الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de RELIZANE
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département : Informatique

جامعة غليزان
RELIZANE UNIVERSITY

Intitulé

Cous d'Algèbre 2

Dr. Beddani Abdallah

Année universitaire : 2022/2023

Introduction générale

Ce module vise à poser les bases essentielles des espaces vectoriels et à approfondir les concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire. À travers ce cours, les étudiants acquerront les connaissances nécessaires pour comprendre et maîtriser les structures algébriques fondamentales telles que les espaces vectoriels, les applications linéaires, et les matrices. Ces compétences sont cruciales pour la résolution de problèmes dans divers domaines des mathématiques et des sciences appliquées.

Les étudiants doivent être familiers avec les notions d'algèbre de base, notamment la manipulation des opérations algébriques et la compréhension des concepts fondamentaux d'addition et de multiplication de nombres réels ou complexes.

Le premier chapitre aborde la définition d'un espace vectoriel et d'un sous-espace vectoriel, en donnant des exemples concrets. Il présente aussi les concepts de familles libres, familles génératrices, bases d'un espace vectoriel et le calcul de la dimension. On y explore aussi l'espace vectoriel de dimension finie, ses propriétés et les sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Le deuxième chapitre traite des applications linéaires, de leur définition et de leurs caractéristiques. Il couvre également les notions de noyau et d'image d'une application linéaire, le rang d'une application linéaire, ainsi que le théorème du rang. Ce chapitre aborde également la composition d'applications linéaires et l'inverse d'une application bijective, notamment les automorphismes.

Le troisième chapitre se concentre sur les matrices, en expliquant leur association avec les applications linéaires. Les opérations sur les matrices telles que la somme, le produit de matrices et la matrice transposée sont également abordées. On y explore l'espace vectoriel des matrices à n lignes et m colonnes, ainsi que l'anneau des matrices carrées et leurs propriétés. Le chapitre traite également du déterminant d'une matrice carrée et de la notion de matrices inversibles, tout en étudiant le rang d’une matrice et l’invariance du rang par transposition.

Le quatrième chapitre est consacré à la résolution de systèmes d’équations. Il aborde l’écriture matricielle des systèmes d’équations, le rang d’un système et son lien avec la solution du système. Enfin, la méthode de Cramer est présentée comme une technique pour résoudre les systèmes linéaires.

Table des Matières

1 Espaces vectoriels **4**

1.1 Généralités 4

1.2 Sous espace vectoriel 7

1.3 Combinaisons linéaires, familles libres, liées et génératrices 8

1.3.1 Familles libres ou linéairement indépendantes 8

1.3.2 Familles liées ou linéairement dépendantes 8

1.3.3 Famille génératrice 8

1.4 Espace vectoriel de dimension finie 11

1.4.1 Dimension 11

1.4.2 Somme de deux sous espaces vectoriels 11

1.4.3 Somme directe de deux sous espaces vectoriels 11

1.5 Intersection et la réunion de deux sous-espaces: 14

2 Applications linéaires **26**

2.1 Applications linéaires particulières 27

2.1.1 Formes linéaires 27

2.1.2 Endomorphisme 27

2.1.3 Isomorphisme 27

2.1.4 Automorphisme 27

2.2 Noyau et image d'une application linéaire 28

2.3 Rang d'une application linéaire 30

2.3.1 Théorème du rang 30

2.4 Composée d'applications linéaires . . . 31
2.5 Inverse d'une application linéaire bijective, automorphisme. . . . 32
2.6 Injectivité d'une application linéaire: . . . 34
2.7 Projecteur . . . 36
2.8 Symétrie . . . 37

3 Matrices **44**
3.1 Matrices (Définitions et opérations) . . . 44
3.1.1 Définitions . . . 44
3.1.2 Opérations sur les matrices . . . 45
3.1.3 Déterminant d'une matrice . . . 46
3.2 Matrice associée à une application linéaire . . . 48
3.2.1 Applications linéaires . . . 48
3.2.2 Matrice associée . . . 48
3.3 Application linéaire associée à une matrice . . . 50
3.4 Changement de base, matrice de passage . . . 51
3.4.1 Matrice de passage . . . 51
3.4.2 Matrices particulières . . . 51
3.4.3 Transposée d'une matrice$(n \times n)$ . . . 53
3.4.4 Inverse d'une matrice $(n \times n)$ . . . 53

4 Résolution de systèmes d'équations **63**
4.1 Généralités . . . 63
4.1.1 Notation matricielle . . . 63
4.1.2 Rang d'un système d'équations linéaires . . . 64
4.2 Etude de l'ensemble des solutions . . . 64
4.2.1 Déterminant caractéristique . . . 65
4.2.2 Etude de l'ensemble des solutions . . . 65
4.3 Méthodes de résolution d'un système linéaire . . . 67
4.3.1 Résolution par la méthode de Cramer . . . 67
4.3.2 Résolution par la méthode de la matrice inverse . . . 68

4.3.3 Résolution par la méthode de Gauss 70

5 Fiches TD avec la correction **78**

5.1 **Fiche TD 1** 79

5.1.1 Correction TD 1 81

5.2 **Fiche TD 2** 84

5.2.1 Correction TD 2 86

5.3 **Fiche TD 3** 90

5.3.1 Correction TD 3 92

Bibliographie **100**

Chapitre 1

Espaces vectoriels

1.1 Généralités

Soit K un corps commutatif ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Soit E un ensemble non vide, muni par:

• Loi interne + (addition):

$$+ : E \times E \to E, (x, y) \longmapsto x + y$$

• Loi externe $\cdot$ (multiplication par un scalaire):

$$\cdot : K \times E \to E, (\lambda, x) \longmapsto \lambda \cdot x$$

Définition 1.1.1 *$(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur K (K-ev) si :*

1) *$(E, +)$ est un groupe commutatif c'est à dire*

- *Associatif* $\forall x, y, z \in E, (x + y) + z = x + (y + z)$

- *Commutatif* $\forall x, y \in E, x + y = y + x$

- *Elément neutre* $\exists 0_E \in E, \forall x \in E, 0_E + x = x$

- *Elément symétrique* $\forall x \in E, \exists! x' \in E$ *tel que* $x + x' = 0_E$.

2) *La loi externe doit vérifier:*

- $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in K, \lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y.$

- $\forall x \in E, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in K, (\lambda_1 + \lambda_2)\, x = \lambda_1 x + \lambda_2 x.$

- $\forall x \in E, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in K, \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot x) = (\lambda_1.\lambda_2) \cdot x.$

- $\forall x \in E, 1 \cdot x = x.$

Proposition 1.1.1 *$\forall x \in E, \forall \alpha \in K$. On a:*

1) $\forall \alpha \in K, \alpha.0_E = 0_E$

2) $0.x = 0_E$

3) $(-1).x = -x$

Preuve. 1)$\forall x \in E, \forall \alpha \in K$, on a

$$\begin{aligned} \alpha.0_E &= \alpha.(0_E + 0_E) \\ &= \alpha.0_E + \alpha.0_E \end{aligned}$$

donc $\alpha.0_E = \alpha.0_E - \alpha.0_E = 0_E$

2)$\forall x \in E, \forall \alpha \in K$, on a

$$\begin{aligned} 0.x &= (0+0).x \\ &= 0.x + 0.x \end{aligned}$$

donc $0.x = 0.x - 0.x = 0.$

3) $(-1).x + 1.x = (-1+1).x = 0.x = 0.$ ■

Exemple 1 *Soit $K = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2$*

- *Loi interne* " + "

$$\forall (x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2, (x,y) + (x',y') = (x+x', y+y')$$

- *Loi externe* " $\cdot$ "

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda (x,y) = (\lambda x, \lambda y).$$

On a $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exemple 2 *Soit* $K = \mathbb{R}$ *et* $E = \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$

- *Loi interne* " $+$ "

$\forall (x_1, x_2, ..., x_n), (x'_1, x'_2, ..., x'_n) \in \mathbb{R}^n,$

$(x_1, x_2, ..., x_n) + (x'_1, x'_2, ..., x'_n) = (x_1 + x'_1, ..., x_n + x'_n)$

- *Loi externe* " $\cdot$ "

$\forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R},$

$\lambda (x_1, x_2, ..., x_n) = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n).$

On a $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$.

1.2 Sous espace vectoriel

Soit E un $K-$ev et $F \subset E$.

F est un sous espace vectoriel (sev) ssi :

- $F \neq \emptyset$
- La loi interne " + " est stable dans F :

$$\forall x, y \in F, x + y \in F.$$

- La loi externe " $\cdot$ " est stable dans F :

$$\forall x \in F, \forall \lambda \in K, \lambda \cdot x \in F.$$

Exemple 3 *$F = \{0_E\}$ est un sous espace vectoriel.*

Exemple 4 *Soit $E = \mathbb{R}^3$,*

$$\begin{aligned} F &= \left\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 / y = -x\right\} \\ &= \left\{(x, -x, 0) \in \mathbb{R}^3 / x \in \mathbb{R}\right\} \end{aligned}$$

On montre que F est un sous espace vectoriel.

$$\begin{aligned} &\forall\, (x, y, z), (x', y', z') \in F, \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ &(x, y, z), (x', y', z') \in F \Longleftrightarrow y = -x, y' = -x', z = z' = 0. \end{aligned}$$

Donc

1) *$F \neq \emptyset$ car $(0, 0, 0) \in F$.*

2) *$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', -x - x', 0) \in F$.*

3) *$\alpha\ (x, y, z) = (\alpha x, -\alpha x, 0) \in F$*

Exemple 5 *$E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction affine$\}$*

$F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction linéaire$\}$

F est un sous espace vectoriel de E.

$f_1(x) = a_1 x$ et $f_2(x) = a_2 x, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 0$

1) $F \neq \emptyset$ *car* $f \in F$.

2) $f_1(x) + f_2(x) = (a_1 + a_2)\, x$ *donc* $f_1 + f_2 \in F$

3) $\lambda f_1(x) = \lambda a_1 x$ *donc* $\lambda\ f_1 \in F$

1.3 Combinaisons linéaires, familles libres, liées et génératrices

Définition 1.3.1 *Soit E un K-ev et* $\{x_i\}_{i\in I}$ *une famille d'éléments de E. On appelle* ***combinaison linéaire*** *de la famille* $\{x_i\}_{i\in I}$*, l'expression* $\sum_{i\in I}\lambda_i x_i$ *avec* $\lambda_i \in K, i \in I$.

1.3.1 Familles libres ou linéairement indépendantes

Définition 1.3.2 *On dit que la famille* $\{x_i\}_{i\in I}$ *est libre si* $\sum_{i\in I}\lambda_i x_i = 0 \Leftrightarrow \lambda_i = 0, \forall i \in I$.

Exemple 6 $E = \mathbb{R}^2, e_1 = (1,2), e_2 = (1,1) \in \mathbb{R}^2$.

La famille $\{e_1, e_2\}$ *est libre.*

1.3.2 Familles liées ou linéairement dépendantes

Définition 1.3.3 *On dit que la famille* $\{x_i\}_{i\in I}$ *est liée si elle n'est pas libre c'est à dire* $\exists\{\lambda_i\}_{i\in I}$ *non tous nuls, tel que* $\sum_{i\in I}\lambda_i x_i = 0$.

