République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

---

Université de Relizane

جامعة غليزان
RELIZANE UNIVERSITY

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques

Algèbre 03

Réduction des endomorphismes d'espaces vectoriels de dimension finie et applications

$2^{ème}$ Année LMD Mathématiques

Année universitaire 2021-2022

ZAGANE ABDERRAHIM

Table des matières

Introduction

Ce polycopié présente les notions fondamentales de l'algèbre linéaire. Il est destiné aux étudiants de la Licence de Mathématiques.

Le contenu de ce polycopié regroupe le programme enseigné de $2^{ème}$ année licence mathématiques. Il est rédigé sous forme de cours détaillés avec des exercices résolus. Il est présenté avec un style très simple qui permet aux étudiants une compréhension très rapide.

L'organisation générale de ce polycopié est décomposé en (quatre) chapitres.

Dans le premier chapitre nous étudions rapidement les notions de base suivantes liés au l'algèbre général : lois de compositions internes, groupes, groupes symétriques, anneaux, corps. Ces notions ont été illustrées par des exemples et exercices résolus et à la fin du chapitre, nous suggérons une série d'exercices non résolus.

Dans le deuxième chapitre nous présentons les notions de base suivantes : espaces vectoriels, applications linéaires et matrices, déterminants. Nous proposons tout au long du chapitre des exemples et exercices résolus et à la fin du chapitre, nous suggérons une série d'exercices non résolus.

Dans le troisième chapitre nous aborderons la réduction des endomorphismes d'espaces vectoriels de dimension finie. Nous présentons les notions suivantes : un rappels sur les polynômes, éléments propres, diagonalisation, trigonalisation, polynômes d'endomorphisme, réduction de Jordan. Tout en donnant quelques exemples et exercices résolus bien détaillés et une autre série d'exercices non résolus.

Dans le quatrième chapitre nous donnons des application de la réduction des endomorphismes et des matrices et nous aborderons les éléments suivantes : calcul des puissances d'une matrice carrée, systèmes des suites récurrentes linéaires, suites récurrentes linéaires à coefficients constants, exponentielle des matrices, systèmes différentiels linéaires du premier ordre. Tout en donnant quelques exemples et exercices résolus bien détaillés.

Pour approfondir la compréhension, nous donnons à la fin de chaque chapitre une série des exercices non résolus de degré de difficulté différente.

CHAPITRE 1

Généralité sur l'algèbre générale

Sommaire

Dans ce chapitre nous allons étudier rapidement les notions de base suivantes liés au l'algèbre général : lois de compositions internes, groupes, groupes symétriques, anneaux, corps. ces notions intervient dans la plupart des disciplines mathématiques. Ainsi ces notions sera indispensable à l'étude l'algèbre linéaire (espaces vectoriels, applications linéaires et matrices, réduction des endomorphismes d'espaces vectoriels de dimension finie).

1.1 Lois de compositions internes

1.1.1 Loi de composition interne

Définition 1.1.1.
Une opération interne, ou loi de composition interne, sur un ensemble E est une application

$$: E \times E \quad \to \quad E$$

Si E muni d'une loi de composition interne notée $\top$, alors pour tous $x, y \in E$ on a $x \top y \in E$.

Exemples 1.1.1.

1) *Dans $E = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, les lois de compositions internes définies par l'addition et la multiplication.*

2) *Dans l'ensemble des applications $\mathcal{F}(E)$ de E dans lui-même, la loi de composition $\circ$ des applications de E dans lui-même est une loi de composition interne i.e.*

$$\begin{array}{rcl} \circ : \mathcal{F}(E) \times \mathcal{F}(E) & \to & \mathcal{F}(E) \\ (f, g) & \mapsto & f \circ g \end{array}$$

3) *Le produit scalaire $<,>$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ n'est pas une loi de composition interne. Rappelons que le produit scalaire $<,>$ sur $\mathbb{R}^3$ est défini par*

$$< X, Y >= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \in \mathbb{R}$$

pour tous $X = (x_1, x_2, x_3)$ et $Y = (y_1, y_2, y_3)$.

4) *Le produit vectoriel des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est une loi de composition interne. Rappelons que le produit vectoriel $\wedge$ sur $\mathbb{R}^3$ est défini par*

$$X \wedge Y = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_1 y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

pour tous $X = (x_1, x_2, x_3)$ et $Y = (y_1, y_2, y_3)$.

Définition 1.1.2.
Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $\top$. On dit qu'une partie A de E est stable par $\top$ si, pour chaque $x, y \in A$ on a $x \top y \in A$.

Exemples 1.1.2.

1) $\mathbb{N}$ *et* $\mathbb{Z}$ *sont des parties stables de* $\mathbb{R}$ *pour l'addition et la multiplication.*

2) *L'ensemble des nombres irrationnels n'est pas stable pour la multiplication de $\mathbb{R}$ i.e. La multiplication de deux nombres irrationnels n'est pas toujours un nombre irrationnel.*

3) *L'ensemble des bijections de $\mathbb{R}$ n'est pas stable dans $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ pour l'addition des applications.*

1.1.2 Associativité - commutativité

Définition 1.1.3.
Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $\top$.

i) On dit que $\top$ est une loi associative sur E si

$$(x\top y)\top z = x\top(y\top z)$$

pour tous $x, y, z \in E$.

ii) On dit que $\top$ est une loi commutative si

$$x\top y = y\top x$$

pour tous $x, y \in E$.

Exemples 1.1.3.

1) *Les lois d'addition et de multiplications sur les ensembles de nombres $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont associatives et commutatives.*

2) *La composition des applications est associative mais n'est en général pas commutative.*

3) *Le produit vectoriel des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ n'est ni associative ni commutative.*

Remarques 1.1.1.

1) *On définit par récurrence le composé d'un n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (n entier $n \geqslant 1$) d'éléments de E en posant :*

$$x_1\top x_2\top \ldots \top x_n = (((x_1\top x_2)\top \ldots)\top x_{n-1})\top x_n$$

On a alors :

$$x_1\top x_2\top \ldots \top x_n = (x_1\top \ldots \top x_i)\top(x_{i+1}\top \ldots \top x_n)$$

2) *Lorsque x est un élément de E et n un entier tel que $n \geqslant 1$ on note :*

i) Avec une loi associative notée multiplicativement, x^n le produit de n facteurs tous égaux à x i.e. $x^n = xx\ldots x$.

ii) avec une loi associative notée additivement, nx la somme de n facteurs tous égaux à x i.e. $nx = x + x + \ldots + x$.

1.1.3 Elément neutre - éléments inversibles

Définition 1.1.4.
Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $\top$. On dit qu'un élément e de E est une identité ou un élément neutre pour la loi de composition interne $\top$ si,

$$e\top x = x\top e = x$$

pour tout $x \in E$.

Proposition 1.1.1.
Si une loi de composition interne sur un ensemble E a un élément neutre, alors cet élément neutre est unique.

Preuve.
Soient e, e' deux éléments neutres, alors : $e = e \top e' = e' \top e = e'$. **c.q.f.d**

Exemples 1.1.4.

1) *L'élément neutre de l'addition sur l'ensemble des nombres entiers* (*rationnels, réels, complexes*) *est* 0.

2) *L'élément neutre de la multiplication sur l'ensemble des nombres entiers (rationnels, réels, complexes) est* 1.

3) *L'élément neutre de l'addition sur l'ensemble des vecteurs de* $\mathbb{R}^n$ *est le vecteur nul* (*dont toutes les coordonnées sont* 0).

Remarques 1.1.2.

1) *Lorsqu'il existe, l'élément neutre d'une loi de composition interne notée additivement* (*resp. multiplicativement*) *est noté* 0 (*resp.* 1).

2) *Lorsqu'une loi de composition interne est notée additivement* (*resp. multiplicativement*) *et si elle possède un élément neutre on convient de poser, pour chaque élément x de E,* $0x = 0$ (*resp.* $x^0 = 1$).

3) *Lorsqu'une loi de composition interne associative est notée multiplicativement qui possède un élément neutre* 0 *; alors on a :* $mx + nx = (m+n)x$ *et* $m(nx) = (mn)x$, *pour tout x de E et tous entier* $n, m \geqslant 0$.

4) *Lorsqu'une loi de composition interne associative est notée multiplicativement qui possède un élément neutre* 1 *; alors on a :* $x^m x^n = x^{m+n}$ *et* $(x^m)^n = x^{mn}$, *pour tout x de E et tous entier* $n, m \geqslant 0$.

Définition 1.1.5.
Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $\top$ qui a un élément neutre e. On dit qu'un élément x' de E est symétrique d'un élément x de E si

$$x \top x' = x' \top x = e.$$

Un élément est dit symétrisable s'il possède un symétrique.

Remarques 1.1.3.

1) *En notation additive, on dit qu'un élément x' de E est opposé à un élément x de E si* $x + x' = x' + x = 0$, *dans ce cas x' noté $-x$.*

2) *En notation multiplicative, on dit qu'un élément x' de E est inverse à un élément x de E si* $xx' = x'x = 1$, *dans ce cas x' noté x^{-1}.*

Proposition 1.1.2.
Si une loi de composition interne est associative sur un ensemble E a un élément neutre, alors lorsqu'il existe, le symétrique d'un élément est unique.

Preuve.
Soit e un élément neutre d'une loi de composition interne et associative $\perp$ sur un ensemble E. Si pour tout $x \in E$, x admis deux symétriques x' et x'', alors
$x' = x' \top e = x' \top (x \top x'') = (x' \top x) \top x'' = e \top x'' = x''$. **c.q.f.d**

Proposition 1.1.3.
Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $\top$ qui a un élément neutre e. Si x et y sont symétrisables avec x' et y' pour symétrique respectif, alors $x \top y$ est symétrisable et son symétrique est $y' \top x'$.

Preuve.
On a : $(x \top y) \top (y' \top x') = x \top (y \top y') \top x' = x \top e \top x' = x \top x' = e$.
$(y' \top x') \top (x \top y) = y' \top (x' \top x) \top y = y' \top e \top y = y \top y' = e$. **c.q.f.d**

1.2 Groupes

1.2.1 Sous-groupes

Définition 1.2.1.
On appelle groupe, tout ensemble non vide G muni d'une loi de composition interne notée $\top$ tel que :
1) $\top$ est associative, i.e. $x \top (y \top z) = (x \top y) \top z$ pour tous $x, y, z \in G$.
2) $\top$ possède un élément neutre e, i.e. $x \top e = e \top x = x$ pour tout $x \in G$.
3) Tout élément de G est symétrisable, i.e. pour tous $x \in G$ il existe $x' \in G$ tel que

$$x \top x' = x' \top x = e.$$

On écrit $(G, \top)$ un groupe.
Si de plus $\top$ est commutative, on dit que $(G, \top)$ un groupe commutatif.

Dans ce qui suit, la loi de composition interne $\top$ est notée multiplicativement, on note souvent avec la même lettre le groupe et l'ensemble de ses éléments.

Exemple 1.2.1.

1) $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ *et* $\mathbb{R}$ *sont des groupes commutatifs muni de l'addition.*

2) $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$ *et* $\mathbb{C}^*$ *sont des groupes commutatifs muni de la multiplication.*

Définition 1.2.2.
Soit G un groupe. Une partie non vide H de G est un sous-groupe de G si et seulement si

1) $xy \in H$, *pour tous* $x, y \in H$,

2) $x^{-1} \in H$, *pour tous* $x, y \in H$.

Exemple 1.2.2.
$(\mathbb{Z}, +)$ *est un sous-groupe de* $(\mathbb{R}, +)$.

Proposition 1.2.1.
Soit H une partie non vide d'un groupe G, alors :
H est un sous-groupe de G si et seulement si $xy^{-1} \in H$ pour tous $x, y \in H$.

Preuve.
1) Supposons que : H est un sous-groupe de G, alors pour tous $x, y \in H$.
$\begin{cases} xy \in H \\ y^{-1} \in H \end{cases} \Rightarrow xy^{-1} \in H$ pour tous $x, y \in H$.
2) Réciproquement, supposons que : pour tous $x, y \in H$: $xy^{-1} \in H$. Si x = e alors :
• $ey^{-1} = y^{-1} \in H$,
• $xy = x(y^{-1})^{-1} \in H$,
d'où H est un sous-groupe de G. **c.q.f.d**

Définition 1.2.3.
Soit H un sous-groupe d'un groupe G. On dit que H est un sous-groupe propre de G si et seulement si $H \neq \{e\}$ et $H \neq G$.

1.2.2 Homomorphismes de groupes

Définition 1.2.4.
Soient G et G' deux groupes.

1) *Une application $f : G \longrightarrow G'$ est appelée un homomorphisme (morphisme) de groupes si, $f(xy) = f(x)f(y)$ pour tous $x, y \in G$.*

2) *Si f est bijective, on dit que f est un isomorphisme de groupes.*

3) *Si $G = G'$, on dit que f est un endomorphisme, et si f est bijective, on dit que f est un automorphisme.*

4) *L'ensemble des automorphismes de G noté $Aut(G)$.*

Exemple 1.2.3.

$$\begin{array}{rcl} f : (\mathbb{R}, +) & \to & \mathbb{R}^* \\ x & \mapsto & f(x) = e^x \end{array}$$

est un isomorphisme de groupes.

Proposition 1.2.2.
Soit G un groupe, alors :

1) *$Aut(G)$ est un groupe.*

2) *Si $a \in G$, l'application*

$$\begin{array}{rcl} f_a : G & \to & G \\ X & \mapsto & f_a(x) = axa^{-1} \end{array}$$

est un automorphisme de G.

3) *L'application :*

$$\begin{array}{rcl}\phi : G & \to & Aut(G) \\ a & \mapsto & \phi(a) = f_a(x)\end{array}$$

est un homomorphisme.

Preuve.
1) C'est évident.
2) Si $a \in G$, alors pour tous $x, y \in G$, on a
$i)$ $f_a(xy') = a(xy')a^{-1} = axa^{-1}aya^{-1} = f_a(x)f_a(y)$
$ii)$ Pour tout $y \in G, \exists! x \in G : y = f_a(x)$
$y = f_a(x) \Leftrightarrow y = axa^{-1} \Leftrightarrow x = a^{-1}ya \in G.$
D'où $f_a \in G$.
3) Pour tous $a, b, x \in G$, on a

$$\begin{array}{rcl}\phi(ab)(x) & = & f_{ab}(x) = (ab)x(ab)^{-1} = abxb^{-1}a^{-1} = a(f_b(x))a^{-1} \\ & = & f_a(f_b(x)) = f_a \circ f_b(x) = \phi(a) \circ \phi(b)(x)\end{array}$$

D'où $\phi(ab) = \phi(a) \circ \phi(b)$. **c.q.f.d**

Définition 1.2.5.
Soient G et G' deux groupes et $f : G \to G'$ un homomorphisme de groupes.

$i)$ *On appelle noyau de f l'ensemble noté* $\ker f = \{x \in G : f(x) = e'\}$ *où e' est l'élément neutre de G'.*

$ii)$ *On appelle image de f l'ensemble noté* $\operatorname{Im} f = \{f(x) \in G' : x \in G\}$.

Remarque 1.2.1.
$\ker f$ *et* $\operatorname{Im} f$ *sont des sous-groupes respectifs de G et G'.*

1.2.3 Sous-groupes engendrés

Définition 1.2.6.
Soit A une partie non vide d'un groupe G. On appelle sous-groupe engendré par A, le plus petit sous-groupe de G contenant A, nous le noterons $< A >$.

Remarque 1.2.2.
Le sous-groupe $< A >$ est l'intersection de tous sous-groupes de G contenant A.

Proposition 1.2.3.
Soit A une partie non vide d'un groupe G, alors :
$< A >= \left\{a_1 a_2 \ldots a_n : n \in \mathbb{N}^*, a_i \in A \cup \{a^{-1}\}, a \in A\right\}$.

Preuve.
On pose : $H = \left\{a_1 a_2 \ldots a_n : n \in \mathbb{N}^*, a_i \in A \cup \{a^{-1}\}, a \in A\right\}$.
1) $< A > \subset H$:
On a : $A \subset H$ donc $H \neq \varnothing$.

Soit $x, y \in H$, alors $x = a_1a_2 \dots a_n$ et $y = b_1b_2 \dots b_m$ d'où
$xy^{-1} = a_1a_2 \dots a_nb_m^{-1} \dots b_1^{-1}$.
puisque $a_1, \dots, a_n, b_1^{-1}, \dots, b_m^{-1} \in A \cup \{a^{-1}, a \in A\}$
alors $x \cdot y^{-1} \in H$.
A est un sous-groupe contenant A
D'où $< A > \subset H$.
2) $H \subset < A >$:
Soit $x = a_1a_2 \dots a_n,\ n \in \mathbb{N}^*$
$< A >$ contient A et $\{a^{-1}/a \in A\}$ c'est-à-dire les $a_i \in < A >$
D'où $x \in < A >$ i.e. $H \subset < A >$. **c.q.f.d**

Définition 1.2.7.
Soit G un groupe et $x \in G$.

1) *On dit que x est d'ordre r si r est le plus petit entier strictement positif tel que $x^r = e$.*

2) *On dit que x est d'ordre infini si $x^n \neq e$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

1.2.4 Sous-groupes distingués

Définition 1.2.8.
Soit A une partie non vide d'un groupe G.

1) *On appelle centralisateur de A dans G l'ensemble :*

$$C(A) = \{x \in G : xax^{-1}, a \in A\}.$$

2) *On appelle normalisateur de A dans G l'ensemble :*

$$N(A) = \{x \in G : xAx^{-1} = A\} = \{x \in G, \forall a \in A, \exists b \in A : xax^{-1} = b\}.$$

Remarque 1.2.3.

1) *Si $A = G$, $C(G)$ est le centre de G, noté $\mathcal{Z}(G)$.*

2) *$C(A)$ et $N(A)$ sont des groupes de G et $C(A) \subset N(A)$.*

Définition 1.2.9.
Soit H un sous-groupe d'un groupe G. On dit que H est distingué (ou normal) dans G si : $xHx^{-1} = H$, pour tout $x \in G$.

Proposition 1.2.4.
Soit H un sous-groupe d'un groupe G, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) H est distingué dans G.

(ii) $xH = Hx$, pour tout $x \in G$,

(iii) $xHx^{-1} \subset H$, pour tout $x \in G$.

Preuve.
$(i) \Rightarrow (ii)$
Supposons que : pour tout $x \in G$, $xHx^{-1} = H$.
Soit $h \in H$, $\exists h', h'' \in H$:

$$\begin{cases} xhx^{-1} = h' \\ et \\ xh''x^{-1} = h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xh = h'x \\ et \\ hx = xh'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xH \subset Hx \\ et \\ Hx \subset xH \end{cases}$$

D'où $xH = Hx$.
$(ii) \Rightarrow (iii)$
Supposons que : pour tout $x \in G, xH = Hx$.
Soit $h \in H, \exists h' \in H, xh = h'x$,
mais $h' = xhx^{-1} \in H$
D'où $xHx^{-1} \subset H$.
$(iii) \Rightarrow (i)$
Supposons que : pour tout $x \in G, xHx \subset H$.
Pour x^{-1} on a : $x^{-1}Hx \subset H \Rightarrow x(x^{-1}Hx)x^{-1} \subset xHx^{-1}$
D'où $H \subset xHx^{-1}$, donc $H = xHx^{-1}$. **c.q.f.d**

Exemple 1.2.4.
Soit G un groupe, alors $Z(G)$ est distingué dans G.
En effet :
$Z(G) = \{g \in G, gx = xg, x \in G\}$
$x \in G$, $xZ(G)x^{-1} \subset Z(G)$.
Soit $a \in Z(G)$: $ax = xa \Rightarrow a = xax^{-1} \in Z(G)$.
D'où $Z(G)$ est distingué dans G.

Définition 1.2.10.
Soit G un groupe. On dit que G est simple s'il n'a pas de sous-groupe propre distingué.

Définition 1.2.11.
Soient G un groupe et H sous-groupe distingué de G. La relation $\mathcal{R}$ définie sur G par

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a^{-1}b \in H, a, b \in G$$

est une relation d'équivalence.
La classe d'équivalence de $x \in G$ sera notée $\overline{x}$ et l'ensemble des classes d'équivalences de G modulo $\mathcal{R}$ sera noté $G/_{\mathcal{R}} = G/_{H}$.

Proposition 1.2.5.
L'ensemble $G/_{H}$ est un groupe pour la loi interne définie par :

$$(\overline{x}, \overline{y}) \mapsto \overline{x}.\overline{y} = \overline{xy} \ , \ x, y \in G.$$

Preuve.
On vérifie aisément que cette loi interne ne dépend pas du représentant $x \in G$ de la classe d'équivalence.
Soient $x_1, x_2, y_1, y_2 \in G$ tels que $\overline{x}_1 = \overline{x}_2$ et $\overline{y}_1 = \overline{y}_2$,

Montrons que $\overline{x_1y_1} = \overline{x_2y_2}$.
$\overline{x}_1 = \overline{x}_2$ et $\overline{y}_1 = \overline{y}_2$ c'est-à-dire $x_1^{-1}x_2 = h \in H$ et $y_1^{-1}y_2 = k \in H$
On a alors :

$$(x_1y_1)^{-1}(x_2y_2) = y_1^{-1}x_1^{-1}x_2y_2 = y_1^{-1}hy_2 = y_1^{-1}h(y_1y_1^{-1})y_2 = y_1^{-1}hy_1k \in H$$

c'est-à-dire $\overline{x_1y_1} = \overline{x_2y_2}$
On a donc bien défini une loi interne sur $G/_{H}$.
On vérifie facilement que la loi quotient est associative.
Soient $x, y, z \in G$

$$\overline{x}(\overline{y}.\overline{y}) = \overline{x}\overline{(yz)} = \overline{x(yz)} = \overline{(xy)z} = \overline{(xy)}\overline{z} = (\overline{x}.\overline{y})\overline{z}.$$

Pour tout élément $x \in G$ on a $\overline{x}.\overline{e} = \overline{xe} = \overline{x}$ et $\overline{e}.\overline{x} = \overline{ex} = \overline{x}$ donc la loi quotient admet comme élément neutre $\overline{e}$.
Pour tout $x \in G$ on a $\overline{x}.\overline{x^{-1}} = \overline{xx^{-1}} = \overline{e} = \overline{x^{-1}x} = \overline{x^{-1}}.\overline{x}$ donc tout élément $\overline{x}$ de $G/_{H}$ admet un inverse $\overline{x}^{-1}$ pour la loi quotient.
D'où l'ensemble $G/_{H}$ muni de la loi quotient est un groupe. **c.q.f.d**

Définition 1.2.12.
Le groupe $G/_{H}$ est appelé groupe quotient de G par H.

Remarque 1.2.4.
La projection canonique

$$\begin{array}{rcl} \pi_H : G & \to & G/_{H} \\ x & \mapsto & \overline{x} = xH \end{array}$$

est surjective. Son noyau et son image sont respectivement

$$\ker \pi_H = H \textit{ et } Im\pi_H = G/_{H}$$

Théorème 1.2.1. (*Théorème de factorisation*)
Tout morphisme φ d'un groupe G dans un groupe G' se factorise pour donner le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & G' \\ G/_{\ker\varphi} \arrow[r, "\overline{\varphi}"] & Im\varphi \arrow[u, "j"'] \end{tikzcd}$$

Où
$\pi : G \to G/_{\ker\varphi}$ est la surjection canonique
$\overline{\varphi} : G/_{\ker\varphi} \to Im\varphi$ est un isomorphisme de groupes
$j : Im\varphi \to G'$ est une injection.

Preuve.
Les équivalences suivantes pour tous $x, y \in G$,

$$\varphi(x) = \varphi(y) \Leftrightarrow \varphi(x^{-1}y) = e' \Leftrightarrow x^{-1}y \in \ker\varphi$$

montrent que tous les éléments de la classe $\overline{x} \in G/H$ ont la même image $\varphi(x)$. On définie alors l'application $\overline{\varphi}$ par $\overline{\varphi}(\overline{x}) = \varphi(x)$.
C'est un morphisme de groupes, car : $\overline{\varphi}(\overline{x}.\overline{y}) = \overline{\varphi}(\overline{xy}) = \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = \overline{\varphi}(\overline{x})\overline{\varphi}(\overline{x})$
L'application $\overline{\varphi}$ par définition est surjective et est évidemment injective, puisque $\ker\overline{\varphi} = \{\overline{e}\}$.
c.q.f.d

Exemple 1.2.5.
Soit $\mathbb{S}^1$ *le cercle d'unité qui s'identifie au groupe* U *des nombres complexes de module* 1
L'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$*, tel que* $\varphi(x) = e^{2i\pi x}$*, est un morphisme surjectif de noyau* $\mathbb{Z}$ *Donc* $\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.
Le groupe $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *est appelé le tore de dimension* 1.

Exemple 1.2.6.
On définit sur $\mathbb{Z}$ *une relation d'équivalence par*

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists k \ni \mathbb{Z}, x - y = kn, x, y \in \mathbb{Z}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{Z}$*, il existe un couple* $(q; r) \in \mathbb{Z}^2$*, tel que* $x = nq + r$ *et* $0 \leq r < n$.
Donc $x - r = nq \Leftrightarrow x\mathcal{R}r(mod\ n)$
L'ensemble $\{1; 2; \ldots; n\}$ *forme ainsi une famille de représentants des classes de* $\mathbb{Z}$ *modulo* n.
L'ensemble quotient de $\mathbb{Z}$ *par* $\mathcal{R}$ *sera notée* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ *est un groupe commutatif.*

Définition 1.2.13.
i) Un groupe G *est dit monogène s'il peut être engendré par un seul élément.*

ii) On dit que G *est cyclique s'il est monogène et fini.*

Proposition 1.2.6.
i) Tout groupe monogène infini est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$.

ii) Tout groupe monogène fini est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

Preuve.
Soit G un groupe monogène et a un générateur de G. Soit

$$\begin{array}{rcl} \varphi_a : \mathbb{Z} & \to & G \\ m & \mapsto & \varphi_a(m) = a^m \end{array}$$

Grâce au Théorème de factorisation Théorème 1.2.1, $\mathbb{Z}/\ker\varphi_a$ est isomorphe à l'image de φ_a qui est G.
Si a est d'ordre infini alors G est isomorphe à $\mathbb{Z}$, Si a est d'ordre n alors G est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. **c.q.f.d**

Remarque 1.2.5.
Si x *est d'ordre fini* r *alors* $< x >= \{e, x, \ldots, x^{r-1}\}$ *est fini de cardinal* r.

