 3.4.1.

La courbe paramétrée

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \gamma(t) = (t, t^2, t^3) \end{aligned}$$

- 1) On a,  $\gamma(t) = \gamma(0) + t\vec{i} + t(t\vec{j} + t^2\vec{k})$  et  $(t\vec{j} + t^2\vec{k}) \xrightarrow{t \rightarrow 0} (0, 0, 0)$ .

Donc  $\gamma$  admet une tangente horizontale en  $t = 0$  dirigée par le vecteur  $u_0 = \vec{i}$ .

- 2) D'autre part  $\gamma(t) = \gamma(0) + t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^2(t\vec{k})$  et  $(t\vec{k}) \xrightarrow{t \rightarrow 0} (0, 0, 0)$ .

Donc  $\gamma$  admet un osculateur en  $t = 0$  engendré par les vecteurs  $\vec{i}, \vec{j}$ . i.e le plan  $xOy$ .

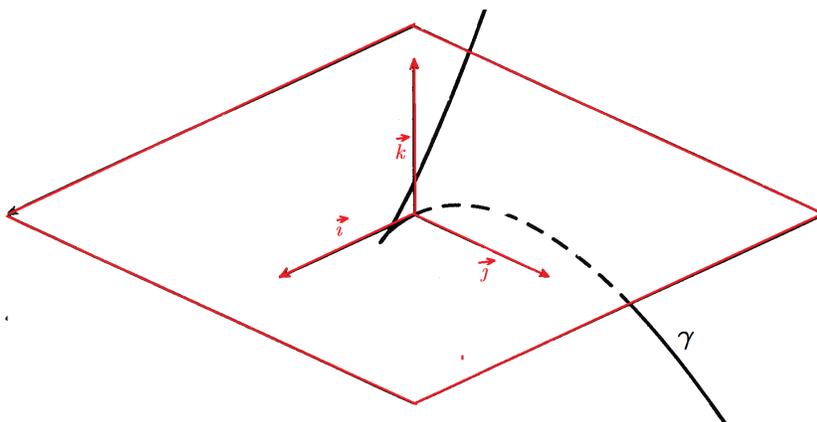


FIGURE 3.15 – Plan osculateur.

#### Proposition 3.4.1.

Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe paramétrée, Supposons qu'il existe deux entiers  $q > p \geq 2$  et deux vecteurs non colinéaires  $u_p$  et  $v_q$  tels que

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)^p u_p + (t - t_0)^q v_q + (t - t_0)^q \varepsilon_1(t) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon_1(t) = (0, 0, 0). \quad (3.6)$$

Alors

- 1) La droite  $D = \gamma(t_0) + \text{vect}(u_p)$  est tangente à  $\gamma$  en  $t_0$ ,
- 2) Le plan  $P = \gamma(t_0) + \text{vect}(u_p, v_q)$  est osculateur à  $\gamma$  en  $t_0$ .

**Preuve .**

- 1) Revenir à la définition 3.4.1 d'une tangente, en posant  $u_0 = u_p$  et  $\lambda(t) = (t - t_0)^p$  et  $\varepsilon(t) = (t - t_0)^p[(t - t_0)^{q-p}v_q + (t - t_0)^q\varepsilon_1(t)]$ .
- 2) Revenir à la définition 3.4.2 d'un osculateur, en posant  $\alpha(t) = (t - t_0)^p$ ,  $\beta(t) = (t - t_0)^q$ ,  $u_0 = u_p$ ,  $v_0 = v_p$  et  $\varepsilon(t) = \varepsilon_1(t)$ .

**CQFD**

**Proposition 3.4.2.**

Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe paramétrée régulière, alors

- 1)  $\gamma$  admet une tangente  $D$  dirigée par le vecteur  $\gamma'(t_0)$  en tout  $t_0 \in I$ .
- 2) Si  $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$  et  $\gamma'(t_0) = (x'_0, y'_0, z'_0)$ , alors  $D$  est donnée par les équations

$$y'_0(x - x_0) = x'_0(y - y_0) \quad , \quad z'_0(x - x_0) = x'_0(z - z_0). \quad (3.7)$$

**Preuve .**

- 1) Puisque  $\gamma$  est dérivable en tout  $t_0 \in I$  alors

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)\gamma'(t_0) + (t - t_0)\varepsilon(t) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t) = (0, 0, 0).$$

Revenir à la définition 3.4.1 d'une tangente en posant  $u_0 = \gamma'(t_0)$  et  $\lambda(t) = (t - t_0)$ .

- 2) Si  $\gamma(t) = (x, y, z)$  alors les vecteurs  $\overrightarrow{\gamma(t_0)\gamma(t)}$  et  $\gamma'(t_0)$  sont colinéaires, alors il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\overrightarrow{\gamma(t_0)\gamma(t)} = \lambda\gamma'(t_0)$ . **i.e**

$$\begin{cases} x - x_0 = \lambda x'_0 \\ y - y_0 = \lambda y'_0 \\ z - z_0 = \lambda z'_0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \frac{x - x_0}{x'_0} = \frac{y - y_0}{y'_0} = \frac{z - z_0}{z'_0}$$

d'où les équations  $y'_0(x - x_0) = x'_0(y - y_0)$  et  $z'_0(x - x_0) = x'_0(z - z_0)$ .

**CQFD**

**Proposition 3.4.3.**

Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe paramétrée régulière et si  $\gamma'(t_0)$  et  $\gamma''(t_0)$  ne sont pas colinéaires en tout  $t_0 \in I$ , alors

- 1)  $\gamma$  admet un osculateur  $P$  engendrée par les vecteurs  $\gamma'(t_0)$  et  $\gamma''(t_0)$  en tout  $t_0 \in I$ .
- 2) Si  $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ ,  $\gamma'(t_0) = (x'_0, y'_0, z'_0)$  et  $\gamma''(t_0) = (x''_0, y''_0, z''_0)$ , alors  $P$  est donnée par l'équations

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & x'_0 & x''_0 \\ y - y_0 & y'_0 & y''_0 \\ z - z_0 & z'_0 & z''_0 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.8)$$

**Preuve .**

- 1) D'après la formule de Taylor-Young en  $t_0 \in I$  alors

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)\gamma'(t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2}\gamma''(t_0) + (t - t_0)^2\varepsilon(t) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t) = (0, 0, 0).$$

Revenir à la définition 3.4.2 d'un osculateur en posant  $u_0 = \gamma'(t_0)$ ,  $v_0 = \gamma''(t_0)$ ,  $\alpha(t) = (t - t_0)$  et  $\beta(t) = (t - t_0)^2$ .

2) Si  $\gamma(t) = (x, y, z)$  alors les vecteurs  $\overrightarrow{\gamma(t_0)\gamma(t)}$ ,  $\gamma'(t_0)$  et  $\gamma''(t_0)$  sont colinéaires, alors  $\det(\overrightarrow{\gamma(t_0)\gamma(t)}, \gamma'(t_0), \gamma''(t_0)) = 0$  CQFD

**Définition 3.4.3.**

Soient  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe paramétrée et  $D = \gamma(t_0) + \text{vect}(u_0)$  la tangente à  $\gamma$  en  $t_0 \in I$ . Le plan orthogonal (perpendiculaire) à la tangente  $D$  est appelé plan normal à  $\gamma$  en  $t_0$ .

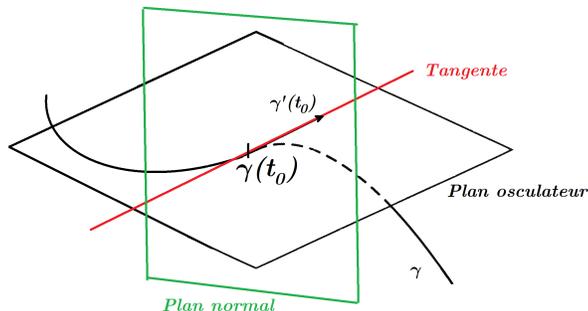


FIGURE 3.16 – Plan normal, osculateur et la tangente.