Exemple 7 $e_1 = (1,2), e_2 = (1,1), e_3 = (0,1) \in \mathbb{R}^2$.

La famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ *est liée, car* $e_1 - e_2 - e_3 = 0$.

1.3.3 Famille génératrice

Définition 1.3.4 *On appelle famille génératrice de E une famille telle que tout élément de E est une combinaison linéaire de cette famille.*$\forall x \in E$, $\exists\{\lambda_i\}_{i\in I}$ *tel que* $x = \sum_{i\in I}\lambda_i x_i$.

Définition 1.3.5 *On dit que la famille* $\{x_i\}_{i\in I}$ *est une base de E si* $\{x_i\}_{i\in I}$ *est une famille libre et génératrice.*

Proposition 1.3.1 *On dit que la famille* $\{x_i\}_{i\in I}$ *est une base de E ssi* $\forall x \in E$, x *s'écrit de manière unique* $\sum_{i\in I}\lambda_i x_i$.

Preuve. 1) ($\Longrightarrow$)

On suppose que la famille $\{x_i\}_{i\in I}$ est une base de E alors $\forall x \in E$, $\exists\{\lambda_i\}_{i\in I}$ tel que $x = \sum_{i\in I}\lambda_i x_i$ car cette famille est génératrice.

On suppose $\exists\{\lambda_i\}_{i\in I}$ et $\{\lambda'_i\}_{i\in I}$ tel que

$$x = \sum_{i\in I}\lambda_i x_i = \sum_{i\in I}\lambda'_i x_i.$$

C'est à dir

$$\sum_{i\in I}\lambda_i x_i - \sum_{i\in I}\lambda'_i x_i = 0.$$

Alors

$$\sum_{i\in I}\left(\lambda_i - \lambda'_i\right) x_i = 0.$$

Comme cette famille est libre on trouve

$$\left(\lambda_i - \lambda'_i\right) = 0, \forall i \in I,$$

c'est à dir x s'écrit de manière unique

$$\sum_{i\in I}\lambda_i x_i.$$

2) ($\Longleftarrow$)

$\forall x \in E$, x s'écrit de manière unique

$$\sum_{i\in I}\lambda_i x_i.$$

C'est à dire la famille $\{x_i\}_{i\in I}$ est génératrice.

Il suffit de montrer que cette famille est libre, si $\sum_{i\in I}\lambda_i x_i = 0$ alors on a $\sum_{i\in I}\lambda_i x_i = \sum_{i\in I} 0 x_i$.

Comme$x$ s'écrit de manière unique $\sum_{i\in I}\lambda_i x_i$.

On trouve $\lambda_i = 0, \forall i \in I$ c'est à dire la famille $\{x_i\}_{i\in I}$ est libre. ■

Exemple 8 *Soit $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1) \in \mathbb{R}^2$. La famille $\{e_1, e_2\}$ s'appelle la base canonique de $\mathbb{R}^2$.*

Exemple 9 *Soit* $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1) \in \mathbb{R}^3$. *La famille* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *s'appelle la base canonique de* $\mathbb{R}^3$.

Définition 1.3.6 *L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de la famille* $S = (x_1, ..., x_n)$ *est un sev engendré par* $(x_1, ..., x_n)$ *noté* $com(x_1, ..., x_n)$.

$$com(x_1, ..., x_n) = \{\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n / \alpha_1, ..., \alpha_n \in K\}$$

Définition 1.3.7 *Soit* $S = (x_1, ..., x_n)$, *la dimension de* $F = com(x_1, ..., x_n)$ *s'appelle le rang de la famille S:* $dimF = rgS$.

Proposition 1.3.2 *Soit* $S = (x_1, ..., x_n)$,

- $rgS \leq n$
- $rgS = n$ *alor* S *est libre.*

1.4 Espace vectoriel de dimension finie

Définition 1.4.1 *Un espace vectoriel est de dimension finie si et seulement si il est engendré par un nombre fini de vecteurs.*

1.4.1 Dimension

Définition 1.4.2 *La dimension d'un espace vectoriel E de dimension finie est définie comme le nombre de vecteurs de la base de cette espace, noté $dim(E)$.*

Proposition 1.4.1 *Si E un espace vectoriel de dimension finie alors tous les sev de dimension finie.*

Remarque 1 *Si $dimE = n$, pour montrer qu'une famille de n éléments est une base de E, il suffit de montrer qu'elle est libre ou bien génératrice.*

1.4.2 Somme de deux sous espaces vectoriels

Définition 1.4.3 *Soit F_1 et F_2 deux sev de E.*

On appelle somme des sev F_1 et F_2 l'ensemble noté $F_1 + F_2$ défini par:

$$F_1 + F_2 = \{x + y / x \in F_1 \text{ et } y \in F_2\}$$

1.4.3 Somme directe de deux sous espaces vectoriels

Définition 1.4.4 *On appelle somme directe la somme, notée $F_1 \oplus F_2$:*

$F_1 \oplus F_2 = F_1 + F_2$ *et* $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.

Remarque 2 *Si $F_1 \oplus F_2 = E$, on dit que F_1 et F_2 sont supplémentaires.*

Proposition 1.4.2 *Soit E un ev sur K et F_1 et F_2 deux sev de E.*

Si $F = F_1 \oplus F_2$ *alors* $\forall z \in F, \exists! x \in F_1$ *et* $\exists! y \in F_2$ *tel que* $z = x + y$.

Preuve. 1)($\Longrightarrow$)On suppose $\exists z \in F$ tel que $\exists x, x' \in F_1$ et $\exists y, y' \in F_2$ avec $z = x+y = x'+y'$

Donc $x - x' = y' - y$.

Et $x - x' \in F_1$ et $y' - y \in F_2$.

Sachant que $F = F_1 \oplus F_2$ c'est à dire $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.

Donc $x - x' = y' - y = 0$. ■

Exemple: Dans $\mathbb{R}^3$, les deux s.e.v suivants:

$F = \{(x, y, z)\,; x = y = z\}$ et $G = \{(x, y, 0)\,; x, y \in \mathbb{R}\}$

sont supplémentaires. En effet:

a) On a: $\mathbb{R}^3 = F + G$ car	$1) F \subset \mathbb{R}^3$ et $G \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow F + G \subset \mathbb{R}^3$.
	$2) \forall u \in \mathbb{R}^3, u = (x, y, z)$
	$= (z, z, z) + (x - z, y - z, 0) \in F + G$
	$\Rightarrow \mathbb{R}^3 \subset F + G$
b)1) on $0_E \in F$ et $0_E \in G$	car F et G sont deux s.e.v de E
	$\Rightarrow 0_E \in F \cap G \Rightarrow \{0_E\} \subset F \cap G$.
2) si $u \in F \cap G$	$\Rightarrow u \in F$ et $u \in G$
	$\Rightarrow u = (x, x, x)$ et $u = (x, y, 0)$
	$\Rightarrow x = y$ et $x = 0$
	$\Rightarrow u = (0, 0, 0)$
	$\Rightarrow F \cap G \subset \{0_E\}$.

Proposition 1.4.3 *Soit E un K-ev de dimension finie n.*

1) Tout sev F_1 admet au moins un sous-espace supplémentaire,

c'est-à-dire qu'il existe un sev F_2 tq $E = F_1 \oplus F_2$.

2) Soit $F_1 \neq \emptyset$ et $F_2 \neq \emptyset$ deux sev de E et soit B_1 une base de F_1

et B_2 une base de F_2. La famille $\{B_1, B_2\}$ est une base ssi $E = F_1 \oplus F_2$.

Corollaire 1.4.1 *Soit E un K-ev de dimension finie*

$$E = F_1 \oplus F_2 \text{ ssi } \begin{cases} F_1 \cap F_2 = \{0\} \\ \dim E = \dim F_1 + \dim F_2. \end{cases}$$

Proposition 1.4.4 *Soit E un $K-ev$ de dimension finie et F_1 et F_2 deux sev de E et $E = F_1 + F_2$ alors :* $\dim E = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim (F_1 \cap F_2)$.

Exemples:

1) l'ensemble des suites convergentes est un sous-espace de l'ensemble des suites réelles ou complexes.

2) $A = \{(x, y, z)\,; x = y = z\}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$.

3) $B = \{(x, y, 1)\}$ n'est pas un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ car $(x, y, 1) \in B$ mais $3\,(x, y, 1) = (3x, 3y, 3) \notin B$.

Proposition 1.4.5 *Si F est un s.e.v de E alors il contient l'élément neutre de E.*

Preuve. *F est un s.e.v de $E \Rightarrow F \neq \varnothing \Rightarrow \exists u \in F \Rightarrow$ si $\alpha = 0$ alors d'après* 3) $0_E \in F$. ■

Remarques:

0 est l'élément neutre de $\mathbb{R}$.

$(0, 0)$ est l'élément neutre de $\mathbb{R}^2$.

$(0, 0, 0)$ est l'élément neutre de $\mathbb{R}^3$.

Le polynôme nul est l'élément neutre de l'ensemble des polynômes.

La fonction nulle est l'élément neutre de l'ensemble des fonctions.

Donc d'après la proposition pour montrer que $F \neq \varnothing$,

c'est pratique de voir l'élément neutre par exemple $(0, 0, 0) \notin B$

nous donne B n'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

1.5 Intersection et la réunion de deux sous-espaces:

L'intersection de deux sous-espaces vectoriels (et donc d'un nombre fini) de E est un s.e.v de E.

En effet: soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E alors:

1) $0_E \in F$ et $0_E \in G \Rightarrow 0_E \in F \cap G \Rightarrow F \cap G \neq \varnothing$.

2) $\forall u, v \in F \cap G \Rightarrow u \in F, v \in F$

et $u \in G, v \in G \Rightarrow u + v \in F$ et $u + v \in G$,

car F et G sont tous les deux des s.e.v de $E \Rightarrow u + v \in F \cap G$.

3) $\forall \alpha \in \Bbbk, \forall u \in F \cap G \Rightarrow u \in F$

et $u \in G \Rightarrow \alpha u \in F$ et $\alpha u \in G \Rightarrow \alpha u \in F \cap G$.

Conclusion: $F \cap G$ est un s.e.v de E.

Par contre la réunion de deux sous-espaces vectoriels de E n'est plus un s.e.v de E. En effet:

Exemple1: Soient $A = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(0, y), y \in \mathbb{R}\}$ deux s.e.v de $\mathbb{R}^2$car par exemple pour l'ensemble A on a:

1) $(0, 0) \in A \Rightarrow A \neq \varnothing$.

2) $\forall u, v \in A \Rightarrow u = (a, 0), v = (b, 0) \Rightarrow u + v = (a + b, 0) \in A$.

3) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in A \Rightarrow u = (a, 0) \Rightarrow \alpha u = (\alpha a, 0) \in A$.

Conclusion: A est un s.e.v de $\mathbb{R}^2$.

de même pour l'ensemble B.