1.2.5 Groupe opérant sur un ensemble

Définition 1.2.14.
Soit G un groupe et E un ensemble non vide. On dit que G opère sur E, s 'il existe une application :

$$\begin{aligned} : G \times E &\to E \\ (a, x) &\mapsto ax \end{aligned}$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

1) *Pour tous $a, b \in G$ et $x \in E$: $(ab)x = a(bx)$.*
2) *Pour tout $x \in E$: $ex = x$.*

Exemple 1.2.7.
Soit G un groupe.

1) *G opère sur G par : (opération à gauche)*

$$\begin{aligned} : G \times G &\to G \\ (a, x) &\mapsto ax \end{aligned}$$

2) *G opère sur G par :*

$$\begin{aligned} : G \times G &\to G \\ (a, x) &\mapsto axa^{-1} \end{aligned}$$

Définition 1.2.15.
Soient G un groupe opérant sur un ensemble E et $x \in E$.

1) *L'ensemble $\{g \in G, gx = x\}$ noté G_x est appelé stabilisateur de x.*
2) *L'ensemble $\{gx, g \in G\}$ noté O_x est appelé orbite de x.*

Remarque 1.2.6.

1) *G_x est un sous-groupe de G.*
2) *O_x est un sous-ensemble de E.*

1.3 Groupe symétrique

1.3.1 Groupe des permutations

Notation 1.3.1.
Soit E un ensemble non vide. On note $S(E)$ l'ensemble des bijection de E sur lui même.

Proposition 1.3.1.
$(S(E), \circ)$ est un groupe.

Preuve.
• $S(E) \neq \emptyset$ car l'application $Id_E \in S(E)$.
• Pour tous $f, g \in S(E)$, $f \circ g \in S(E)$
(car la composée de deux bijections est une bijection).
• Pour tous f, g et $h \in S(E)$: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
(car la loi $\circ$ est associative)
• Pour tout $f \in S(E)$: $f \circ Id_E = Id_E \circ f = f$
Id_E est l'élément neutre.
• Pour tout $f \in S(E)$, $\exists f^{-1} \in S(E)$: $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id_E$
f^{-1} est l'élément symétrique de f. **c.q.f.d**

Définition 1.3.1.
Soit E un ensemble non vide. On appelle groupe des permutations de E, le groupe $(S(E), \circ)$, ce groupe noté $S(E)$.

Proposition 1.3.2.
Soient E et F deux ensembles non vide équipotents et $\varphi : E \to F$ une bijection. L'application :

$$\begin{array}{rcl} \phi : S(E) & \to & S(F) \\ \sigma & \mapsto & \phi(\sigma) = \varphi \circ \sigma \circ \varphi^{-1} \end{array}$$

est un isomorphisme de groupes.

Preuve.
• ϕ est bien définie car pour tout $\sigma \in S(E)$, $\phi(\sigma) \in S(E)$ (compositions des bijections).
• Pour tous $\sigma, \tau \in S(E)$.
$\phi(\sigma \circ \tau) = \varphi \circ \sigma \circ \tau \circ \varphi^{-1} = (\varphi \circ \sigma \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \tau \circ \varphi^{-1}) = \phi(\sigma) \circ \phi(\tau)$.
D'où ϕ est homomorphisme de groupes.
• ϕ est bijective car
pour tout $f \in S(E)$, il existe $\sigma \in S(E)/\phi(\sigma) = f$
$\phi(\sigma) = f \Leftrightarrow \varphi \circ \sigma \circ \varphi^{-1} = f \Leftrightarrow \sigma = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$ (unique).
Tout élément f de $S(F)$ est l'image d'un élément et un seul $\sigma = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$ de $S(E)$. **c.q.f.d**

Remarque 1.3.1.

i) En particulier pour tout ensemble fini E de cardinal n, le groupe $S(E)$ est isomorphe à $S(E_n)$ où : $E_n = \{1, \ldots, n\}$.

ii) Dans le cas où E est réduit à un élément, on peut quand même définir $S(E)$ et il est réduit à $\{Id_E\}$.

Définition 1.3.2.
Le groupe des permutations $S(E_n)$ est appelé le groupe symétrique d'ordre n. Qu'on note S_n.

Remarque 1.3.2.
Pour tout $\sigma \in S_n$ i.e.

$$\begin{array}{rcl} \sigma : E_n & \to & E_n \\ k & \mapsto & \sigma(k) \end{array}$$

On note :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Pour σ et $\tau \in S_n$, la permutation $\sigma \circ \tau$ est appelée permutation produit de τ et σ, notée $\sigma\tau$

$$\sigma \circ \tau = \sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma \circ \tau(1) & \sigma \circ \tau(2) & \dots & \sigma \circ \tau(n) \end{pmatrix}$$

Exercice 1.3.1.
Le groupe S_3 à 6 permutations

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \tau_2 \quad , \quad \tau_3\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \tau_1$$

$$\sigma_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \sigma_3 \quad , \quad \sigma_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_2$$

Proposition 1.3.3.
Le groupe symétrique S_n admet $n!$ éléments.

Preuve.
Soit $\sigma \in S_n$
i) L'image du premier élément $\sigma(1)$ peut être choisie de n façons.
ii) celle du seconde $\sigma(2)$ de $(n-1)$ façons...
iii) celle du $k^{ime}\sigma(k)$ de $(n-k)$ façons...etc
Ce qui donne $n!$ possibilités pour σ. **c.q.f.d**

1.3.2 Cycles et transpositions

Définition 1.3.3. (*Cycle*)
Un cycle de longueur p ou p-cycle est une permutation $\sigma \in S_n$ définie par un sous ensemble $\{i_1, \dots, i_p\} \subset E_n$ tel que

$$\sigma(i_1) = i_2 \ , \ \dots \ , \ \sigma(i_{p-1}) = i_p \ , \ \sigma(i_p) = i_1 \ \text{et} \ \sigma(j) = j$$

pour tout $j \notin \{i_1, \dots, i_p\}$.
Le cycle σ est représenter par $(i_1, \dots, i_p)$.
L'ensemble $\{i_1, \dots, i_p\}$ est appelé le support de σ et on le note $supp(\sigma)$.
Deux cycles $(i_1, \dots, i_p)$ et $(j_1, \dots, j_q)$ sont dit disjoint si $\{i_1, \dots, i_p\} \cap \{j_1, \dots, j_q\} = \emptyset$.

Définition 1.3.4. (*Transposition*)
Une transposition est un cycle τ de longueur 2 définie par (i, j) pour tous $i, j \in E_n$ i.e.

$$\tau(i) = j \ , \ \tau(j) = i \ \text{et} \ \tau(k) = k$$

pour tout $k \notin \{i, j\}$.

Exemple 1.3.1.
Dans S_5, considérons :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$\sigma_1 = (1, 2, 5)$ *est* 3*-cycle.*
$\sigma_2 = (1, 2)(3, 4, 5)$ *est produit de deux cycles.*

Exemple 1.3.2.
Dans S_4, considérons :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

On a : $\sigma_1 = (1, 3, 4, 2) \quad , \quad \sigma_2 = (1, 2, 3, 4)$

$$(\sigma_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1, 2, 4, 3)$$

$$(\sigma_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1, 4, 3, 2)$$

Remarque 1.3.3.
Si σ est un cycle de longueur r et τ une transposition, alors

i) $\sigma^r = \sigma \dots \sigma = Id$ *(composition de σ r-fois).*

ii) $\sigma^{-1} = \sigma^{r-1}$.

iii) $\tau^{-1} = \tau$.

Proposition 1.3.4.
Si $\sigma \in S_n$ est une permutation et $i \in E_n$, alors il existe $0 < p \leq n$ tel que $\sigma^p(i) = i$.

Preuve.
Soit $B = \{\sigma^k(i), k \in \mathbb{N}^*\} \subset E_n$, comme E_n est un ensemble fini, alors il existe au moins $k, l \in \mathbb{N}^*$ tels que $k < l$ et $\sigma^k(i) = \sigma^l(i)$ d'où $\sigma^{l-k}(i) = i$
Si p désigne le plus petit entier non nul tel que $\sigma^p(i) = i$, alors
i) $p < n$.
ii) $B = \{\sigma(i), \sigma^2(i), \dots, \sigma^p(i)\}$.
iii) $(i; \sigma(i); \sigma^2(i), \dots, \sigma^{p-1}(i))$ est un p-cycle. **c.q.f.d**

Proposition 1.3.5.
Toute permutation $\sigma \in S_n$ se décompose en un nombre fini de cycles disjoints.

Preuve.
Sur E_n on définit la relation d'équivalence suivante :

$$(i\mathcal{R}j) \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{N}, j = \sigma^q(i). \tag{1.1}$$

Remarquons que si $p \in \mathbb{N}$ tel que $\sigma^p(j) = j$ alors $i = \sigma^{mp-q}(j) = i$, où $m \in \mathbb{N}$ tel que $mp > q$. De la relation d'équivalence (1.1), on déduit l'exitence d'un sous ensemble $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset E_n$ tel que $E_{n}/_{\mathcal{R}} = \{\bar{i}_1, \ldots, \bar{i}_k\}$, d'où
i) $\bar{i}_l = \{\sigma(i_l), \ldots, \sigma^{p_l}(i_l)\}, (1 \leq l \leq k)$.
ii) $E_n = \cup_{l=1}^{k}\{\sigma(i_l), \ldots, \sigma^{p_l}(i_l)\}$.
iii) $\sigma = (\sigma(i_1), \ldots, \sigma^{p_1}(i_1)) \circ \ldots \circ (\sigma(i_k), \ldots, \sigma^{p_k}(i_k))$ (composition de k cycles disjoints). **c.q.f.d**

Proposition 1.3.6.
Tout cycle $\sigma = (i_1, \ldots, i_p)$ se décompose en transpositions.

Preuve.
Il suffit d'écrire σ sous la forme

$$\sigma = (i_1, i_2)(i_2, i_3) \ldots (i_{p-1}, i_p).$$

c.q.f.d

Corollaire 1.3.1.
Toute permutation $\sigma \in S_n$ se décompose en transpositions.

Preuve.
La preuve découle immédiatement des Proposition 1.3.5 et Proposition 1.3.6. **c.q.f.d**

1.3.3 Signature d'une permutation

Définition 1.3.5.
La signature d'une permutation $\sigma \in S_n$ est défini par

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}. \tag{1.2}$$

Théorème 1.3.1.
Soient σ_1 et σ_2 deux permutations, alors

$$\varepsilon(\sigma_1 \sigma_2) = \varepsilon(\sigma_1)\varepsilon(\sigma_2).$$

Preuve.
D'après (1.2), on a

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\sigma_1\sigma_2) &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma_1(\sigma_2(j)) - \sigma_1(\sigma_2(i))}{j - i} \\
&= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma_1(\sigma_2(j)) - \sigma_1(\sigma_2(i))}{\sigma_2(j) - \sigma_2(i)} \frac{\sigma_2(j) - \sigma_2(i)}{j - i} \\
&= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma_1(\sigma_2(j)) - \sigma_1(\sigma_2(i))}{\sigma_2(j) - \sigma_2(i)} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma_2(j) - \sigma_2(i)}{j - i} \\
&= \prod_{1 \leq i' < j' \leq n} \frac{\sigma_1(j') - \sigma_1(i')}{j' - i'} \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{\sigma_2(j) - \sigma_2(i)}{j - i}.
\end{aligned}$$

Puisque σ_2 est bijective de $\{1,\ldots,n\}$ sur $\{1,\ldots,n\}$ et

$$\frac{\sigma_1(j')-\sigma_1(i')}{j'-i'}=\frac{\sigma_1(i')-\sigma_1(j')}{i'-j'}$$

ce qui donne $\varepsilon(\sigma_1\sigma_2)=\varepsilon(\sigma_1)\varepsilon(\sigma_2)$. **c.q.f.d**

Remarque 1.3.4.

i) Si τ est une transposition alors $\varepsilon(\tau)=-1$.

ii) Si σ est un cycle de longueur p alors $\varepsilon(\sigma)=(-1)^{p-1}$.

iii) Si $\sigma=\tau_1\ldots\tau_k$, alors $\varepsilon(\sigma)=(-1)^k$.

iv) $\varepsilon(Id)=1$.

v) $\varepsilon(\sigma^{-1})=\varepsilon(\sigma)$.

Exemple 1.3.3.
Soit la permutation :

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&1&2&3&4&7&6&8\end{pmatrix}.$$

On peut aussi écrire σ comme produit de transposition :

$$\sigma=(1,5)(5,4)(4,3)(3,2)(6,7)$$

et $\varepsilon(\sigma)=(-1)^5=-1$.

1.4 Anneaux

1.4.1 Sous-anneaux

Définitions 1.4.1.
On appelle anneau un ensemble A muni de deux lois de composition, l'une notée additivement, l'autre multiplicativement, avec les propriétés suivantes :

1) *l'addition est une loi de groupe commutatif dont l'élément neutre est noté 0,*
2) *la multiplication est associative,*
3) *la multiplication est distributive par rapport à l'addition, ce qui veut dire*

$$x(y+z)=xy+xz \text{ et } (y+z)x=yx+zx$$

pour tout $x,y,z\in A$.
Lorsque la multiplication est commutative on dit que l'anneau est commutatif, lorsqu'elle possède un élément neutre on dit que l'anneau est unitaire. L'élément neutre pour la multiplication est appelé unité et notée 1.

Exemples 1.4.1.

1) $(\mathbb{Z},+,.)$, $(\mathbb{R},+,.)$ $(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}},+,.)$ *sont des anneaux commutatifs et unitaires.*

2) $(\mathbb{K}[X], +, .)$ *(où* $\mathbb{K}$ *corps) est un anneau commutatif et unitaire, où* $\mathbb{K}[X]$ *est l'ensemble des polynômes à coefficients dans* $\mathbb{K}$.

3) $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$ *est un anneau unitaire non commutatif.*

4) *Soit* E *un ensemble, l'ensemble* $\mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ *des fonctions de* E *dans* $\mathbb{R}$ *est un anneau commutatif pour les opérations d'addition et de multiplication point par point des fonctions.*

Définition 1.4.1.
Un sous-ensemble B *de* A *est un sous-anneau de* $(A, +, .)$ *si* $(B, +, .)$ *est un anneau.*

Proposition 1.4.1.
Un sous-ensemble B *de* A *est un sous-anneau de* $(A, +, .)$ *si et seulement si elle vérifie les conditions :*

(i) B *est un sous-groupe de* $(A, +)$ *i.e.* $x - y \in B$, *pour tous* $x, y \in B$.

(ii) B *est stable par multiplication i.e.* $x.y \in B$, *pour tous* $x, y \in B$.

Exemples 1.4.2.

1) $(2\mathbb{Z}, +, .)$ *est un sous-anneau de* $(\mathbb{Z}, +, .)$.

2) $(\mathbb{R}, +, .)$ *est un sous-anneau de* $(\mathbb{C}, +, .)$.

Définition 1.4.2.
Un anneau A *est dit intègre si on a :*

(i) $A \neq \{0\}$,

(ii) Pour tous $a, b \in A$, $a.b = 0$ *alors* $a = 0$ *ou* $b = 0$.

Remarque 1.4.1.
Un sous-anneau d'un anneau intègre est intègre.

Exemples 1.4.3.

1) $(\mathbb{Z}, +, .)$ *et* $(\mathbb{K}[X], +, .)$ *sont des anneaux intègres,*

2) $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$ *n'est pas intègre.*

1.4.2 Idéaux d'un anneau

Définition 1.4.3.
On dit qu'une partie I *d'un anneau* A *est un idéal si les propriétés suivantes sont vérifiées :*

(i) $(I, +)$ *est un sous-groupe du groupe additif* $(A, +)$,

(ii) I *est absorbant i.e. Pour tous* $x \in I$ *et* $y \in A$, $x.y \in I$ *et* $y.x \in I$.

On dit que I *est un idéal propre si de plus* $I \neq A$.

Remarque 1.4.2.

(i) Un idéal est un sous-anneau.

(ii) $\{0\}$ *et* A *sont des idéaux de* A.

Exemples 1.4.4.

1) $2\mathbb{Z}$ *est un idéal de de* $(\mathbb{Z}, +, .)$.

2) On Montre que les idéaux de $(\mathbb{Z}, +, .)$ *sont les* $n\mathbb{Z}$ *avec* $n \in \mathbb{N}$.

3) Soient E *est un ensemble et* $a \in E$, *le sous-ensemble* $I = \{f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R}), f(a) = 0\}$ *est un idéal de* $\mathcal{F}(E, \mathbb{R})$.

Remarque 1.4.3.
Soient $(A, +, .)$ *un anneau et* $N = \{a \in A, \exists n \in \mathbb{N}^*, a^n = 0\}$ *l'ensemble des éléments nilpotents de* A. *Alors* N *est un idéal de* A.

Définition 1.4.4.
Un idéal I *d'un anneau* A *qui possède les deux propriétés suivantes :*

(i) I *est un idéal propre i.e.* $I \neq A$,

(ii) Tout idéal J *qui vérifie* $I \subset J \subset A$ *alors* $J = I$ *ou* $J = A$
est appelé un idéal maximal.

Remarque 1.4.4.

(i) Étant donné un entier $n \geq 2$, *l'idéal* $n\mathbb{Z}$ *de* $\mathbb{Z}$ *est maximal si et seulement si,* n *est premier.*

(ii) Tout idéal propre de $\mathbb{Z}$ *est contenu dans un idéal maximal.*

Définition 1.4.5.
Soit A *un anneau,* I *un idéal de* A. I *est dit premier si :*

(i) I *est un idéal propre,*

(ii) Pour tous $x, y \in A$, $x.y \in I$, *alors* $x \in I$ *ou* $y \in I$.

1.4.3 Homomorphismes d'anneau

Définition 1.4.6.
Soient A, B *des anneaux. Une application* $f : A \to B$ *est un homomorphisme d'anneaux si :*

(i) Pour tous $x, y \in A$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

(ii) Pour tous $x, y \in A$, $f(x.y) = f(x).f(y)$.

Proposition 1.4.2.
Soit $f : A \to B$ *un homomorphisme d'anneaux.*

(i) L'image et l'image réciproque par f *d'un sous-anneau est un sous-anneau.*

(ii) Si J *est un idéal de* B, *alors l'image réciproque* $f^{-1}(J)$ *de l'idéal* J *est un idéal de* A.

(iii) Si I *est un idéal de* A *et* f *surjective, alors* $f(I)$ *est un idéal de* B.

Exemple 1.4.1.

Soit A *un anneau unitaire dont l'unité est notée* 1. *L'application*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{Z} & \to & A \\ n & \mapsto & f(n) = n.1 \end{array}$$

est un homomorphisme d'anneau de $\mathbb{Z}$ *dans* A.

1.5 Corps

Définition 1.5.1.
On appelle corps un anneau commutatif $(K, +, .)$ *tel que* $K^* = K \backslash \{0\}$ *est un groupe pour la multiplication.*

Remarque 1.5.1.
Un anneau commutatif $(K, +, .)$ *est un corps si tout élément non nul de* K *est inversible.*

Exemples 1.5.1.

1) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{C}$ *sont des corps.*

2) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ *est un corps.*

Théorème/Définition 1.5.1. *Étant donné un corps* K, *l'application*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{Z} & \rightarrow & K \\ n & \mapsto & f(n) = n.1 \end{array}$$

est un homomorphisme. Il existe un entier $p \geq 0$, *et un seul, tel que* $ker f = f^{-1}(0) = p\mathbb{Z}$.
p *est le plus petit entier* ≥ 0 *tel que* $p.1 = 0$. *De plus ou bien* $p = 0$, *ou bien* p *est un nombre premier.*
L'entier p *est appelé la caractéristique du corps* K *et on note* $car(A) = p$.

Exemples 1.5.2.

1) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{C}$ *sont des corps de caractéristique* 0.

2) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ *est un corps de caractéristique* 3.

Exercices

Exercice 1.5.1.
Sur $[0,1]$*, on définit la loi de composition* $\top$*, pour tous* $x,y\in[0,1]$ *par :*

$$x\top y = x+y-xy.$$

1) *Vérifier que* $\top$ *est interne.*

2) *Étudier (la commutativité, l'associativité, élément neutre, et les éléments symétrisables).*

Exercice 1.5.2.
Soit X *un ensemble, dans* $\mathcal{P}(X)$*, on peut considérer la loi de composition interne* Δ *définie, pour chaque* $A,B\in\mathcal{P}(X)$ *par :*

$$A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B).$$

Déterminer, s'il existe, l'élément neutre.

Exercice 1.5.3.
Soit $\mathbb{R}^2$ *muni la loi de composition interne* $\top$ *définie, pour tous* $(a,b),(a',b')$ *de* $\mathbb{R}^2$ *par :*

$$(a,b)\top(a',b')=(a-2a',b+3b').$$

Est-ce un groupe ?

Exercice 1.5.4.
On définit dans $\mathbb{R}$ *les lois de compositions internes suivantes, pour tous* $a,b\in\mathbb{R}$ *par :*

$$a\perp b=sup(a,b) \quad et \quad a\top b=inf(a,b).$$

i) Montrer que ces deux lois sont associatives et commutatives.

ii) Ces lois ont-elles un élément neutre ?

Exercice 1.5.5.
Soient E *et* F *deux ensembles munis de lois de compositions internes notées respectivement* $\perp$ *et* $\top$ *et* f *un morphisme de* E *dans* F.

1) *Montrer que l'image par* f *d'une partie stable de* E *est une partie stable de* F.

2) *Montrer que l'image réciproque par* f *d'une partie stable de* F *est une partie stable de* E.

Exercice 1.5.6.
Montrer qu'on définit une loi interne dans $I=]-1,1[$ *en posant, pour tous* $x,y\in]-1,1[$

$$x\perp y=\frac{x+y}{1+xy}.$$

Montrer que $(I,\perp)$ *est un groupe commutatif.*

Exercice 1.5.7.
Soit G *un groupe multiplicatif tel que : pour tout* $x\in G$, $x^2=e$ *(*e *est l'élément neutre).*

Montrer que G est commutatif.

Exercice 1.5.8.
Soient G un groupe multiplicatif et a un élément de G.

$i)$ *On définit la translation à gauche par a est l'application*

$$\begin{array}{rcl} \delta_a : G & \to & G \\ x & \mapsto & \delta_a(x) = ax \end{array}$$

Montrer que δ_a est bijective et déterminer son inverse.

$ii)$ *Traiter la même question pour la translation à droite par a*

$$\begin{array}{rcl} \rho_a : G & \to & G \\ x & \mapsto & \rho_a(x) = xa \end{array}$$

Exercice 1.5.9.
Soit $\sigma = (i_1, \dots, i_r)$ un r-cycle
Montrer que :

1. $\sigma^{-1} = (i_r, i_{r-1}, \dots, i_1)$.

2. *Pour tout* $k = \overline{1, r} : x_i = \sigma^{k-1}(i_1)$.

Exercice 1.5.10.
Soit σ un r-cycle est d'ordre r dans S_n
Montrer que :

1. σ *est d'ordre r dans S_n .ie.* $\sigma^r(i_k) = i_k$, *pour tout* $k = \overline{1, r}$

2. $\sigma^{-1} = \sigma^{r-1}$.

Exercice 1.5.11.
Démontrer que :

$$\mathcal{Z}(S_n) = \begin{cases} S_n & Si\ n = 2 \\ \{Id_E\} & Si\ n \geq 3 \end{cases}$$

Exercice 1.5.12.
Le support d'une permutation $\sigma \in S_n$, noté $Supp(\sigma)$ est l'ensemble :

$$Supp(\sigma) = \{x \in E / \sigma(x) \neq x\}.$$

Démontrer que pour tous σ et σ' deux permutations :

$i)$ $\sigma(Supp(\sigma)) = Supp(\sigma)$.

$ii)$ $Supp(\sigma^{-1}) = Supp(\sigma)$.

$iii)$ *Pour tout* $r \in \mathbb{Z}$: $Supp(\sigma^r) \subset Supp(\sigma)$.

$vi)$ $Supp(\sigma) \cap Supp(\sigma) = \emptyset \Rightarrow \sigma \circ \sigma' = \sigma' \circ \sigma$.

Exercice 1.5.13.
Montrer que l'ensemble des éléments inversibles d'un anneau peut être muni d'une structure de groupe.

Exercice 1.5.14.

i) Soient X *un ensemble et* G *un groupe. Montrer que l'on peut munir l'ensemble* $\mathcal{F}(X,G)$ *des applications de* X *dans* G *d'une structure de groupe.*

ii) Soient X *un ensemble et* A *un anneau. Montrer que l'on peut munir l'ensemble* $\mathcal{F}(X,A)$ *des applications de* X *dans* A *d'une structure d'anneau.*

iii) Soient X *un ensemble et* K *un anneau. L'anneau* $\mathcal{F}(X,K)$ *est-il un corps ?*

Exercice 1.5.15.
Soit $\mathbb{Z}[i] = \{a+bi \in \mathbb{C}/a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$*. Cet ensemble est appelé l'anneau des entiers de Gauss. Montrer que* $Z[i]$ *est un sous-anneau de* $\mathbb{C}$*.*

Exercice 1.5.16.

i) Montrer qu'un corps est un anneau intègre.

ii) Est-ce que la réciproque est vraie ?