**Proposition 3.4.4.**

Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe paramétrée régulière et  $t_0 \in I$ , alors

- 1) Le plan normal à  $\gamma$  en  $t_0$  est orthogonal à  $\gamma'(t_0)$ .
- 2) Si  $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$  et  $\gamma'(t_0) = (x'_0, y'_0, z'_0)$ , alors le plan normal à  $\gamma$  en  $t_0$  est donnée par l'équations

$$x'_0(x - x_0) + y'_0(y - y_0) + z'_0(z - z_0) = 0. \tag{3.9}$$

**Preuve .**

1) D'après la proposition 3.4.2 la tangente à  $\gamma$  est dirigé par  $\gamma'(t_0)$ , alors le plan normal à  $\gamma$  en  $t_0$  est orthogonal à  $\gamma'(t_0)$ .

2) Si  $\gamma(t) = (x, y, z)$  alors les vecteurs  $\overrightarrow{\gamma(t_0)\gamma(t)}$  et  $\gamma'(t_0)$  sont perpendiculaire, alors  $\langle \overrightarrow{\gamma(t_0)\gamma(t)}, \gamma'(t_0) \rangle = 0$  i.e

$$x'_0(x - x_0) + y'_0(y - y_0) + z'_0(z - z_0) = 0.$$

CQFD

**Exercice corrigé 3.4.1.**

Soit la courbe paramétrée

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \gamma(t) = (t^3, t^2, t + 1) \end{aligned}$$

Déterminer Les équations de la tangente, du plan osculateur et du plan normal en  $t_0 = 1$

**Solution .**

On va déterminer la tangente, le plan osculateur et le plan normal en  $t_0 = 1$ , alors  $\gamma'(t) = (3t^2, 2t, 1)$ ,  $\gamma''(t) = (6t, 2, 0)$  donc  $\gamma(1) = (1, 1, 2)$ ,  $\gamma'(1) = (3, 2, 1)$  et  $\gamma''(1) = (6, 2, 0)$ .

1) Les équations de la tangente sont

$$2(x - 1) = 3(y - 1), x - 1 = 3(z - 2) \Leftrightarrow x - 1 = \frac{3}{2}(y - 1) = 3(z - 2).$$

2) L'équation du plan osculateur est

$$\begin{vmatrix} x - 1 & 3 & 6 \\ y - 1 & 2 & 2 \\ z - 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - 3y + 3z - 4 = 0.$$

2) L'équation du plan normal est

$$3(x - 1) + 2(y - 1) + 1(z - 2) = 0 \Leftrightarrow 3x + 2y + z - 6 = 0.$$

**Définition 3.4.4.**

Soient  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe paramétrée régulière et  $T(t)$  (resp.  $N(t)$ ) le vecteur tangent unitaire (resp. normal unitaire) à  $\gamma$ .

Le repère  $(\gamma(t), T(t), N(t), B(t))$  est de Frenet de  $\gamma$  en  $t \in I$  si  $(T(t), N(t), B(t))$  est une base orthonormée directe de  $\mathbb{R}^3$ , où  $B(t) = T(t) \wedge N(t)$ .

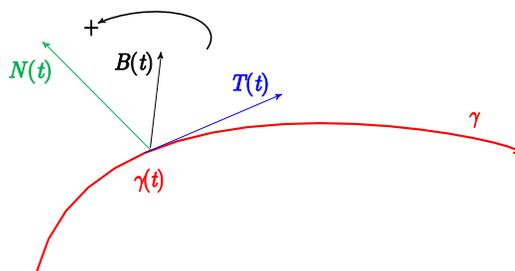


FIGURE 3.17 – Repère de Frenet dans  $\mathbb{R}^3$ .

**Remarque 3.4.1.**

- 1)  $(T(t), N(t), B(t))$  est appelée trièdre de Frenet.
- 2) Le vecteur  $B(t)$  est appelé le vecteur binormal à la courbe  $\gamma$ .

**Remarque 3.4.2.**

Si  $(\gamma(t), T(t), N(t), B(t))$  le repère de Frenet en  $t \in I$  alors.

- 1) La droite  $\gamma(t) + \text{vect}(T(t))$  est la droite tangente à  $\gamma$  en  $t$ .
- 2) Le plan  $\gamma(t) + \text{vect}(T(t), N(t))$  est le plan osculateur à  $\gamma$  en  $t$ .
- 3) Le plan  $\gamma(t) + \text{vect}(N(t), B(t))$  est le plan normal à  $\gamma$  en  $t$ .

### 3.4.2 Courbure, torsion

#### Définition 3.4.5.

Soient  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe par sa longueur et  $(\gamma(s), T(s), N(s), B(s))$  le repère de Frenet en  $s \in I$  alors.

- 1) Le nombre  $K(s) = \|T'(s)\| = \|\gamma'(s)\|$  est appelé la courbure de  $\gamma$ .
- 2) Le nombre  $R(s) = \frac{1}{K(s)}$  est appelé le rayon de courbure.
- 3) Le point  $\gamma(s) + R(s)N(s)$  est appelé le centre de courbure.

#### Théorème et définition 3.4.1.

Soient  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe par sa longueur et  $(\gamma(s), T(s), N(s), B(s))$  le repère de Frenet en  $s \in I$ , alors il existe une fonction de classe  $C^\infty$   $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$  telle que pour tout  $s \in I$

$$B'(s) = \tau(s)N(s).$$

Le nombre  $\tau(s)$  est appelé la torsion de  $\gamma$ .

#### Preuve .

En dérivant  $B(s) = T(s) \wedge N(s)$  nous obtenons,

$B'(s) = T'(s) \wedge N(s) + T(s) \wedge N'(s) = T(s) \wedge N'(s)$  car  $T'(s)$  et  $N(s)$  sont colinéaires, alors  $B'(s)$  et  $T(s)$  sont orthogonaux.

En dérivant  $\langle B(t), B(t) \rangle = 1$ , nous obtenons,  $2\langle B'(t), B(t) \rangle = 0$  par conséquent  $B'(s)$  et  $B(s)$  sont orthogonaux.

Alors  $B'(s)$  est orthogonal à la fois à  $T(s)$  et à  $B(s)$  donc  $B'(s)$  est orthogonal à  $N(s)$

( $N(s) = B(s) \wedge T(s)$ ) c'est-à-dire, il existe une fonction  $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$  telle que pour tout  $s \in I$

$$B'(s) = \tau(s)N(s).$$

**CQFD**

#### Proposition 3.4.5.

Soient  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe par sa longueur et  $(\gamma(s), T(s), N(s), B(s))$  le repère de Frenet en  $s \in I$ , si  $K(s)$ ,  $\tau(s)$  la courbure, la torsion de  $\gamma$  respectivement, alors

$$\begin{cases} T'(s) &= K(s)N(s) \\ N'(s) &= -K(s)T(s) - \tau(s)B(s) \\ B'(s) &= \tau(s)N(s) \end{cases}$$

#### Preuve .

- 1) Puis que  $N(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|}$  et  $K(s) = \|T'(s)\|$  alors  $T'(s) = K(s)N(s)$ .
- 2) En dérivant  $N(s) = B(s) \wedge T(s)$  nous obtenons,

$$\begin{aligned} N'(s) &= B'(s) \wedge T(s) + B(s) \wedge T'(s) \\ &= \tau(s)N(s) \wedge T(s) + B(s) \wedge K(s)N(s) \\ &= -\tau(s)B(s) - K(s)T(s) \end{aligned}$$

**CQFD**

**Exercice corrigé 3.4.2.**

Soit la courbe paramétrée

$$\begin{aligned}\gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \gamma(t) = (a \cos s, a \sin s, bs)\end{aligned}$$

ou  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $a^2 + b^2 = 1$

Déterminer la courbure et la torsion de  $\gamma$ .

**Solution .**

On a  $\gamma'(s) = (-a \sin s, a \cos s, b)$  et  $\|\gamma'(s)\| = 1$  d'où  $\gamma$  est paramétrée par sa longueur.