Alors $u = (1, 0) \in A \subset A \cup B$ et $v = (0, 2) \in B \subset A \cup B$

mais $u + v = (1, 2) \notin A \cup B$

c'est à dire $A \cup B$ n'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}^2$.

Exemple2: Soient $E = \{2k, k \in \mathbb{Z}\}$ et $F = \{3k, k \in \mathbb{Z}\}$ deux s.e.v de $\mathbb{Z}$ car par exemple pour l'ensemble E on a:

1) $0 \in E \Rightarrow E \neq \varnothing$.

2) $\forall u, v \in E \Rightarrow u = 2k, v = 2k' \Rightarrow u + v = 2(k + k') \in E$.

3) $\forall \alpha \in \mathbb{Z}, \forall u \in E \Rightarrow u = 2k \Rightarrow \alpha u = 2(\alpha K) \in E$.

Conclusion: E est un s.e.v de $\mathbb{Z}$.

de même pour l'ensemble F.

Alors $u = 2 \in E \subset E \cup F$ et $v = 3 \in F \subset E \cup F$ mais $u + v = 5 \notin E \cup F \Rightarrow$

$E \cup F$ n'est pas un s.e.v de $\mathbb{Z}$.

Dépendance

Exemple:

Dans $E = \mathbb{R}_2[x]$ (l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égale à 2 et à coefficients réels), les fonctions f_1, f_2, f_3 définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par:

$$f_1(x) = x^2 + 1, f_2(x) = x^2 - 1 \text{ et } f_3(x) = x^2. \text{ sont liées.}$$

En effet: soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que:$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases}$

d'où $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{\lambda_3}{2}$ il y a donc une infinité de solutions $\left(-\frac{\lambda_3}{2}, -\frac{\lambda_3}{2}, \lambda_3\right)$ avec λ_3 réel arbitraire par exemple:$(1, 1, -2)$.

Indépendance

Exemple:

Dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $A = (0, 1, 3), B = (2, 0, -1)$ et $C = (2, 0, 1)$ sont libres car:

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\ \alpha A + \beta B + \gamma C = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2\beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha = 0 \\ 3\alpha - \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Famille génératrice ou systéme générateur

Exemple:

Dans $\mathbb{R}^2$ les deux vecteurs $u = (2, 3)$ et $v = (-1, 5)$ est une famille génératrice car:

$$\forall w \in \mathbb{R}^2\ \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ tel que: } w = (x, y) = \lambda_1 u + \lambda_2 v = \lambda_1(2, 3) + \lambda_2(-1, 5) = (2\lambda_1 - \lambda_2, 3\lambda_1 + 5\lambda_2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 = x \\ 3\lambda_1 + 5\lambda_2 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{5x+y}{13} \\ \lambda_2 = \frac{-3x+2y}{13} \end{cases} \text{ donc } (\lambda_1, \lambda_2) \text{ existe pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Base

Exemple:

Dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $u=(2,3,0)$, $v=(1,-1,1)$ et $w=(-1,3,5)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Dimension d'un espace vectoriel

Exemple: $\dim \mathbb{R}^2 = 2$

Lien entre la dimension et la somme directe

Exemple: Dans $\mathbb{R}^3$les deux s.e.v suivants:

$F=\{(x,y,z)\,;x=y=z\}$ et $G=\{(x,y,0)\,;x,y\in\mathbb{R}\}$ sont supplémentaires.

En effet:

$$\begin{aligned}
\forall u &\in F, u=(x,x,x)=x\,(1,1,1)\Rightarrow (1,1,1) \text{ est une base de } F\Rightarrow \dim F=1\\
\forall v &\in F, v=(x,y,0)=x\,(1,0,0)+y\,(0,1,0)\Rightarrow \{(1,0,0),(0,1,0)\} \text{ engendre } G \text{ et libre c}\\
\alpha\,(1,0,0)+\beta\,(0,1,0) &= 0\Rightarrow \alpha=\beta=0\Rightarrow \{(1,0,0),(0,1,0)\} \text{ est une base de } G\\
&\Rightarrow \dim G=2\Rightarrow \dim\mathbb{R}^3=\dim F+\dim G=3
\end{aligned}$$

Exercice 1. Les sous-ensembles suivants sont-ils des s-ev de $\mathbb{R}^2$?

$$\begin{aligned}
1)\ A &= \left\{\left(x,x^2\right)\,;x\in\mathbb{R}\right\}\\
2)\ B &= \{(x,ax+b)\,;x\in\mathbb{R}\},\\
&\quad a \text{ et } b \text{ sont des paramètres réels.}\\
3)\ C &= \left\{(x,y)\,;x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}\ x^2+y^2\leq 1\right\}
\end{aligned}$$

Correction:

Les sous-ensembles suivants sont-ils des s-ev de $\mathbb{R}^2$?

$$\begin{aligned}
1)\ A &= \left\{\left(x,x^2\right)\,;x\in\mathbb{R}\right\}\\
2)\ B &= \{(x,ax+b)\,;x\in\mathbb{R}\},\\
&\quad a \text{ et } b \text{ sont des paramètres réels.}\\
3)\ C &= \left\{(x,y)\,;x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}\ x^2+y^2\leq 1\right\}
\end{aligned}$$

1) $A = \left\{\left(x, x^2\right); x \in \mathbb{R}\right\}$ n'est pas un sous espace vectoriel car $(2,4), (3,9) \in A$ mais $(2,4) + (3,9) = (5,13) \notin A$.

2) $B = \{(x, ax + b); x \in \mathbb{R}\}$

1er cas: Si $b \neq 0$ on a $(0,0) \notin B$ alors B n'est pas un sous espace vectoriel car chaque s.e.v contient l'élément neutre de l'espace.

2ème cas: Si $b = 0$

$$B = \{(x, ax); x \in \mathbb{R}\}$$

a) $(0,0) \in B \Rightarrow B \neq \varnothing$.

b) Si $v_1, v_2 \in B \Rightarrow v_1 = (x_1, ax_1)$ et $v_2 = (x_2, ax_2) \Rightarrow v_1 + v_2 = (x_1 + x_2, a(x_1 + x_2)) \in B$.

c) Si $v_1 \in B, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha v_1 = (\alpha x_1, a(\alpha x_1)) \in B$

Alors B est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

3) $C = \left\{(x, y); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\ x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ n'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}^2$

Car: $(1,0) \in C$ mais $4 \cdot (1,0) = (4,0) \notin C$.

Exercice 2. Soit:

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ avec: } x^2 + 2y^2 + z^2 + 2y\ (x + z) = 0\right\}$$

E ainsi défini est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Si oui donner sa dimension.

Correction:

Soit:

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ avec: } x^2 + 2y^2 + z^2 + 2y\ (x + z) = 0\right\}$$

E ainsi défini est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Si oui donner sa dimension.

$$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 + z^2 + 2y(x + z) &= 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2yx + z^2 + y^2 + 2yz = 0 \\ &\Rightarrow (x + y)^2 + (y + z)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -y \text{ et } z = -y \\ &\Rightarrow E = \left\{(-y, y, -y) \in \mathbb{R}^3 \text{ avec: } y \in \mathbb{R}\right\} \end{aligned}$$

1) a) $(0,0,0) \in E \Rightarrow E \neq \varnothing$

b) Si $v_1, v_2 \in E \Rightarrow v_1 = (-y_1, y_1, -y_1)$ et $v_2 = (-y_2, y_2, -y_2) \Rightarrow v_1 + v_2 = (-(y_1 + y_2), (y_1 + y_2), -(y_1 + y_2)$ E

c) Si $v \in E, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha v = (-(\alpha y), (\alpha y), -(\alpha y)) \in E$

Alors E est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

2) Si $v \in E$ alors $v = (-y, y, -y) = y(-1, 1, -1)$ ce qui implique que le vecteur $(-1, 1, -1)$ engendre E.

Puisque on a qu'un seul vecteur alors $B = \{(-1, 1, -1)\}$ est une base de $E \Rightarrow \dim E = 1$.

Exercice 3. Soient:

$$E_1 = \left\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3; a = c\right\} \text{ et } E_2 = \left\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3; a + b + c = 0\right\} \quad \text{et } E_3 = \{(0, 0, c); c \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que: $E_i, i = 1, 2, 3$ sont des s.ev de $\mathbb{R}^3$.

Montrer que:$\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$, $\mathbb{R}^3 = E_2 + E_3$ et $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_3$.

Dans quel cas la somme est directe.

Correction:

Soient:

$$E_1 = \left\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3; a = c\right\} \text{ et } E_2 = \left\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3; a + b + c = 0\right\} \quad \text{et } E_3 = \{(0, 0, c); c \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que: $E_i, i = 1, 2, 3$ sont des s.ev de $\mathbb{R}^3$.

Pour E_1 par exemple:

a) $(0,0,0) \in E_1 \Rightarrow E_1 \neq \varnothing$

b) Si $v_1, v_2 \in E_1 \Rightarrow v_1 = (x_1, y_1, x_1)$ et $v_2 = (x_2, y_2, x_2) \Rightarrow v_1 + v_2 = (x_1 + x_2, (y_1 + y_2), x_1 + x_2) \in E_1$

c) Si $v \in E_1, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha v = (\alpha x, \alpha y, \alpha x) \in E_1$

Alors E_1 est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

De même pour les deux dernier cas.

Montrer que: $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$, $\mathbb{R}^3 = E_2 + E_3$ et $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_3$.

a) Montrons que: $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$?

On a: $E_1 \subset \mathbb{R}^3$ et $E_2 \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow E_1 + E_2 \subset \mathbb{R}^3$

Si $v \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} v(x,y,z) &= (\alpha,\beta,\alpha)+(\delta,\theta,-\delta-\theta) \\ &= (\alpha+\delta,\beta+\theta,\alpha-\delta-\theta) \\ &\Rightarrow \begin{cases} x=\alpha+\delta \\ y=\beta+\theta \\ z=\alpha-\delta-\theta \end{cases} \end{aligned}$$

Il suffit de prendre par exemple:

$$\begin{aligned} \beta &= 0 \Rightarrow \theta = y \\ &\Rightarrow \begin{cases} x=\alpha+\delta \\ z=\alpha-\delta-y \end{cases} \\ &\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}(x+y+z) \\ &\Rightarrow \delta = \frac{1}{2}(x-y-z) \end{aligned}$$

D'où $v=(x,y,z)=\left(\frac{1}{2}(x+y+z),0,\frac{1}{2}(x+y+z)\right)+\left(\frac{1}{2}(x-y-z),y,-\frac{1}{2}(x-y-z)-y\right) \in E_1+E_2$

b) Montrons que: $\mathbb{R}^3 = E_1+E_3$?

On a: $E_1 \subset \mathbb{R}^3$ et $E_3 \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow E_1+E_3 \subset \mathbb{R}^3$

Si $v \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow v=(x,y,z)=(x,y,x)+(0,0,z-x) \in E_1+E_3$.

c) Montrons que: $\mathbb{R}^3 = E_2+E_3$?

On a: $E_3 \subset \mathbb{R}^3$ et $E_2 \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow E_2+E_3 \subset \mathbb{R}^3$

Si $v \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow v=(x,y,z)=(x,y,-x-y)+(0,0,z+x+y) \in E_2+E_3$.