Exercice 1.5.17.
Soit A *un anneau . Un élément* $a \in A$ *est dit nilpotent s'il existe un entier* n *non nul tel que* $a^n = 0$*.*

i) Montrer que si a *est nilpotent, alors* $1-a$ *est inversible.*

ii) Montrer que l'ensemble des nilpotents forme un idéal si A *est commutatif, noté* $Nil(A)$*.*

iii) Montrer que $Nil(A)$ *est contenu dans tout idéal premier.*

Exercice 1.5.18.
Soit A *un anneau commutatif et* I *un idéal de* A*. On note*

$$\sqrt{I} = \{x \in A/\exists n \in N, x^n \in I\}.$$

$\sqrt{I}$ *est appelé le radical de* I*.*

i) Montrer que $\sqrt{I}$ *est un idéal de* A*,*

ii) Montrer que $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$*,*

iii) Montrer que $\sqrt{I} \cap \sqrt{J} = \sqrt{I \cap J}, \ \sqrt{I} + \sqrt{J} \subset \sqrt{I+J}$*.*

CHAPITRE 2

Compléments d'algèbre linéaire

Sommaire

Ce chapitre est constitué de compléments sur les espaces vectoriels, les applications linéaires, les matrices, les déterminants. Ces notions sont nécessaires à l'étude du domaine de l'algèbre linéaire, notamment (réduction des endomorphismes d'espaces vectoriels de dimension finie). Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.1 Espaces vectoriels

2.1.1 Espaces vectoriels

Définition 2.1.1.
Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un triplet $(E, +, .)$ où

i) $(E, +)$ *est un groupe commutatif.*

ii) $: \mathbb{K} \times E \to E$ *est une loi externe, telle que pour tous* $x, y \in E$ *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

1) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y,$

2) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$,
3) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$,
4) $1x=x$.

Un élément de E est appelé un vecteur et un élément de $\mathbb{K}$ un scalaire.

Exemple 2.1.1.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. L'ensemble

$$\mathbb{K}^n=\{x=(x_1,\ldots,x_n),\ x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R}\},$$

muni des opérations

$$u+v=(u_1+v_1,\ldots,u_n+v_n),\ \alpha u=(\alpha u_1,\ldots,\alpha u_n),$$

est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exemple 2.1.2.
Soient X un ensemble non vide quelconque et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soit $\mathcal{F}(X,E)$ l'ensemble de toutes les applications f de X dans E.
$\mathcal{F}(X,E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, quand on pose :

$$\begin{cases} (f+g)(x) &= f(x)+g(x)\\ (\lambda f)(x) &= \lambda f(x)\end{cases}$$

pour tous $f,g\in\mathcal{F}(X,E),\lambda\in\mathbb{K},x\in E$.

Définition 2.1.2.
Soit $(u_i)_{i=\overline{1,n}}$, $n\in\mathbb{N}^*$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On appelle combinaison linéaire de $u_1,\ldots,u_n$, la somme

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i u_i=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\ldots+\alpha_nu_n.$$

où $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ sont des scalaires.

2.1.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 2.1.3.
Une partie F non vide d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est appelée un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel de E, si F vérifie

(i) la partie F est non vide,

(ii) pour tous $x,y\in F$, $x+y\in F$,

(iii) pour tout $x\in F$ et $\alpha\in\mathbb{K}$, $\alpha x\in F$.

Remarque 2.1.1.
Ainsi, un sous-espace vectoriel F, est une partie non vide de E, est lui-même un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, avec ses opérations obtenues par restriction de celles de E.

Exemple 2.1.3.

1) *Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, les parties $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E.*

2) *Les parties $F = \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\}$, $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2x - z = 0\}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.*

3) *Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, les parties $\mathcal{P}_E = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, E) : f(-x) = f(x), x \in \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{I}_E = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, E) : f(-x) = -f(x), x \in \mathbb{R}\}$ sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, E)$.*

Proposition 2.1.1. (*Caractérisation*)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F une partie de E.
F est un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel de E si est seulement si
(1) *$F \neq \emptyset$,*
(2) *Pour tous $x, y \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\alpha x + \beta y \in F$.*

Preuve.
1) Soit F sous-espace vectoriel de E. La partie F est non vide, donc si x est un de ses éléments, son opposé $-x = (-1)x$ est dans F d'après (iii), ainsi que $0_E = x + (-x)$ d'après (ii), le vecteur nul 0_E est bien dans F. Si α, β sont des scalaires, x, y des vecteurs de F, alors les vecteurs x et y sont dans F d'après la propriété (iii) et leur somme aussi d'après (ii), F est bien stable par combinaison linéaire $\alpha x + \beta y$.
2) Réciproquement, soit F une partie de E vérifiant les propriétés (1) et (2). Vu que le vecteur nul 0_E est dans F, la partie F est non vide. Par ailleurs, en prenant $\alpha = \beta = 1$, puis $\beta = 0$, les propriétés (ii) et (iii) résultent de la stabilité par combinaison linéaire. La partie F est bien un sous-espace vectoriel de E. **c.q.f.d**

Proposition/Définition 2.1.1. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A une partie non vide de E. L'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de A est un sous-espace vectoriel de E, noté $vect(A)$ et appelé sous-espace vectoriel engendré par A.*
Si $A = \{u_1, \ldots, u_n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$vect(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \in E /\ u_i \in A,\ \alpha_i \in \mathbb{K} \right\}.$$

Preuve.
Le vecteur nul 0_E est une combinaison linéaire des $u_1, \ldots, u_n$, i.e. $0_E = 0u_1 + \ldots + 0u_n$. Ainsi le vecteur nul 0_E appartient à $vect(A)$.
Par ailleurs, étant donné les deux combinaisons linéaires $x = x_1u_1 + \ldots + x_nu_n$ et $y = y_1u_1 + \ldots + y_nu_n$, la combinaison linéaire $\alpha x + \beta y$ est combinaison linéaire des $u_1, \ldots, u_n$.

$$\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1)u_1 + \ldots + (\alpha x_n + \beta y_n)u_n.$$

d'apres la Proposition 2.1.1, on trouve que $\alpha x + \beta y \in vect(A)$. **c.q.f.d**

Proposition 2.1.2. (*Intersections de sous-espaces vectoriels*)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de E. Alors $F = \bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve.
D'une part, par hypothèse le vecteur nul 0_E appartient aux sous-espaces F_i pour tout $i \in I$, et donc à leur intersection. D'autre part, si $x, y \in \bigcap_{i\in I} F_i$ et α, β sont des scalaires, la combinaison linéaire $\alpha x + \beta y$ appartient à F_i pour tout $i \in I$ et donc à leur intersection. Ainsi $F = \bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel d'après la Proposition 2.1.1. **c.q.f.d**

Proposition/Définition 2.1.2. (*Sommes de sous-espaces vectoriels*)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F_i)_{i=\overline{1,n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Alors l'ensembles

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} u_i \in E / \; u_i \in F_i, i = \overline{1,n}\right\}$$

est un sous-espace vectoriel de E, noté $\sum_{i=1}^{n} F_i$ et appelé somme des F_i.

Preuve.
On a $0_E = \sum_{i=1}^{n} 0_{F_i}$ (ces des vecteurs nuls coïcident) et donc 0_E est dans la partie $\sum_{i=1}^{n} F_i$. Par ailleurs, soit $\alpha x + \beta y$ une combinaison linéaire avec x et y dans $\sum_{i=1}^{n} F_i$. Le vecteur x (resp. y) est de la forme $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ (resp. $y = \sum_{i=1}^{n} y_i$) avec $x_i \in F_i$ (resp. $y_i \in F_i$). Ainsi

$$\alpha x + \beta y = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta y_i).$$

est un vecteur de la partie $\sum_{i=1}^{n} F_i$. Ainsi, d'après la Proposition 2.1.1, $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E. **c.q.f.d**

Remarque 2.1.2.
$vect(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{i=1}^{n} vect(u_i)$

Définition 2.1.4. (*Sommes directes de sous-espaces vectoriels*)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F_i)_{i=\overline{1,n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. On dit que la somme $F = \sum_{i=1}^{n} F_i$ est directe si tout vecteur v de F s'écrit de manière unique sous la forme $v = \sum_{i=1}^{n} u_i$, $u_i \in F_i, i = \overline{1,n}$. La somme F est alors notée $F = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$.

Proposition 2.1.3.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. La somme $F+G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \emptyset$.

Preuve.
1) Supposons que $E = F \bigoplus G$ i.e. supposons que l'existence et l'unicité de l'écriture $z = x + y$ avec $x \in F$, $y \in G$ pour tout vecteur z de E. L'existence de cette écriture assure $E = F + G$. En outre, pour $z \in F \cap G$, on a $z = z + 0_G = 0_F + z$ et par unicité, il résulte $0_F = z = 0_G$ et donc $F \cap G = \{0_E\}$. Les sous-espaces F et G sont supplémentaires dans E.
2) Réciproquement, supposons que $F \cap G = \{0_E\}$. Soit z un vecteur de E. Vu que $E = F + G$, alors il existe $x \in F$ et $y \in G$ tels que $z = x + y$. Supposons qu'une autre décomposition $z = x' + y'$, avec $x' \in F$, $y' \in G$. Alors $x - x' = y' - y$, vecteur de E à la fois dans F et dans G, et donc égal à 0_E (unique vecteur de $F \cap G$). Ainsi $x = x'$, $y = y'$ et l'écriture $z = x + y$ est donc unique i.e. $E = F \bigoplus G$. **c.q.f.d**

Exemple 2.1.4.
Soient, dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}^3$, les sous-espaces

$$F = \{x(1,0,0), x \in \mathbb{C}\} \text{ et } G = \{y(0, \frac{1}{3}, 0) + z(0,0,2), y, z \in \mathbb{C}\}.$$

Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{C}$ on a $(x, y, z) = x(1,0,0) + 3y(0, \frac{1}{3}, 0) + \frac{z}{3}(0,0,2)$ (écriture unique) d'où $\mathbb{C}^3 = F \bigoplus G$.

2.1.3 Bases d'un espace vectoriel

Définition 2.1.5. (*Famille libre-famille liée*)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit qu'une famille $(u_i)_{i=\overline{1,n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$ d'éléments de E est libre, ou encore que les vecteurs de cette famille sont linéairement indépendants si Pour toute famille $(\alpha_i)_{i=\overline{1,n}}$ de $\mathbb{K}$, si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = 0$ alors $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.
Dans le cas contraire, c'est-à-dire s'il existe une famille $(\alpha_i)_{i=\overline{1,n}}$ de $\mathbb{K}$ non tous nuls telle que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = 0$, on dit que la famille $(u_i)_{i=\overline{1,n}}$ est liée, ou encore que les vecteurs qui la composent sont linéairement dépendants.

Proposition 2.1.4.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $L = \{e_1, \ldots, e_n\}$, avec $n \geqslant 2$, une famille de vecteurs de E. La famille L est liée si et seulement si l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Preuve.
1) Supposons que la famille $L = \{e_1, \ldots, e_n\}$, avec $n \geqslant 2$ est liée, alors il existe des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ non tous nuls tels que $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n = 0$, avec un scalaire, soit α_i, non nul. Alors

$$\alpha_i e_i = -\alpha_1 e_1 - \ldots - \alpha_{i-1} e_{i-1} - \alpha_{i+1} e_{i+1} - \ldots - \alpha_n e_n$$

donc

$$e_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} e_1 - \ldots - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} e_{i-1} - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} e_{i+1} - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_i} e_n$$

et donc e_i est combinaison linéaires des autres vecteurs de la famille L.
2) Réciproquement, si

$$e_i = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_{i-1}e_{i-1} + \lambda_{i+1}e_{i+1} + \ldots + \lambda_n e_n$$

alors $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n = 0$, avec $\alpha_i = -1$ et $\alpha_j = \lambda_j$ si $i \neq j$, la famille L est liée. **c.q.f.d**

Définition 2.1.6. (*Famille génératrices*)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit qu'une famille $(u_i)_{i=\overline{1,n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$ d'éléments de E est génératrice, ou encore que les vecteurs de cette famille engendrent E si $vect((u_i)) = E$, c'est-à-dire pour tous $u \in E$ il existe $(\alpha_i)_{i=\overline{1,n}}$ de $\mathbb{K}$ telle que $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$.

Propriétés 2.1.1.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors
1) *Toute famille contenant une famille génératrice de E est encore une famille génératrice.*
2) *Toute famille contenue dans une famille libre est libre.*
3) *Toute famille réduite à un vecteur non nul est une famille libre.*
4) *Toute famille contenant une famille liée est liée.*
5) *Toute famille de E contenant le vecteur nul de E est liée.*

Preuve.
Soit I un ensemble fini d'indices
1) Soit une famille $(v_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E et J une partie de I. supposons que la famille $(v_i)_{i\in J}$ est génératrice de E. Ainsi, pour tous $u \in E$, il existe $(\mu_i)_{i\in J} \in \mathbb{K}^J$ à support fini tels que $u = \sum_{i\in J} \mu_i v_i$. On rajoute à cette somme $\sum_{i\in I-J} 0.v_i = 0$. On a alors $u = \sum_{i\in J} \mu_i v_i + \sum_{i\in I-J} 0.v_i = 0$. On pose, pour $i \in I$, $\lambda_i = \mu_i$ si $i \in J$, sinon, $\lambda_i = 0$. Alors il existe $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ tels que $u = \sum_{i\in I} \lambda_i v_i = 0$, d'où la famille $(v_i)_{i\in I}$ est génératrice de E.
2) Soient $(v_i)_{i\in I}$ une famille libre de E et J une partie de I. Soit $(\mu_i)_{i\in J} \in \mathbb{K}^J$ à support fini, supposons que $\sum_{i\in J} \mu_i v_i = 0$. On pose, pour $i \in I$, $\lambda_i = \mu_i$ si $i \in J$, sinon, $\lambda_i = 0$. Donc $\sum_{i\in I} \lambda_i v_i = 0$, et comme $(v_i)_{i\in I}$ est une famille libre, alors $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in I$, ainsi $\mu_i = 0$ pour tout $i \in J$, d'où $(v_i)_{i\in J}$ est libre.
3) Soit u un vecteur non nul de E, soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda.u = 0$ alors $\lambda = 0$, ainsi $\{u\}$ est libre.
4) Soit une famille $(v_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E et J une partie de I. supposons que la famille $(v_i)_{i\in J}$ est liée. Ainsi, il existe $(\mu_i)_{i\in J} \in \mathbb{K}^J$ à support fini (non tous nuls) tels que $\sum_{i\in J} \mu_i v_i = 0$. On rajoute à cette somme $\sum_{i\in I-J} 0.v_i = 0$. On a alors $\sum_{i\in J} \mu_i v_i + \sum_{i\in I-J} 0.v_i = 0$. On pose, pour $i \in I$, $\lambda_i = \mu_i$ si $i \in J$, sinon, $\lambda_i = 0$. Alors il existe $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ non tous nuls tels que $\sum_{i\in I} \lambda_i v_i = 0$, d'où la famille $(v_i)_{i\in I}$ est liée.
5) Soit une famille $(v_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E, supposons que pour un $i_0 \in I$, v_{i_0} est nul. Il

suffit de prendre tous les $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ nuls, à l'exception de λ_{i_0} pris égal à 1 pour représenter $\sum_{i\in I} \lambda_i v_i = 0$. **c.q.f.d**

Définition 2.1.7.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une famille $(u_i)_{i=\overline{1,n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$ d'éléments de E est appelée base de E si elle est libre et elle engendre E.

Proposition/Définition 2.1.3.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. La famille $B = (e_1, \ldots, e_n)$ d'éléments de E est une base de E si et seulement si pour tout vecteur u de E il existe un n-uplet scalaire $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ unique tel que $u = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$. Les scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ s'appellent les coordonnées du vecteur u dans la base B.

Preuve.
1) Supposons que B soit une base. Soit u un vecteur de E. Vu que B engendre E, il existe des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels que $u = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$.
Supposons qu'une autre écriture $u = \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_n e_n$ où $\beta_1, \ldots, \beta_n$ des scalaires. Alors

$$(\alpha_1 - \beta_1)e_1 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)e_n = 0,$$

et donc $\alpha_1 - \beta_1 = \ldots = \alpha_n - \beta_n$ vu que la famille B est libre. L'écriture $u = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$ est donc bien unique.
2) Réciproquement, supposons que tout vecteur u s'écrive $u = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$, énonce le caractère générateur de la famille B. Par ailleurs, soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels que $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n = 0_E$. L'unicité de la représentation

$$0_E = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n = 0e_1 + \ldots + 0e_n,$$

implique $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$, c'est à dire le caractère libre de la famille B, qui est donc une base. **c.q.f.d**

Proposition 2.1.5.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit F et G deux sous-espaces supplémentaires de l'espace E. Si B_F (resp. B_G) est une base de F (resp G), alors $B_F \cup B_G$ est une base de E.

Preuve.
On écrit tout vecteur de u de E comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G, vecteurs décomposés suivant les bases $B_F = \{f_1, \ldots, f_m\}$ et $B_G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ respectivement, de telle sorte que $u = \alpha_1 f1 + \ldots + \alpha_m f_m + \beta_1 g_1 + \ldots + \beta_n g_n$. Une décomposition de ce type est unique, du fait que F et G sont en somme directe, puis que B_F et B_G sont des bases de F et G respectivement. i.e. $B_F \cup B_G = \{f_1, \ldots, f_m, g_1, \ldots, g_n\}$ est une base de E. **c.q.f.d**

Définition 2.1.8.
Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est dit de dimension finie, s'il admet une famille génératrice finie.

Proposition 2.1.6.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On peut extraire une base de toute famille génératrice finie de E.

Preuve.

Soit $G_n = \{e_1, \dots, e_n\}$ une famille génératrice de E. Si elle est libre, c'est une base et la proposition est démontrée. Sinon, il existe un vecteur qui est combinaison linéaire des autres et donc, si G_{n-1} est la famille G_n privée de ce vecteur, la famille G_{n-1} est encore génératrice (car $Vect(G_n) = Vect(G_{n-1})$). Continuant, on arrivera à un entier k (au plus égal à $n-1$ et au moins égal à 1, puisque E contient des vecteurs non nuls) tel que la famille G_k de cardinal k, sous-famille de G_n, est génératrice et dont aucun vecteur n'est combinaison linéaire des autres, i.e. la famille G_k est libre, la famille G_k est donc une base. **c.q.f.d**

Théorème/Définition 2.1.1.

Soit Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, non nul. L'espace E admet une base et toute base de E a le même nombre de vecteurs. Ce nombre est appelé la dimension de E et on note $\dim E$. Si l'espace E est nul, il est dit de dimension zéro ou nulle.

Preuve.

L'existence d'une base a été vue dans la Proposition 2.1.6. Soient B et B' deux bases de l'espace E, avec n et n' éléments respectivement. Vu que B est génératrice et B' libre, on a $n' \leqslant n$. L'inégalité inverse valant pareillement, on déduit l'égalité de n et n'. **c.q.f.d**

Exemples 2.1.1.

1) $\mathbb{K}^n$ *est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Une base de $\mathbb{K}^n$ est la famille $(e_i)_{i=\overline{1,n}}$, où* $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$. *On l'appelle la base canonique de* $\mathbb{K}^n$.

2) *L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de degré inférieur ou égal à n est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n+1$. Une base de $\mathbb{K}_n[X]$ est $1, X, X^2, \dots, X^n$.*

Exercice corrigé 2.1.1.

Montre que $B = \{u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (1, -1, 0), u_3 = (0, 0, 2)\}$ une base de $\mathbb{R}^3$.

Solution.

1) Vérifions que B est libre

$$\begin{aligned} \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ 2\gamma = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha = \beta = \gamma = 0. \end{aligned}$$

2) Vérifions que B est génératrice de $\mathbb{R}^3$.
Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} u = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = \alpha - \beta \\ z = 2\gamma \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{x+y}{2} \\ \beta = \dfrac{x-y}{2} \\ \gamma = \dfrac{z}{2} \end{cases} . \end{aligned}$$

Proposition 2.1.7.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors F admet des sous-espaces supplémentaires. Si S est un supplémentaire de F, alors on a $\dim E = \dim F + \dim S$.

Preuve.
Soit $B = \{f_1, \ldots, f_p\}$ une base de F et $L = \{e_1, \ldots, e_q\}$ une famille libre de E complétant la base B : $B \cup L$ est une base de E. Alors le sous-espace $S = Vect(B)$ engendré par les vecteurs de la famille L est un sous-espace supplémentaire de F . En effet, tout vecteur v de E, combinaison linéaire des vecteurs de $B \cup L$

$$u = \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_p f_p + \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_q e_q$$

est somme d'un vecteur $\alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_p f_p$ de F et d'un vecteur $\beta_1 e_1 + \ldots + \beta_q e_q$ de S, et ceci de manière unique puisque la famille $B \cup L$ est libre. La famille L est une base de S, il en résulte la relation sur les dimensions.
Si S est un sous-espace en somme directe avec F et C une base de S, la famille de $B \cup C$ est une base de E d'après la Proposition 2.1.5 La relation sur les dimensions en résulte. **c.q.f.d**

Remarque 2.1.3.
Si F est sommes directes de sous-espaces vectoriels $F_i, i = \overline{1, n}$ et B_i est une base de F_i pour $i = \overline{1, n}$, alors $\bigcup_{i=1}^{n} B_i$ est une base de F. Ainsi

$$\dim \bigoplus_{i=1}^{n} F_i = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$$

.

Proposition 2.1.8.
Soit E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors le produit $E \times F$ est de dimension finie et $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$.

Preuve.
Si $B = \{e_1, \ldots, e_m\}$ est une base de E, $C = \{f_1, \ldots, f_n\}$ une base de F , alors la famille $\{(e_1, 0_F), \ldots, (e_m, 0_F), (0_E, f_1), \ldots, (0_E, f_n)\}$ est une base de $E \times F$. En effet, il suffit de décomposer tout vecteur (u, v) de $E \times F$ sous la forme $(u, v) = (u, 0_F) + (0_E, v)$ (les sous-espaces $E \times \{0_F\}$ et $\{0_E\} \times F$ de $E \times F$ sont en somme directe), puis de revenir aux définitions. **c.q.f.d**

Définition 2.1.9.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Le rang de la famille de vecteurs $L = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ est la dimension de l'espace $vect(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ qu'elle engendre, on écrit $\mathrm{rg}(L) = \dim vect(L)$.
On a donc $\mathrm{rg}(L) = \dim vect(L) \leq n$.

2.2 Applications linéaires et matrices

2.2.1 Applications linéaires

Définition 2.2.1.
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

i) On appelle application linéaire de E dans F, toute application f de E dans F qui vérifie :
  1) Pour tous $x, y \in E$: $f(x+y) = f(x) + f(y)$.
  2) pour tous $x \in E$, $\alpha \in \mathbb{K}$: $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

ii) Une application linéaire de E dans E est appelée un endomorphisme de E.

iii) Une application linéaire bijective est appelée un isomorphisme. les espaces E et F sont dits isomorphes, et on notera $E \approx F$.

iv) Un endomorphisme bijective est appelé un automorphisme.

v) Une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ est appelée une forme linéaire de E.

Remarque 2.2.1.

1) *On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F sur $\mathbb{K}$.*

2) *On note $\mathcal{L}(E)$ L'espace vectoriel des endomorphismes de E sur $\mathbb{K}$.*

Proposition 2.2.1.
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application alors :

$$f \in \mathcal{L}(E,F) \Leftrightarrow \quad f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y).$$

pour tout $x, y \in E$, $\alpha \in \mathbb{K}$.

Preuve.
La preuve découle directement de la définition. **c.q.f.d**

Proposition 2.2.2.
Deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F de dimension finie sont isomorphes si et seulement si leurs dimensions sont égales.

Preuve.
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, supposons que E et F sont isomorphes. Soit $B = \{e_1, \ldots, e_m\}$ une base de E. Alors $f(B) = \{f(e_1), \ldots, f(e_m)\}$ est une base de F. En effet, d'une part $f(B)$ est libre car si $\alpha_1 f(e_1) + \ldots + \alpha_m f(e_m) = 0_F$, alors $f(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_m e_m) = 0_F$ et par l'unicité de l'image inverse 0_E du vecteur nul 0_F de F , on a $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_m e_m = 0_E$, soit tous les α_i nuls puisque B est libre. D'autre part, $f(B)$ est génératrice car un vecteur $v \in F$ est image de $u \in E$ qui est combinaison linéaire des éléments de B, $u = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_m e_m$, et par suite $v = f(u) = f(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_m e_m) = \alpha_1 f(e_1) + \ldots + \alpha_m f(e_m)$.
Réciproquement, si E et F sont de même dimension m, on introduit une base $B = \{e_1, \ldots, e_m\}$ de E, une base $C = \{f_1, \ldots, f_m\}$ de F . Alors l'unique application linéaire f qui applique le vecteur e_i sur f_i, $i = \overline{1,m}$ (Proposition. 2.2.1), vérifiant

$$f(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_m e_m) = \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_m f_m$$

est bijective. En effet, tout vecteur $v \in F$ est de la forme $v = \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_m f_m$, il est l'image du vecteur $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_m e_m$ de E et puisque B et C sont des bases de E et F respectivement, ceci de manière unique (l'égalité $\alpha_1 f_1 + \ldots + \beta_m f_m = \alpha_1 f_1 + \ldots + \beta_m f_m$ implique l'égalité des coefficients $\alpha_i = \beta_i$). Ainsi les espaces E et F sont donc isomorphes. **c.q.f.d**

Définition 2.2.2.
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

1) *On appelle image de f et on note $\operatorname{Im} f$, la partie de F définie par :*

$$\operatorname{Im} f = \{f(x) \in F,\ x \in E\}.$$

2) *On appelle noyau de f et on note $\ker f$, la partie de E définie par :*

$$\ker f = \{x \in E,\ f(x) = 0_E\}.$$

Proposition 2.2.3.
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

1) $\operatorname{Im} f$ *est un $\mathbb{K}$-sous espace vectoriel de F.*
2) $\ker f$ *est un $\mathbb{K}$-sous espace vectoriel de E.*
3) f *est surjective si et seulement si* $\operatorname{Im} f = F$.
4) f *est injective si et seulement si* $\ker f = \{0\}$.