$T(s) = \gamma'(s) = (-a \sin s, a \cos s, b)$  et  $T'(s) = (-a \cos s, -a \sin s, 0)$  alors  $K(s) = \|T'(s)\| = a$

$N(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|} = (-\cos s, -\sin s, 0)$  et  $B(s) = T(s) \wedge N(s) = (b_1, b_2, b_3)$  avec

$$b_1 = \begin{vmatrix} -a \sin s & b \\ -\sin s & 0 \end{vmatrix} = b \sin s, b_2 = - \begin{vmatrix} -a \cos s & b \\ -\cos s & 0 \end{vmatrix} = -b \cos s, b_3 = \begin{vmatrix} -a \sin s & a \cos s \\ -\cos s & -\sin s \end{vmatrix} = a$$

$B(s) = (b \sin s, -b \cos s, a)$  et  $B'(s) = (b \cos s, b \sin s, 0) = -bN(s)$  i.e  $\tau(s) = -b$ .

**Définition 3.4.6.**

Soient  $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe paramétrée régulière et  $\alpha : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe par sa longueur telles que  $\gamma$  et  $\alpha$  sont équivalentes ( il existe  $\phi : I \longrightarrow J$   $C^\infty$  difféomorphisme tel que  $\gamma(t) = \alpha(\phi(t)) = \alpha(s)$  ).

La courbure  $K_\gamma(t)$  et la torsion  $\tau_\gamma(t)$  de  $\gamma$  sont définies par  $K_\gamma(t) = K_\alpha(s)$  et  $\tau_\gamma(t) = \tau_\alpha(s)$ , où  $K_\alpha(s)$  et  $\tau_\alpha(s)$  est la courbure et la torsion de  $\alpha$  respectivement.

**Proposition 3.4.6.**

Soient  $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe paramétrée régulière et  $(\gamma(t), T(t), N(t), B(t))$  le repère de Frenet en  $t \in I$ , si  $K(t)$ ,  $\tau(t)$  la courbure, la torsion de  $\gamma$  respectivement, alors

$$B(t) = \frac{\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}, \quad K(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} \quad \text{et}$$

$$\tau(t) = \frac{-\langle \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'''(t) \rangle}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2} = \frac{-\det(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t))}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2}$$

**Preuve .**

Soit  $\alpha : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe par sa longueur telle que  $\gamma$  et  $\alpha$  sont équivalentes ( il existe  $\varphi : I \longrightarrow J$   $C^\infty$  difféomorphisme tel que  $\gamma(t) = \alpha(\varphi(t)) = \alpha(s)$   $t \in I$  et  $s \in J$ ,  $\varphi'(t) = \|\gamma'(t)\|$ ).

Notons  $v(t) = \|\gamma'(t)\|$ , on a  $T_\gamma(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$  donc  $\gamma'(t) = v(t)T_\gamma(t)$ ,

en dérivant une seconde fois on obtient,  $\gamma''(t) = v'(t)T_\gamma(t) + v(t)T'_\gamma(t)$ ,

en utilisant la proposition 3.1.3, on a  $T'_\gamma(t) = \|\gamma'(t)\|T'_\alpha(s) = v(t)K_\alpha(s)N_\alpha(s) = v(t)K_\gamma(t)N_\gamma(t)$

et donc  $\gamma''(t) = v'(t)T_\gamma(t) + v(t)^2K_\gamma(t)N_\gamma(t)$  et

$$\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) = v(t)^3K_\gamma(t)T_\gamma(t) \wedge N_\gamma(t) = v(t)^3K_\gamma(t)B_\gamma(t).$$

ce qui implique la première et la deuxième égalité.

En dérivant une fois de plus, on obtient  $\gamma'''(t) = a(t)T_\gamma(t) + b(t)N(t) - v(t)^3K_\gamma(t)\tau_\gamma(t)B_\gamma(t)$ .

où  $a(t)$  et  $b(t)$  sont deux fonctions à valeurs réelles que nous n'avons pas besoin d'explicitier.

On en déduit que  $\langle \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'''(t) \rangle = -v(t)^6K_\gamma(t)^2\tau_\gamma(t) = -\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2\tau_\gamma(t)$ ,

ce qui démontre la troisième égalité .

**CQFD**

**Remarque 3.4.3.**

La courbure (resp. la torsion) elle mesure la variation de  $T(t)$  (resp.  $B(t)$ ) c'est-à-dire le courbement (resp. la tendance) de la courbe.

**Exercice corrigé 3.4.3.**

Soit la courbe  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $\gamma(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$ .

1. Vérifier que  $\gamma$  est régulière.
2. Calculer la courbure  $K(t)$  et la torsion  $\tau(t)$  de  $\gamma$  et  $\frac{K(t)}{\tau(t)}$ .

**Solution .**

1. Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a  $\gamma'(t) = (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2})$  et  $\|\gamma'(t)\| = 2 \cosh t \neq 0$
2.  $\gamma''(t) = (e^t, e^{-t}, 0)$ ,  $\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) = (-\sqrt{2}e^{-t}, \sqrt{2}e^t, 2)$  et  $\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\| = 2\sqrt{2} \cosh t$

$$\text{Donc } K(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{2\sqrt{2} \cosh t}{8 \cosh^3 t} = \frac{1}{2\sqrt{2} \cosh^2 t}.$$

$$\gamma'''(t) = (e^t, -e^{-t}, 0) \text{ et } \langle \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'''(t) \rangle = -2\sqrt{2}$$

$$\text{Donc } \tau(t) = \frac{-\langle \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'''(t) \rangle}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2} = \frac{2\sqrt{2}}{8 \cosh^2 t} = \frac{1}{2\sqrt{2} \cosh^2 t}.$$

$$\text{et } \frac{K(t)}{\tau(t)} = 1.$$

## 3.5 Paramétrisation des surfaces

### 3.5.1 Surfaces paramétrées

**Définition 3.5.1.**

Une surface paramétrée de  $\mathbb{R}^3$  est une application

$$\begin{aligned} \varphi : U \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto \varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

de classe  $C^\infty$ , où  $U$  est un domaine de  $\mathbb{R}^2$  (ouvert connexe de  $\mathbb{R}^2$ ).

L'image de  $U$  par  $\varphi$  est appelé le support de la surface paramétrée  $\varphi$  (surface géométrique) noté  $S = \varphi(U) = \{\varphi(u, v) \in \mathbb{R}^3, (u, v) \in U\}$ .

**Exemples 3.5.1.**

- 1) Le cylindre de révolution  $C$  de  $\mathbb{R}^3$  est paramétrée par

$$\begin{aligned} \varphi : ]0, 2\pi[ \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto \varphi(u, v) = (r \cos u, r \sin u, v) \end{aligned}$$

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 = r^2\} \text{ où } r > 0.$$

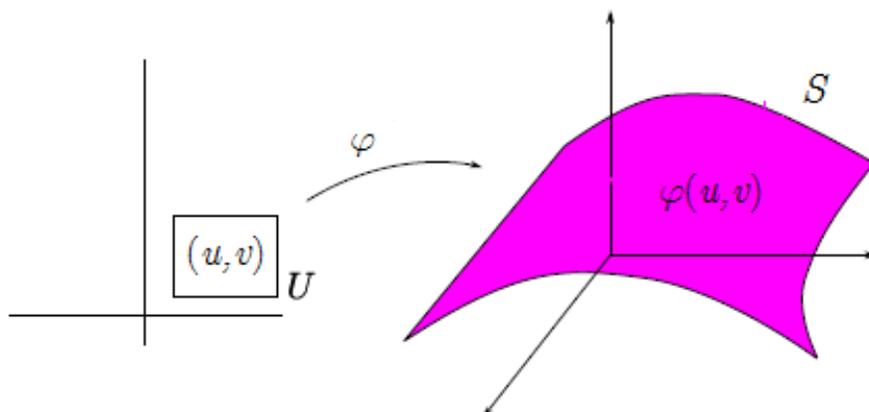


FIGURE 3.18 – Surface paramétrée.