D'où $\mathbb{R}^3 = E_1+E_2$, $\mathbb{R}^3 = E_2+E_3$ et $\mathbb{R}^3 = E_1+E_3$.

Dans quel cas la somme est directe.

A) Il suffit de vérifier si on a $E_1 \cap E_2 = \{(0,0,0)\}$?

a) $(0,0,0) \in E_1 \cap E_2$.

b) Si $v \in E_1 \cap E_2 \Rightarrow v \in E_1$ et $v \in E_1 \Rightarrow v=(a,b,a)$ et $v=(a,b,-a-b) \Rightarrow a=-a-b \Rightarrow b=-2a$

Donc par exemple $(1,-2,1) \in E_1 \cap E_2 \Rightarrow E_1 \cap E_2 \neq \{(0,0,0)\}$

ce qui implique que la somme n'est pas directe.

B) Il suffit de vérifier si on a $E_2 \cap E_3 = \{(0,0,0)\}$?

a) $(0,0,0) \in E_2 \cap E_3$.

b) Si $v \in E_2 \cap E_3 \Rightarrow v \in E_2$ et $v \in E_3 \Rightarrow v = (a,b,-a-b)$ et $v = (0,0,c) \Rightarrow a = b = c = 0 \Rightarrow v = (0,0,0)$

$\Rightarrow E_1 \cap E_2 = \{(0,0,0)\}$

ce qui implique que la somme est directe.

C) Il suffit de vérifier si on a $E_1 \cap E_3 = \{(0,0,0)\}$?

a) $(0,0,0) \in E_1 \cap E_3$.

b) Si $v \in E_1 \cap E_3 \Rightarrow v \in E_2$ et $v \in E_3 \Rightarrow v = (a,b,a)$ et $v = (0,0,c) \Rightarrow a = b = c = 0 \Rightarrow v = (0,0,0)$

$\Rightarrow E_1 \cap E_3 = \{(0,0,0)\}$

ce qui implique que la somme est directe.

Exercice 4. Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les sous ensembles suivants:

$$E_1 = \left\{(a+b, b-3a, a) \in \mathbb{R}^3 / \ a,b \in \mathbb{R}\right\} \quad \text{et } E_2 = \left\{(c,-2c,c) \in \mathbb{R}^3 / \ c \in \mathbb{R}\right\}.$$

avec E_2 est un s-ev de $\mathbb{R}^3$.

Montrer que E_1 est un s-ev de $\mathbb{R}^3$.

Déterminer une base B_1 de E_1 et une base B_2 de E_2.

En déduire $\dim E_1$ et $\dim E_2$.

Montrer que: $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$.

Déduire si la somme est directe ou non.

Correction:

Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les sous ensembles suivants:

$$E_1 = \left\{(a+b, b-3a, a) \in \mathbb{R}^3 / \ a,b \in \mathbb{R}\right\} \quad \text{et } E_2 = \left\{(c,-2c,c) \in \mathbb{R}^3 / \ c \in \mathbb{R}\right\}.$$

Montrons que E_1 est un s-ev de $\mathbb{R}^3$?.

a) $E_1 \neq \emptyset$?

$(0,0,0) \in E_1 \Rightarrow E_1 \neq \emptyset$

b) $\forall \;\; u_1, u_2 \in E_1 \Rightarrow u_1 + u_2 \in E_1$?

Soient $\;u_1, u_2 \in E_1 \Rightarrow u_1 = (a_1 + b_1, b_1 - 3a_1, a_1)$ et $u_2 = (a_2 + b_2, b_2 - 3a_2, a_2)$

$\Rightarrow u_1 + u_2 = ((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2), (b_1 + b_2) - 3(a_1 + a_2), (a_1 + a_2)) \in E_1$

c) $\forall \;\; u \in E_1, \forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha u \in E_1$?

Soient $\;u \in E_1$ et $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow u = (a + b, b - 3a, a)$

$\Rightarrow \alpha u = (\alpha a + \alpha b, \alpha b - 3\alpha a, \alpha a) \in E_1$

Conclusion: E_1 est un s-ev de $\mathbb{R}^3$.

Déterminons une base B_1 de E_1 et une base B_2 de E_2.

a)

$$u \in E_1 \Rightarrow u = (a + b, b - 3a, a) = a\ (1, -3, 1) + b\ (1, 1, 0)$$

alors $B_1 = \{(1, -3, 1), (1, 1, 0)\ \}$ engendre E_1. mais:

$$\alpha(1, -3, 1) + \beta(1, 1, 0) = (0, 0, 0) \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

alors les deux vecteurs de B_1 sont linéairements indépendants.

Ce qui implique que $B_1 = \{\ (1, -3, 1), (1, 1, 0)\}$ est une base de E_1.

b)

$$u \in E_2 \Rightarrow u = (c, -2c, c) = c\ (1, -2, 1)$$

alors $B_2 = \{\ (1, -2, 1)\}$ engendre E_2. mais:

$$\alpha(1, -2, 1) = (0, 0, 0) \Rightarrow \alpha = 0$$

Ce qui implique que $B_2 = \{\ (1, -2, 1)\}$ est une base de E_2.

En déduire $\dim E_1$ et $\dim E_2$.

$$\dim E_1 = 2 \quad \text{et} \quad \dim E_2 = 1.$$

Montrer que: $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$.

a)" $\supset$**"** $E_1 \subset \mathbb{R}^3$ et $E_2 \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow E_1 + E_2 \subset \mathbb{R}^3$.

b) **"**$\subset$**"** soit $u \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow u = (x, y, z) = (a + b, b - 3a, a) + (c, -2c, c)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = a + b + c \\ y = b - 3a - 2c \\ z = a + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = x - z \\ y = x - z - a - 2z \Rightarrow a = -y + x - 3z \\ c = z - a = z - (-y + x - 3z) = -x + y + 4z \end{cases}$$

$$\Rightarrow u = (x, y, z) = (2x - y - 4z, -2x + 3y - 8z, -y + x - 3z) + (-x + y + 4z, -2(-x + y + 4z), -x + y + 4z)$$

$$\in E_1 + E_2 \text{ d'où: } \mathbb{R}^3 = E_1 + E_2.$$

On déduire que: $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$.

$$\begin{aligned} \dim E_1 &= 2 \quad \text{et} \quad \dim E_2 = 1 \\ &\Rightarrow \dim E_1 + \dim E_2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3 = 3 \\ \text{ou bien on a} &: \mathbb{R}^3 = E_1 + E_2.. \end{aligned}$$

$E_1 \cap E_2 = \{(0,0,0)\}$ car: $\{(0,0,0)\} \subset E_1 \cap E_2$

car E_1 et E_2 sont deux sous espaces vectoriels.

De plus si: $u \in E_1 \cap E_2 \Rightarrow u = (a + b, b - 3a, a)$ et $u = (c, -2c, c)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = c \\ b - 3a = -2c \\ a = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbb{R}^3 = E_1 + E_2 \\ E_1 \cap E_2 = \{(0,0,0)\} \end{cases} \text{ ou bien } \begin{cases} \dim E_1 + \dim E_2 = \dim \mathbb{R}^3 \\ E_1 \cap E_2 = \{(0,0,0)\} \end{cases}$$

la somme est directe $\left(\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2\right)$.

Exercice 5

Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Les

sous-ensembles suivants de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

L'ensemble des fonctions bornées. L'ensemble des fonctions non bornées. L'ensemble des fonctions continues. L'ensemble des fonctions positives. L'ensemble des fonctions qui s'annulent en 0. L'ensemble des fonctions périodiques. L'ensemble des fonctions qui tendent vers 0 en $+\infty$. L'ensemble des fonctions f continues telles que $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Exercice 6 On considère $\mathbb{R}^n$, l'espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) des suites réelles. Dites lesquels, parmi les sous-ensembles suivants, sont des sous-espaces vectoriels :

$\{(u_n) \in \mathbb{R}^n \mid u_0 = a\},\ a \in \mathbb{R}$ $\{(u_n) \in \mathbb{R}^n \mid u_{n+1} = 3\,u_n\}$ $\{(u_n) \in \mathbb{R}^n \mid u_{n+2} = u_{n+1} - u_n\}$ [e]] $\{(u_n) \in \mathbb{R}^n \mid u_{n+1} = u_n^2\}$

Exercice 7 On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$ des polynômes à coefficients réels.

$\mathbb{R}_3[X] = \{P \in \mathbb{R} \mid \deg(P) \leq 3\}$ est-il un sous-espace vectoriel ? $E = \{P \in \mathbb{R} \mid \deg(P) = 3\}$ est-il un sous-espace vectoriel ? Déterminer le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ contenant E.

Exercice 8 Parmi les sous-ensembles suivants, trouver ceux qui sont des sous-espaces vectoriels :

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x^2 + y^2 = 1\} \\
E_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x + y = 1\} \\
E_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, 2x + y = 0\} \\
E_4 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x = y = 2z\} \\
E_5 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x = 0\} \\
E_6 &= E_4 \cup E_5 \\
E_7 &= E_4 \cap E_5 \\
E_8 &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\,;\, x + y - z = 0 et x = t\} \\
E_9 &= \{P \in \mathbb{R}_2[X]\,;\, P(3) = 0\}. \\
E_{10} &= \{P \in \mathbb{R}\,;\, d^\circ P \geq 2\}
\end{aligned}
$$

Exercice 9 Les ensembles suivants, munis de l'addition et de la multiplication par un réel,

sont-ils des espaces vectoriels ?

$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\}$;

$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 1\}$;

$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}\}$;

$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 1 \end{cases}\}$;

L'ensemble des matrices 2×5 à coefficients réels ; $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2 ; L'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré exactement 2 ;

$$E = \{P(X) \in \mathbb{R}^2[X] \mid P'(1) = 0\}.$$

Exercice 10 Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels.

Montrer que $F + G$ et $F \cap G$ sont des espaces vectoriels. $F \cup G$ est-il un espace vectoriel ?

Exercice 11

Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que les sous-ensembles $\mathcal{F}_p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (fonctions paires) et $\mathcal{F}_i(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (fonctions impaires) sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Expliciter la décomposition de la fonction exponentielle sous la forme $f + g$ avec $f \in \mathcal{F}_p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{F}_i(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Idem avec $h(x) = x^4 + 2x^3 - 1$, et $k(x) = \sin(x^2) - 2\cos(x^3)$.

Exercice 12 Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y + z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - y = 0$ et $z = 0\}$. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 13 Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y + z = 0\}$, $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = y = z\}$.

Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la dimension de F et celle de G. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$. Montrer que

$$H = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}.$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Quelle est sa dimension ? Déterminer un supplémentaire de H dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 14 Soit E_1 le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $(1; 2; 0; 1)$ et $(0; 1; 1; 3)$.

Soit E_2 le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $(1;1;1;0)$.

Déterminer $E_1 \cap E_2$. Donner une base de $E_1 + E_2$.