Preuve.
1) On a $f(0_E) = 0_F$, donc $0_F \in \operatorname{Im} f$.
Pour $x, y \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, le vecteur $\alpha f(x) + \beta f(y) = f(\alpha x + \beta y)$ est dans $\operatorname{Im} f$.
2) On a $f(0_E) = 0_F$, donc $0_E \in \ker f$.
Pour $x, y \in \ker f$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, le vecteur $\alpha f(x) + \beta f(y) = f(\alpha x + \beta y) = 0_F$, donc $\alpha x + \beta y$ est dans $\ker f$.
3) Supposons que f est surjective, Soit $y \in F$, alors il existe $x \in E$, telle que $y = f(x)$, donc $y \in \operatorname{Im} f$ i.e. $F \subset \operatorname{Im} f$ et comme $\operatorname{Im} f \subset F$, d'où $\operatorname{Im} f = F$
Réciproquement, supposons que $\operatorname{Im} f = F$, pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$, telle que $y = f(x)$, d'où f est surjective.
4) Si f est injective, 0_E est l'unique u de E tel que $f(u) = 0_F$. Ainsi $\ker f = 0_E$.
Réciproquement, supposons que $\ker f = 0_E$. Si x et y ont même image, alors

$$f(x - y) = f(x) + f(-y) = f(x) - f(y) = 0_F$$

et donc $x - y$ est un vecteur du noyau $\ker f$, par suite c'est le vecteur nul. Ainsi $x = y$ et f est injective. **c.q.f.d**

Proposition 2.2.4.
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Si la famille $G = \{e_1, \ldots, e_m\}$ engendre E, alors la famille

$$f(G) = \{f(e_1), \ldots, f(e_m)\}$$

engendre l'image $\operatorname{Im} f$.

Preuve.
Soit $u = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_m e_m \in E$, alors $f(u) \in \operatorname{Im} f$, et donc

$$f(u) = f(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_m e_m) = \alpha_1 f(e_1) + \ldots + \alpha_m f(e_m)$$

c'est-à-dire, $f(u)$ est combinaison linéaire de $f(e_1), \ldots, f(e_m)$. **c.q.f.d**

Définition 2.2.3.
Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$*. Si* $\operatorname{Im} f$ *est de dimension finie, alors le rang de* f *est défini comme étant la dimension de l'espace* $\operatorname{Im} f$ *et on notera* $\operatorname{rg}(f) = \dim \operatorname{Im} f$*.*

Proposition 2.2.5. (*Théorème du rang*)*[3]*
Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ *et* E *de dimension finie alors :*

$$\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f.$$

Preuve.
Soit S un supplémentaire de $\ker f$ dans E (dont l'existence est assurée par la Proposition 2.1.7). Alors l'application $f_{|S} : S \to \operatorname{Im} f$ est bijective car un vecteur de son noyau est dans $\ker f$, et donc nul vu $S \cap \ker f = 0_E$; tout vecteur $u \in E$ s'écrit $u = x + y$ avec $x \in S$ et $y \in \ker f$ et alors $f(u) = f(x) + f(y) = f(x)$, en résulte la surjectivité de $f_{|S} : S \to \operatorname{Im} f$. Ainsi, l'application $f_{|S} : S \to \operatorname{Im} f$ est un isomorphisme, donc par la Proposition. 2.2.2 S et l'image $\operatorname{Im} f$ sont de même dimension. En outre, vu que $\dim E = \dim \ker f + \dim S$, l'égalité entre dimensions de la proposition est établie. **c.q.f.d**

Remarque 2.2.2.

1) *Vu que, si* E *de dimension finie,* $\operatorname{rg}(f) = \dim \operatorname{Im} f = \dim E - \dim \ker f$*.*
2) *Si* E *et* F *sont de dimensions finies, alors* $\operatorname{rg}(f) \leq \inf(\dim E, \dim F)$*.*

Exercice corrigé 2.2.1.
Soit l'application f *définie de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *par :*
$f(x, y) = (2x - 4y, x - 2y)$.

(1) *Monter que* f *est linéaire.*

(2) *Déterminer* $\ker f$*, et* $\operatorname{Im} f$ *et donner leurs dimensions,* f *est-elle bijective.*

Solution.
(1) f est linéaire si et seulement si pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$,

$$f(\alpha(x, y) + \beta(x', y')) = \alpha f(x, y) + \beta f(x', y').$$

$$\begin{aligned}
f(\alpha(x, y) + \beta(x', y')) &= f(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y') \\
&= (2\alpha x + 2\beta x' - 4\alpha y - 4\beta y', \alpha x + \beta x' - 2\alpha y - 2\beta y') \\
&= (2\alpha x - 4\alpha y, \alpha x - 2\alpha y) + (2\beta x' - 4\beta y', \beta x' - 2\beta y') \\
&= \alpha(2x - 4y, x - 2y) + \beta(2x' - 4y', x' - 2y') \\
&= \alpha f(x, y) + \beta f(x', y').
\end{aligned}$$

d'où f est linéaire.
(2) Déterminons $\ker f$, et $\operatorname{Im} f$?

$$\begin{aligned}
\ker f &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) = (0, 0)\} \\
&= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x - 4y = 0 \ et \ x - 2y = 0\} \\
&= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 2y\} \\
&= \{(2y, y) / y \in \mathbb{R}\} \\
&= \{y(2, 1) / y \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

ainsi $\ker f$ est engendré par le vecteur $(2,1) \neq 0$, ainsi $\dim \ker f = 1$, alors f n'est pas injective.

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \{f(x,y)/(x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(2x-4y, x-2y)/(x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(x-2y)(2,1)/(x,y) \in \mathbb{R}^2\}. \end{aligned}$$

Ainsi $\operatorname{Im} f$ est engendré par le vecteur $(2,1) \neq 0$, ainsi $\dim \operatorname{Im} f = 1 \neq 2$, alors f n'est pas surjective.
f n'est pas bijective car il n'est ni injective ni surjective.

Exercice corrigé 2.2.2.
Soit l'application f définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par :
$g(x,y,z) = (x-y, y+z, x+y+z)$.

(1) *Monter que g est linéaire.*

(2) *Déterminer* $\ker g$*, et* $\operatorname{Im} g$ *et donner leurs dimensions, g est-elle bijective.*

Solution.
(1) g est linéaire si et seulement si pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$,

$$g(\alpha(x,y,z) + \beta(x',y',z')) = \alpha g(x,y,z) + \beta g(x',y',z').$$

$$\begin{aligned} g(\alpha(x,y,z) + \beta(x',y',z')) &= f(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z') \\ &= (\alpha x + \beta x' - \alpha y - \beta y', \alpha y + \beta y' + \alpha z + \beta z', \\ &\quad \alpha x + \beta x' + \alpha y + \beta y' + \alpha z + \beta z') \\ &= (\alpha x - \alpha y, \alpha y + \alpha z, \alpha x + \alpha y + \alpha z) \\ &\quad +(\beta x' - \beta y', \beta y' + \beta z', \beta x' + \beta y' + \beta z') \\ &= \alpha(x-y, y+z, x+y+z) + \beta(x'-y', y'+z', x'+y'+z') \\ &= \alpha g(x,y,z) + \beta g(x',y',z'). \end{aligned}$$

d'où g est linéaire.
(2) Déterminons $\ker g$, et $\operatorname{Im} g$?

$$\begin{aligned} \ker g &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/f(x,y) = (0,0)\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/x - y = 0 \; y + z = 0 \; et \; x + y + z = 0\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/x = y \; y = z \; et \; x + z = -y\} \\ &= \{(0,0,0)\}. \end{aligned}$$

Ainsi $\dim \ker g = 0$, alors g est injective.

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} g &= \{f(x,y,z)/(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{(x-y, y+z, x+y+z)/(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{x(1,0,1) + y(-1,1,1) + z(0,1,1)/(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}. \end{aligned}$$

Puisque $(1,0,1),(-1,1,1),(0,1,1)$ sont libres alors $\dim \operatorname{Im} g = 3$, ainsi g est surjective.
g est bijective car il est injective et surjective.

2.2.2 Représentation matricielle

On suppose à partir de maintenant que E et F de dimensions finies n et p respectivement $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ une basse de E, $C = \{f_1, f_2, \ldots, f_p\}$ une basse de F et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Définition 2.2.4.
On appelle matrice représentant f dans les bases B et C la matrice de terme général a_{ij} où $i = \overline{1, n}$ et $j = \overline{1, p}$ et on note :

$$M_f(B, C) = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pn} \end{pmatrix} \in M_{p,n}(\mathbb{K}),$$

où pour tout $j = \overline{1, p}$: $f(e_j) = a_{1j} f_1 + a_{2j} f_2 + \ldots + a_{pj} f_p$.

Exemple 2.2.1.
Soit l'application linéaire

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto (x - y, 2x + 1, x + 3y) \end{aligned}$$

On détermine la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
En effet :
Soient $B = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ et $B' = \{e'_1 = (1, 1, 1), e'_2 = (0, 1, 1), e'_3 = (1, 0, 1)\}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement. Alors :

$$M_f(B, B') = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Proposition 2.2.6. (*Écriture matricielle*)
Si X la matrice colonne des coordonnées de vecteur x de E dans la base B,et Y la matrice colonne des coordonnées de $f(x)$ dans la base C de F, alors $Y = M_f(B, C).X$.

Preuve.
Soit $x \in E$, $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$ alors
$f(x) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \ldots + x_n f(e_n)$
mais $f(e_j) = a_{1j} f_1 + a_{2j} f_2 + \ldots + a_{pj} f_p$, $j = \overline{1, n}$
alors

$$\begin{aligned} f(x) = (x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \ldots + x_n a_{1n}) f_1 + (x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \ldots + x_n a_{2n}) f_2 + \ldots \\ +(x_1 a_{p1} + x_2 a_{p2} + \ldots + x_n a_{pn}) f_p \end{aligned}$$

donc

$$Y = \begin{pmatrix} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \ldots + x_n a_{1n} \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \ldots + x_n a_{2n} \\ \vdots \\ x_1 a_{p1} + x_2 a_{p2} + \ldots + x_n a_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = M_f(B, C).X$$

c.q.f.d

Propriétés 2.2.1.
Soient E, F, G *des* $\mathbb{K}$*-e.v et* B, C, D *des bases de* E, F, G *respectivement.*

1) *Si* $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ *alors :* $M_{\alpha f+\beta g}(B, C) = \alpha M_f(B, C) + \beta M_g(B, C)$.

2) *Si* $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$ *alors :* $M_{g\circ f}(B, D) = M_g(C, D).M_f(B, C)$.

3) *Si* $f \in \mathcal{L}(E, F)$ *et* $\dim E = \dim F = n$ *alors :*
   i) f *est bijective* $\Leftrightarrow M_f$ *est inversible.*
   ii) $M_{f^{-1}} = M_f^{-1}$.

4) $$\begin{array}{rcl} \phi : \mathcal{L}(E, F) & \rightarrow & M_{p,n}(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & M_f \end{array} \quad \textit{est un isomorphisme.}$$

2.2.3 Changement de base

Définition 2.2.5.
Soient E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel,*$\dim E = n$,$B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *et* $B' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$ *deux bases de* E*. On appelle matrice de passage de* B *à* B'*, la matrice* $P = (p_{ij})$ *dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de* B' *exprimées dans* B*. C'est à dire :*

$$e'_j = p_{1j}e_1 + p_{2j}e_2 + \ldots + p_{nj}e_n.$$

pour tout $j = \overline{1, n}$ *et on le note* $P = M_{passage}(B, B')$.

Exercice corrigé 2.2.3.
Soient $B = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ *et*
$B' = \{e'_1 = (1, 1, 1), e'_2 = (0, 1, 1), e'_3 = (1, 0, 1)\}$ *deux bases de* $\mathbb{R}^3$
Déterminons les matrices de passage de B *à* B' *et de* B' *à* B.

Solution.
1) On a

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + e_3 \\ e'_2 = e_2 + e_3 \\ e'_3 = e_1 + e_3 \end{cases}$$

d'où

$$P = M_{passage}(B, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) De même on obtient

$$\begin{cases} e_1 = e'_1 - e'_2 \\ e_2 = e'_1 - e'_3 \\ e_3 = -e'_1 + e'_2 + e'_3 \end{cases}$$

d'où

$$P' = M_{passage}(B', B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Propriétés 2.2.2.
Soient B et B' deux bases de E, P la matrice de passage de B à B'.

1) $P = M_{Id}(B', B)$.

2) P *est inversible et* $P^{-1} = M_{passage}(B', B)$.

3) Soient $x \in E$, X *et* X' *les matrices colonnes des coordonnées de* x *dans* B *et dans* B' *respectivement, alors :*$X = PX'$.

Théorème 2.2.1.
Soient E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels,* $\dim E = n$ *et* $\dim F = p$, B *et* B' *deux bases de* E, C *et* C' *deux bases de* F *respectivement,* $P = M_{passage}(B, B')$ *et* $Q = M_{passage}(C, C')$.
Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$, A *et* A' *les matrices de* f *relativement aux bases* B *et* C *d'une part et* B' *et* C' *d'une autre part alors :* $A' = Q^{-1}.A.P$.
Dans ce cas on dit que A *et* A' *sont équivalentes.*

Preuve.
Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} E & \xrightarrow{f} & F & & B & \xrightarrow{A} & C \\ Id_E \uparrow & & Id_F \downarrow & \Longleftrightarrow & P \uparrow & & Q^{-1} \downarrow \\ E & \xrightarrow{f} & F & & B' & \xrightarrow{A'} & C' \end{array}$$

On écrit :

$$f = Id_F \circ f \circ Id_E \Longleftrightarrow M_f(B', C') = M_{Id_F}(C, C').M_f(B, C).M_{Id_E}(B', B)$$

C'est à dire : $A' = Q^{-1}.A.P$ **c.q.f.d**

Corollaire 2.2.1.
Si $f \in \mathcal{L}(E)$*, avec les hypothèses précédentes alors :* $A' = P^{-1}.A.P$.
Dans ce cas on dit que A *et* A' *sont semblable.*

Exercice corrigé 2.2.4.
Soit l'endomorphisme

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x - y - z, z - x, x + y - z) \end{array}$$

et $B' = \{u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (-1, 0, 1)\}$ *une base de* $\mathbb{R}^3$

1) *Déterminer la matrice* A *de* f *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^3$.

2) *Déterminer la matrice* A' *de* f *dans la base* B'.

Solution.
1) Déterminons la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} f(e_1) = (1, -1, 1) = e_1 - e_2 + e_3 \\ f(e_2) = (-1, 0, 1) = -e_1 + e_3 \\ f(e_3) = (-1, 1, -1) = -e_1 + e_2 - e_3 \end{cases}$$

d'où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2) Déterminons la matrice A' de f dans la base B' :

$$\begin{cases} f(u_1) = (-1,0,1) = u_3 \\ f(u_2) = (-2,1,0) = -3u_1 + 4u_2 - u_3 \\ f(u_3) = (-2,2,-2) = -6u_1 + 8u_2 - 4u_3 \end{cases}$$

d'où

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 \\ 0 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Autre Méthode :

On a : $A' = P^{-1}.A.P$, cherchons la matrice de passage.

$$\begin{cases} u_1 = e_1 + e_2 + e_3 \\ u_2 = e_2 + e_3 \\ u_3 = -e_1 + e_3 \end{cases}$$

d'où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors

$$A' = P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 \\ 0 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Définition 2.2.6.
Le rang d'une matrice A de $M_{p,n}(\mathbb{K})$ est celui de la famille $\{C_1, \ldots, C_n\}$ de ses vecteurs colonnes, considérés comme des vecteurs de $\mathbb{K}^n$ et on note $\mathrm{rg}(A)$.

Proposition 2.2.7.
Le rang d'une matrice A de $M_{p,n}(\mathbb{K})$ est le rang de toute application linéaire représentée par cette matrice.

Preuve.
Soit f l'application linéaire de E dans F représentée par la matrice A pour un choix de bases $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ et $C = \{f_1, \ldots, f_p\}$ de E et F respectivement. Les vecteurs colonnes de A correspondent aux vecteurs colonnes des coordonnées des vecteurs $f(e_1), \ldots, f(e_n)$ décomposés dans la base C de F . Ainsi le rang de la matrice A est celui de la famille $f(B) = \{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ et donc celui de l'application linéaire f. **c.q.f.d**

2.3 Déterminants

Définition 2.3.1.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, de dimension $n \geq 2$ et $f : E^n \to \mathbb{K}$ une application, alors.

(1) *f est dite n-linéaire si pour tout $i, j = \overline{1,n}$ et pour tous vecteurs $u_j \in E$ et $j \neq i$, l'application partielle*

$$\begin{array}{rcl} f_i : E & \to & \mathbb{K} \\ v & \mapsto & f_i(v) = f(u_1, \ldots, u_{i-1}, v, u_{i+1}, \ldots, u_n) \end{array}$$

est linéaire

(2) *f est dite alternée si pour tous $u_1, \ldots, u_n \in E$, $i, j = \overline{1,n}$ et $i \neq j$, on a*

$$u_i = u_j \Rightarrow f(u_1, \ldots, u_n) = 0.$$

Théorème 2.3.1.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, de dimension $n \geq 2$, $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E et $\{u_1, \ldots, u_n\}$ une famille de n vecteurs. Pour tout $j = \overline{1,n}$, on note $(a_{ij})_{i=\overline{1,n}}$ les coordonnées de u_j dans la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$, alors

$$f(u_1, \ldots, u_n) = \Big(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)j} \Big) f(e_1, \ldots, e_n)$$

où $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de la permutation σ.

Preuve.
On a pour tout $j = \overline{1,n}$, $u_j = \sum_{i_j=1}^{n} a_{i_j j} e_{i_j}$. Alors

$$f(u_1, \ldots, u_n) = f(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1} e_{i_1}, \ldots, \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n n} e_{i_n}).$$

Puisque f est une forme n-linéaire alternée, on obtient

$$f(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1 1} \ldots a_{i_n n} f(e_1, \ldots, e_n),$$

une somme de facteurs contient n^n terme, tous sont nuls sauf ceux pour lesquels

$$\{i_1, \ldots, i_n\} = \sigma\{1, \ldots, n\},$$

où $\sigma \in S_n$ une permutation de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ et comme il a $n!$ permutations dans S_n, alors

$$f(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \Big(\prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)j} \Big) f(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}).$$

Or toute permutation est un produit de transpositions. Chaque transposition des coordonnées change le signe, donc si une permutation σ est le produit de k transpositions

$$f(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = (-1)^k f(e_1, \dots, e_n).$$

Donc d'après la Remarque 1.3.4

$$f(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(e_1, \dots, e_n).$$

c.q.f.d

Remarque 2.3.1.
Le Théorème 2.3.1 montre qu'une forme n-linéaire alternée est déterminée de façon unique par sa valeur sur une base de E.

Définition 2.3.2.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, de dimension $n \geq 2$, Étant donnée une base $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ de E.

1) *On appelle déterminant d'ordre n dans la base B l'unique forme n-linéaire alternée notée* $\det_B : E^n \to \mathbb{K}$ *telle que*

$$\det_B(e_1, \dots, e_n) = 1.$$

2) *Si $\{u_1, \dots, u_n\}$ une famille de n vecteurs de E, on note $a_{1j}, \cdots, a_{nj}$ les coordonnées du vecteurs u_j pour tout $j = \overline{1, n}$ dans la base B alors*

$$\det_B(u_1, \dots, u_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)j}.$$

Remarque 2.3.2.

1) *Le Théorème 2.3.1 montre qu'une forme n-linéaire alternée est déterminée de façon unique par sa valeur sur une base de E.*

2) *Si $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée, alors le déterminant de la famille de des vecteurs colonnes de A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est appelé le déterminant de la matrice A. On note symboliquement*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)j}.$$

Exemples 2.3.1.

1) $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - y_1 x_2.$

2) $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 y_2 z_3 - x_1 z_2 y_3 - y_1 x_2 z_3 + y_1 z_2 x_3 + z_1 x_2 y_3 - z_1 y_2 x_3.$

Définition 2.3.3.
Soit $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{K})$ *une matrice carrée d'ordre* $n \geq 3$.

1) *On appelle mineur de* a_{ij} *pour chaque* $i, j = \overline{1, n}$ *dans* A *le déterminant* Δ_{ij} *d'ordre* $n-1$ *obtenu en supprimant dans* A *la* $i^{\text{ème}}$ *ligne et la* $j^{\text{ème}}$ *colonne.*

2) *On appelle cofacteur de* a_{ij} *pour chaque* $i, j = \overline{1, n}$ *dans* A, *et on note* A_{ij} *le produit de* $(-1)^{i+j}$ *par le mineur de* a_{ij} *dans* A *i.e.* $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$.

Proposition 2.3.1.
Soit $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{K})$ *une matrice carrée d'ordre* $n \geq 3$, *alors on a*

1) *Développement de* $\det(A)$ *par rapport à la* $j^{\text{ème}}$ *colonne, pour tout* $j = \overline{1, n}$.

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\Delta_{ij}.$$

2) *Développement de* $\det(A)$ *par rapport à la* $i^{\text{ème}}$ *ligne, pour tout* $i = \overline{1, n}$.

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\Delta_{ij}.$$

Preuve.
Pour la preuve voir par exemple [13, 15], **c.q.f.d**

Exemple 2.3.1.

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Exercices

Exercice 2.3.1.
Soient $(E, +,)$ *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel,* F *un sous-espace vectoriel de* E *et* A, B *deux sous ensembles de* E*.*

1) *Montrer que, si* $A \subset B$*, alors* $vect(A) \subset vect(B)$*.*

2) *Montrer que* A *est un sous-espace vectoriel de* E *si et seulement si* $vect(A) = A$*.*

3) *Montrer que, si* $A \subset B \subset F$ *et* A *engendre* F*, alors* B *engendre* F*.*

Exercice 2.3.2.

1) *Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation :*

$$x + y + z = 0$$

est un sous-espaces vectoriel de $\mathbb{R}^3$*.*

2) *Montrer que l'ensemble :* $S = \{(a, 0, 0, b), a, b \in \mathbb{R}\}$ *est un sous-espaces vectoriel de* $\mathbb{R}^4$*.*

Exercice 2.3.3.

Pourquoi les ensembles suivants ne sont pas des espaces vectoriels ?

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x - 3y + z = 5\},$$

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geqslant 0ety \geqslant 0\}.$$

Exercice 2.3.4.

1) *Expliquer pourquoi les trois vecteurs* $e_1 = (1, 0, 0)$*,* $e_2 = (0, 1, 0)$ *et* $e_3 = (0, 0, 1)$ *génèrent* $\mathbb{R}^3$*.*

2) *Montrer que tout vecteur* v *de* $\mathbb{R}^3$ *peut s'écrire comme combinaison linéaire de* $u_1 = (1, 0, 0)$*,* $u_2 = (1, 1, 0)$ *et* $u_3 = (1, 1, 1)$*.*

Exercice 2.3.5.

Dans $\mathbb{R}^3$*, soient* $u_1 = (1, 1, 3)$*,* $u_2 = (1, -1, -1)$*,* $v_1 = (1, 0, 1)$ *et* $v_2 = (2, -1, 0)$*.*
Montrer que $vect(u_1, u_2) = vect(v_1, v_2)$*.*

Exercice 2.3.6.
Soient F *et* G *les sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^4$ *définis par*
$F = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4,\ b - 2c + d = 0\},\ \ G = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4,\ a = d \text{ et } b = 2c\}$*.*

1)*Donner une base de* F*, de* G *et de* $F \cap G$*.*

2)*En déduire que* $F + G = \mathbb{R}^4$*.*

Exercice 2.3.7.

Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} et \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 2.3.8.

Trouver le rang des matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2.3.9.

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E. Soit f un endomorphisme E tel que $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = e_3$ et $f(e_3) = e_1$.

1) *Déterminer la matrice A de f dans la base B.*

2) *Calculer la matrice A^3. et en déduire que A est inversible.*

Exercice 2.3.10.

Soit l'application linéaire

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x, x + y, y - z, 2z) \end{array}$$

1) *Déterminer la matrice A de f dans les bases canoniques B et C de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$ respectivement.*

2) *Soient $B' = \{e'_1 = (1, 1, 1), e'_2 = (0, 1, 1), e'_3 = (0, 0, 1)\}$ une base de $\mathbb{R}^3$,*
$C' = \{f'_1 = (1, 1, 1, 1), f'_2 = (0, 1, 1, 1), f'_3 = (0, 0, 1, 1), f'_4 = (0, 0, 0, 1)\}$ une base de $\mathbb{R}^4$.

i) Déterminer les matrices de passage P et Q de B à B' et de C à C' respectivement.

ii) En déduire la matrice A' de f dans les bases B' et C'.

iii) Déterminer le rang des A et A'.

Exercice 2.3.11.

Considérons la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice suivant la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ est M.

1) *Déterminer les coordonnées des vecteurs $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ suivant la base B.*

2) *Soit $B' = \{e'_1 = (2, 2, 0), e'_2 = (2, -2, 0), e'_3 = (0, 0, 2)\}$ une autre base de $\mathbb{R}^3$*

i) Déterminer la matrice de passage P de la base B à la base B'.

ii) En déduire la matrice M' de f dans la base B'.

iii) Déterminer le rang de M'.

CHAPITRE 3

Réduction des endomorphismes d e.v de dimension finie

Sommaire

Dans ce chapitre nous allons présenter les notions suivantes : rappels sur les polynômes, éléments propres, diagonalisation des endomorphismes et on donne une caractérisation d'un endomorphisme diagonalisable, trigonalisation des endomorphismes et on donne une caractérisation d'un endomorphisme trigonalisable, polynômes d'endomorphisme, réduction de Jordan. Nous proposons tout au long du chapitre des exemples et exercices résolus.
Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3.1 Rappels sur les polynômes

3.1.1 Vocabulaire

Définitions 3.1.1.