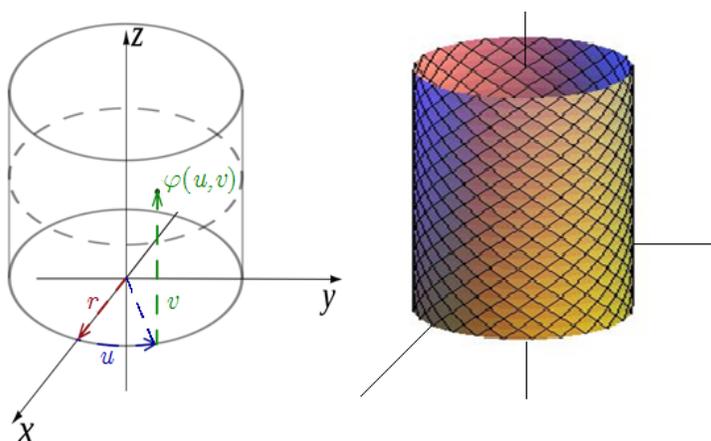


FIGURE 3.19 – Cylindre de révolution.

2) La sphère  $S^2$  de  $\mathbb{R}^3$  est paramétrée par

$$\begin{aligned} \varphi : ]0, 2\pi[ \times ]0, \pi[ &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\phi, \theta) &\longmapsto \varphi(\phi, z) = (r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \theta) \end{aligned}$$

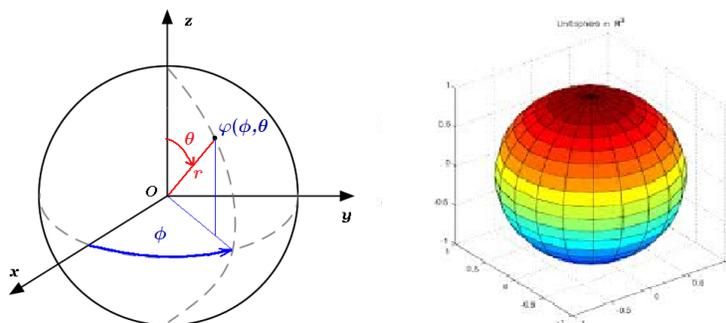
$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = r^2\} \text{ où } r > 0.$$

**Définition 3.5.2.**

Une surface paramétrée  $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$  est dite régulière si pour tout  $(u, v) \in U$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v)$  et  $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)$  sont libres.

**Remarque 3.5.1.**

1) Par la suite, on considère  $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) = \varphi_u(u, v)$  et  $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = \varphi_v(u, v)$ , pour tout  $(u, v) \in U$ .

FIGURE 3.20 – Sphère  $S^2$ .

- 1)  $\varphi_u(u, v)$  et  $\varphi_v(u, v)$  sont libres  $\Leftrightarrow \varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v) \neq 0$ .
- 2)  $\varphi$  est régulière  $\Leftrightarrow \varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v) \neq 0$ .

**Exemple 3.5.1.**

La surface paramétrée

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (u + v, u - v, u^2 + v^2), \end{aligned}$$

est régulière car  $\varphi_u(u, v) = (1, 1, 2u)$  et  $\varphi_v(u, v) = (1, -1, 2v)$  sont libres.

**3.5.2 Plan tangent à une surface paramétrée****Définition 3.5.3.**

Soit  $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$  une surface paramétrée régulière de support  $S$ .

Le plan tangent à la surface paramétrée  $\varphi$  au point  $p = \varphi(u, v)$ , est le plan affine passant par  $p$  et engendré par les vecteurs  $\varphi_u(u, v)$  et  $\varphi_v(u, v)$ , noté  $T_p S$ . *i.e*

$$T_p S = p + \text{vect}(\varphi_u(u, v), \varphi_v(u, v)).$$

Le vecteur unitaire normal à ce plan tangent  $T_p S$  est le vecteur

$$n = \frac{\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)}{\|\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)\|}, \quad (3.10)$$

**Remarque 3.5.2.**

L'ensemble  $\{\varphi_u(u, v), \varphi_v(u, v)\}$  est une base de  $T_p S$ .

**Exercice corrigé 3.5.1.**

Soit surface paramétrée

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (u - v, u^2 + v^2, u^2 - v^2), \end{aligned}$$

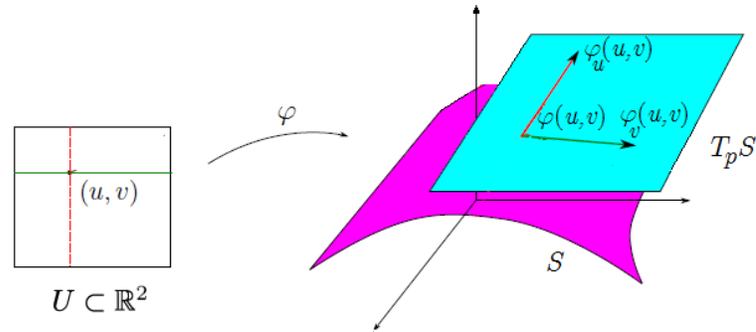


FIGURE 3.21 – Plan tangent à une surface paramétrée.

- 1) Déterminer les points régulières de  $\varphi$ .
- 2) Déterminer l'équation cartésienne du plan tangent à  $\varphi$  au point  $p = \varphi(2, 1)$ .

**Solution .**

1) On va déterminer les points régulières de la surface paramétrée  $\varphi$ .

$$\varphi_u(u, v) = (1, 2u, 2u), \quad \varphi_v(u, v) = (-1, 2v, -2v).$$

On pose  $(\varphi_u \wedge \varphi_v)(u, v) = (b_1, b_2, b_3)$ , alors

$$b_1 = \begin{vmatrix} 2u & 2u \\ 2v & -2v \end{vmatrix} = -8uv, \quad b_2 = - \begin{vmatrix} 1 & 2u \\ -1 & -2v \end{vmatrix} = 2(v - u), \quad b_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2u \\ -1 & 2v \end{vmatrix} = 2(v + u)$$

$$\|(\varphi_u \wedge \varphi_v)(u, v)\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{8(8u^2v^2 + u^2 + v^2)} = 0 \Leftrightarrow u = v = 0.$$

$\varphi$  est régulière sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

2) On va déterminer l'équation cartésienne du plan tangent à  $\varphi$  au point  $p = \varphi(2, 1)$ .

$$T_p S = \varphi(2, 1) + \text{vect}(\varphi_u(2, 1), \varphi_v(2, 1)), \quad \varphi(2, 1) = (1, 5, 3), \quad (\varphi_u \wedge \varphi_v)(2, 1) = (-16, -2, 6) \text{ alors}$$

$$M(x, y, z) \in T_p S \Leftrightarrow \vec{pM} \perp (\varphi_u \wedge \varphi_v)(2, 1) \Leftrightarrow -16(x - 1) - 2(y - 5) + 6(z - 3) = 0$$

d'où l'équation cartésienne est  $8x + y - 3z - 4 = 0$ .

**Définition 3.5.4.**

Une application  $h : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $C^\infty$  est dite immersion sur  $U$ , si pour tout  $(u, v) \in U$ ,  $Jac_h(u, v)$  est de rang égal à 2.

**Remarque 3.5.3.**

- 1)  $Jac_h(u, v)$  est de rang égal à 2  $\Leftrightarrow h_u(u, v)$  et  $h_v(u, v)$  sont libres.
- 2) Toute immersion sur  $U$  est une surface paramétrée régulière.

**Définition 3.5.5.**

Soit  $W$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ . Une application  $f : W \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$  est dite submersion sur  $W$ , si pour tout  $(x, y, z) \in W$ ,  $Jac_f(u, v)$  est de rang égal à 1.

**Remarque 3.5.4.**

- 1)  $Jac_f(x, y, z)$  est de rang égal à 1  $\Leftrightarrow (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)) \neq (0, 0, 0)$ .
- 2) Le vecteur  $(f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z))$  est appelé gradient  $f$  noté  $\text{grad } f(x, y, z)$  ou  $\nabla f(x, y, z)$ .