Chapitre 2

Applications linéaires

Définition 2.0.1 *Soient $(E,+,.)$ et $(F,+,.)$ deux K-espaces vectoriels. On dit que $f : E \to F$ est linéaire si :*

1) $\forall x, y \in E$, on a $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

2) $\forall \lambda \in K, \forall x \in E$, on a $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

On note $L(E,F)$ l'ensemble des applications de E dans F.

Définition 2.0.2 *Soit $f : E \to F$. On a: f est linéaire, si et seulement si ,$\forall \lambda, \mu \in K, \forall x, y \in E$, $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.*

Exemple 10 *Montrons que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y) = (x+y, x-y, 2y)$ est une application linéaire. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, et $a = (x,y), b = (x\prime, y\prime) \in \mathbb{R}^2$,*

$$\begin{aligned} f(\lambda a + \mu b) &= f(\lambda x + \mu x\prime, \lambda y + \mu y\prime) \\ &= (\lambda x + \mu x\prime + \lambda y + \mu y\prime, \lambda x + \mu x\prime - \lambda y + \mu y\prime, 2\lambda y + 2\mu y\prime) \\ &= \lambda(x+y, x-y, 2y) + \mu(x\prime + y\prime, x\prime - y\prime, 2y\prime) \\ &= \lambda f(a) + \mu f(b). \end{aligned}$$

2.1 Applications linéaires particulières

2.1.1 Formes linéaires

Définition 2.1.1 *On appelle forme linéaire sur un K-espace vectoriel E, toute application linéaire de E dans K. On note E^*, au lieu de $L(E, K)$, l'ensemble des formes linéaires sur E.*

2.1.2 Endomorphisme

Définition 2.1.2 *On appelle endomorphisme de E, toute application linéaire de E dans lui même. On note L(E), au lieu de L(E, E), l'ensemble des endomorphismes de E.*

2.1.3 Isomorphisme

Définition 2.1.3 *On appelle isomorphisme d'un K-espace vectoriel E vers un K-espace vectoriel F toute application linéaire bijective de E vers F .*

2.1.4 Automorphisme

Définition 2.1.4 *On appelle automorphisme de E, toute application linéaire bijective de E.*

Exemple:

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par: $f\ (x, y) = (x - y, x + y)$. Alors f est un automorphisme.

2.2 Noyau et image d'une application linéaire

Définition 2.2.1 *Soit $f : E \to F$ une application linéaire.*

1) On appelle image de f l'ensemble notéImf

$$Imf = f(E) = \{y \in F/\exists x \in E \text{ tel que } y = f(x)\}.$$

2) On appelle noyau de f l'ensemble noté $kerf$

$$kerf = f^{-1}(\{0\}) = \{x \in E/f(x) = 0\}.$$

Proposition 2.2.1 *1) Im f est un sous-espace vectoriel de F .*

(2) ker f est un sous-espace vectoriel de E.

Exemple 11 *Déterminons le noyau et l'image de l'aaplication linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f : (x, y) \to (x-y, x-y)$. Soit $a = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a $kerf = \{x, x)|x \in \mathbb{R}\}$ et $Imf = \{(x, x)|x \in \mathbb{R}\}$.*

Théorème 2.2.1 *Si $f : E \to F$ est une application linéaire alors*

1) f est surjective, si et seulement si, $Imf = F$

2) f est injective, si et seulement si, $kerf = \{0_E\}$

Preuve. 1) f est surjective $\Longleftrightarrow \forall y \in F/\exists x \in E$ tel que $y = f(x)$

$\Longleftrightarrow F = \text{Im } f$

2) f est injective, si et seulement si, $kerf = \{0_E\}$.

On suppose f est injective et on montre $kerf = \{0_E\}$

Soit $x \in kerf$ donc $f(x) = 0 = f(0_E) \Longrightarrow x = 0_E$.

On suppose $kerf = \{0_E\}$ et on montre f est injective

Soient $x, x' \in E$, on a:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x') \Longrightarrow f(x) - f(x') = 0 \\ &\Longrightarrow f(x - x') = 0 \\ &\Longrightarrow x - x' = 0 \\ &\Longrightarrow x = x'. \end{aligned}$$

■

2.3 Rang d'une application linéaire

Soit f une application linéaire de E dans F

Définition 2.3.1 *Le rang d'une application linéaire f est égal à la dimension de $Im(f)$:* $dim(Imf) = rg\,(f)$

Proposition 2.3.1 *1) on a toujours $rg(f) \leq dimF$*

2) f est surjective ssi $rg(f) = dimF$

3) f est injective ssi $rg(f) = dimE$

4) f est bijective ssi $rg(f) = dimE = dimF$

2.3.1 Théorème du rang

Soit f une application linéaire de E dans F avec $dimE = n$, alors $dimE = dim(Kerf) + dim(Imf)$.

Exemple 12 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f\,(x, y) = x + y$

$Kerf = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = -y\right\} = \{x\,(1, -1)\,/x \in \mathbb{R}\}$

$Imf = \left\{z \in \mathbb{R} / \exists\,(x, y) \in \mathbb{R}^2, z = x + y\right\} = \mathbb{R}.$

$dimE = 2, \dim(Kerf) = 1, \dim(Imf) = 1.$

2.4 Composée d'applications linéaires

Soient E, F et W des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F, g : F \to W$ deux aplications linéaires

Proposition 2.4.1 *La composée de deux applications linéaires est encore linéaire.*

Preuve. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u, v \in E, (g \circ f)(\lambda u + \mu v) = \lambda(g \circ f)(u) + \mu(g \circ f)(v)$.

On a $(g \circ f)(\lambda u + \mu v) = g(f(\lambda u + \mu v))$(par définition de la composition)

$= g(\lambda f(u) + \mu f(v))$ (par linéarité de f)

$= \lambda g(f(u)) + \mu g(f(v))$ (par linéarité de g)

$= \lambda(g \circ f)(u) + \mu(g \circ f)(v)$ (par définition de la composition). ■

Exemple 13 *Calculez la composée $g \circ f$ avec*

$g : (x, y) \to (x + y, x - y)$ *et* $f : (x, y, z) \to (3x + 5y + 7z, 2x + 2y + 2z)$

On calcule $(g \circ f)(x, y, z) = (g(f(x, y, z))$ *(par définition de la composition)*

$= g(3x + 5y + 7z, 2x + 2y + 2z)$ *(par définition de f)*

$= (5x + 7y + 9z, x + 3y + 5z)$ *(par définition de g).*

La composée $g \circ f$ est donc

$(x, y, z) \to (5x + 7y + 9z, x + 3y + 5z)$

Proposition 2.4.2 *Le rang d'une application linéaire ne change pas quand on la compose*

(1) a droite par une application linéaire surjective ;

(2) a gauche par une application linéaire injective ;

(3) a droite ou a gauche par une application linéaire bijective.

2.5 Inverse d'une application linéaire bijective, automorphisme.

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une aplication linéaire

Proposition 2.5.1 *Si f est bijective, dans ce cas l'application réciproque f^{-1} est egalement linéaire.*

Preuve. $f^{-1}(\lambda u + \mu v) = \lambda f^{-1}(u) + \mu f^{-1}(v)$
$x = f^{-1}(u), y = f^{-1}(v)$
$\lambda u + \mu v = \lambda f(x) + \mu f(y) = f(\lambda x + \mu y)$
$f^{-1}(\lambda u + \mu v) = \lambda x + \mu y = \lambda f^{-1}(u) + \mu f^{-1}(v)$. ■

Proposition 2.5.2 *Si l'aplication linéaire f une automorphisme alors f^{-1} est une automorphisme.*

Exemple 14 $f : (x, y) \to (x + y, x - y)$

f est bijective

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x' + y'}{2} \\ y = \dfrac{x' - y'}{2} \end{cases}$$

donc $f^{-1} : (x, y) \to \left(\dfrac{x + y}{2}, \dfrac{x - y}{2} \right)$.

Définition 2.5.1 ***Exemple:*** *l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par:*

$$f\ \ (x, y, z) = (x - y, y + 2z)$$

est une application linéaire. Alors le noyau de f est:

$$\ker f = \{u \in E, f\ \ (u) = 0_{\mathbb{R}^2}\}$$

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a:

$$\begin{aligned} u \quad \in \quad & \ker f \Leftrightarrow f\ \ (u) = (0, 0) \Leftrightarrow (x - y, y + 2z) = (0, 0) \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} x - y = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = -\frac{y}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow u = y\left(1, 1, -\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

et donc $\ker f$ *est le s.e.v engendré par le vecteur* $\left(1, 1, -\frac{1}{2}\right)$ *noté:*

$$\ker f = Vect\left\{\left(1, 1, -\frac{1}{2}\right)\right\}.$$

2.6 Injectivité d'une application linéaire:

Soient E, F deux $\Bbbk$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Notons que f est injective si et seulement si:

$$\forall x_1, x_2 \in E;\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f\ (x_1) \neq f\ (x_2)\,.\ \text{ou bien } f\ (x_1) = f\ (x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Mais pour les applications linéaires, il suffit de montrer que: $\ker f = \{0_E\}$.

En fait on a:

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow \ker f = \{0_E\}\,.$$

Exemple:

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par:

$$f\ (x, y) = (x - y, y + x)$$

Alors f est injective car:

$$\begin{aligned} u &= (x, y) \in \ker f \Leftrightarrow f\ (u) = 0_{\mathbb{R}^2}. \Leftrightarrow (x - y, y + x) = (0, 0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ y + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0 \end{aligned}$$

donc $\ker f = \{(0, 0)\}$, et par suite f est injective.

Exemple:

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, $B = \left(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ une base de E et f l'endomorphisme de E défini par:

$$f\ \left(\vec{i}\right) = -\vec{i} + \vec{k},\ f\ \left(\vec{j}\right) = \vec{j} + \vec{k}\ , f\ \left(\vec{k}\right) = \vec{i} + \vec{j}.$$

Alors l'image de f est définie comme suit:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= Vect\left\{f\ \left(\vec{i}\right), f\ \left(\vec{j}\right), f\ \left(\vec{k}\right)\right\} \text{ mais } f\ \left(\vec{k}\right) = f\ \left(\vec{j}\right) - f\ \left(\vec{i}\right) \\ &\Rightarrow \operatorname{Im} f = Vect\left\{f\ \left(\vec{i}\right), f\ \left(\vec{j}\right)\right\} = \left\{x\left(-\vec{i} + \vec{k}\right) + y\left(\vec{j} + \vec{k}\right), x, y \in \mathbb{R}\right\} \end{aligned}$$

Exemple:

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par: $f\ (x, y) = (4x - 2y, 6x - 3y)$. Alors on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \{f(x, y) ; x, y \in \mathbb{R}\} = \{(4x - 2y, 6x - 3y) ; x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(2x - y)(2, 3) ; x, y \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(2, 3) ; \alpha \in \mathbb{R}\} \\ &= Vect\{(2, 3)\} \end{aligned}$$

le vecteur $(2, 3)$ est une base de $\operatorname{Im} f$, et par suite $rg\ f = 1$.