1. *On appelle polynôme à coefficients dans* $\mathbb{K}$ *une suite* $(a_0, a_1, \ldots)$ *d'éléments de* $\mathbb{K}$ *nuls à partir d'un certain rang. L'ensemble des polynômes à coefficients dans* $\mathbb{K}$ *est noté* $\mathbb{K}[X]$.
2. *Deux polynômes* $P = (a_0, a_1, \ldots)$ *et* $Q = (b_0, b_1, \ldots)$ *sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux, c'est-à-dire :* $a_k = b_k$*, pour tout* $k \in \mathbb{N}$.
3. *On appelle polynôme nul le polynôme dont tous les coefficients sont nuls.*
4. *On appelle degré d'un polynôme non nul* $P = (a_0, a_1, \ldots)$ *le plus grand entier* n *tel que* $a_n \neq 0$*. Le coefficient an correspondant est appelé coefficient dominant du polynôme* P*. Si le coefficient dominant est* 1*, le polynôme est dit unitaire.*

3.1.2 Opérations sur les polynômes

Définitions 3.1.2. (*Addition*)
Soit $P = (a_0, a_1, \ldots)$ *et* $Q = (b_0, b_1, \ldots)$ *deux polynômes. On pose :*

$$P + Q = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \ldots).$$

Il est clair que cette suite s'annule à partir d'un rang au plus égal au successeur du plus grand des degrés de P *et* Q*. Il s'agit bien d'un polynôme et*

$$deg(P + Q) \leq \max(deg(P), deg(Q)).$$

L'addition est donc une loi de composition interne dans $\mathbb{K}[X]$*. Elle est évidemment commutative, associative, le polynôme nul est élément neutre et tout polynôme* $P = (a_0, a_1, \ldots)$ *a un opposé* $-P = (-a_0, -a_1, \ldots)$*. i.e.*

$$(\mathbb{K}[X], +) \text{ est un groupe commutatif.}$$

Définitions 3.1.3. (*Multiplication interne/ produit*)
Soit $P = (a_0, a_1, \ldots)$ *et* $Q = (b_0, b_1, \ldots)$ *deux polynômes. On pose :*

$$P \times Q = (a_0 b_0, a_1 b_1, \ldots, \sum_{i+j=n} a_i b_j, \ldots).$$

Cette suite s'annule à partir du rang égal au successeur de la somme des degrés de P *et* Q*. Il s'agit bien d'un polynôme et*

$$deg(P \times Q) = deg(P) + deg(Q).$$

La multiplication est donc une loi de composition interne dans $\mathbb{K}[X]$*. Elle est commutative, associative, distributive par rapport à l'addition et le polynôme* $(1, 0, 0, \ldots)$ *est élément neutre. i.e.*

$$(\mathbb{K}[X], +, \times) \text{ est un anneau commutatif.}$$

Définitions 3.1.4. (*Multiplication par un scalaire*)
Soit $P = (a_0, a_1, \ldots)$ un polynôme. On pose :

$$\lambda.P = (\lambda a_0, \lambda a_1, \ldots).$$

On vérifie aisément que : pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.
1) $\alpha(P + Q) = \alpha P + \alpha Q$,
2) $(\alpha + \beta)P = \alpha P + \beta P$,
3) $\alpha(\beta P) = (\alpha\beta)P$,
4) $1P = P$,

i.e.

$$(\mathbb{K}[X], +, .) \text{ est un } \mathbb{K}\text{-espace vectoriel.}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$, noté $\mathbb{K}_n[X]$.
Considérons le polynôme $X = (0, 1, 0, \ldots)$. On calcule facilement les puissances de X :
$X^0 = (1, 0, 0, \ldots)$, $X^1 = (0, 1, 0, \ldots)$, $X^2 = (0, 0, 1, 0, \ldots)$, $\ldots$, $X^k = (0, 0, \ldots, 1, \ldots)$, $\ldots$.
On remarque que tout polynôme P est combinaison linéaire d'un nombre fini de polynômes X^k (où $k \in \mathbb{N}$) i.e.

$$P = (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) = a_0 + a_1X + \ldots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n.$$

Définitions 3.1.5.
Soit le polynôme P :

$$P = a_0 + a_1X + \ldots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n$$

où $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$.

i) Les a_k sont appelés les coefficients du polynôme.

ii) Si tous les coefficients a_k sont nuls, P est appelé le polynôme nul, il est noté 0.

iii) Si $a_n \neq 0$, le degré de P est l'entier n. Pour le degré du polynôme nul on pose par convention $deg(0) = -\infty$.

iv) Un polynôme de la forme $P = a_nX^n$ est appelé un monôme. Si $a_n \neq 0$, son degré est n.

v) Un polynôme de la forme $P = a_0$ est appelé un polynôme constant. Si $a_0 \neq 0$, son degré est 0.

vi) Si $a_n \neq 0$, On appelle terme dominant le monôme a_nX^n. Le coefficient a_n est appelé le coefficient dominant de P.

vii) Si le coefficient dominant $a_n = 1$, on dit que P est un polynôme unitaire.

3.1.3 Arithmétique des polynômes

Définition 3.1.1.
Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, on dit que A divise B, ou que A est un diviseur de B, ou que B est un multiple de A, s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $B = QA$. On note alors A/B.

Proposition 3.1.1.
Soient A, B et C des polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

i) Si A/B alors $deg(A) \leq deg(B)$.

ii) Si A/B et B/C alors A/C.

iii) Si C/A et C/B alors $C/(AP + BQ)$, pour tout $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.

Théorème 3.1.1. (*Division euclidienne polynomiale*)
Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, le polynôme A étant supposé non nul. Il existe (Q, R) unique tel que :

$$B = AQ + R \quad et \quad deg(R) < deg(B).$$

Preuve.
Soient $A = a_0 + a_1X + \ldots + a_mX^m$ et $B = b_0 + b_1X + \ldots + b_nX^n$ où $m = deg(A)$ et $n = deg(B)$.
Si $B = 0$ en remarquant que $B = 0.A + 0$ avec $\infty = deg(0) < deg(A)$ car A étant non nul, on $deg(A) \in \mathbb{N}$ Du coup $R = Q = 0$ conviennent.
Cela étant, on fait une récurrence sur $deg(B)$.
Si $deg(B) = 0$ c'est-à-dire $B = b_0$ alors on distingue deux cas. Ou bien $deg(A) \geq 1$ auquel cas l'écriture $B = A.0 + b_0$ permet de conclure. Ou bien on a aussi $deg(A) = 0$, c-est-à- dire $A = a_0$ nécessairement non nul, A l'étant. Alors l'écriture $B = b_0 = A\dfrac{b_0}{a_0} + 0$ permet de conclure (rappel $deg(0) = -\infty < 0 = deg(A)$).
On suppose que pour tout polynôme B tel que $deg(B) < n$ ($n \in \mathbb{N}^*$ fixé) et pour tout polynôme A non nul, il existe $Q, R \in \mathbb{K}[X]$ tels que $B = AQ + R$ avec $deg(R) < deg(A)$.
Soit B un polynôme de degré n. Si $deg(A) > n = deg(B)$ alors l'écriture $B = A.0 + B$ permet de conclure. Sinon (i.e. $n > m$) on est en mesure de définir un polynôme C via :

$$C = B - \frac{b_n}{a_n}X^{n-m}A$$

Par construction il satisfait $deg(C) < deg(B)$. On peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence. Il existe donc Q et R tels que $C = A.Q + R$ avec $deg(R) < deg(A)$. Revenant au polynôme B, cela donne :

$$B = A\big(\frac{b_n}{a_n}X^{n-m} + Q\big) + R,$$

ce qui permet de conclure. **c.q.f.d**

Exemple 3.1.1.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
X^3 & + & X & +1 & X+1 \\ \cline{5-5}
-X^3 & -X^2 & & & X^2 - X + 2 \\ \cline{1-4}
 & -X^2 & +X & +1 & \\
 & +X^2 & +X & & \\ \cline{2-4}
 & & 2X & +1 & \\
 & & -2X & -2 & \\ \cline{3-4}
 & & & -1 &
\end{array}
$$

Théorème/Définition 3.1.1. (*Plus grand commun diviseur*)
Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, avec $A \neq 0$ ou $B \neq 0$. Il existe un unique polynôme unitaire de plus grand degré qui divise à la fois A et B.
Cet unique polynôme est appelé le pgcd (plus grand commun diviseur) de A et B que l'on note $pgcd(A, B)$.

Exemple 3.1.2.
Soient $A = X^3 + 2X^2 - X - 2$ et $B = X^3 - X^2 - 2X$. Calculons le $pgcd(A, B)$, alors on a $A = (X + 2)(X + 1)(X - 1)$ et $B = X(X + 1)(X - 2)$,
Ainsi $pgcd(A, B) = X + 1$.

Remarque 3.1.1.

i) $pgcd(A, B)$ est un polynôme unitaire.

ii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$ $pgcd(\lambda A, B) = pgcd(A, B)$.

iii) Si $B = AQ + R$ alors $pgcd(A, B) = pgcd(A, R)$. C'est ce qui justifie l'algorithme d'Euclide.
Si $A \neq 0$. on peut calculer la suite des restes (R_k) obtenus par divisions euclidiennes successives,

$$\begin{array}{rcl}
B = AQ_1 + R_1 & , & deg(R_1) < deg(A) \\
A = R_1Q_2 + R_2 & , & deg(R_2) < deg(R_1) \\
R_1 = R_2Q_3 + R_3 & , & deg(R_3) < deg(R_2) \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
R_{k-2} = R_{k-1}Q_k + R_k & , & deg(R_k) < deg(R_{k-1}) \\
R_{k-1} = R_kQ_{k+1} & &
\end{array}$$

Le degré du reste diminue à chaque division. On arrête l'algorithme lorsque le reste est nul. Le pgcd est le dernier reste non nul R_k (rendu unitaire).

Exemple 3.1.3.
Calculons le pgcd de $X^4 - 1$ et $X^3 + 1$, on a

$$\begin{array}{rcl}
X^4 - 1 & = & (X^3 + 1)X + (-X - 1) \\
X^3 + 1 & = & (-X - 1)(-X^2 + X - 1) + 0
\end{array}$$

Ainsi $pgcd(X^4 - 1, X^3 + 1) = X + 1$.

Théorème 3.1.2. *[16](Théorème de Bézout)*
Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, avec $A \neq 0$ ou $B \neq 0$. On note $D = pgcd(A, B)$. Il existe deux polynômes $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, tels que $AP + BQ = D$.

Corollaire 3.1.1.
Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. A et B sont premiers entre eux si et seulement s'il existe deux polynômes P et Q tels que $AP + BQ = 1$.

Corollaire 3.1.2. (*Théorème de Gauss*)
Soient A, B et C des polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Si A/BC et $pgcd(A,B)=1$ alors A/C.

Corollaire 3.1.3.
Soient A, B et C des polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Si A/C, B/C et $pgcd(A,B)=1$ alors AB/C.

Théorème/Définition 3.1.2. (*Plus petit commun multiple*)
Soient A et B deux polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$, alors il existe un unique polynôme unitaire M de plus petit degré tel que A/M et B/M.
Cet unique polynôme est appelé le ppcm (plus petit commun multiple) de A et B qu'on note $ppcm(A,B)$.

Exemple 3.1.4.
Soient $A = X^3+2X^2-X-2$ et $B = X^3-X^2-2X$. Calculons le $ppcm(A,B)$, alors on a $A=(X+2)(X+1)(X-1)$ et $B=X(X+1)(X-2)$,
Ainsi $ppcm(A,B) = X(X-1)(X+1)(X-2)(X+2) = X^5+5X^3+4X$.

Proposition 3.1.2.
Soient A et B deux polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ et $M = ppcm(A,B)$. Si $C \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme tel que A/C et B/C, alors M/C.

3.1.4 Racine d'un polynôme

Soit $P = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, pour un élément $x \in \mathbb{K}$, on note $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$. On associe ainsi au polynôme P une fonction polynôme (que l'on note encore P)

$$\begin{aligned} P : \mathbb{K} &\rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \end{aligned}$$

Définition 3.1.2.
Soient P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une racine (ou un zéro) de P si $P(\lambda)=0$.

Proposition 3.1.3.
Soient P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors

$$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow X-\lambda/P$$

Preuve.
Lorsque l'on écrit la division euclidienne de P par $X-\alpha$, on obtient

$$P = Q(X-\lambda)+R.$$

où R est une constante car $deg(R) < deg(X-\lambda) = 1$. Donc

$$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow R(\lambda) = 0 \Leftrightarrow R = 0 \Leftrightarrow X-\lambda/P.$$

c.q.f.d

Corollaire 3.1.4.
Soient P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors λ est une racine de P s'il existe un polynôme Q de $\mathbb{K}[X]$ tel que $P = Q(X - \lambda)$.

Définition 3.1.3.
Soient P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\alpha \in \mathbb{N}$. On dit que λ est une racine de multiplicité α de P si $(X - \lambda)^\alpha$ divise P alors que $(X - \lambda)^{\alpha+1}$ ne divise pas P, et on note $m(\lambda) = \alpha$. Lorsque $\alpha = 1$ on parle d'une racine simple, lorsque $\alpha = 2$ d'une racine double.

Proposition 3.1.4.
Soient P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}$, et $\alpha \in \mathbb{N}$. Il y a équivalence entre

i) λ est une racine de multiplicité α de P.

ii) Il existe un polynôme Q de $\mathbb{K}[X]$ tel que $P = Q(X - \lambda)^\alpha$ et $Q(\lambda) \neq 0$.

iii) $p'(\lambda) = p''(\lambda) = p'''(\lambda) = \ldots = p^{(\alpha-1)}(\lambda) = 0$ et $p^{(\alpha)}(\lambda) \neq 0$.

Théorème 3.1.3. *[3](Théorème de d'Alembert-Gauss)*
Tout polynôme à coefficients complexes de degré $n > 1$ a au moins une racine dans $\mathbb{C}$. Il admet exactement n racines si on compte chaque racine avec multiplicité.

Définition 3.1.4.
Soient P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est dit irréductible si et seulement s'il est non constant et si les seuls polynômes qui le divisent sont les polynômes constants et ceux de la forme aP avec $a \in \mathbb{K}$.

Proposition 3.1.5. (*Lemme d'Euclide*)
Soient A, B et P des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et P irréductible. Si P/AB alors P/A ou P/B.

Théorème 3.1.4.
Tout polynôme non constant $A \in \mathbb{K}[X]$ s'écrit comme un produit de polynômes irréductibles unitaires :

$$A = aP_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \ldots P_r^{\alpha_r}$$

où $a \in \mathbb{K}^*$, $r, \alpha_i \in \mathbb{N}$ et les Pi sont des polynômes irréductibles distincts. De plus cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.

Théorème 3.1.5.
Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.
Tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ se décompose en produit d'irréductibles de la forme

$$P = a(X - \lambda_1)^{\alpha_1}(X - \lambda_2)^{\alpha_2} \ldots (X - \lambda_r)^{\alpha_r}$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont les racines distinctes de P et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ sont leurs multiplicités.

Définition 3.1.5.
Un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ est dit scindé, si c'est un produit de polynômes de degré 1. Un polynôme de degré n ($n > 1$) est scindé si et seulement si il possède exactement n racines dans $\mathbb{K}$ comptées chacune avec son ordre de multiplicité (c'est-à-dire plus précisément, si la somme des ordres de multiplicité de ses racines est n). i.e.

$$P(X) = a(X - \lambda_1)^{\alpha_1}(X - \lambda_2)^{\alpha_2} \ldots (X - \lambda_r)^{\alpha_r}$$

et $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = \deg(P) = n$

3.2 Éléments propres

3.2.1 Valeurs propres-Vecteurs propres

Définition 3.2.1.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

i) On appelle valeur propre de f tout scalaire λ de $\mathbb{K}$ pour lequel, il existe un vecteur x non nul de E tel que : $f(x) = \lambda x$.

ii) L'ensemble des valeurs propres de f s'appelle le spectre de f, noté $Sp(f)$.

iii) On appelle vecteur propre de f tout vecteur x non nul de E pour lequel, il existe un scalaire λ de $\mathbb{K}$, tel que : $f(x) = \lambda x$.

Théorème 3.2.1.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
$\lambda \in Sp(f) \Leftrightarrow f - \lambda Id_E$ n'est pas injectif.

Preuve.
En effet :

$$\begin{aligned}
\lambda \in Sp(f) &\Leftrightarrow \exists x \in E - \{0\} : f(x) = \lambda x \\
&\Leftrightarrow \exists x \in E - \{0\} : (f - \lambda Id_E)(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \exists x \in E - \{0\} : x \in \ker(f - \lambda Id_E) \\
&\Leftrightarrow \ker(f - \lambda Id_E) \neq \{0\} \\
&\Leftrightarrow f - \lambda Id_E \ \ n'est \ \ pas \ \ injectif.
\end{aligned}$$

c.q.f.d

Définition 3.2.2.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in Sp(f)$.
On appelle sous espace propre de f associe à λ le noyau de $(f - \lambda Id_E)$, et noté E_λ

$$E_\lambda = \ker(f - \lambda Id_E) = \{x \in E / f(x) = \lambda x\}.$$

Exemple 3.2.1.
Soit l'endomorphisme

$$\begin{aligned}
f : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\
(x, y) &\mapsto (3x + 2y, x + 2y)
\end{aligned}$$

Alors :
1) *Le spectre de f et $Sp(f) = \{1, 4\}$.*
2) *Les sous espaces propres :*
$E_1 = \{X = (x, y) / f(X) = X\} = \{y(-1, 1) / y \in \mathbb{R}\}$.
$E_4 = \{X = (x, y) / f(X) = 4X\} = \{y(2, 1) / y \in \mathbb{R}\}$.

Propriétés 3.2.1.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in Sp(f)$, alors

1) $\dim E_\lambda \geq 1$.

2) E_λ *est stable par* f.

Preuve.
1) On a : $E_\lambda = \ker(f - \lambda Id_E) \neq \{0\}$
Car $f - \lambda Id_E$ n'est pas injectif
D'où $\dim E_\lambda \geq 1$
2)

$$\begin{aligned} y \in f(E_\lambda) &\Leftrightarrow \exists x \in E_\lambda : y = f(x) \\ &\Rightarrow y = f(x) = \lambda x \\ &\Rightarrow f(y) = \lambda y \\ &\Rightarrow y \in E_\lambda \end{aligned}$$

C'est à dire : $f(E_\lambda) \subset E_\lambda$. **c.q.f.d**

Définition 3.2.3.
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$

1) *On appelle valeur propre de A tout scalaire λ de $\mathbb{K}$ pour lequel, il existe un vecteur X non nul de $\mathbb{K}^n$, tel que $A.X = \lambda X$.*

2) *L'ensemble des valeurs propres de A s'appelle le spectre de A, noté $Sp(A)$.*

2) *On appelle vecteur propre de A tout vecteur X non nul de $\mathbb{K}^n$, pour lequel, il existe un scalaire λ de $\mathbb{K}$ tel que $A.X = \lambda X$.*

3.2.2 Polynôme caractéristique

Proposition 3.2.1.
Soient $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\lambda \in Sp(A) \Longleftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Preuve.
Supposons que :

$$\begin{aligned} \lambda \notin Sp(A) &\Leftrightarrow \forall X \in \mathbb{K}^n - \{0\} : A.X \neq \lambda X \\ &\Leftrightarrow \forall X \in \mathbb{K}^n - \{0\} : (A - \lambda I_n)X \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \ker(A - \lambda I_n) = \{0\} \\ &\Leftrightarrow A - \lambda I_n \ \ est \ \ injective \\ &\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) \neq 0. \end{aligned}$$

c.q.f.d

Définition 3.2.4.
Soient $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$
On appelle polynôme caractéristique de A le déterminant $\det(A - \lambda I_n)$ et on note $P_A(\lambda)$.

Proposition 3.2.2.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Le polynôme caractéristique d'une matrice de f est invariant dans un changement de base de E.

Preuve.
Soient B $(resp.B')$ une base de E et M $(resp.M')$ la matrice de f dans la base B $(resp.B')$, et P la matrice de passage de B à B', et $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned}
P_{M'}(\lambda) &= \det(M' - \lambda I_n) \\
&= \det(P^{-1}.M.P - \lambda I_n) \\
&= \det\left(P^{-1}.M.P - P^{-1}(\lambda I_n).P\right) \\
&= \det\left(P^{-1}(M - \lambda I_n)P\right) \\
&= \det P^{-1} \det(M - \lambda I_n) \det P \\
&= \det(M - \lambda I_n) \\
&= P_M(\lambda).
\end{aligned}$$

c.q.f.d

Définition 3.2.5.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$.
On appelle polynôme caractéristique de f, le polynôme caractéristique d'une matrice de f dans une base quelconque de E. et on note $P_f(\lambda)$.

Remarque 3.2.1.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ et M une matrice de f dans une base de E.

1) *Si $\lambda \in \mathbb{K} : \lambda \in Sp(f) \Leftrightarrow P_f(\lambda) = 0$.*

2) *Si $\lambda \in \mathbb{K} : \lambda \in Sp(f) \Leftrightarrow \lambda \in Sp(M)$.*

3) *Si $x \in E - \{0\}$ et $X \in \mathbb{K}^n - \{0\}$, la matrice colonne des coordonnées de x.*
x est un vecteur propre de $f \Leftrightarrow X$ est un vecteur propre de M.

Exemple 3.2.2.
Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

Alors :
1) *Le spectre de A et $Sp(A) = \{2, -1\}$.*
2) *Les sous espaces propres :*

$E_2 = \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / AX = 2X\} = \{x(1, 1, 0) + z(0, 1, 1)/x, z \in \mathbb{R}\}$.
$E_{-1} = \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / AX = -X\} = \{y(-1, 1, -1), y \in \mathbb{R}\}$.

Définition 3.2.6.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\dim E = n$, $f \in \mathcal{L}(E)$ *et* $\lambda \in Sp(f)$

1) *Si λ a l'ordre de multiplicité α dans le polynôme caractéristique de f, on dit que λ est une valeur propre de f d'ordre α, et on note $m(\lambda) = \alpha$.*
2) *On dit que f est scindé si le polynôme caractéristique de f est scindé.*

Proposition 3.2.3.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\dim E = n$ *et* $f \in \mathcal{L}(E)$.
Si λ une valeur propre de f d'ordre α, alors $1 \leq \dim E_\lambda \leq \alpha$.

Preuve.
Soient $\lambda \in Sp(f)$ et $m(\lambda) = \alpha$.
Supposons que : $\dim E_\lambda = r$, alors il existe une base $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$ de E_λ.
Prolongerons cette base en une base $C = \{u_1, u_2, \ldots, u_r, u_{r+1}, ..., u_n\}$ de E.
On à :

$$\begin{cases} f(u_1) = \lambda u_1 \\ f(u_2) = \lambda u_2 \\ \vdots \\ f(u_r) = \lambda u_r \end{cases}$$

D'où la matrice de f dans la base C et

$$M_f(C) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 & \vdots & \\ 0 & \lambda & \ldots & 0 & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \mathbf{P} \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda & \vdots & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & \mathbf{O} & & \vdots & \mathbf{Q} \end{pmatrix} \in M_{p,n}(\mathbb{K})$$

Avec $P \in M_{r,n-r}(\mathbb{K})$ et $Q \in M_{n-r}(\mathbb{K})$.
$P_M(X) = \det(M - XI_n) = (\lambda - X)^r \det(Q - XI_{n-r}) = (\lambda - X)^r P_Q(X)$ avec $\deg(P_Q) = n - r$.
Donc $(\lambda - X)^r$ divise P_M, et comme α le plus grand entier tel que $(\lambda - X)^\alpha$ divise P_M. Alors : $r \leq \alpha$.
D'autre part d'après la Propriété 3.2.1, on a $1 \leq r$ **c.q.f.d**

Proposition 3.2.4.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\dim E = n$ *et* $f \in \mathcal{L}(E)$.
Si $Sp(f) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$ (les λ_i deux à deux distinctes), alors les $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \ldots, E_{\lambda_k}$ en somme direct, c'est à dire :

$$\sum_{i=1}^{k} E_{\lambda_i} = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}.$$

Preuve.
Démonstration par récurrence sur k.
• Pour $k = 1$, $P(1)$ est trivial (il n'y a rien démontrer).
• Supposons que $P(k-1)$ est vraie et démontrons que $P(k)$ est vraie
il suffit de démontrer que, pour tout $(v_1, v_2, \ldots, v_k) \in E_{\lambda_1} \times E_{\lambda_2} \times \ldots \times E_{\lambda_k}$

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_k = 0 \Rightarrow v_1 = v_2 = \ldots = v_k = 0.$$

Soit $(v_1, v_2, \ldots, v_k) \in E_{\lambda_1} \times E_{\lambda_2} \times \ldots \times E_{\lambda_k}$:

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_k = 0. \tag{3.1}$$

alors :

$$\begin{aligned} f(v_1 + v_2 + \ldots + v_k) = 0 &\Leftrightarrow f(v_1) + f(v_2) + \ldots + f(v_k) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k = 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

$\lambda_k \times (3.1) - (3.2)$ donne :
$(\lambda_k - \lambda_1)v_1 + (\lambda_k - \lambda_2)v_2 + \ldots + (\lambda_k - \lambda_{k^{-1}})v_{k^{-1}} = 0$
Comme $\forall i = \overline{1, k-1}$: $(\lambda_k - \lambda_i)v_i \in E_{\lambda_i}$
d'après l'hypothèse de récurrence (de rang $k-1$).
On a : pour tout $i = \overline{1, k-1}$: $(\lambda_k - \lambda_i)v_i = 0$
et comme les $\lambda_i, i = \overline{1, k-1}$ sont distinctes deux à deux
On a : pour tout $i = \overline{1, k-1}$:$\lambda_k - \lambda_i \neq 0$
d'où : pour tout $i = \overline{1, k-1}$: $v_i = 0$
d'après (1) : $v_k = -v_1 - v_2 - \ldots - v_{k-1} = 0$
Ceci montre que : pour tout $i = \overline{1, k-1}$ les E_{λ_i} en somme directe. **c.q.f.d**

Remarque 3.2.2.
$Card(Sp(f)) \leq \dim E$
En effet : on a card $Sp(f) = k$
d'autre part : $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_k} \subset E$
Alors : $\dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} + \ldots + \dim E_{\lambda_k} \leq \dim E$
c'est-à-dire : $k \leq \dim E$.