**Exemple 3.5.2.**1) *L'application*

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (u, v, u + v)\end{aligned}$$

*est une immersion sur  $\mathbb{R}^2$ .*2) *L'application*

$$\begin{aligned}f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto x^2 - y^2 - z^2\end{aligned}$$

*est une submersion sur  $\mathbb{R}^3$ .***Proposition 3.5.1.**

Soient  $W$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  et  $f : W \longrightarrow \mathbb{R}$  une submersion, alors localement l'ensemble  $S = \{(x, y, z) \in W, f(x, y, z) = 0\}$  peut être décrite par une surface paramétrée régulière, de plus le vecteur normal unitaire à  $S$  en  $(x, y, z)$  est

$$n = \frac{\nabla f(x, y, z)}{\|\nabla f(x, y, z)\|}. \quad (3.11)$$

**Preuve .**

Soit  $(x_0, y_0, z_0) \in S$ , alors  $f(x_0, y_0, z_0) = 0$  et  $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ , puis que  $f$  est une submersion, supposons que  $f_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ . D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $(x_0, y_0)$  dans  $\mathbb{R}^2$  et un voisinage ouvert  $I$  de  $z_0$  dans  $\mathbb{R}$  et une application  $h : U \longrightarrow I$  de classe  $C^\infty$  tel que : pour tout  $(x, y, z) \in U \times I$

$$f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow z = h(x, y)$$

$$\text{de plus } h_x(x, y) = -\frac{f_x(x, y, z)}{f_z(x, y, z)} \text{ et } h_y(x, y) = -\frac{f_y(x, y, z)}{f_z(x, y, z)}.$$

Alors l'application

$$\begin{aligned}\varphi : U &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto \varphi(u, v) = (u, v, h(u, v))\end{aligned}$$

est une immersion sur  $U$ , car  $Jac_\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ h_u(u, v) & h_v(u, v) \end{pmatrix}$  de rang égal à 2.

C'est à dire  $\varphi$  est une surface paramétrée régulière.Si  $(\varphi_x \wedge \varphi_y)(x, y) = (b_1, b_2, b_3)$ , on a

$$\begin{aligned}b_1 &= \begin{vmatrix} 0 & h_x(x, y) \\ 1 & h_y(x, y) \end{vmatrix} = -h_x(x, y) = \frac{f_x(x, y, z)}{f_z(x, y, z)} \\ b_2 &= -\begin{vmatrix} 1 & h_x(x, y) \\ 0 & h_y(x, y) \end{vmatrix} = -h_y(x, y) = \frac{f_y(x, y, z)}{f_z(x, y, z)}\end{aligned}$$

$$b_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$(\varphi_x \wedge \varphi_y)(x, y) = \left( \frac{f_x(x, y, z)}{f_z(x, y, z)}, \frac{f_y(x, y, z)}{f_z(x, y, z)}, 1 \right)$$

C'est à dire  $f_z(x, y, z)(\varphi_x \wedge \varphi_y)(x, y) = \nabla f(x, y, z) \cdot \mathbf{i.e} (\varphi_x \wedge \varphi_y)(x, y)$  est colinéaire à  $\nabla f(x, y, z)$  d'où

$$n = \frac{\nabla f(x, y, z)}{\|\nabla f(x, y, z)\|},$$

est le vecteur normal unitaire à  $S$  en  $(x, y, z)$ .

**CQFD**

### Exercice corrigé 3.5.2.

Soit  $S = \{(x, y, z) \in W, x^2 + 2y^2 - z^2 = 2\}$

- 1) Vérifier que  $S$  est une surface géométrique.
- 2) Déterminer l'équation cartésienne du plan tangent à  $S$  au point  $A = (3, 3, 5)$ .

#### Solution .

1) l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z^2 - 2 \end{aligned}$$

est une submersion car pour tout  $(x, y, z) \in S$ ,  $\nabla f(x, y, z) = (2x, 4y, -2z) \neq (0, 0, 0)$ .  
d'où  $S$  est une surface géométrique.

2) On a  $A = (3, 3, 5) \in S$  et  $\nabla A = (6, 12, -10)$ .

$$M(x, y, z) \in T_p S \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \nabla A \Leftrightarrow -6(x - 3) + 12(y - 3) - 10(z - 5) = 0$$

d'où l'équation cartésienne est  $3x + 6y - 5z - 2 = 0$ .

### 3.5.3 Première forme fondamentale

#### Définition 3.5.6.

Soient  $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$  une surface paramétrée régulière de support  $S$  et  $T_p S$  le plan tangent à  $S$  en  $p \in S$ .

On appelle première forme fondamentale en  $p$  de  $S$  notée  $\mathbb{I}$ , la forme quadratique associée à la restriction du produit scalaire usuel de  $\mathbb{R}^3$  au  $T_p S$ .

#### Expression locale

Si  $w \in T_p S$ ,  $w = \alpha\varphi_u + \beta\varphi_v$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathbb{I}(w) &= \langle \varphi_u \alpha + \varphi_v \beta, \varphi_u \alpha + \varphi_v \beta \rangle \\ &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle \alpha^2 + 2\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle \alpha\beta + \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle \beta^2 \\ &= E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2. \end{aligned}$$

Où  $E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle$ ,  $F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle$  et  $G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$  les coefficients de la première forme fondamentale  $\mathbb{I}$  dans la base  $(\varphi_u, \varphi_v)$ .

Dans la base  $(\varphi_u, \varphi_v)$  la première forme fondamentale  $\mathbb{I}$  est représentée par la matrice

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

**Exemple 3.5.3.**

Soit surface paramétrée

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (uv, u - v, u + v)\end{aligned}$$

On a  $\varphi_u = (v, 1, 1)$  et  $\varphi_v = (u, -1, 1)$  alors les coefficients de la première forme fondamentale  $\mathbb{I}$  sont  $E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = v^2 + 2$ ,  $F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = uv$  et  $G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = u^2$ .

**Définition 3.5.7.**

Soient  $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe paramétrée régulière et  $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$  une surface paramétrée régulière de support  $S$ .

$\gamma$  est dite tracée sur  $S$  si pour tout  $t \in I$ ,  $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ . *i.e* elle existe

$$\begin{aligned}\alpha : I &\longrightarrow U \subset \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \alpha(t) = (u(t), v(t))\end{aligned}$$

une courbe paramétrée régulière telle que  $\gamma = \varphi \circ \alpha$

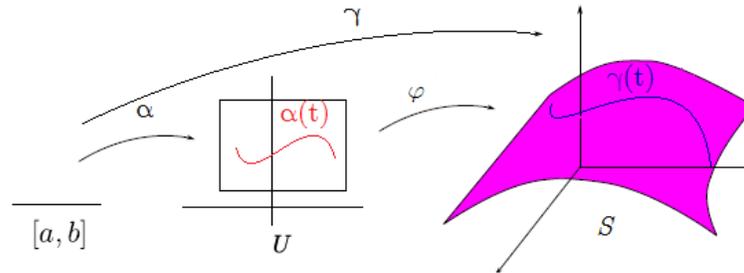


FIGURE 3.22 – Courbe tracée sur une surface paramétrée.

**Proposition 3.5.2.**

Soient  $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe paramétrée régulière tracée sur une surface paramétrée régulière  $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$  de support  $S$ , si  $[a, b] \subset I$ . Alors la longueur de la courbe paramétrée  $\gamma$  est donnée par

$$l_{\gamma/[a,b]} = \int_a^b \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt \quad (3.12)$$

**Preuve .**

On a  $l_{\gamma/[a,b]} = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$  et  $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$  alors  $\gamma'(t) = \frac{d\varphi}{dt} = \varphi_u \frac{du}{dt} + \varphi_v \frac{dv}{dt}$

$$\begin{aligned}\|\gamma'(t)\| &= \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle} \\ &= \sqrt{\langle \varphi_u \frac{du}{dt} + \varphi_v \frac{dv}{dt}, \varphi_u \frac{du}{dt} + \varphi_v \frac{dv}{dt} \rangle} \\ &= \sqrt{\langle \varphi_u, \varphi_u \rangle \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} \\ &= \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}.\end{aligned} \quad (3.13)$$

CQFD

**Remarque 3.5.5.**

De la formule (3.13) on a :

$$\mathbb{I}(\gamma'(t)) = \|\gamma'(t)\|^2 = E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

Si  $s = \phi(t) = \int_a^t \|\gamma'(t)\| dt$  l'abscisse curviligne d'origine  $\gamma(a)$  alors