2.7 Projecteur

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{k}-$espace vectoriel. On dira que f est un projecteur, si l'on a:

$$\begin{aligned} f \circ f &= f \\ \text{ou bien} \quad &: \quad \operatorname{Im} f \text{ et } \ker f \text{ sont supplémentaires et que: } \forall x \in \operatorname{Im} f \ , f\ (x) = x. \end{aligned}$$

On dira que f est la projection sur $\operatorname{Im} f$ parallèlement à $\ker f$.

Exemple:

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par: $f\ (x, y) = (4x - 2y, 6x - 3y)$. Alors on a :

$$\begin{aligned} (f \circ f)(u) &= f\ (f(u)) = f(x, y) = f\ (4x - 2y, 6x - 3y) \\ &= (4x - 2y, 6x - 3y) = f(u) \end{aligned}$$

et par suite f est un projecteur.

2.8 Symétrie

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{k}-$espace vectoriel. On dira que f est une symétrie, si l'on a:

$$\begin{array}{rcl} f \circ f & = & Id_E \\ \text{ou bien} & : & \ker(f - Id_E) \text{ et } \ker(f + Id_E) \text{ sont supplémentaires .} \end{array}$$

On dira que f est la symétrie de E par rapport à $\ker(f - Id_E)$et parallèlement à $\ker(f + Id_E)$.

Exemple:

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par: $f(x, y) = (y, x)$. Alors on a :

$$(f \circ f)(u) = f(f(u)) = f(y, x) = (x, y)$$

Exercice 01:

(1) On considère les applications suivantes définies de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Lesquelles sont linéaires?

a) $f : (x, y) \mapsto (x + 2y, 2x - y)$;

b) $g : (x, y) \mapsto (x + 2y, 2x - y + 1)$;

c) $h : (x, y) \mapsto (x + y, 2xy)$;

d) $k : (x, y) \mapsto \left(x + y, x - y^2\right)$.

(2) Soit f l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par: $f(P) = P(1)$;

montrer que f est une application linéaire. ($\mathbb{R}[X]$: est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et dans le cas général $\mathbb{R}_n[X]$: est l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n et à coefficients réels).

Exercice 02:

(1) Trouver les noyaux des applications linéaires suivantes:

a) $f(x, y) = (4x - 3y, 5x + 4y)$.

b) $g(x, y) = (6x - 4y, 9x - 6y)$.

(2) La même question pour les applications de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définies par:

a) $h\ (x,y,z) = (x+y+z, y, z)$.

b) $k\ (x,y,z) = (y+z, x+y+z, x)$.

Exercice 03:

(1) Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par:

$$f\,(x,y,z) = (x-2y, x+y+2z)$$

f est-elle injective?

(2) La même question pour les applications de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définies ci-dessous:

a) $h\ (x,y,z) = (x+y+z, y, z)$.

b) $k\ (x,y,z) = (y+z, x+y+z, x)$.

Exercice 04:

(1) Déterminer les images des applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ suivantes:

a) $f\ (x,y) = (4x-3y, 5x+4y)$.

b) $g\ (x,y) = (6x-4y, 9x-6y)$.

(2) Soit f l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ définie par: $f\ (P) = P + (1-X)\,P'$.

Déterminer l'image de cette application linéaire.

Exercice 05:

(1) Soit E un espace vectoriel de dimension 3 dont $\left(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ est une base. On considère l'endomorphisme f de E défini par:

$$f\ \left(\vec{i}\right) = -\ \vec{i} + 2\vec{k},\ f\ \left(\ \vec{j}\right) =\ \vec{j} + 2\vec{k}, f\ \left(\ \vec{k}\right) = 2\ \vec{i} + 2\ \vec{j}.$$

Déterminer le rang de f.

(2) Soit E_3 le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, et soit f l'application définie sur E_3 par:

$$f(P) = X^2\ P'' - 4X\ P' + 6P.$$

Déterminer le rang de f.

Exercice 06: Le plan vectoriel V_2 étant rapporté à une base $\left(\vec{i},\ \vec{j}\right)$, on considère l'application linéaire de V_2 dans V_2 définie par:

$$f\ \left(\vec{i}\right) = \frac{1}{2}\ \vec{i} - \frac{1}{4}\ \vec{j},\ f\ \left(\ \vec{j}\right) = -\ \vec{i} + \frac{1}{2}\ \vec{j}.$$

(1) Démontrer que f est un projecteur.

(2) Déterminer l'image et le noyau de f.

(3) Vérifier que $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$ sont supplémentaires dans V_2 et que:

$$\forall x \in \operatorname{Im} f,\ f\ (x) = x.$$

Exercice 07: Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, (e_1, e_2) une base de E et f l'endomorphisme de E défini par:

$$f\ (e_1) = 2e_1 - e_2, f\ (e_2) = 3e_1 - 2e_2.$$

(1) Démontrer que f est une symétrie.

(2) Trouver $E_1 = \ker(f - Id_E)$ et $E_2 = \ker(f + Id_E)$.

Exercice 8 Parmi les applications suivantes, indiquer lesquelles sont linéaires et lesquelles ne le sont pas :

$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 3x$ $\qquad$ $f_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x + y,\ xy)$

$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 3x + 2$ $\qquad$ $f_6 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (x + y,\ x - y,\ 2x)$

$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(x)$ $\qquad$ $f_7 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \mapsto (x + y,\ z,\ x + 1)$

$f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|$ $\qquad$ $f_8 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x\mathrm{e}^y$

Exercice 9 Soient $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (x\,,\, y\,,\, 0)$,

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x - y\,,\, x + y\,,\, x + 2y) \text{ et } h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}(x, y, z) \mapsto x - 3y + 2z\,.$$

Montrer que f, g et h sont linéaires. Déterminer noyau et image dans chaque cas.

Exercice 10 Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans lui-même définie par $f(e_1) = 3e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, $f(e_2) = e_1 + e_2 - e_3 + e_4$, $f(e_3) = e_1 - e_2 + e_3 - e_4$ et $f(e_4) = e_1 + e_2 - e_3 + e_4$.

Calculer $f(x, y, z, t)$ pour $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$. Soit $F = \mathrm{Vect}(e_3, e_4)$. F et $\mathrm{Ker}(f)$ sont-ils supplémentaires ?

Exercice 11 Montrer que les applications usuelles suivantes : symétrie, projection, homothétie, rotation sont linéaires. Déterminer leur image et noyau.

Exercice 12 Soit E_1 la droite de $\mathbb{R}^2$ engendrée par $(1; 1)$, E_2 celle engendrée par $(1; -1)$. Exprimer :

la projection suivant E_1 parallèlement à E_2 ; la projection suivant E_2 parallèlement à E_1 ; la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2.

Exercice 13 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que l'application :

$$\begin{array}{rccc} s & : & F \times G & \to & E \\ & & (x, y) & \mapsto & x + y \end{array}$$

est linéaire. Montrer ensuite que :

s est injective ssi $F \cap G = \{0\}$; s est surjective ssi $F + G = E$; s est un isomorphisme ssi $F \oplus G = E$.

Exercice 14 Soit E un espace vectoriel, et f un endomorphisme de E.

Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) = E$. Montrer que si E est de dimension finie, on a

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E\,.$$

(votre enseignant de TD pourra vous donner des contre-exemples en dimension infinie)

Exercice 15 On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad x^2y''(x) + 2xy'(x) - 12y(x) = 0$$

et l'application $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}, P(X) \mapsto X^2P''(X) + 2XP'(X) - 12P(X)$

Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$. Calculer les images par φ des vecteurs de la base $(1, X, X^2, X^3)$. Déterminer $\text{Ker}(\varphi)$. Donner une solution particulière (non nulle) y_0 de E. Résoudre (E) sur $]0; +\infty[$ (indication : poser $y(x) = y_0(x)z(x)$).

Exercice 16 Considérons un espace vectoriel. La famille composée du seul vecteur nul est-elle libre ?

Exercice 17 Montrer que les vecteurs $(1, 1)$, $(-1, 1)$ et $(1, 2)$ de $\mathbb{R}^2$ sont deux à deux indépendants.

Montrer que ces vecteurs sont liés, et trouver une combinaison linéaire nulle non triviale entre ces vecteurs.

Exercice 18 Donner un exemple d'une famille de 3 vecteurs (u_1, u_2, u_3) de $\mathbb{R}^3$ qui soit liée, mais telle que u_1 ne s'exprime pas comme combinaison linéaire de u_2 et u_3.

Exercice 19 On considère les vecteurs $u_1 = (1, -1, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1)$, $u_3 = (1, 1, 3)$ et $u_4 = (1, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^3$. Montrer que (u_1, u_2, u_4) forme une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées du vecteur u_3 dans cette base.

Exercice 20 Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^5$, on considère les vecteurs $U, V_1, V_2, V_3, V_4, V_5$ définis par $U = (0; 0; -2; 2; 2)$, $V_1 = (1; 0; 1; 1; 0)$, $V_2 = (1; 1; 0; 2; 0)$, $V_3 = (1; 1; 2; 3; 1)$, $V_4 = (1; 1; 3; 0; 2)$ et $V_5 = (0; 1; 0; 0; 3)$. Existent-ils des réels x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 tels que

$$U = x_1V_1 + x_2V_2 + x_3V_3 + x_4V_4 + x_5V_5 \ ?$$

Sont-ils déterminés de manière unique ? Expliquer pourquoi.

Exercice 21 Montrer que $\mathbb{R}_2[X]$ admet pour base la famille $(1, X, X^2)$. Montrer que la famille $(1, X + 1, X^2 + X + 1)$ est également une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 22 Donner une base des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\} \ ; \ E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}\}.$$

Exercice 23 Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $v_1 = (0;1;2)$ et $v_2 = (1;2;3)$.

[1.] Quelle est la dimension de F ? [2.] Donner une condition nécessaire et suffisante pour que (x, y, z) soit un élément de F.

Exercice 24

Montrer que la famille

$$\{(1;1;1;0)\,,\ (1;0;1;1)\,,\ (1;0;0;1)\}$$

est libre dans $\mathbb{R}^4$. Est-ce une base ? Soient

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_1 &= \{(1;1;1),\ (1;-1;1),\ (1;1;-1)\}\\ \mathcal{B}_2 &= \{(1;1;0),\ (1;0;1),\ (0;1;1)\}\end{aligned}$$

Montrer que $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont des bases de $\mathbb{R}^3$; exprimer le vecteur $X = (x;y;z)$ dans la base $\mathcal{B}_1$ et dans la base $\mathcal{B}_2$.

Exercice 25 Soit (u, v, w) trois vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Si (u, v, w) est libre, que peut-on dire de : $(u, u+v, u+v+w)$; $(u+v, v+w, u+w)$; $(u-v, v-w, w-u)$? Et si (u, v, w) est liée ?

Exercice 26 Soit (pour $n \in \mathbb{N}$) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_n(x) = \mathrm{e}^{nx}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(f_0, \ldots, f_n)$ est une famille libre dans l'espace vectoriel des fonctions réelles de la variable réelle.