3.3 Diagonalisation :(Réduction à la forme diagonale)

Définition 3.3.1.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\dim E = n$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.
On dit que f est diagonalisable, si et seulement s'il existe une base B de E,tel que la matrice de f dans B soit une matrice diagonale.

Définition 3.3.2.
Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{K})$.
On dit que A est diagonalisable, si et seulement si A est semblable à une matrice diagonale.
C'est-à-dire il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $p^{-1}.A.P = D \in D_n(\mathbb{K})$.

Proposition 3.3.1.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\dim E = n$, *$f \in \mathcal{L}(E)$ et B une base de E, si A la matrice de f dans B alors :*
f est diagonalisable $\Leftrightarrow$ A est diagonalisable.

Preuve.
1) $\Rightarrow$ Si f est diagonalisable si et seulement si il existe une base B' de E telle que la matrice A de f dans B' soit diagonalisable.
Si P la matrice de passage de B à B' alors $M = P^{-1}.A.P$, d'où A est diagonalisable.

2) $\Leftarrow$ Si A est diagonalisable si et seulement si il existe une matrice d'ordre n inversible P telle que $A' = P^{-1}.A.P$ soit diagonal mais A' est la matrice de f dans la base B' de E définie par la matrice de passage $P = M_{Id_E}(B', B)$. **c.q.f.d**

Proposition 3.3.2.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel,$\dim E = n$ *et $f \in \mathcal{L}(E)$, alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :*

1) *f est diagonalisable.*

2) *Il existe une base de E formée de vecteurs propres de f.*

3) *La somme des sous espaces propres de f égale à E.*

4) *La somme des dimension des sous espaces propres de f égale a dimension de E.*

Remarque 3.3.1.
(1) $\Leftrightarrow$ (2) *Caractérisation d'un endomorphisme diagonalisable.*

Preuve.
(1) $\Rightarrow$ (2)
Supposons que f est diagonalisable, il existe une base $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de E telle que la matrice $M = M_f(B)$ est diagonale.
c'est-à-dire ils existent $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que :

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow \forall i = \overline{1,n} : f(e_i) = \lambda_i e_i$$

ainsi les $e_i : i = \overline{1,n}$ sont des vecteurs propres de f.
(2) $\Rightarrow$ (3)
Supposons qu'il existe une base $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ formée de vecteurs propres de f.
Alors ils existent $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, tels que : pour tout $i = \overline{1,n} : f(e_i) = \lambda_i e_i$
C'est-à-dire : $e_i \in E_{\lambda_i}$ pour tout $i = \overline{1,n}$

Soit : $x \in E \Rightarrow \exists(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n, x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$

ainsi $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i, v_i = \alpha_i e_i \in E_{\lambda_i}$ pour tout $i = \overline{1,n}$

alors :$x \in \sum_{i=1}^{n} E_{\lambda_i} \Rightarrow E \subset \sum_{i=1}^{n} E_{\lambda_i}$.

d'où $E = \sum_{i=1}^{n} E_{\lambda_i}$.

$(3) \Rightarrow (4)$

Supposons que : $\sum_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda = E$, et comme la somme des sous espace propres est directe, on a alors : $\dim(\sum_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda) = \sum_{\lambda \in Sp(f)} (\dim E_\lambda) = \dim E$.

$(4) \Rightarrow (1)$

Supposons que : $\sum_{\lambda \in Sp(f)} \dim E_\lambda = \dim E$

Soit $k = card(Sp(f))$, c'est-à-dire $Sp(f) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$.

Pour tout $j = \overline{1,k}$, E_{λ_j} admet au moins une base B_j, notons $B = \bigcup_{j=1}^{k} B_j$.

Pour tout $j = \overline{1,k}$, B_j sont deux à deux disjointes, et libre donc B est libre et comme :

$cardB = \sum_{j=1}^{k} cardB_j = \sum_{j=1}^{k} \dim E_{\lambda_j} = \sum_{\lambda \in Sp(f)} \dim E_\lambda = \dim E$

alors B est une base de E (formée de vecteurs propres)

Si $r_j = cardB_j = \dim E_{\lambda_j}, j = \overline{1,k}$.

$$M_f(R) = \begin{pmatrix} (\lambda_1 I_{r_1}) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & (\lambda_2 I_{r_2}) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & (\lambda_k I_{r_k}) \end{pmatrix} \text{ est diagonale.}$$

c.q.f.d

Exercice corrigé 3.3.1.
Soit la matrices suivante

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

Démontrer que A est diagonalisable.

Solution.

• Le spectre de A est $Sp(A) = \{1, 3, 4\}$.

• Les sous espaces propres :

$E_1 = \{X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / AX = X\} = \{t(0, 0, 0, 1)/t \in \mathbb{R}\}$,$\dim E_1 = 1$

$E_3 = \{X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / AX = 3X\} = \{y(1, 1, 0, \frac{3}{2}) + z(0, 0, 1, 0)/y, z \in \mathbb{R}\}$,$\dim E_3 = 2$

$E_4 = \{X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / AX = 4X\} = \{x(1, 0, 1, \frac{2}{3}), x \in \mathbb{R}\}$,$\dim E_4 = 1$

$\dim E_1 + \dim E_3 + \dim E_4 = 4 = \dim \mathbb{R}^4$

D' où A est diagonalisable.

Corollaire 3.3.1.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\dim E = n$ *et* $f \in \mathcal{L}(E)$.
Si f admet n valeurs propres distinctes alors f est diagonalisable.

Exercice corrigé 3.3.2.
Soit la matrices suivante

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Démontrer que A est diagonalisable.

Solution.
- On a : $P_A(\lambda) = -(\lambda_2 - 4)(4 - \lambda)$ est scindé.
- Le spectre de A est $Sp(A) = \{-2, 2, 4\}$.
- A possède trois valeurs propres distinctes alors A est diagonalisable.

Théorème 3.3.1. ($C.N.C$)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel,$\dim E = n$ *et* $f \in \mathcal{L}(E)$.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) *f est diagonalisable.*

2) *P_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et $\forall \lambda \in Sp(f)$,* $\dim E_\lambda = m(\lambda)$.

Preuve.
1) Supposons que f est diagonalisable
$\forall \lambda \in Sp(f) : \dim E_\lambda \leq m(\lambda)$ et $\displaystyle\sum_{\lambda \in Sp(f)} \dim E_\lambda = \dim E = n \ldots (1)$.
D'autre part : puisque f est diagonalisable, il existe une base B de E et $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{K}^n$

$$M_f(B) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_k \end{pmatrix} \text{avec } m(\lambda_i) = m_i, i = \overline{1, k}.$$

On a donc $\forall \lambda \in \mathbb{K} : P_f(\lambda) = \det(M_f - \lambda I_n) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1}(\lambda_2 - \lambda)^{m_2} \ldots (\lambda_k - \lambda)^{m_k}$.
Ainsi P_f est scindé $\displaystyle\sum_{\lambda \in Sp(f)} m(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} m(\lambda_i) = n = \dim E \ldots (2)$.
de (1) et (2) : $\forall \lambda \in Sp(f) : \dim E_\lambda = m(\lambda)$.
2) Réciproquement, supposons que P_f est scindé et $\forall \lambda \in Sp(f) : \dim E_\lambda = m(\lambda)$
puis P_f est scindé et les zéros de P_f sont les valeurs propres de f,alors $\displaystyle\sum_{\lambda \in Sp(f)} m(\lambda) = n$

d'où $\displaystyle\sum_{\lambda \in Sp(f)} \dim E_\lambda = n$.
Donc f est diagonalisable. **c.q.f.d**

Exercice corrigé 3.3.3.
Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

1) *Démontrer que A est diagonalisable.*

2) *Diagonaliser A.*

Solution.
• Le spectre de A est $Sp(A) = \{0, 1\}, m(0) = 1, m(1) = 2$.
• Les sous espaces propres :
$E_0 = \{x(1, 1, -2), x \in \mathbb{R}\}$ et $\dim E_0 = 1 = m(0)$.
$E_1 = \{y(0, 1, 0) + x(1, 0, -1), x, y \in \mathbb{R}\} = \{v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (1, 0, -1)\}$
et $\dim E_1 = 2 = m(1)$. donc A est diagonalisable
Soient B la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ la base des vecteurs propres.

$$P = M_{passage}(B, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{d'où } D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.4 Trigonalisation (Réduction à la forme triangulaire)

Définition 3.4.1.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\dim E = n$, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$.

1) *On dit que f est trigonalisable si et seulement s'il existe une base B de E telle que la matrice de $f, M_f(B)$ soit triangulaire.*

1) *On dit que A est trigonalisable si et seulement s'il existe une matrice triangulaire T de $M_n(\mathbb{K})$ semblable à A.*

Proposition 3.4.1.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\dim E = n, f \in \mathcal{L}(E)$ et B une base de E et A est la matrice de f dans la base B.
f est trigonalisable $\Leftrightarrow$ A est trigonalisable.

Preuve.
La preuve découle directement de la Définition 3.4.1. **c.q.f.d**

Remarque 3.4.1.

1) *Toute matrice triangulaire est trigonalisable.*

2) *Toute matrice triangulaire supérieure est semblable a une matrice triangulaire inférieure et réciproquement.*

En effet :

Soit $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & t_{nn} \end{pmatrix} \in TS_n(\mathbb{K})$

En notant $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a P *inversible et* $P^{-1} = P$ *et*

$$P^{-1}.T.P = \begin{pmatrix} t_{nn} & 0 & \dots & 0 \\ t_{n-1n} & t_{n-1n-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{1n} & t_{1n-1} & \dots & t_{11} \end{pmatrix} \in TI_n(\mathbb{K})$$

Théorème 3.4.1.
Soient E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel,* $\dim E = n, f \in \mathcal{L}(E), A \in M_n(\mathbb{K})$
f *est trigonalisable* $\Leftrightarrow P_f$ *est scindé sur* $\mathbb{K}$

Preuve.
1) $\Rightarrow$ Supposons que f est trigonalisable.
Il existe une base B de E, telle que $M_f(B)$ est triangulaire, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$
$P_f(\lambda) = \det(M_f - \lambda I_n) = \prod_{i=1}^{n}(t_{ii} - \lambda)$ donc P_f est scindé.
2) $\Leftarrow$ On raisonne par récurrence sur $n = \dim E$.
On note : pour tout $n \in \mathbb{N}, P(n)$:
(E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, $\dim E = n$ et$f \in \mathcal{L}(E)$ et P_f est scindé sur $\mathbb{K} \Rightarrow f$ est trigonalisable)
• $P(1)$ est vraie.
• Supposons que P_{n-1} est vraie et démontrons P_n.
Comme P_f est scindé, $P_f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\dots(\lambda - \lambda_n)$
(les $\lambda_i \in \mathbb{K}$ ne sont pas forcement distincts).
Soit $e_1 \in E_{\lambda_1}$, on complète e_1 en une base $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ telle que :

$$M_f(B) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \vdots & \mathbf{L} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{O} & \vdots & \mathbf{A} \end{pmatrix}$$

Donc $P_f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)P_A(\lambda)$
Comme $P_f(\lambda)$ est scindé alors $P_A(\lambda)$ est scindé donc d'après l'hypothèse de récurrence il existe

$S \in TS_{n-1}(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_{n-1}(\mathbb{K})$ telles que $A = Q.S.Q^{-1}$ d'où

$$M_f = P.\begin{pmatrix} \lambda_1 & \vdots & \mathbf{L.Q} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{O} & \vdots & \mathbf{S} \end{pmatrix}.P^{-1} \Leftrightarrow P^{-1}.M_f.P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \vdots & \mathbf{L.Q} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{O} & \vdots & \mathbf{S} \end{pmatrix} \in TS_n(\mathbb{K})$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \vdots & \mathbf{O} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{O} & \vdots & \mathbf{Q} \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \vdots & \mathbf{O} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{O} & \vdots & \mathbf{Q}^{-1} \end{pmatrix}$$

c.q.f.d

Corollaire 3.4.1.
Tout matrice carrée de $M_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Preuve.
D'après le Théorème de d'Alembert 3.1.3 tout polynôme complexe de degré n admet n racines.
c.q.f.d

Exercice corrigé 3.4.1.
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associe à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

1) *Démontrer que A est trigonalisable.*

2) *Trigonaliser A.*

Solution.
On a : $P_A(\lambda) = -(\lambda+1)^3$ est scindé donc A est trigonalisable.
$Sp(A) = \{-1\}, \lambda = -1, m(\lambda) = 3$
$E_\lambda = \{x(1,0,-1) + y(0,1,2), x, y \in \mathbb{R}\}$
$\dim E_\lambda = 2 \neq m(\lambda) = 3$,$A$ n'est pas diagonalisable.
Soit $v_1 = (1,0,-1), v_2 = (0,1,2), v_3 = (a,b,c)$ telle que $B' = (v_1, v_2, v_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ et
$M_f(B') = A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha \\ 0 & -1 & \beta \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ avec $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$

$$\begin{cases} f(v_1) = -v_1 \\ f(v_2) = -v_2 \\ f(v_3) = \alpha v_1 + \beta v_2 - v_3 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = -a + 2b - c$$

On prend $\alpha = \beta = 1$ et a = 0,b = c = 1, $v_3 = (0,1,1)$

$P = M_{passage}(B, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, où B est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = P^{-1}.A.P$$

Exercice corrigé 3.4.2.
Soit la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Trigonaliser M.

Solution.
On a : $P_M(\lambda) = (2-\lambda)^3$ est scindé donc M est trigonalisable.
$Sp(M) = \{2\}, \lambda = 2, m(\lambda) = 3$
$E_\lambda = \{x(1,1,0), x \in \mathbb{R}\}$
$\dim E_\lambda = 1 \neq m(\lambda) = 3$, M n'est pas diagonalisable.
Soit $v_1 = (1,1,0)$, cherchons $v_2 = (x,y,z), v_3 = (a,b,c)$ telle que $B' = (v_1, v_2, v_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ et $P^{-1}.M.P = M' = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & \beta \\ 0 & 2 & \gamma \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ avec $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$, où $P = M_{passage}(B, B')$ et B est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} M.v_1 = 2v_1 \\ M.v_2 = \alpha v_1 + 2v_2 \\ M.v_3 = \beta v_1 + \gamma v_2 + 2v_3 \end{cases} .$$

1) $M.v_2 = \alpha v_1 + 2v_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + z = \alpha + 2x \\ x + y = \alpha + 2y \\ -x + y + 3z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \alpha \\ x - y = \alpha \\ y + z = x \end{cases}$

On prend $x = y = \alpha = 1$ et $a = 0$ alors $y = 0$ et $v_2 = (1,0,1)$

2) $M.v_3 = \beta v_1 + \gamma v_2 + 2v_3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + c = \beta + \alpha + 2a \\ a + b = \beta + 2b \\ -a + b + 3c = \gamma + 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \beta + \gamma \\ a - b = \beta \\ -a + b + c = \gamma \end{cases}$

On prend $a = b = 0$ et $a = 0$ alors $\beta = 0$, $c = \gamma = 1$ et $v_2 = (0,0,1)$

$P \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = P^{-1}.M.P.$

3.5 Polynômes d'endomorphisme

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\dim E = n$.

3.5.1 Polynôme annulateur-Théorème de Cayley-Hamilton

Définition 3.5.1.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$
• *On définit par récurrence l'endomorphisme* $f^k, k \in \mathbb{N}$ *par* $f^0 = Id_E$, *pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$: $f^k = f \circ f^{k-1}$.
• f *est dit nilpotent s'il existe* $r \in \mathbb{N}$, *tel que* $f^r = 0$.
• *Le plus petite entier* $r \in \mathbb{N}$, *vérifiant* $f^{r-1} \neq 0$ *et* $f^r = 0$ *est appelé indice de* f.

Exemple 3.5.1.

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (y, z, 0) \text{ est nilpotent d'indice } r = 3 \end{array}$$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *est nilpotente d'indice* $r = 2$.

Remarque 3.5.1.
Pour tout $k \in \mathbb{N} : \ker f^k \subset \ker f^{k+1}$.

Définition 3.5.2.
Soit $P = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in \mathbb{K}[X]$.
• *Pour toute* $f \in \mathcal{L}(E)$ *on note* $P_f = a_0 Id_E + a_1 f + \ldots + a_n f^n$.
$P(f)$ *est appelé un polynôme d'endomorphisme.*
• *Pour toute* $A \in M_n(\mathbb{K})$ *on note* $P(A) = a_0 I_n + a_1 A + \ldots + a_n A^n$.
P_A *est appelé un polynôme de matrice.*
• *On dit que* P *est un polynôme annulateur de* $f \in \mathcal{L}(E)$(*resp. de* $A \in M_n(\mathbb{K})$)$\Leftrightarrow P(f) = 0$ (*resp.* $P(A) = 0$).

Exemple 3.5.2.
Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, $P(x) = x^2 - 3x + 2$
On a $P(A) = A^2 - 3A + 2I_2 = 0$
Donc P *est annule* A.

Proposition 3.5.1.
Si P *est un polynôme annulateur de* $f \in \mathcal{L}(E)$ *respectivement de* $A \in M_n(\mathbb{K})$,*alors*
$Sp(f) \subset \{racines\ de\ P\}$ *respectivement* $Sp(A) \subset \{racines\ de\ P\}$

Preuve.
Soit $\lambda \in Sp(f)$ et x un vecteur propre de f associe à λ, alors :
$f(x) = \lambda x \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} : f^k(x) = \lambda^k x$
donc $P(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k x = (\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k) x = P(\lambda) x$
on a $P(f) = 0 \Rightarrow P(\lambda)x = 0 \Rightarrow P(\lambda) = 0$ $(x \neq 0)$
$\Rightarrow \lambda \in \{racines\ de\ f\}$ **c.q.f.d**

Théorème 3.5.1. (*Cayley-Hamilton*)
Si $f \in \mathcal{L}(E)$ (*resp.* ($A \in M_n(\mathbb{K})$)) *alors* $P_f(f) = 0$ (*resp.* $P_A(A) = 0$).

Preuve.
Soit $v \in E - \{0\}$, la famille $(f^k(v)), k = \overline{0, n}$ ayant $n+1$ éléments donc est liée,il existe $m \in \mathbb{N}, 1 \leq m \leq n$ le plus grand entier tel que la famille $\{v, f(v), f^2(v), \ldots, f^{m-1}(v)\}$ est libre alors la famille $\{v, f(v), \ldots, f^{m-1}(v), f^m(v)\}$ est liée
il existe $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1} \in \mathbb{K}$, tels que $f^m(v) + a_{m-1}f^{m-1}(v) + \ldots + a_1 f(v) + a_0 v = 0$
Posons $F = \langle v, f(v), \ldots, f^{m-1}(v)\rangle$ est un sous espace vectoriel de E.
avec $\dim F = m$ et $f(F) \subset F$ c'est-a-dire F est stable par f.
De plus la matrice de la restriction $g = f_{/F}$ dans la base $\{v, f(v), \ldots, f^{m-1}(v)\}$ est la matrice

$$M_g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & -a_{m-2} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & -a_{m-1} \end{pmatrix}$$

Donc

$$P_g(\lambda) = \det(M_g - \lambda I_m) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \ldots & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & -\lambda & \ldots & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -\lambda & -a_{m-2} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & -\lambda - a_{m-1} \end{vmatrix}$$

Par récurrence (en développant par rapport à la première ligne)
$P_g(\lambda) = (-1)^m[\lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0]$
d'autre part P_g divise $P_f \Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P_f(\lambda) = Q(\lambda)P_g(\lambda)$

$$\begin{aligned} \forall v \in E - \{0\} : P_f(f)(v) &= Q(f)(v)P_g(f)(v) \\ &= Q'(f)(v)[f^m(v) + a_{m-1}f^{m-1}(v) + \ldots + a_1 f(v) + v] \\ &= Q'(f)(v)0 \\ &= 0 \quad ; \quad Q' = (-1)^m Q \end{aligned}$$

donc $\forall v \in E - \{0\} : P_f(f)(v) = 0 \Rightarrow P_f(f) = 0$ **c.q.f.d**

Exemple 3.5.3.
Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

On a $P_A(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda - 1$
$P_A(0) = -1 \neq 0 \Leftrightarrow A^{-1}$ *existe.*

$$P_A(A) = 0 \Leftrightarrow A^{-1} = -A^2 + 3A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3.5.2 Polynôme minimal

Définition 3.5.3.
Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$ un polynôme minimal de f(resp. A) est un polynôme annulateur de f(resp. A), non nul, de degré minimal noté π_f(resp. π_A).

Exemple 3.5.4.
$\pi_{I_n}(X) = X - 1$

Proposition 3.5.2.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ alors :
pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$: $P(f) = 0 \Leftrightarrow \pi_f$ divise P.

Preuve.
1) $\Rightarrow$
On fait la division euclidienne de P par π_f, on trouve
$P = Q.\pi_f + R$ où $Q, R \in \mathbb{K}[X]$ et $\deg R < \deg \pi_f$.
Comme $P(f) = 0 \Leftrightarrow Q(f)\pi_f(f) + R(f) = 0$,
alors $R(f) = 0$,
donc $P = Q.\pi_f$,
c'est-à-dire π_f divise P.
2) $\Leftarrow$
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que π_f divise P
alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = Q.\pi_f$ $P(f) = Q(f).\pi_f(f) = 0$. **c.q.f.d**

Proposition 3.5.3.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ alors :
$$\lambda \in S_p(f) \Leftrightarrow \pi_f(\lambda) = 0.$$

Preuve.
1) $\Rightarrow$ Soit $\lambda \in S_p(f) \Rightarrow \exists V \in E - \{0\}, f(V) = \lambda.V$
Supposons que $\pi_f(X) = a_0 + a_1(X) + \ldots + a_r(X^r) = \sum_{i=0}^{r} a_i X^i$, $X \in \mathbb{K}$.
$\pi_f(f) = \sum_{i=0}^{r} a_i f^i = 0$
$0 = \pi_f(f)(V) = \sum_{i=0}^{r} a_i f^i(V) = \sum_{i=0}^{r} a_i \lambda^i.V$
alors $\sum_{i=0}^{r} a_i \lambda^i = 0$
d'où $\pi_f(f) = 0$
2) $\Leftarrow$ Si $\lambda \in \mathbb{K}, \pi_f(A) = 0$
alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$tel que $\pi_f(X) = (X - \lambda).Q(X)$, $(\deg Q < \deg \pi_f)$
mais $0 = \pi_f(f) = (f - \lambda Id_E).Q(f)$
donc $f - \lambda Id_E = 0$ car $Q(f) \neq 0$ par minimalité de π_f
alors $f - \lambda Id_E$ n'est pas injective
et donc λ est une valeur propre de f. **c.q.f.d**

Exemple 3.5.5.
Soient
$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\-1&1&2\end{pmatrix},M=\begin{pmatrix}3&-1&1\\0&2&0\\1&-1&3\end{pmatrix}$$

1) $P_A(\lambda)=-(\lambda-1)^2(\lambda-2)$ *et* $\pi_A(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$

2) $P_M(\lambda)=-(\lambda-2)^2(\lambda-4)$ *et* $\pi_M(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-4)$

Proposition 3.5.4.
Soit $f\in\mathcal{L}(E)$ *alors :*
f *est nilpotent d'indice* $r\Leftrightarrow\pi_f(X)=X^r$.

Preuve.
1) $\Rightarrow$ Si f est nilpotent d'indice r alors $f^{r-1}\neq 0$ et $f^r=0$, où r le plus petit entier.
donc $P(X)=X^r$ est un annulateur de $f\Rightarrow\pi_f$ divise P.
alors $\pi_f(X)=X^{r'}$ avec $r'\leqslant r$ et comme r le plus petit entier
donc $r'=r$ et alors $\pi_f(X)=X^r$.
2) $\Leftarrow$ Si $\pi_f(X)=X^r$ avec (r le plus petit entier)
donc $\pi_f(f)=f^r=0$ (π_f est un annulateur de f de degré minimal
alors $f^{r-1}\neq 0$ donc f est nilpotent d'indice r. **c.q.f.d**

3.6 Réduction de Jordan

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\dim E=n\geqslant 1$.

Définition 3.6.1.

1) *Un bloc de Jordan est une matrice* $J(\lambda)$ *de la forme :*

$$\begin{pmatrix}\lambda\end{pmatrix}\in M_1(\mathbb{K})\ ,\ \begin{pmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{K})\ ,\ \begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{K})\ \dots$$

$$J(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda&1&0&\dots&\dots&0\\0&\lambda&1&\ddots&&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&&\ddots&\ddots&\ddots&0\\\vdots&\dots&\dots&\ddots&\ddots&1\\0&\dots&\dots&\dots&0&\lambda\end{pmatrix}\in M_k(\mathbb{K}),k\leqslant n,\lambda\in\mathbb{K}$$

2) Une matrice de Jordan est une matrice J diagonale par blocs de la forme :

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & \vdots & & & & & \\ \cdots & & \cdots & & & & \\ & \vdots & J_2 & \vdots & & & \\ & & \cdots & & \cdots & & \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & & & & \cdots & & \cdots \\ & & & & & \vdots & J_r \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$$

où : $J_i, i = \overline{1,r}$ sont les blocs de Jordan.

Définition 3.6.2.

1) On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$, admet une réduction de Jordan ; si et seulement s'il existe une base de E, dans laquelle, la matrice de f dans cette base est une matrice de Jordan.

2) On dit que $A \in M_n(\mathbb{K})$ admet une réduction de Jordan si et seulement si A est semblable a une matrice de Jordan.

Théorème 3.6.1. *[17](Forme canonique de Jordan)*

1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, si P_f est scindé alors f admet une réduction de Jordan.

2) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, si P_A est scindé alors A admet une réduction de Jordan.