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \|\gamma'(t)\|^2 = E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

d'où la notation

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2. \quad (3.14)$$

D'autre part on a :  $d\varphi = \varphi_u du + \varphi_v dv$ ,

$$\begin{aligned} d\varphi^2 &= \langle d\varphi, d\varphi \rangle \\ &= \langle \varphi_u du + \varphi_v dv, \varphi_u du + \varphi_v dv \rangle \\ &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle du^2 + 2\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle dudv + \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle dv^2 \\ &= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2. \end{aligned}$$

**Corollaire 3.5.1.**

Soient  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  une surface paramétrée régulière. Si  $\theta$  est l'angle entre  $\varphi_u$  et  $\varphi_v$ , alors

$$\cos \theta = \frac{F}{\sqrt{EG}}. \quad (3.15)$$

**Preuve .**

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle}{\|\varphi_u\| \|\varphi_v\|} \\ &= \frac{\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle}{\sqrt{\langle \varphi_u, \varphi_u \rangle} \sqrt{\langle \varphi_v, \varphi_v \rangle}} \\ &= \frac{F}{\sqrt{EG}}. \end{aligned}$$

CQFD

**Définition 3.5.8.**

Soient  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  une surface paramétrée régulière de support  $S$  et  $D \subset S$  un domaine compact, on définit l'aire  $\mathcal{A}$  de  $D$  par

$$\mathcal{A} = \iint_{\varphi^{-1}(D)} \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| dudv. \quad (3.16)$$

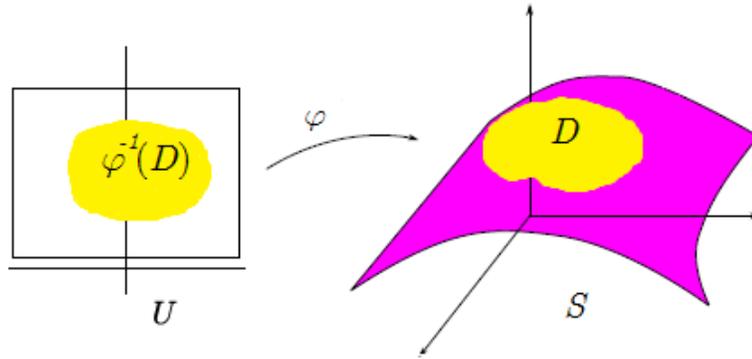


FIGURE 3.23 – L'aire d'une partie de surface paramétrée.

**Proposition 3.5.3.**

Soient  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  une surface paramétrée régulière de support  $S$  et  $D \subset S$  un domaine compact, alors l'aire de  $D$  est donnée par

$$\mathcal{A} = \iint_{\varphi^{-1}(D)} \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv. \quad (3.17)$$

**Preuve .**

En utilisant l'identité de Lagrange voir la proposition 2.1.13, on obtient

$$\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|^2 + \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle^2 = \|\varphi_u\|^2 \|\varphi_v\|^2$$

d'où  $\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|^2 + F^2 = E^2 G^2$ .

**CQFD****Exemple 3.5.4.**

Soit surface  $S$  paramétrée

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 2\pi] \times [0, 2] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto \varphi(u, v) = (e^v \cos u, e^v \sin u, e^v) \end{aligned}$$

On va déterminer l'aire de  $S$ , alors  $\varphi_u = (-e^v \sin u, e^v \cos u, 0)$  et  $\varphi_v = (e^v \cos u, e^v \sin u, e^v)$  alors les coefficients de la première forme fondamentale  $\mathbb{I}$  sont  $E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = e^{2v}$ ,  $F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0$  et  $G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = 2e^{2v}$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \iint_{\varphi^{-1}(S)} \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{2e^{4v}} \, du \, dv \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} du \int_0^2 e^{2v} \, dv \\ &= \pi\sqrt{2}(e^4 - 1). \end{aligned}$$

**Exercice corrigé 3.5.3.**

Le tore est la surface engendrée par la révolution d'un cercle  $C$  autour d'une droite  $D$  de son plan.

- 1) Déterminer une paramétrisation du tore.
- 2) Calculer l'aire de la surface du tore .

**Solution .**

- 1) Supposons que le centre du cercle  $C$  se trouve initialement dans le plan  $xOy$  sur l'axe  $Ox$

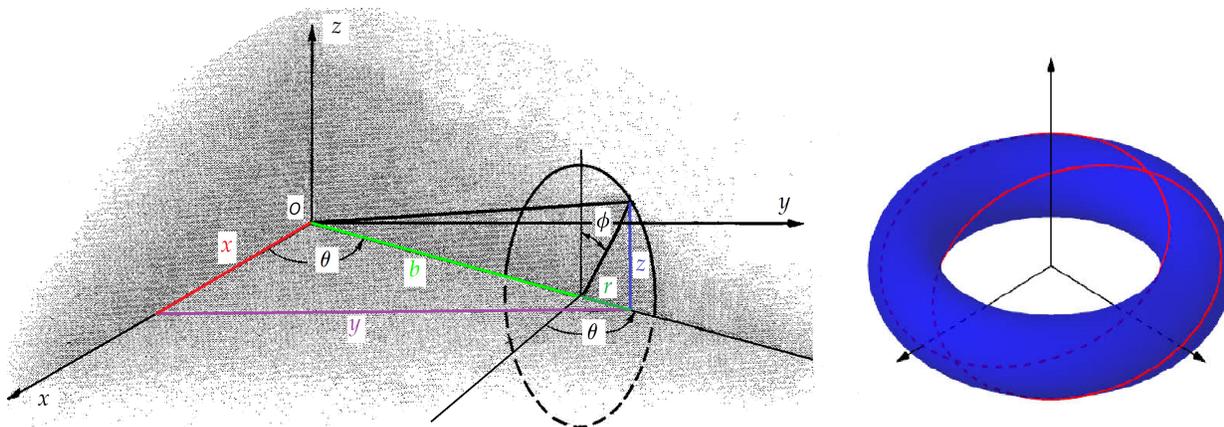


FIGURE 3.24 – L'aire du tore.

à distance  $b$  de l'origine  $O$  et son rayon est égal à  $a$ ,  $a < b$ . Après avoir tourné d'un angle  $\theta$  autour de l'axe  $Oz$  alors,

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{b+r} \\ \sin \theta = \frac{y}{b+r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = (b+r) \cos \theta \\ y = (b+r) \sin \theta \end{cases} \quad (3.18)$$

le vecteur rayon après avoir tourné d'un angle  $\phi$  autour d'axe  $Oz$  alors,

$$\begin{cases} \cos \phi = \frac{z}{a} \\ \sin \phi = \frac{r}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = a \cos \phi \\ r = a \sin \phi \end{cases} \quad (3.19)$$

De les équations (3.18) et (3.19), on trouve

$$\begin{cases} x = (b + a \sin \phi) \cos \theta \\ y = (b + a \sin \phi) \sin \theta \\ z = a \cos \phi \end{cases}$$

D'où le tore est représenté par la surface paramétrée

$$\begin{aligned} \varphi : ]0, 2\pi[ \times ]0, 2\pi[ &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \phi) &\longmapsto \varphi(\theta, \phi) = ((b + a \sin \phi) \cos \theta, (b + a \sin \phi) \sin \theta, a \cos \phi) \end{aligned}$$

2) On va Calculer l'aire de la surface du tore, on a

$\varphi_\theta = (-(b + a \sin \phi) \sin \theta, (b + a \sin \phi) \cos \theta, 0)$  et  $\varphi_\phi = (a \cos \phi \cos \theta, a \cos \phi \sin \theta, -a \sin \phi)$  alors les coefficients de la première forme fondamentale  $\mathbb{I}$  sont

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = (b + a \sin \phi)^2, F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0 \text{ et } G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = a^2.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \iint_{\varphi^{-1}(S)} \sqrt{EG - F^2} \, dudv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a(b + a \sin \phi) \, d\theta d\phi \\ &= a \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} (b + a \sin \phi) \, d\phi \\ &= 2\pi a [b\phi + a \cos \phi]_0^{2\pi} \\ &= 4\pi^2 ab. \end{aligned}$$