Exercice 27 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$. Soit $(P_0, \ldots, P_n)$ une famille de $(n+1)$ polynômes telle que $\deg(P_i) = i$ pour $0 \leq i \leq n$ (donc P_0 est un polynôme constant non nul). Montrer que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 28 Soient les polynômes de degré 3 suivants : $P_0 = (X-1)(X-2)(X-3)$, $P_1 = X(X-2)(X-3)$, $P_2 = X(X-1)(X-3)$, $P_3 = X(X-1)(X-2)$. Montrer que (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 29 *(Polynômes d'interpolation de Lagrange)* Soient $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et

$(l_0, \ldots, l_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Introduisons la notation suivante pour $0 \leq i \leq n$:

$$(X - a_0) \ldots (\widehat{X - a_i}) \ldots (X - a_n) = \frac{(X - a_0) \ldots \ldots (X - a_n)}{X - a_i} .$$

Autrement dit, le terme sous le chapeau n'apparaît pas dans la liste. A titre d'exemple, $(X - a_0) \ldots (\widehat{X - a_2}) \ldots (X - a_4) = (X - a_0)(X - a_1)(X - a_3)(X - a_4)$. Avec ce même principe de notation, posons

$$P_i(X) = \frac{(X - a_0) \ldots (\widehat{X - a_i}) \ldots (X - a_n)}{(a_i - a_0) \ldots (\widehat{a_i - a_i}) \ldots (a_i - a_n)} .$$

Finalement, soit $P(X) = \sum_{i=0}^{n} l_i \cdot P_i(X)$.

Calculer $P(a_i)$ (pour $0 \leq i \leq n$). Montrer que la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Chapitre 3

Matrices

3.1 Matrices (Définitions et opérations)

3.1.1 Définitions

Définition 3.1.1 *Une matrice de type* (m, n) *ou* m *lignes et* n *colonnes est un tableau de* m *lignes et* n *colonnes*

notée $(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} = \begin{pmatrix} a_{1,1}.....a_{1,n} \\ \\ a_{i,1}.....a_{i,j}.....a_{i,n} \\ \\ a_{m,1}.....a_{m,n} \end{pmatrix}$$

*On appelle $i^{éme}$ ligne de A la matrice

$$L_i = (a_{i,1}, ..., a_{i,n}) \text{ pour } 1 \leq i \leq m$$

*On appelle $j^{éme}$ colonne de A la matrice

$$C_i = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ . \\ . \\ . \\ a_{m,1} \end{pmatrix} \text{ pour } 1 \leq i \leq n$$

On pourra écrire

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ . \\ . \\ . \\ L_m \end{pmatrix} = (C_1, ..., C_N)$$

L'ensemble des matrices de type (m, n) noté $M_{m,n}(\mathbb{R})$.

3.1.2 Opérations sur les matrices

1) La multiplication par un scalaire

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Exemple 15

$$2 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 10 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2) Somme de deux matrices

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m, \\ 1 \leq j \leq n}}$

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Exemple 16 $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$

$$A+B=\begin{pmatrix} 5+2 & 3+0 \\ 4+7 & 1+5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 11 & 6 \end{pmatrix}$$

3) Produit de deux matrices

soient $A=(a_{i,j})_{m,n}$ et $B=(b_{i,j})_{n,s}$

Le produit de A et B est une matrice de type (m,s),

$A\times B=(C_{i,j})_{m,s}$ tel que $C_{i,j}=\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\ b_{k,j}$.

Exemple 17 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$A\times B=\begin{pmatrix} 2\times 4+1\times 1+4\times 0 & 2\times 5+1\times 2+4\times 4 \\ 3\times 4+0\times 1+5\times 0 & 3\times 5+0\times 2+5\times 4 \\ 1\times 4+7\times 1+6\times 0 & 1\times 5+7\times 2+6\times 4 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 9 & 28 \\ 12 & 35 \\ 11 & 43 \end{pmatrix}.$$

Remarque 3 *le nombre des lignes de la première matrice égale le nombre des colonnes de la deuxième matrice est une condition nécessaire pour calculer le produit.*

matrice identité de type (n,n) notée I_n:

Est la matrice dont tous les conficients sont nuls sauf les conficients $(a_{i,j})$ tel que $i=j$ (s'appelle diagonal de la matrice)

Exemple 18 $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

3.1.3 Déterminant d'une matrice

1) Si $A=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ le déterminant de A est un nombre réel

noté $\det(A)$ ou $\begin{vmatrix} + & - \\ a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$

2) Si $A = \begin{pmatrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{pmatrix}$ le déterminant de A est un nombre réel

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} - a_1 \begin{vmatrix} b & b_2 \\ c & c_2 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b & b_1 \\ c & c_1 \end{vmatrix}.$$

Exemple 19 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$$
$$= 2 \times (-35) - 1 \times 13 + 4 \times 21 = 1$$

3) Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$, $M_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{1,1} \ldots\ldots\ldots a_{1,j-1} \ldots a_{1,j+1} \ldots\ldots\ldots a_{1,n} \\ \\ \\ a_{i-1,1} \ldots\ldots\ldots a_{i-1,j-1} \ldots a_{i-1,j+1} \ldots\ldots\ldots a_{i-1,n} \\ a_{i-1,1} \ldots\ldots\ldots a_{i+1,j-1} \ldots a_{i+1,j+1} \ldots\ldots\ldots a_{i-1,n} \\ \\ \\ a_{n,1} \ldots\ldots\ldots a_{n,j-1} \ldots a_{n,j+1} \ldots\ldots\ldots a_{n,n} \end{pmatrix}$

On a

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(M_{i,j}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(M_{i,j})$$

3.2 Matrice associée à une application linéaire

3.2.1 Applications linéaires

On dit que l'application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une application linéaire si:

$\forall (X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$ on a:

$$f(\alpha X + \beta Y) = \alpha f(X) + \beta f(Y)$$

On pourra écrire toute application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ comme suit:

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1,n}x_n \\ \\ \\ a_{i,1}x_1 + \ldots\ldots\ldots a_{i,j}x_j \ldots\ldots\ldots a_{i,n}x_n \\ \\ \\ a_{m,1}x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{m,n}x_n \end{pmatrix}$$

3.2.2 Matrice associée

La matrice associée a l'application f est

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{1,n} \\ \\ \\ a_{i,1}\ldots\ldots\ldots a_{i,j}\ldots\ldots\ldots\ldots a_{i,n} \\ \\ \\ a_{m,1}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{m,n} \end{pmatrix}$$

On remarque que

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}.....a_{1,n} \\ \\ \\ a_{i,1}.....a_{i,j}.....a_{i,n} \\ \\ \\ a_{m,1}.....a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \\ x_n \end{pmatrix}$$

Exemple 20 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y+z \\ x-y+4z \\ 7x-y+z \end{pmatrix}$$

La matrice associée a l'application f est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 7 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 21 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y+z \\ x-y+4z \\ 7x-z \end{pmatrix}$$

La matrice associée a l'application f est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 7 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3.3 Application linéaire associée à une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1}.....a_{1,n} \\ \\ a_{i,1}.....a_{i,j}.....a_{i,n} \\ \\ a_{m,1}.....a_{m,n} \end{pmatrix}$ une matrice donnée

L'application linéaire associée à la matrice A

définie par

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}.....a_{1,n} \\ \\ a_{i,1}.....a_{i,j}.....a_{i,n} \\ \\ a_{m,1}.....a_{m,n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 7 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

L'application linéaire associée à la matrice A

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 7 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y+z \\ x-y+4z \\ 7x-z \end{pmatrix}.$$

3.4 Changement de base, matrice de passage

3.4.1 Matrice de passage

Etant donnés un espace vectoriel et deux bases $B_0 = (v_1, ..., v_n)$ et $B_1 = ((w_1, ..., w_n))$.

On écrit la décomposition des vecteurs de B_1 sur la base B_0

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} v_i$$

La matrice de passage P de B_0 à B_1 est la matrice carrée (n, n),

$$P = (p_{i,j})_{n,n}$$

Exemple 22 $B_0 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ *et* $B_1 = \{(1,4,2), (4,1,0), (6,0,0)\}$ *deux bases de* $(\mathbb{R})^3$.

$(1,4,2) = (1,0,0) + 4(0,1,0) + 2(0,0,1)$

$(4,1,0) = 4(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,0,1)$,

$(6,0,0) = 6(1,0,0) + 0(0,1,0) + 0(0,0,1)$

La matrice de passage P de B_0 à B_1est la matrice carrée $(3,3)$,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.4.2 Matrices particulières

Matrice nulle $(m \times n)$

Est la matrice dont tous les coefficients sont nuls.

Exemple 23 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Matrice identité$(n \times n)$

Est la matrice dont tous les coefficients $a_{i,j} = 1$ pour $i = j$ et $a_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$.

notée I_n.

On a pour toute $A \in M_{n,n}(\mathbb{R}), AI_n = I_n A = A$

Exemple 24 $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matrice triangulaire supérieure $(n \times n)$

Est la matrice dont tous les coefficients $a_{i,j} = 0$ pour $j > i$.

Exemple 25 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

Matrice triangulaire inférieure $(n \times n)$

Est la matrice dont tous les coefficients $a_{i,j} = 0$ pour $i > j$.

Exemple 26 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -9 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Matrice diagonale$(n \times n)$

Est la matrice dont tous les coefficients $a_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$ sauf les coefficients $a_{i,j}$ tel que $i = j$.

Exemple 27 $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

3.4.3 Transposée d'une matrice$(n \times n)$

Transposée de la matrice $A = (a_{i,j})_{n,n}$ notée A^t et

$A^t = (\grave{a}_{i,j})_{n,n}$ tel que $\grave{a}_{i,j} = a_{j,i}$ $,\forall i = 1, ..., n, \forall j = 1, ..., n.$

Exemple 28 $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -1 \\ -6 & 3 & 2 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *alors* $A^t = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 8 \\ 5 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Matrice symétrique

On dit que la matrice A est symétrique si $A = A^t$.

Exemple 29 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ *est une matrice symétrique.*$\left(A^t = A\right)$

Comatrice d'une matrice$(n \times n)$

Comatrice de la matrice $A = (a_{i,j})_{n,n}$ notée $com\,(A)$ et

$$\text{com}(A) = \left((-1)^{i+j} \det\left(M_{i,j}\right)\right)_{n,n} \text{ tel que } M_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{1,1}.....a_{1,j-1}...a_{1,j+1}.....a_{1,n} \\ \\ \\ a_{i-1,1}.....a_{i-1,j-1}...a_{i-1,j+1}.....a_{i-1,n} \\ a_{i-1,1}.....a_{i+1,j-1}...a_{i+1,j+1}.....a_{i-1,n} \\ \\ a_{n,1}.....a_{n,j-1}...a_{n,j+1}.....a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Exemple 30 $A = \begin{pmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{2} & \overset{+}{1} \\ \overset{-}{4} & \overset{+}{0} & \overset{-}{2} \\ \overset{+}{0} & \overset{-}{2} & \overset{+}{6} \end{pmatrix}$ *alors* $com\,(A) = \begin{pmatrix} -4 & -24 & 8 \\ -10 & 6 & -2 \\ 4 & 2 & -8 \end{pmatrix}$.