Théorème 3.6.2. *[11](Méthode pratique de réduction de Jordan)*
Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, $P_f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_r)^{n_r}$, $\pi_f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$ et $S_p(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$. Pour chaque λ_i, les blocs de Jordan correspondants $J_i(\lambda)$ ont les propriétés suivantes :

1) *Il y a au moins une $J_j(\lambda_i)$ d'ordre m_i, toutes les autres sont d'ordre $\leqslant m_i$.*

2) $\sum ord_{J_j(\lambda_i)} = n_i$.

3) *Le nombre des $J_j(\lambda_i)$ est égal a $\dim E_{\lambda_i}$.*

4) *La base de Jordan $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$.*
Si $u_1 \in E_{\lambda_i}$ alors : $f(u_1) = \lambda_i u_1$, $f(u_2) = u_1 + \lambda_i u_2$, ..., $f(u_{k+1}) = u_k + \lambda_i u_{k+1}$.
$P = M_{passage}(B_0, B)$ où B_0 l'ancienne base, $J = P^{-1}.M_f(B_0).P$

Exercice corrigé 3.6.1.
Trouver toutes les formes canoniques de Jordan possibles pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

Solution.
On a $P_A(\lambda) = -(\lambda - 2)^3$
$E_2 = \{x(1,1,0), x \in \mathbb{R}\}$

$\pi_A(\lambda) = (\lambda - 2)^3$
Comme $\dim E_2 = 1$ il existe un seul bloc $J_1(2)$ d'ordre 3 c'est-à-dire

$J_1(2) = J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
Cherchons la base $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ de Jordan

$\begin{cases} Au_1 = 2u_1 \\ Au_2 = u_1 + 2u_2 \\ Au_3 = u_2 + 2u_3 \end{cases}$ On prend $u_1 = (1,1,0)$ on trouve $u_2 = (1,0,1)$ et $u_3 = (0,0,1)$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = J$$

Exercice corrigé 3.6.2.
Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

1) *Montrer que A est nilpotente.*

2) *Déterminer la réduite de Jordan de A.*

Solution.
1) On a $A^2 = 0$, d'où A est nilpotente d'indice 2.
2) On a $\pi_A(\lambda) = \lambda^2$, $P_A(\lambda) = \lambda^4$ et $E_\lambda = E_0 = \{y(1,1,0,1) + z(1,0,1,0) \,/ y, z \in \mathbb{R}\}$,
les vecteurs $v_1 = (1,1,0,1)$ et $v_2 = (1,0,1,0)$ sont libre, d'où $\dim E_0 = 2 \neq 4$ donc A n'est pas diagonalisable.
Comme $\dim E_0 = 2$, alors il existe deux blocs $J_1(0)$, $J_2(0)$ tels que $ord_{J_1(0)} = 2$ et $ord_{J_1(0)} + ord_{J_2(0)} = 4$ alors $ord_{J_2(0)} = 2$, donc

$$J_1(0) = J_2(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} J_1(0) & \vdots & \\ \cdots & & \cdots \\ & \vdots & J_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \vdots & 0 \\ \cdots & & \cdots \\ 0 & \vdots & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Cherchons la base $B = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de Jordan, où $u_1 = (1,1,0,1)$, $u_3 = (1,0,1,0)$ et

$\begin{cases} Au_2 = u_1 + 0u_2 \\ Au_4 = u_3 + 0u_4 \end{cases}$

On prend $u_2 = (a,b,c,d)$ et $u_4 = (x,y,z,t)$, alors

$$Au_2 = u_1 \Leftrightarrow \begin{cases} -a+b+c=1 \\ -b+d=1 \\ -a+2b+c-d=0 \\ -b+d=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1+a-b \\ d=b+1 \end{cases}.$$

On prend $a=b=0 \Rightarrow c=d=1$, d'où $u_2=(0,0,1,1)$.

$$Au_4 = u_3 \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y+z=1 \\ -y+t=0 \\ -x+2y+z-t=1 \\ -y+t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=1+x-y \\ t=y \end{cases}.$$

On prend $x=y=0 \Rightarrow z=1, t=0$, d'où $u_4=(0,0,1,0)$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1}.A.P = J.$$

Exercice corrigé 3.6.3.
Trouver toutes les formes canoniques de Jordan possibles pour la matrice $A \in M_6(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique $P_A(\lambda)$ et le polynôme minimal $\pi_A(\lambda)$ est le suivant
$P_A(\lambda) = (\lambda-2)^4(\lambda-3)^2$ *et* $\pi_A(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-3)$.

Solution.
On a, $S_P(A) = \{2,3\}$,
$\lambda_1 = 2, m_1 = 2, n_1 = 4$ et $\lambda_2 = 3, m_2 = 1, n_2 = 2$.
Les cas possible :
1) $\dim E_2 = 2$, on a deux blocs de Jordan $J_1(2)$, $J_2(2)$ avec $ord_{J_1} = m_1 = 2$
$ord_{J_1} + ord_{J_2} = n_1 = 4 \Rightarrow ord_{J_2} = 2$, d'où $J_1(2) = J_2(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2) $\dim E_2 = 3$, on a trois blocs de Jordan $J'_1(2)$, $J'_2(2)$, $J'_3(2)$ avec $ord_{J'_1} = 2$
$ord_{J'_1} + ord_{J'_2} + ord_{J'_3} = 4 \Rightarrow ord_{J'_2} = ord_{J'_3} = 1$, d'où $J'_1(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $J'_2(2) = J'_3(2) = (2)$.

3) $\dim E_3 = 2$, on a deux blocs de Jordan $J_1(3)$, $J_2(3)$ avec $ord_{J_1} = m_2 = 1$
$ord_{J_1} + ord_{J_2} = n_2 = 2 \Rightarrow ord_{J_2} = 1$, d'où $J_1(3) = J_2(3) = (3)$.
Donc

$$A \sim J = \begin{pmatrix} J_1(2) & \vdots & & & & & \\ \cdots & & \cdots & & & & \\ & \vdots & J_2(2) & \vdots & & & \\ & & \cdots & & \cdots & & \\ & & & \vdots & J_1(3) & \vdots & \\ & & & & \cdots & & \cdots \\ & & & & & \vdots & J_2(3) \end{pmatrix}$$

ou

$$A \sim J = \begin{pmatrix} J_1'(2) & \vdots & & & & & & & \\ \cdots & & \cdots & & & & & & \\ & \vdots & J_2'(2) & \vdots & & & & & \\ & & \cdots & & \cdots & & & & \\ & & & \vdots & J_3'(2) & \vdots & & & \\ & & & & \cdots & & \cdots & & \\ & & & & & \vdots & J_1(3) & \vdots & \\ & & & & & & \cdots & & \cdots \\ & & & & & & & \vdots & J_2(3) \end{pmatrix}$$

Exercices

Exercice 3.6.1.
Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres des matrices suivants :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & a \\ a & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & a \end{pmatrix} et \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 2 & 0 \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Où $a \in \mathbb{R}^*$

Exercice 3.6.2.
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$$

où $m \in \mathbb{R}$.

1) *Quelles sont les valeurs propres de A ?*

2) *Pour quelles les valeurs de m, A est-elle diagonalisable ?*

3) *Diagonaliser A, pour $m = 2$.*

Exercice 3.6.3.
Soit l'endomorphisme

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (-x, x-y+z, 3x+2z) \end{array}$$

1) *Calculer le polynôme caractéristique de f.*

2) *Déterminer les valeurs propres de f et la dimension des sous espaces propres associés.*

3) *En déduire que f est diagonalisable.*

Exercice 3.6.4.
Soit la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) *Démontrer que A est diagonalisable.*

2) *Diagonaliser A.*

Exercice 3.6.5. (*Matrices compagnons*)
Soient $a_0; a_1; \ldots; a_{n-1} \in \mathbb{K}$; $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K}$ le corp des nombres reels ou complexes.
Soient les matrices

$$C_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}, C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{pmatrix},$$

1) *Déterminer* P_{C_2} *et* P_{C_3}.
2) *Démontrer par récurrence* $P_{C_n}(\lambda) = (-1)^n\big(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0\big)$.

Exercice 3.6.6.
Soient E *un* $\mathbb{K}$*-e.v,* $\dim E = n$, $f \in L(E)$ *et* F *un s-e-v de* E *invariant par* f. *Si* $g = f_{/_F}$.

1) *Démontrer que* P_g *divise* P_f *dans* $\mathbb{K}[X]$.
2) *Démontrer que* π_g *divise* π_f *dans* $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 3.6.7.
Soient E *un* $\mathbb{K}$*-e.v,* $\dim E = n$, $f \in L(E)$ *et* A *sa matrice dans n'importe quelle base de* E.
Démontrer que $\pi_f = \pi_A$.

Exercice 3.6.8.
Soient E *un* $\mathbb{K}$*-e.v,* $\dim E = n$, $f \in L(E)$ *est nilpotent d'indice* $k, k \leq n$.

1) *Montrer que l'ensemble* $S = \{v, f(v), \dots, f^k(v)\}$ *est libre,pour tout* $v \in E$.
2) *Montrer que* $F =< S >$ *est stable par* f.
3) *Montrer que* $g = f_{/_F}$ *est nilpotent d'indice* k.
4) *Déterminer la matrice de* g *dans la base* S *de* F.

Exercice 3.6.9.
Trigonaliser les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} et \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.6.10.
Soient E *un* $\mathbb{K}$*-e.v et* $f \in L(E)$.

Montrer que si : $f^3 + 2f^2 - f - Id_E = 0$ *alors* f *est bijectif.*

Exprimer f^{-1}.

Exercice 3.6.11.
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

où $a, b \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$.
Déterminer un polynôme annulateur de A *et Exprimer* A^{-1} *lorsque celle-ci existe ?.*

Exercice 3.6.12.
Soit la matrice A *de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, *telle que*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) *Calculer* $P_A(\lambda)$ *et en déduire que* A^{-1} *est existe.*

2) *Calculer* A^3, A^4, A^5 *et* A^{-1} *en fonction de* A.

Exercice 3.6.13.
Trouver toutes les réduites de Jordan possibles pour la matrice A *dans les cas suivantes :*

1) $P_A(X) = (X-2)^4(X-3)^2$ *et* $\pi_A(X) = (X-2)^2(X-3)^2$

2) $\pi_A(X) = (X-2)^2$ *et* $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$.

3) $P_A(X) = (X-2)^3(X-5)^2$.

Exercice 3.6.14.
Trouver toutes les réduites de Jordan possibles pour les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} et \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

CHAPITRE 4

Application de la réduction des endomorphismes et des matrices

Sommaire

Dans ce chapitre nous allons présenter quelque des application de la réduction des endomorphismes et des matrices et nous aborderons les éléments suivantes : calcul des puissances d'une matrice carrée, systèmes des suites récurrentes linéaires, suites récurrentes linéaires à coefficients constants, exponentielle des matrices, systèmes différentiels linéaires du premier ordre.

4.1 Calcul des puissances d'une matrice carrée

Définition 4.1.1.
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$*. On définit par récurrence la matrice* $A^k, k \in \mathbb{N}$ *par :*

$$A^0 = I_n, \; A^k = AA^{k-1}.$$

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

Lemme 4.1.1. (*Cas diagonal*)

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ *alors, pour tout* $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Preuve.
Montrons par récurrence. **c.q.f.d**

Proposition 4.1.1. (*Cas diagonalisable*)
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$
Si A *est diagonalisable, alors il existe* $P \in GL_n(\mathbb{K}), D = P^{-1}.A.P$
et pour tout $k \in \mathbb{N} : A^k = P.D^k.P^{-1}$

Preuve.
Montrons par récurrence.on a $A = P.D.P^{-1}$
1) La propriété est triviale pour $k = 0$ car $A^0 = D^0 = I_n$.
2) Supposons que pour tout $k \in \mathbb{N} : A^k = P.D^k.P^{-1}$.
On a $A^{k+1} = A.A^k = (P.D.P^{-1}).(P.D^k.P^{-1}) = P.D^{k+1}.P^{-1}$ **c.q.f.d**

Exercice corrigé 4.1.1.
Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

1) *Démontrer que* A *est diagonalisable.*

2) *Calculer* $A^k, k \in \mathbb{N}^*$.

Solution.
$Sp(A) = \{-2, 2, 4\}$
$E_{-2} = \{y(0, 1, -1)/y \in \mathbb{R}\}, \dim E_{-2} = 1.$
$E_2 = \{y(1, 1, 0)/y \in \mathbb{R}\}, \dim E_2 = 1.$
$E_4 = \{y(1, 1, 2), y \in \mathbb{R}\}, \dim E_4 = 1.$
Soient B la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $B' = \{u_1(1, 1, 0), u_2(0, 1, -1), u_3(1, 1, 2)\}$

$$P = M_{passage}(B, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \; P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$D = P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(2^n + 4^n) & \frac{1}{2}(2^n - 4^n) & \frac{1}{2}((-2)^n + 4^n) \\ \frac{1}{2}(2^n + (-2)^{n+1} + 4^n) & \frac{1}{2}(2^n + (-2)^n - 4^n) & \frac{1}{2}((-2)^n + 4^n) \\ (-2)^{n+1} + 4^n & (-2)^n - 4^n & 4^n \end{pmatrix}$$

Proposition 4.1.2. (*Formule du binôme*)
Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ deux matrices qui commutent alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$(A+B)^k = \sum_{j=1}^{k} C_k^j . A^j . B^{k-j} \text{ où } C_k^j = \frac{k!}{j!.(k-j)!}.$$

Preuve.
Montrons par récurrence. **c.q.f.d**

Lemme 4.1.2. (*Cas particulier*)
Si la décomposition de Dunford, $A = D + N$ avec D diagonalisable et N nilpotente qui commutent alors

$$\forall k \in \mathbb{N} : A^k = \sum_{j=1}^{k} C_k^j . N^j . D^{k-j}.$$

4.2 Systèmes des suites récurrentes linéaires simultanées

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ et $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$.
On considère les suites récurrentes linéaires simultanées du 1^{er} ordre à coefficients constants $(x_{1,k})_{k\in\mathbb{N}}, \dots, (x_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$(E) \begin{cases} \forall j \in \{1, \dots, n\} \ , \ x_{j,0} = \alpha_j \\ \forall j \in \{1, \dots, n\} \ , \ \forall k \in \mathbb{N} \ , \ x_{j,k+1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_{ji} x_{i,k} \end{cases}$$

Il s'agit de calculer les $x_{j,k}$

En notant $X_k = \begin{pmatrix} x_{1,k} \\ \vdots \\ x_{n,k} \end{pmatrix}$,$(E)$ se ramène à :

$$\begin{cases} X_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \\ \forall k \in \mathbb{N} \ , \ X_{k+1} = AX_k \end{cases}$$

On a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}, X_k = A^k X_0$. et la détermination de X_k se ramène au calcul de A^k.

Exercice corrigé 4.2.1.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *les suites réelles définies par :* $u_0 = 0, v_0 = 22, w_0 = 22$

$$\forall n \in \mathbb{N}\ , \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{4}(2u_n + v_n + w_n) \\ \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n + v_n + w_n) \\ \\ w_{n+1} = \dfrac{1}{4}(u_n + v_n + 2w_n) \end{cases}$$

Calculer u_n, v_n, w_n.

Solution.
En effet notons

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

et pour $n \in \mathbb{N}, X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ On a : $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$,donc : $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$
Formons le polynôme caractéristique :

$$P_A(\lambda) = (1-\lambda)(\frac{1}{12} - \lambda)(\frac{1}{4} - \lambda)$$

Puisque A admet trois valeurs propres distinctes et que A est d'ordre 3,alors A diagonalisable. On calcule les sous espaces propres,on obtient une base $\{V_1, V_2, V_3\}$ de valeurs propres associés respectivement à $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}$: $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}$

En notant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -8 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$

On a $P^{-1} = \dfrac{1}{22}\begin{pmatrix} 8 & 6 & 8 \\ 11 & 0 & -11 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$,et $A = PDP^{-1}$

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0 = PD^n P^{-1} X_0$
et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_n = 14 - 11.4^{-n} - 3.12^{-n} \\ v_n = 14 + 8.12^{-n} \\ w_n = 14 + 11.4^{-n} - 3.12^{-n} \end{cases}$$

Il est claire que $(u_n)_n, (v_n)_n, (w_n)_n$ convergent vers 14.

4.3 Suites récurrentes linéaires à coefficients constants

Soient $P \in \mathbb{N}^*, (a_0, \ldots, a_{p-1}) \in \mathbb{K}^P$. On considère la suite récurrente linéaire à coefficients constants $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} (u_0, \ldots, u_{p-1}) \in \mathbb{K}^p \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = \displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} a_i u_{n+i} = a_0 u_n + \ldots + a_{p-1} u_{n+p-1} \end{cases}$$

Il s'agit de calculer u_n en fonction de n, pour tout n de $\mathbb{N}$.

Notons

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ a_0 & \ldots & \ldots & a_{p-2} & a_{p-1} \end{pmatrix} \in M_P(\mathbb{K})$$

, et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix}$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ \vdots \\ u_{n+p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ a_0 & \ldots & \ldots & a_{p-2} & a_{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix} = AX_n$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$ Ainsi le calcul de u_n se ramène à celui des puissances de A.

Exercice corrigé 4.3.1.
Calculer u_n pour tout n de $\mathbb{N}$ sachant :

$$\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 1, u_2 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 45u_n - 39u_{n+1} + 11u_{n+2} \end{cases}$$

Solution.
Notons
$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 45 & -39 & 11\end{pmatrix}$$
et formons le polynôme caractéristique :
$$P_A(\lambda)=-(\lambda-3)^2(\lambda-5).$$
Donc P_A est scindé sur $\mathbb{R}$ et les valeurs propres de A sont 3 (double) et 5 (simple).
On calcule les sous espaces propres et on obtient :
$$\begin{cases} E_3 = vect(v_1), où\ v_1=\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix}\\ E_5 = vect(v_3), où\ v_3=\begin{pmatrix}1\\5\\25\end{pmatrix}\end{cases}$$
Puisque 3 est valeur propre double et que $\dim E_3=1$, A n'est pas diagonalisable.

On va trigonaliser A. Cherchons $v_2=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ pour que $Av_2=3v_2+v_1$.

On a :
$$Av_2=3v_2+v_1 \Longleftrightarrow \begin{cases} y=3x+1\\ z=9x+6\end{cases}$$
On peut donc choisir $v_2=\begin{pmatrix}0\\1\\6\end{pmatrix}$

En notant $P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 5\\ 9 & 6 & 25\end{pmatrix}$ et $T=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$, on a donc $P^{-1}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}-5 & 6 & -1\\ -30 & 16 & -2\\ 9 & -6 & 1\end{pmatrix}$

et $A=PTP^{-1}$

Une récurrence immédiate montre, pour tout $n\in\mathbb{N}, T^n=\begin{pmatrix}3^n & n3^{n-1} & 0\\ 0 & 3^n & 0\\ 0 & 0 & 5^n\end{pmatrix}$

$D'où$, pour tout $n\in\mathbb{N}$:$X_n=PT^nP^{-1}X_0=\begin{pmatrix}-4n3^{n-1}+5^n\\ -4(n+1)3^n+5^{n+1}\\ -4(n+2)3^{n+1}+5^{n+2}\end{pmatrix}$

Finalement, pour tout $n\in\mathbb{N}, u_n=-4n3^{n-1}+5^n$.

4.4 Exponentielle des matrices

Définition 4.4.1.
$M_n(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n^2, on peut donc considérer des normes sur cet espace. Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$. on pose $\|A\| = \sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|$.

Lemme 4.4.1.
Pour tout $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ on a : $\|A.B\| \leq \|A\|\|B\|$

Preuve.

En effet : si $A = (a_{ij})$,$B = (b_{ij})$ et $A.B = (c_{ij})$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$

$$\begin{aligned}
\|AB\| &= \sum_{i,j}|c_{ij}| \\
&\leq \sum_{i,j}\Big(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}||b_{kj}|\Big) \\
&\leq \Big(\sum_{i,k}|a_{ik}|\Big)\Big(\sum_{j,k}|b_{kj}|\Big) \\
&\leq \|A\|\|B\|
\end{aligned}$$

c.q.f.d

Définition 4.4.2.
On dit qu'une suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $M_n(\mathbb{K})$ converge vers une matrice A, si pour tout i, j la suite des coefficients $a_{k,ij}$ converge vers le coefficient a_{ij}.

Proposition 4.4.1.
Soient (U_m) une suite de matrices qui converge vers U et (V_m) une suite de matrices qui converge vers V. La suite (U_mV_m) converge vers la matrice UV.

Preuve.

On se donne comme d'habitude $\varepsilon > 0$; il existe un entier m_0 tel que, pour tout $m \geqslant m_0$,on ait $\|U_m - U\| < \dfrac{\varepsilon}{2(\varepsilon + \|V\|)}$ et $\|V_m - V\| < \dfrac{\varepsilon}{2(\|U\| + 1)}$ qui entraine en particulier
$\|V_m\| \leq \|V_m - V\| + \|V\| < \varepsilon + \|V\|$ pour $m \geqslant m_0$,on a alors

$$\begin{aligned}
\|U_mV_m - UV\| &= \|(U_mV_m - UV_m) + (UV_m - UV)\| \\
&\leq \|(U_m - U)V_m\| + \|U(V_m - V)\| \\
&\leq \|U_m - U\|\|V_m\| + \|U\|\|V_m - V\| \\
&\leq \|U_m - U\|(\varepsilon + \|V\|) + \|U\|\|V_m - V\| \\
&< (\varepsilon + \|V\|)\frac{\varepsilon}{2(\varepsilon + \|V\|)} + \|U\|\frac{\varepsilon}{2(\|U\| + 1)} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

ce qui démontre la proposition. **c.q.f.d**

Exemple 4.4.1.
Si une suite (U_m) de matrices inversibles converge vers une matrice U et que la suite des inverses (U_m^{-1}) converge vers une matrice V, la matrice U est inversible d'inverse V.

La construction d'une série qui converge vers le produit des sommes de deux séries convergentes $\sum U_k$ et $\sum V_k$ est plus délicate.

Proposition 4.4.2.
Soient $\sum U_k$ et $\sum V_k$ des séries de matrices absolument convergentes de sommes respectives U et V.la série de terme générale

$$W_k = U_0V_k + U_1V_{k-1} + ... + U_kV_0$$

est absolument convergente de somme UV.

Preuve.
on remarque que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m}\|W_k\| &= \sum_{0\leq i+j\leqslant m}\|U_iV_j\| \\
&\leq \sum_{0\leq i+j\leqslant m}\|U_i\|\|V_j\| \\
&\leq \Big(\sum_{i=0}^{m}\|U_i\|\Big)\Big(\sum_{j=0}^{m}\|V_j\|\Big) \\
&\leq \Big(\sum_{i=0}^{+\infty}\|U_i\|\Big)\Big(\sum_{j=0}^{+\infty}\|V_j\|\Big)
\end{aligned}$$

Puisque les séries $\sum\|U_i\|$ et $\sum\|V_j\|$ sont convergentes. les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum\|W_k\|$ sont majorées ; elle est donc convergente, de sorte que la série $\sum W_k$ est absolument convergente. pour calculer sa somme, on regarde la différence

$$\begin{aligned}
\|\sum_{k=0}^{2m} W_k - (\sum_{i=0}^{m} U_i)(\sum_{i=0}^{m} V_j)\| &= \|\sum_{i+j\leq 2m, i>m \text{ } ou \text{ } j>m} U_iV_j\| \\
&\leq \sum_{0\leq i+j\leqslant m}\|U_i\|\|V_j\| \\
&\leq (\sum_{i=0}^{2m}\|U_i\|)(\sum_{i=0}^{2m}\|V_j\|) - (\sum_{i=0}^{m}\|U_i\|)(\sum_{i=0}^{m}\|V_j\|
\end{aligned}$$

Comme le membre de droite tend vers 0 lorsque m tend vers $+\infty$, et que la limite de la suite $((\sum_{i=0}^{m} U_i)(\sum_{j=0}^{m} V_j))$ est UV par la Proposition 4.4.1, on en déduit que la série de terme générale W_k est convergente de somme UV.

c.q.f.d

Proposition/Définition 4.4.1.

Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$, la série : $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ *converge dans $M_n(\mathbb{K})$.*

On note : $\exp A = e^A$ *sa limite est dite la matrice exponentielle de A.*

Preuve.

Il suffit de démontrer que les séries de coefficients convergent. Or pour tous i,j on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{a_{i,j}^k}{k!} \right| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{\|A^k\|}{k!} \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} \\
&\leq e^{\|A\|} \\
&\leq \infty
\end{aligned}$$

Donc pour tous i, j la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_{i,j}^k}{k!}$ converge dans $\mathbb{K}$.

c.q.f.d

Exemple 4.4.2.

Soit matrice diagonale

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Alors

$$e^M = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Proposition 4.4.3.

Si $M, N \in M_n(\mathbb{K})$ sont des matrices carrées qui commutent c'est -à-dire $M.N = N.M$, on a

$$e^{M+N} = e^M.e^N = e^N.e^M$$

Preuve.

On utilise la formule du binôme

$$(M+N)^k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j M^{k-j}.N^j = \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{(k-j)!.j!}.M^{k-j}.N^j$$

De sorte que

$$e^{(M+N)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(M+N)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \big(\sum_{j=0}^{k} \frac{M^{k-j}}{(k-j)!} \frac{N^j}{j!} \big).$$

On retrouve la série dont la Proposition 4.4.2 nous dit qu'elle converge vers

$$\big(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{M^i}{i!} \big).\big(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{N^j}{j!} \big)$$

c.q.f.d

Corollaire 4.4.1.
Si $M \in M_n(\mathbb{K})$ est une matrice carrée, e^M est inversible d'inverse e^{-M}.