## 3.6 Exemples de courbes et de surfaces

### 3.6.1 Exemples de courbes

#### 1. Astroïde

Astroïde est une courbe paramétrée définie par :

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \gamma(t) = (R \cos^3 t, R \sin^3 t), \quad R \in \mathbb{R}_+^* \end{aligned}$$

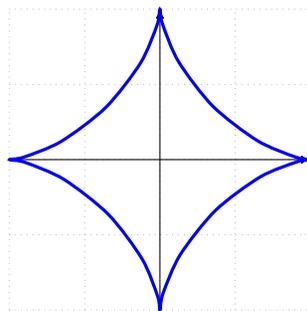


FIGURE 3.25 – Astroïde

## 2. Cycloïde

Cycloïde est une courbe paramétrée plane définie par

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \gamma(t) = (R(t - \sin t), R(1 - \cos t)), \quad R \in \mathbb{R}_+^* \end{aligned}$$

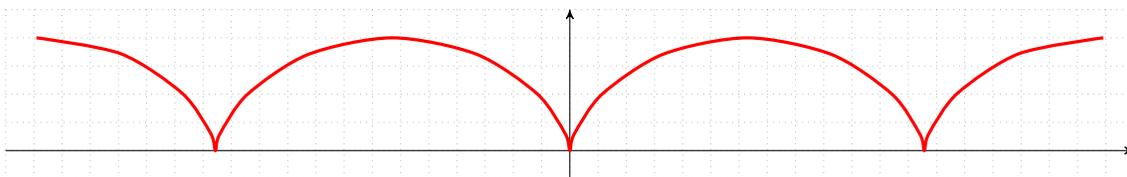


FIGURE 3.26 – Cycloïde

## 3. Tractrice

Tractrice est une courbe paramétrée plane définie par

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \gamma(t) = \left(t - \tanh t, \frac{1}{\cosh t}\right) \end{aligned}$$

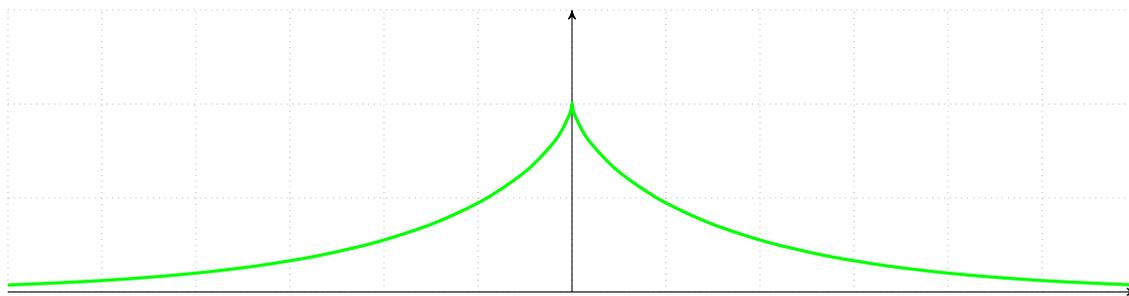


FIGURE 3.27 – Tractrice

## 4. Cardioïde

Cardioïde est une courbe paramétrée plane définie par

$$\rho(\theta) = a(1 + \cos \theta), \quad a > 0$$

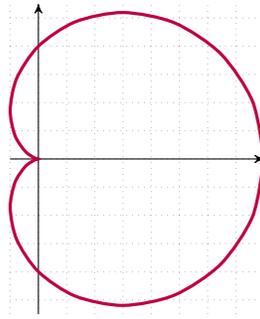


FIGURE 3.28 – Cardioïde

### 5. Hélice

Hélice est une courbe paramétrée gauche définie par

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \gamma(t) = (R \cos t, R \sin t, rt), \quad R > 0, r \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

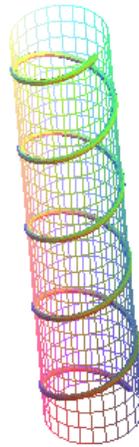


FIGURE 3.29 – Hélice

### 6. Horoptère

Horoptère est une courbe paramétrée gauche définie par

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \gamma(t) = \left( \frac{2a}{1+t^2}, bt, \frac{2at}{1+t^2} \right), \quad a, b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$



FIGURE 3.30 – Courbe d’Horoptère

### 3.6.2 Exemples de surfaces

#### 1. Cylindre elliptique

Cylindre elliptique est une surface d’équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , où  $a, b \in \mathbb{R}^*$ .  
et paramétrée par

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto \varphi(u, v) = (a \cos u, b \sin u, v) \end{aligned}$$



FIGURE 3.31 – Cylindre elliptique

#### 2. Paraboloïde hyperbolique

Paraboloïde hyperbolique est une surface d’équation  $\frac{z}{h} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ , où  $a, b, h \in \mathbb{R}^*$ .  
et paramétrée par

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto \varphi(u, v) = (au, bv, h(u^2 - v^2)) \end{aligned}$$

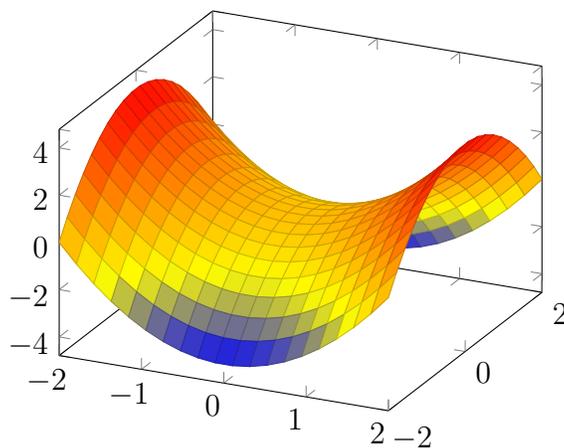


FIGURE 3.32 – Paraboloïde hyperbolique

### 3. Paraboloïde elliptique

Paraboloïde elliptique est une surface d'équation  $z = x^2 + y^2$ ,  
et paramétrée par

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} \times [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto \varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2) \end{aligned}$$

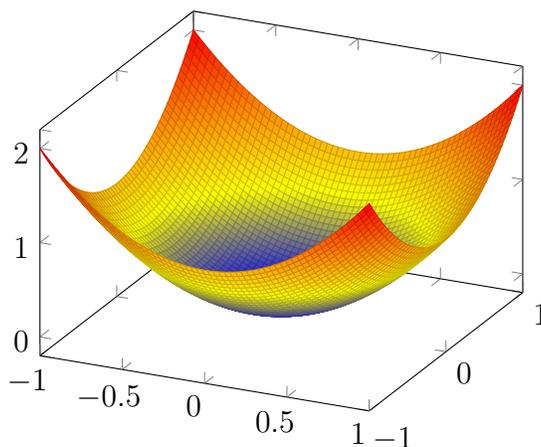


FIGURE 3.33 – Paraboloïde elliptique

### 4. Ellipsoïde

Ellipsoïde est une surface d'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  où  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

et paramétrée par

$$\begin{aligned}\varphi : [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto \varphi(u, v) = (a \cos u \cos v, b \cos u \sin v, c \sin u)\end{aligned}$$

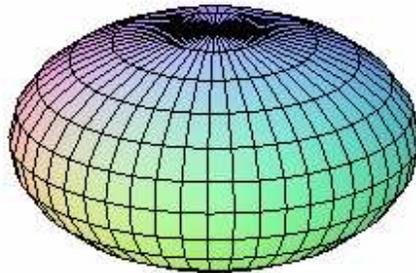


FIGURE 3.34 – Ellipsoïde

## Exercices

### Exercice 3.6.1.

Soit les courbes paramétrées :

$$\begin{aligned} \gamma : ]0, +\infty[ &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \left(t + \frac{1}{t}, t - \frac{1}{t}\right), \quad \alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & \quad \quad \quad t \longmapsto (2cht, 2sht) \end{aligned}$$

- 1) Montrer que  $\gamma$  équivalente à  $\alpha$ .
- 2) Déterminer une équation cartésienne de support de  $\gamma$ .