Preuve.
Il suffit d'appliquer la Proposition 4.4.3 à M et $-M$. **c.q.f.d**

Proposition 4.4.4.
Si $M, N \in M_n(\mathbb{K})$ sont des matrices carrées semblables c'est -à-dire qu'il existe une matrice inversible P telle que $N = P^{-1}.M.P$, alors e^M et e^N sont semblables.plus précisément

$$e^N = e^{P^{-1}.M.P} = P^{-1}.e^M.P$$

Preuve.
Il suffit de remarquer que pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$N^k = (P^{-1}.M.P)^k = (P^{-1}.M.P)(P^{-1}.M.P)\dots(P^{-1}.M.P) = P^{-1}.M^k.P.$$

De sorte que

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{N^k}{k!} = \sum_{k=0}^{m} \frac{(P^{-1}.M.P)^k}{k!} = P^{-1}.\big(\sum_{k=0}^{m} \frac{M^k}{k!} \big).P.$$

Il suffit alors de faire tendre m vers $+\infty$ en utilisant la Proposition 4.4.1 pour conclure. **c.q.f.d**

Proposition 4.4.5.
Soit D un sous ensemble de $\mathbb{R}$, soient $F : D \to M_{m\times n}(\mathbb{C})$ et $G : D \to M_{n\times p}(\mathbb{C})$ des fonctions à valeurs matricielles, admettant des limites en un point t_0 de D. Alors la fonction $FG : D \to M_{m\times p}(\mathbb{C})$ qui à tout t associe $F(t).G(t)$ a une limite en t_0 et

$$\lim_{t\to t_0} (F(t).G(t)) = (\lim_{t\to t_0} F(t)).(\lim_{t\to t_0} G(t)).$$

Preuve.
La démonstration est tout-à-fait analogue à la démonstration pour les fonctions à valeurs réelles (voir aussi la démonstration de la Proposition 4.4.1).

c.q.f.d

Proposition 4.4.6.
Soit D un sous ensemble de $\mathbb{R}$, soient $F : D \to M_{m\times n}(\mathbb{C})$ et $G : D \to M_{n\times p}(\mathbb{C})$ des fonctions à valeurs matricielles, définies au voisinage d'un point t_0 de D et dérivable en ce point. Alors la fonction $FG : D \to M_{m\times p}(\mathbb{C})$ qui à tout t associe $F(t).G(t)$ est dérivable en t_0 et

$$(F.G)'(t_0) = F'(t_0).G(t_0) + F(t_0).G'(t_0).$$

Preuve.
Il s'agit de trouver la limite du taux d'accroissement

$$\delta(t) = \frac{F(t).G(t) - F(t_0).G(t_0)}{t - t_0}.$$

Lorsque t tend vers t_0. On l'écrit

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \frac{F(t).G(t) - F(t_0).G(t) + F(t_0).G(t) - F(t_0).G(t_0)}{t - t_0} \\ &= \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0}.G(t) + F(t_0).\frac{G(t) - G(t_0)}{t - t_0}. \end{aligned}$$

Qui grâce à la Proposition 4.4.5 tend vers $F'(t_0).G(t_0) + F(t_0).G'(t_0)$ lorsque t tend vers t_0.
c.q.f.d

Lemme 4.4.2.
Soit M une matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\|e^M - I_n - M\| \leq \|M\|^2 e^{\|M\|}.$$

Preuve.
On a $e^M - I_n - M = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{M^k}{k!}$ cette série est bien sûr toujours absolument convergente.

$$\begin{aligned} \|e^M - I_n - M\| &\leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\|M^k\|}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|M^{k+2}\|}{(k+2)!} \\ &\leq \|M\|^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|M^k\|}{(k+2)!} \\ &\leq \|M\|^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|M^k\|}{(k)!} \\ &= \|M\|^2 e^{\|M\|}. \end{aligned}$$

c.q.f.d

Proposition 4.4.7.
Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. La fonction

$$\begin{array}{rcl} : \mathbb{R} & \to & M_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & e^{tM} \end{array}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée en t_0 la matrice $\quad Me^{t_0M} = e^{t_0M}M$.

Preuve.
Il s'agit de montrer que le rapport

$$\frac{e^{tM} - e^{t_0M}}{t - t_0} - Me^{t_0M} = \frac{e^{tM} - e^{t_0M} - (t-t_0)Me^{t_0M}}{t - t_0}.$$

Tend vers 0 quand t tend vers t_0. Puisque t_0M et $(t-t_0)M$ commutant, on a par la Proposition 4.4.3

$$\begin{aligned} e^{tM} &= e^{(t-t_0)M + t_0M} \\ &= e^{(t-t_0)M}e^{t_0M}. \end{aligned}$$

Posons $t - t_0 = \alpha$ on a

$$\begin{aligned} e^{tM} - e^{t_0M} - (t-t_0)Me^{t_0M} &= e^{(t-t_0)M}e^{t_0M} - e^{t_0M} - (t-t_0)Me^{t_0M} \\ &= (e^{\alpha M} - I_n - \alpha M)e^{t_0M}. \end{aligned}$$

Le Lemme 4.4.2 appliqué à la matrice αM entraîne

$$\begin{aligned} \|e^{tM} - e^{t_0M} - (t-t_0)Me^{t_0M}\| &\leq \|(e^{\alpha M} - I_n - \alpha M)e^{t_0M}\|\|e^{t_0M}\| \\ &\leq \alpha^2\|M\|^2 e^{|\alpha|\|M\|}\|e^{t_0M}\| \\ \frac{e^{tM} - e^{t_0M} - (t-t_0)M.e^{t_0M}}{t-t_0} &\leq \alpha\|M\|^2 e^{|\alpha|\|M\|}\|e^{t_0M}\|. \end{aligned}$$

Or la fonction réelle de α au membre de droite tend vers 0 quand α tend vers 0, cela démontre la proposition. **c.q.f.d**

4.5 Systèmes différentiels linéaires du premier ordre

Définition 4.5.1.
On appelle système différentiel linéaire homogène à coefficients constants un système de la forme :

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \ldots + a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \ldots + a_{2n}x_n(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \ldots + a_{nn}x_n(t) \end{cases} \qquad (S_H)$$

où $a_{ij} \in \mathbb{K}$, et les inconnues x_i sont des fonctions dérivables sur un intervalle J de $\mathbb{R}$.
On utilise la notation abrégée

$$\frac{d}{dt}X(t) = AX(t) \qquad\qquad (S_H)$$

Où $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice constante et $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$

et on note $\frac{d}{dt}X(t) = X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}$.

Les exponentielles de matrices permettent de résoudre le système (S_H).

Théorème 4.5.1.
Les solution du système homogène (S_H) sont les fonction de la forme $t \mapsto e^{tA}X_0$, X_0 est un vecteur colonne quelconque de $\mathbb{K}^n$.

Preuve.
Montrons d'abord que toute fonction de type $X(t) = e^{tA}X_0$ est solution de (S_H), il s'agit de calculer la dérivée de X en tout point t.
On utilise la Proposition 4.4.7, nous avons $X'(t) = A.e^{tA}.X_0$ alors $X'(t) = AX(t)$.
Réciproquement : montrons que toute solution X de (S_H) est de cette forme.
En dérivant la fonction $Y : t \longmapsto e^{-tA}X(t)$ on trouve : $Y'(t) = -e^{-tA}X(t) + e^{-tA}X'(t) = 0$, la fonction Y est donc constante égale à sa valeur en 0, soit $X(0)$ de sorte que $X(t) = e^{tA}X_0$ pour tout t. **c.q.f.d**

Corollaire 4.5.1.
Soient X_0 un vecteur de $\mathbb{K}^n$ et t_0 un réel, la fonction $X(t) = e^{(t-t_0)A}X_0$ est l'unique solution de (S_H) qui vérifie $X(t_0) = X_0$.

Preuve.
La fonction X peut aussi s'écrire $X(t) = e^{tA}(e^{-t_0A}X_0)$, elle est donc solution de (S_H) par le Théorème 4.5.1, car $e^{-t_0A}X_0$ est un vecteur colonne quelconque de $\mathbb{K}^n$, et elle vérifie bien sûr $X(t_0) = X_0$.
Réciproquement : si Y est une solution vérifiant $Y(t_0) = X_0$ la fonction $t \longmapsto Y(t+t_0)$ est encore solution et prend la valeur X_0 en 0 c'est-à-dire pour $t = 0, Y(t+t_0) = Y(t_0) = X_0$, par le Théorème 4.5.1, elle est égale à $t \longmapsto \exp(tA)X_0$, d'où le corollaire. **c.q.f.d**

Remarque 4.5.1.
1) *Soit $X'(t) = AX(t)$ un système différentiel linéaire où $X(t)$, $X'(t)$ et A dans une base B de $\mathbb{K}^n$. Soit B' une autre base de $\mathbb{K}^n$, telle que P est la matrice de passage de B à B'. Alors la matrice $M = P^{-1}AP$ dans B', $X(t) = PY(t)$ et $X'(t) = PY'(t)$ où $Y(t)$ et $Y'(t)$ dans la*

base B'. On a

$$\begin{aligned} X'(t) = AX(t) &\Leftrightarrow PY'(t) = APY(t) \\ &\Leftrightarrow Y'(t) = P^{-1}APY(t) \\ &\Leftrightarrow Y'(t) = MY(t) \\ &\Leftrightarrow Y(t) = e^{M}Y_0 \\ &\Leftrightarrow X(t) = Pe^{M}Y_0. \end{aligned}$$

où Y_0 la condition initiale dans B'.
2) *Si A est diagonalisable ou trigonalisable ou possède une réduite de Jordan alors M est diagonale ou triangulaire ou de Jordan respectivement.*

Théorème 4.5.2. (*Cas d'une matrice diagonalisable sur $\mathbb{R}$*)
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable, on note les $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres (comptées avec leur multiplicités) et soit $\{v_1, \ldots, v_n\}$ une base de $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres de A associées à $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les solution de (S_H) sont les fonction de la forme :

$$X(t) = \alpha_1 e^{t\lambda_1} v_1 + \alpha_2 e^{t\lambda_2} v_2 + \ldots + \alpha_n e^{t\lambda_n} v_n,$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont des constantes arbitraires.

Preuve.
La condition initiale X_0 décompose en $X_0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$ où si P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à la basse $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ on à

$$X_0 = P \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Nous avons d'autre part, $D = P^{-1}AP$, où D est la matrice diagonale de termes diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ donc :

$$\begin{aligned} X'(t) = A.X(t) &\Leftrightarrow X(t) = e^{tA}X_0 \\ &\Leftrightarrow X(t) = P.e^{tD}.P^{-1}X_0 \\ &\Leftrightarrow X(t) = Pe^{tD} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow X(t) = P \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{t\lambda_1} \\ \vdots \\ \alpha_n e^{t\lambda_n} \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow X(t) = \alpha_1 e^{t\lambda_1} v_1 + \alpha_2 e^{t\lambda_2} v_2 + \ldots + \alpha_n e^{t\lambda_n} v_n. \end{aligned}$$

c.q.f.d

Remarque 4.5.2.
Autrement dit, l'ensemble des solutions du système (S_H) est $\mathbb{K}$- espace vectoriel de dimension n et $\{e^{\lambda_1 t}V_1, e^{\lambda_2 t}V_2, \ldots, e^{\lambda_n t}V_n\}$ forment une base de cet espace.

Exercice corrigé 4.5.1.
Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = -8y(t) + 6z(t) \\ y'(t) = -x(t) - 8y(t) + 7z(t) \\ z'(t) = x(t) - 14y(t) + 11z(t) \end{cases} \qquad (S)$$

Solution.
On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 6 \\ -1 & -8 & 7 \\ 1 & -14 & 11 \end{pmatrix}$ et $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$
Donc $(S) \Leftrightarrow X'(t) = A.X(t)$, qui est un système homogène.
Le polynôme caractéristique est $P_A(\lambda) = -(\lambda - 2)(2 + \lambda)(\lambda - 3)$
Donc A admet trois valeurs propres distinctes $\{-2, 2, 3\}$ alors elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
Les sous espaces propres $E_{-2} = vect(v_1)$, $E_2 = vect(v_2)$, $E_3 = vect(v_3)$ où

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Donc la solution générale est de la forme

$$X(t) = \alpha_1 e^{-2t}v_1 + \alpha_2 e^{2t}v_2 + \alpha_3 e^{3t}v_3 = \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{-2t} + \alpha_2 e^{2t} + 2\alpha_3 e^{3t} \\ \alpha_1 e^{-2t} + 2\alpha_2 e^{2t} + 3\alpha_3 e^{3t} \\ \alpha_1 e^{-2t} + 3\alpha_2 e^{2t} + 5\alpha_3 e^{3t} \end{pmatrix},$$

où $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$.

Théorème 4.5.3. (*Cas d'une matrice diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$*)
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et pas sur $\mathbb{R}$, il suffit dans la familles génératrice des solutions de remplacer pour les valeurs propres non réelles $\alpha e^{(\lambda t)}v + \beta e^{(\overline{\lambda} t)}\overline{v}$ par :
$\alpha Re(e^{(\lambda t)}v) + \beta Im(e^{(\lambda t)}v)$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Preuve.
Comme A une matrice réelle si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A, alors $\overline{\lambda}$ est aussi une valeur propre de A. Si v un vecteur propre associé à λ, alors $\overline{v}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\overline{\lambda}$.
Pour le couple de la valeur propre $(\lambda, \overline{\lambda})$ on à

$$e^{(\lambda t)}v = Re(e^{(\lambda t)}v) + iIm(e^{(\lambda t)}v) \;,\; e^{(\overline{\lambda} t)}\overline{v} = Re(e^{(\lambda t)}v) - iIm(e^{(\lambda t)}v).$$

Donc

$$\begin{aligned} vect\big(e^{(\lambda t)}v, e^{(\overline{\lambda} t)}\overline{v}\big) &= \{\alpha e^{(\lambda t)}v + \beta e^{(\overline{\lambda} t)}\overline{v}, \alpha, \beta \in \mathbb{C}\} \\ &= \{\alpha\big(Re(e^{(\lambda t)}v) + iIm(e^{(\lambda t)}v)\big) + \beta\big(Re(e^{(\lambda t)}v) - iIm(e^{(\lambda t)}v)\big)\} \\ &= \{(\alpha + \beta)Re(e^{(\lambda t)}v) + (i\alpha - i\beta)Im(e^{(\lambda t)}v)\} \\ &= vect\big(Re(e^{(\lambda t)}v), Im(e^{(\lambda t)}v)\big). \end{aligned}$$

Comme $Re(e^{(\lambda t)}v)$ et $Im(e^{(\lambda t)}v)$ sont deux solutions du système différentiel sur $\mathbb{R}$, forment une famille libre. **c.q.f.d**

Exercice corrigé 4.5.2.
Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) \\ y'(t) = -x(t) + 2y(t) + z(t) \\ z'(t) = x(t) + z(t) \end{cases} \qquad (S)$$

Solution.
On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ où x, y et z sont des fonctions de t.
alors

$$(S) \Leftrightarrow X'(t) = AX(t)$$

Le polynôme caractéristique est $P_A(\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 2)$
Les valeurs propres de A : $\{(\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1+i, \overline{\lambda}_2 = 1-i\}$ sont simples dans $\mathbb{C}$ alors A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
Les sous espaces propres $E_{\lambda_1} = vect(u)$, $E_{\lambda_2} = vect(v)$,$E_{\overline{\lambda}_2} = vect(\overline{v})$ où

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \overline{v} = \begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Les solutions $X(t)$ sur $\mathbb{C}$ de la forme :

$$\begin{aligned} X(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \\ &= \alpha e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma e^{(1-i)t} \begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \alpha e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^t e^{it} \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma e^t e^{-it} \begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \alpha e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^t \begin{pmatrix} -\sin t + i\cos t \\ -\cos t - i\sin t \\ \cos t + i\sin t \end{pmatrix} + \gamma e^t \begin{pmatrix} -\sin t - i\cos t \\ -\cos t + i\sin t \\ \cos t - i\sin t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Les solutions $X(t)$ sur $\mathbb{R}$ de la forme

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \alpha e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + be^t \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \\ \cos t \end{pmatrix} + ce^t \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

avec α, b et c dans $\mathbb{R}$.

Définition 4.5.2.
On appelle système différentiel avec seconde membre à coefficients constantes tout système de la forme :

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \ldots + a_{1n}x_n(t) + b_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \ldots + a_{2n}x_n(t) + b_2(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \ldots + a_{nn}x_n(t) + b_n(t) \end{cases} \qquad (S)$$

où $a_{ij} \in \mathbb{K}$, et les inconnues x_i sont des fonctions dérivables sur l' intervalle I. $b_i(t)$ sont des fonctions continues sur I, où I intervalle de $\mathbb{R}$.
On écrit sous la forme

$$(S) \Leftrightarrow \frac{d}{dt}X(t) = AX(t) + B(t)\ ,\ B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}.$$

Remarque 4.5.3.
Les solutions du système (S) s'obtiennent en ajoutant à la solution générale de (S_H) une solution particulière de (S).
Pour calculer une solution particulière de (S), on peut appliquer la méthode de variation de la constante, qui consiste à chercher une solution particulière sous la forme $X(t) = e^{tA}C$ où $C(t)$ est une fonction inconnue dérivable sur I à déterminer, on obtient alors le système différentiel $C'(t) = e^{-tA}B(t)$. et il suffit de calculer n primitives pour obtenir une solution.
Si A est diagonalisable,alors $A = PDP^{-1}$, on pose alors $X = PY$ donc

$$\begin{aligned} (S) &\Leftrightarrow PY'(t) = A.P.Y(t) + B(t) \\ &\Leftrightarrow Y'(t) = P^{-1}A.P.Y(t) + P^{-1}.B(t) \\ &\Leftrightarrow Y'(t) = D.Y(t) + P^{-1}.B(t) \end{aligned}$$

On pose $\quad Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$ *et* $\Gamma(t) = P^{-1}B(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix}$

A partir d'ici on peut faire la méthode de la variation de la constante en cherchant une solution de la forme $Y(t) = e^{tD}.C(t)$ donc $C'(t) = e^{-tD}\Gamma(t)$.Alors

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1'(t) = \lambda_1 y_1 + \gamma_1(t) \\ y_2'(t) = \lambda_2 y_2 + \gamma_2(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = \lambda_n y_n + \gamma_n(t) \end{cases}$$

et trouver une solution particulière de chaque équation.

Exercice corrigé 4.5.3.
Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) + 3x_2(t) + e^t \\ x_2'(t) = -2x_1(t) + 4x_2(t) \end{cases} \qquad (S)$$

Solution.
On pose

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

1) La solution général de (S_H) où $(S_H) \Leftrightarrow X'(t) = A.X(t)$
Le polynôme caractéristique $P_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$
Comme les valeurs propres $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$ sont simples dans $\mathbb{R}$ alors A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
Les sous espaces propres $E_{\lambda_1} = vect(v_1)$, $E_{\lambda_2} = vect(v_2)$ où $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$A = P.D.P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
Posons $Y = P^{-1}X$ on à $Y' = P^{-1}X'$ et donc $X' = A.X \Leftrightarrow Y' = D.Y$
Si : $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ alors

$$Y' = DY \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = 2y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1(t) = c_1 e^t \\ y_2(t) = c_2 e^{2t} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$X = PY = \begin{pmatrix} 3c_1e^t + c_2e^{2t} \\ 2c_1e^t + c_2e^{2t} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 3e^t \\ 2e^t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$X(t) = c_1X_1(t) + c_2X_2(t)$ où $X_1(t) = \begin{pmatrix} 3e^t \\ 2e^t \end{pmatrix}$ et $X_2(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$
2) La solution particulière de (S)
$X(t) = c_1(t)X_1(t) + c_2(t)X_2(t)$ avec c_1, c_2 fonctions dérivables
$X'(t) = AX + B(t) \Leftrightarrow c_1'(t)X_1(t) + c_2'(t)X_2(t) = B(t)$

$$\begin{cases} 3c_1'(t)e^t + c_2'(t)e^{2t} = e^t \\ 2c_1'(t)e^t + c_2'(t)e^{2t} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1'(t) = 1 \\ c_2'(t) = -2e^{-t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1(t) = t \\ c_2(t) = 2e^{-t} \end{cases}$$

Donc $X(t) = \begin{pmatrix} (3t+2)e^t \\ (2t+2)e^t \end{pmatrix}$ est une solution particulière de (S).

3) La solution générale :

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 3e^t \\ 2e^t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (3t+2)e^t \\ (2t+2)e^t \end{pmatrix}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

$$X(t) = \begin{cases} x_1(t) = 3c_1e^t + c_2e^{2t} + (3t+2)e^t \\ x_2(t) = 2c_1e^t + c_2e^{2t} + (2t+2)e^t \ , \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Exercices

Exercice 4.5.1.
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

1) *Déterminer les valeurs propres de* A.

2) *En déduire que* A *est diagonalisable.*

3) *Déterminer une matrice* D *diagonale et une matrice inversible* P *telle que* $D = P^{-1}AP$.

4) *Calculer* A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4.5.2.
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *des suites réelles définies par* $u_0 = 1, v_0 = w_0 = 0$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 4w_n \\ v_{n+1} = 3u_n - 4v_n + 12w_n \\ w_{n+1} = u_n - 3v_n + 5w_n \end{cases}$$

Déterminer u_n, v_n *et* w_n.

Exercice 4.5.3.
On considère la suite $(un)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par la donnée de* u_0, u_1 *et la relation de récurrence suivante, pour* $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = (1+a)u_{n+1} - au_n, a \in \mathbb{R}.$$

1) *Déterminer la matrice* A *telle que* $U_{n+1} = A.U_n$ *où* $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

2) *Pour quelles valeurs de* a *la matrice* A *est-elle diagonalisable ?*

3) *Lorsque* A *est diagonalisable, calculer* A^n *pour* $n \in \mathbb{N}$.

4) *En déduire* u_n *en fonction de* n.

Exercice 4.5.4.
Résoudre dans $M_3(\mathbb{R})$ *l'équation* $X^2 = A$ *où*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.5.5.
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *des suites réelles définies par, pour tout* $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + w_n \\ v_{n+1} = v_n - w_n \\ w_{n+1} = 2v_n + 4w_n \end{cases}$$

Déterminer u_n, v_n *et* w_n *en fonction de* n *et* u_0, v_0, w_0.

Exercice 4.5.6.
Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) + z(t) \\ y'(t) = x(t) \\ z'(t) = x(t) + y(t) + z(t) \end{cases}$$

Exercice 4.5.7.
Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = 10x(t) - 5y(t) + 7z(t) \\ z'(t) = 4x(t) - 2y(t) + 2z(t) \end{cases}$$

Exercice 4.5.8.
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

on pose

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

1) *Déterminer le polynôme caractéristique de A.*

2) *Montrer que A n'est pas diagonalisable.*

3) *Déterminer une réduite de Jordan en précisant la base et la matrice de passage.*

4) *Résoudre le système différentiel :* $\dfrac{dX}{dt}(t) = A.X(t)$

5) *préciser la solution vérifiant :* $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $\dfrac{dX}{dt}(t) = A.X(t)$

Bibliographie

[1] J.M. Arnaudiés et H. Fraysse *Cours de mathématiques-1 algèbre*, Dunod Université, ©BORDAS, Paris, 1987, ISBN 2-04-016450-2, Nouveau tirage, 1992.

[2] E, Aubry, *Algèbre linéaire et bilinéaire*, M2 Agreg 2010-2012.

[3] E. Azoulay et J. Avignant, *mathématiques 4. Algèbre, Cours et exercices*, Copyriht ©1984 by McGraw-Hill, Paris, ISBN 2-7042-1089-6.

[4] S. Balac, F. Sturm, *Algèbre et analyse : cours de mathématiques de première année avec exercices*, ISBN,2-88074-558-6 ©2003, presses polytechnique et universitaires romandes CH-1015 Lausanne.

[5] P. Broussous, *Algèbre linéaire Réduction des endomorphismes*, Université de poitiers, Agrégation 2008/2009 Mathématiques

[6] G. Carlier, *Notes de cours ALGÈBRE 2* , Université Paris IX Dauphine UFR Mathématiques de la décision, L1, année 2006-2007.

[7] L. Chambadal et J.L. Ovaert, *Cours de mathématiques algèbre II*, Gauthier-Villars Éditeur 55, quai des Grands-Augustins, Paris-6e 1972

[8] D. Fredon, M.M. Bertrand et F. Bertrand, *Mathématiques Algèbre et géométrie*, ©Dunod, Paris, 2009, ISBN 978-2-10-053932-1.

[9] L. Guillopé, *Cours d'algèbre*, Université de Nantes, Faculté des sciences et techniques, 2002-2003.

[10] K. Koufany, *Applications de la réduction des matrices.* ©Février 2012. Institut Élie Cartan, Mathématiques. Université de Lorraine, http ://www.iecn.u-nancy.fr/~koufany/SPI-S4-UE401/.

[11] S. Lipschutz, *Algèbre linéaire cours et problèmes, Serie Schaum*, Copyright ©McGraw-Hill Inc, New York, 1973, ISBN France :2.7042.0001.7.

[12] P. Malbos, *Analyse matricielle et algèbre linéaire appliquée*, Université Claude Bernard Lyon 1 Licence Sciences, Technologies, Santé, malbos@math.univ-lyon1.fr

[13] J.M. Monier, *Algèbre et géométrie*, PC-PSI-PT, 5 édition, ©Dunod, Paris, 2008, ©Dunod, Paris, 1996 pour la première édition ISBN 978-2-10-053970-3

[14] E. Ramis, C. Deschamps et J. Odoux, *Cours de mathématiques spéciales, 1 algèbre*, MASSON Paris Milan Barcelone Bonn. 1993. ©Masson, Paris, 1974,1988, ISBN : 2-225-81501-1

[15] L. Rozoy, B. Ycart, *Déterminants*, Université Joseph Fourier, Grenoble, 12 septembre 2016.

[16] C. Samuel, *Algèbre et Analyse I*, Faculté des Sciences de Marseille Saint-Jérôme, 2001-2002.

[17] A. Tchoudjem, *Algèbre-III, Réduction des endomorphismes*, Université Lyon I, 10 Octobre 2011.

[18] T. Vaccon, *Exponentielle de matrices*, septembre 2012.

[19] J. Voedts, *Cours de mathématiques MP-MP**, ISBN 2-7298-0666-0 ©Ellipses Edition Marketing S.A.,2002.