### Exercice 3.6.2.

On considère la courbe paramétrée :

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (R \cos^3 t, R \sin^3 t) \quad \text{où } R \in \mathbb{R}_+^*. \end{aligned}$$

- 1) Déterminer les points où la courbe  $\gamma$  est régulière.
- 2) Déterminer la longueur de l'arc  $\gamma_{\setminus [0, 2\pi]}$ .

### Exercice 3.6.3.

On considère la courbe paramétrée  $\gamma$  définie par

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto (1 + t, -t^3, 1 + t^3) \end{aligned}$$

1. Montrer que cette représentation est régulière.
2. Donner un système d'équations cartésiennes de la droite affine de  $\mathbb{R}^3$  tangente à la courbe  $\gamma$  au point  $\gamma(1)$ .
3. Donner une équation du plan affine de  $\mathbb{R}^3$  normal à la courbe au point  $\gamma(1)$ .

### Exercice 3.6.4.

Déterminer l'allure des courbes paramétrées suivantes au voisinage de 0.

$$1) \gamma(t) = (t^4 + t^3, t^6), \quad 2) \gamma(t) = \left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t}\right), \quad 3) \gamma(t) = (t^2 \ln(t+1), t^2(e^{t^2} - 1)).$$

### Exercice 3.6.5.

On considère la courbe paramétrée définie par :

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \left(\frac{t}{t-1}, \frac{3t}{t^2-1}\right) \end{aligned}$$

1. Étudier les asymptotes de la courbe paramétrée  $\gamma$ .
2. Déterminer la position de la courbe paramétrée  $\gamma$  par rapport à ses asymptotes.

### Exercice 3.6.6.

Étudier et tracer les courbes paramétrées suivantes

$$1) \gamma(t) = \left(\frac{t^2}{t-1}, \frac{(t-2)^2}{t^2-1}\right), \quad 2) \gamma(t) = \left(\sin t, \frac{\cos^2 t}{2-\cos t}\right), \quad 3) \gamma(t) = \left(\tan \frac{t}{3}, \sin t\right).$$

**Exercice 3.6.7.**

Tracer les courbes définies en coordonnées polaires par

$$1) \rho(\theta) = 1 + \cos \theta, \quad 2) \rho(\theta) = \sqrt{\cos 2\theta}, \quad 3) \rho(\theta) = \frac{1 + 2 \sin \theta}{1 + 2 \cos \theta}.$$

**Exercice 3.6.8.**

On considère la courbe paramétrée (Cardioïde)

$$\begin{aligned} \gamma: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto ((1 - \cos t) \cos t, (1 - \cos t) \sin t) \end{aligned}$$

- 1) Déterminer les points où la courbe  $\gamma$  est régulière.
- 2) Déterminer la courbure .

**Exercice 3.6.9.**

- 1) Déterminer la courbure et la torsion de la courbe  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ .
- 2) Déterminer le plan osculateur en  $t = 0$  et en  $t = 1$ .

**Exercice 3.6.10.**

Soient  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe paramétrée régulière et  $(\gamma(t), T(t), N(t), B(t))$  le repère de Frenet de  $\gamma$  en  $t$ . Si  $K(t)$  est la courbure de  $\gamma$  et  $\tau(t)$  est la torsion de  $\gamma$ .  
Montrer que : la courbe  $\gamma$  est plane si et seulement si  $\tau(t) = 0$ .

**Exercice 3.6.11.**

Déterminer le plan tangent à la surface  $S$  au point  $A$  dans les cas suivantes :

- 1)  $S$  paramétrée par :  $\varphi(u, v) = (u + v, u.v, u^2 + v^2)$ ,  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ ,  $A = (1, 0, 1)$ .
- 2)  $S$  d'équation :  $z^3 = x.y$ ,  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ ,  $A = (1, -1, -1)$ .

**Exercice 3.6.12.**

Soit  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  une surface paramétrée  $C^\infty$  dont la première forme fondamentale s'écrit

$$\forall (u, v) \in U, \quad E = 1, \quad F = \cos \theta, \quad G = 1,$$

avec  $\theta: U \rightarrow ]0, \pi[$  de classe  $C^\infty$ . Une telle surface paramétrée est dite de Tchebychev.

- 1-Montrer que  $\varphi$  est régulière.
- 2-Montrer que  $\varphi_{uv}$  est un vecteur normal à la surface.

**Exercice 3.6.13.**

Pour  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , on pose

$$\varphi(u, v) = \left( u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right).$$

On pourra admettre que si  $W$  est un voisinage ouvert suffisamment petit de  $(0, 0)$  dans  $\mathbb{R}^2$ , la restriction de  $\varphi$  à  $W$  est un plongement. On pose alors  $S = \varphi(W)$ .

1. Déterminer la première forme fondamentale de  $S$ .
2. Soit  $D$  un disque fermé centré en  $(0, 0)$ , de rayon  $\delta$ , contenu dans  $W$ . Calculer l'aire de  $P(D)$ .

# Bibliographie

- [1] Audin. M, *Géométrie*. Collection Enseignement sup Mathématiques, Université Louis Pasteur.© 2006, EDP Sciences.
- [2] Barani.J.P, *Espaces euclidiens, géométrie euclidienne*, 15 janvier 2004.
- [3] Bousquet.P, *Cours de Géométrie affine et euclidienne pour l'agrégation*, 2009/2010.
- [4] Claire.R, *Géométrie affine, Préparation à l'Agrégation*, ENS de Cachan,Novembre 2012.
- [5] Decauwert.J.M, *Géométrie affine*, Université Joseph Fourier, Grenoble.
- [6] Faenzi.D, *Algèbre bilinéaire Notes du cours*, Université de Pau, 2011/2012.
- [7] Ferrard.J.M, *Géométrie affine*, © EduKlub S.A.
- [8] Fredon.D, *Mathématiques Algèbre et Géométrie*, Dunod, Paris, 2009.
- [9] Havet.J.F, *Mathématiques, Algèbre bilinéaire et géométrie euclidienne*,Janvier 2013.
- [10] Le Stum.B, *Géométrie cours de Licence*, Université de Rennes 1, Version du 19 janvier 2004.
- [11] Marie-Claude.D, *Géométrie Affine Euclidienne*, Université PARIS-SUD, CAPES 2009-2010.
- [12] Ménévis.H, *Cours de Mathématiques Quatrième partie, géométrie*, PCSI2 2010/2011.
- [13] Monier.J.M, *Algèbre et Géométrie*, PC-PSI-PT, Dunod, Paris, 1996.
- [14] Pedon.E, *Cours de Géométrie Affine et Euclidienne pour la Licence de Mathématiques*, Version du 28 novembre 2010.
- [15] Pierre Ramis.J et Warusfel.A, *Mathématiques tout-en-un pour la licence*, Couverture Rachid Maraï © Dunod, Paris, 2006 ISBN 2 10 049614 X.
- [16] Quinet.J, *Cours élémentaire de mathématiques supérieures tome1-Algèbre*, © BORDAS, Paris 1976.
- [17] Ramis.E, Deschamps.C et Odoux.J, *cours de mathématiques spéciales, 2-algèbre et applications à la géométrie* 1987. 2<sup>me</sup> tirage, 312 pages.
- [18] Rigo.M, *Géométrie*, Université de Liège Faculté des sciences, Année académique 2006–2007.
- [19] Salle.L, *Cours de mathématiques*, Classe de PCSI.Année scolaire 2011-2012.
- [20] Taillefer.R, *Géométrie affine*, Université Jean Monnet Licence de Mathématiques 2006-2007 Semestre 3.

- 
- [21] Thierry.C, *Courbes et Surfaces*, Université Paris XII Val-de-Marn, 4 décembre 2005.
- [22] Manfredo .P, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, © 1976 by Prentice-Hall, Inc.Englewood Cliffs, New Jersey.
- [23] Martin .M .L, *Theory and Problems of Differential Geometry* , Schaum's Outline Series, Bridgeport, Conn. March 1969.
- [24] Jean .L.R, *Courbes paramétrées* , [http ://http//www.maths-france.fr/](http://http://www.maths-france.fr/).