3.4.4 Inverse d'une matrice $(n \times n)$

L'inverse de la matrice A notée A^{-1} et

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

et on aussi

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (com\,(A))^t$$

Exemple 31 $A = \begin{pmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{2} & \overset{+}{1} \\ \overset{-}{4} & \overset{+}{0} & \overset{-}{2} \\ \overset{+}{0} & \overset{-}{2} & \overset{+}{6} \end{pmatrix}$ *alors* $com\,(A) = \begin{pmatrix} -4 & -24 & 8 \\ -10 & 6 & -2 \\ 4 & 2 & -8 \end{pmatrix}$

$(com\,(A))^t = \begin{pmatrix} -4 & -10 & 4 \\ -24 & 6 & 2 \\ 8 & -2 & -8 \end{pmatrix}$ *et* $\det A = -4 - 40 = -44$

donc $A^{-1} = \frac{1}{\det A} (com\,(A))^t = \begin{pmatrix} \frac{4}{44} & \frac{10}{44} & \frac{-4}{44} \\ \frac{24}{44} & \frac{-6}{44} & \frac{-2}{44} \\ \frac{-8}{44} & \frac{2}{44} & \frac{8}{44} \end{pmatrix}$

Remarque 4 *Soit A une matrice*

A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.

Exercice 01: On considère l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par:

$$f\ (x, y, z) = (2x - 6z, y + 5z, x - 3z)$$

(1) Montrer que f est une application linéaire.

(2) trouver le noyau de f $(\ker f)$.

(3) Déduire $\dim(\ker f)$ et $\dim(\mathrm{Im}\, f)$.

Exercice 02: Répondre par vrai ou faux et justifier votre réponse:

1) $A^2 = I \Rightarrow A = \pm I$ 2) $A^2 = 0 \Rightarrow A = 0$ 3) $A^2 = A \Rightarrow A = I$ ou $A = 0$.

4) supp A diagonale $\Rightarrow A \cdot B = B \cdot A$ 5) supp $A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow A \cdot {}^t B = {}^t B \cdot A$

6) supp $A \cdot B = B \cdot A$ et A^{-1}existe$\Rightarrow A^{-1} \cdot B = B \cdot A^{-1}$

Exercice 03: Soit A une matrice carrée

1) Montrer que: si $A^4 = 0$ alors $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3$. Dans ce cas $(I + A)$ est-elle inversible?

   Si oui donner son inverse.

2) Supp: Montrer que: si $A^{n+1} = 0$ alors $(I - A)^{-1} = I + A + \cdots + A^n$. Dans ce cas $(I + A)$ est-elle inversible?

   Si oui donner son inverse.

Exercice 04: **1)** Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ par la méthode de GAUSS et par la notion de la comatrice.

2) Déterminer le rang de la matrice suivante:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & 8 & 14 \end{pmatrix}$$

Exercice 05: On considère l'application linéaire définie par:

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \quad &\mapsto \quad f\ (x, y) = (2x - y, 3x - 5y) \end{aligned}$$

(1) Trouver la matrice M associée à f relativement à la base canonique B de $\mathbb{R}^2$.

(2) Soit $B_1 = \{u_1, u_2\}$ une base de $\mathbb{R}^2$ avec $u_1 = (2, -1)$, $u_2 = (5, 3)$.

a) Trouver la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à la base B_1.

b) Trouver la matrice de passage Q de la base B_1 à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

c) Si V_1 est de composante $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ dans la base canonique, déterminer alors les composantes de V dans la base B_1.

d) Déduire la matrice N associée à f relativement à la base B_1.

Exercice 05: On considère l'application linéaire définie par:

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & f\ (x,y,z) = (2x-y+z, 3x-y-z, 4x+y+z) \end{array}$$

(1) Trouver la matrice M associée à f relativement à la base canonique B de $\mathbb{R}^3$.

(2) Soit $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$ avec $u_1 = (2,-1,-2)$, $u_2 = (1,0,-1)$ et $u_3 = (3,1,2)$.

a) Trouver la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base B_1.

b) Si V est de composante $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique, déterminer alors les composantes de V dans la base B_1.

c) Trouver la matrice N associée à f relativement à la base B_1.

Exercice 06: On considère l'application linéaire définie par:

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & f\ (x,y) = (x,y,x+y) \end{array}$$

Soient $B_2 = \{e_1, e_2\}$ et $B_3 = \{u_1, u_2, u_3\}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

(1) Donner la matrice M associée à f relativement aux bases B_2 et B_3.

(2) Soient $C_2 = \{v_1, v_2\}$ une base de $\mathbb{R}^2$ avec $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (-1,0)$ et $C_3 = \{w_1, w_2, w_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$

avec $w_1 = (0,1,3)$, $w_2 = (-1,0,1)$ et $w_3 = (-2,-1,0)$.

a) Trouver la matrice de passage P de la base B_2 à la base C_2.

b) Déterminer la matrice de passage Q de la base B_3 à la base C_3.

c) Si V est de composante $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans la base B_3, déterminer alors les composantes de V dans la base C_3.

d) Trouver la matrice N associée à f relativement aux bases C_2 et C_3.

Exercice 7 On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Effectuer tous les produits de ces matrices deux à deux lorsqu'ils existent. Calculer si possible $A + 2B$, $2A + B^t$, $A^t + 3B$, EFC, EFD, FEC, ADB.

Exercice 8 On considère dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ les matrices A et B définies par $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $a_{ij} = i + j$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $b_{ij} = i - j$. Calculer le terme général des matrices $C = A - B$ et $D = AB$.

Exercice 9 Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par : $f(x,y,z,t) = (x + t, x + y + t, y + z + t)$.

Ecrire la matrice A de f relativement aux bases canoniques $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de $\mathbb{R}^4$ et $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ de $\mathbb{R}^3$. Calculer la matrice B de f dans les bases $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de $\mathbb{R}^4$ et $\{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ définies par $u_1 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$; $u_2 = e_1 + e_2 + e_3$; $u_3 = e_1 + e_2$; $u_4 = e_1$; $v_1 = e'_3$; $v_2 = e'_2 + e'_3$; $v_3 = e'_1 + e'_2 + e'_3$.

Exercice 10 Montrer que les applications suivantes sont linéaires. Déterminer leur noyau et leur image et écrire dans chaque cas la matrice correspondante rapportée aux bases canoniques.

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $(x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$ $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$; $(x, y) \mapsto (x - y, x + y, x + 2y)$ $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$; $(x, y, z) \mapsto x - 3y + 2z$ $\theta : \mathbb{R}^3[X] \to \mathbb{R}^3[X]$; $P \mapsto P'$ (polynôme dérivé).

Exercice 11 Soient f, g et h les applications linéaires de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ représentées par les matrices respectives, dans les bases canoniques :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer l'image d'un vecteur $X = (x, y, z)$ par les applications suivantes : f ; g ; $f + g$; $2g$ et $f + 2g$. Ecrire, lorsqu'elles ont un sens, les matrices dans les bases canoniques des applications suivantes : $f + h$; $f \circ g$; $f \circ h$; $h \circ f$; $g \circ h$.

Exercice 12 Soit $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ considérée comme matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{K}^3$. En déterminer l'image et le noyau. Montrer qu'il s'agit d'un projecteur.

Exercice 13 Soit $E = F \oplus F'$, avec $F \neq 0$ et $F' \neq 0$. Prendre une base $\mathcal{B}$ de F, une base $\mathcal{B}'$ de F' et notons $\mathcal{C}$ la base de E obtenue par "réunion" de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Notons P le projecteur (de E) sur F parallèlement à F', et S la symétrie par rapport à F parallèlement à F'. Donner les matrices $M_{\mathcal{C}}(P)$ et $M_{\mathcal{C}}(S)$ ainsi que le polynôme caractéristique de P et de S.

Exercice 14 Soit $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $L(x, y, z) = (x + 2y - z\,,\, y + z\,,\, x + y - 2z)$.

Ecrire la matrice associée à L dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Trouver une base et déterminer la dimension de chacun des sous-espaces vectoriels suivants : $\mathrm{Ker}(L)$, $\mathrm{Im}(L)$ et $\mathrm{Ker}(L) \cap \mathrm{Im}(L)$. Déterminer $L \circ L = L^2$ et $L \circ L \circ L = L^3$. Quelle est la matrice de L^{16} dans la base canonique ?

Exercice 15 Soit $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ linéaire, de matrice $\begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$.

Quel est le rang de u ? Donner une base de $\mathrm{Im}(u)$. Calculer $\dim(\mathrm{Ker}(u))$. Donner une base

de $\mathrm{Ker}(u)$.

Exercice 16 Soit l'application $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie par $\varphi(P)(X) = P(X+2) - P(X)$.

Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$. Déterminer $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $\varphi(P) = X(X+1)$ et $P(1) = 0$, puis écrire P comme produit de facteurs du premier degré. Donner une expression condensée de la valeur de la somme

$$1.2 + 3.4 + 5.6 + \ldots + (2n+1)(2n+2)\,.$$

Exercice 17 Soit $E = R^4$, $f_1 = (1,1,1,0)$, $f_2 = (0,0,0,1)$ et E_1 le sous-espace vectoriel de E engendré par f_1 et f_2.

Donner la matrice (dans la base canonique) de la projection orthogonale sur E_1. Donner la matrice (dans la base canonique) de la symétrie orthogonale par rapport à E_1.

Exercice 177 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ (*i.e.* l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$) de matrice $\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (i,j)$ de $\mathbb{R}^2$.

Quel est l'angle entre les vecteurs i et $f(i)$? Quel est l'angle entre les vecteurs j et $f(j)$? Décrire f comme la composée (commutative) de deux transformations simples.

Exercice 18 Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^p et B^p ($p \in \mathbb{N}$).

Exercice 19 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 3. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$. Soit $x \in E$ n'appartenant pas à $\mathrm{Ker}(f^2)$.

Préciser pourquoi $x \neq 0$, $f(x) \neq 0$, $f^2(x) \neq 0$, $f^3(x) = 0$. Montrer que $\{x, f(x), f^2(x)\}$ est une base de E. Quelle est la matrice de f dans la base $\{x, f(x), f^2(x)\}$ de E (dans cet ordre) ?

Exercice 20 Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}\ (a \in \mathbb{R})\,.$$

Exercice 21 Soit l'application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ donnée par :

$$(x, y, z) \mapsto (x + 2y + 3z, 4x + y + 2z)\,.$$

Ecrire la matrice de T dans les bases canoniques $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ et $\mathcal{V} = \{v_1, v_2\}$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$. Soit $f_1 = e_1 + e_2$, $f_2 = e_1 - e_2$, $f_3 = e3$, $w_1 = v_1 - v_2$ et $w_2 = 2v_1 + v_2$.

[•] Vérifier que $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3\}$ et $\mathcal{W} = \{w_1, w_2\}$ sont des bases respectivement de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$. [•] Ecrire les matrices de passage $P_{\mathcal{EF}}$, $P_{\mathcal{FE}}$, $P_{\mathcal{VW}}$ et $P_{\mathcal{WV}}$. [•] Donner la matrice de T dans les nouvelles bases $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3\}$ et $\mathcal{W} = \{w_1, w_2\}$.

Exercice 22 Soit $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $L(x, y, z) = (x + 2y + 2z\,,\, 2x + y - 2z\,,\, 2x - 2y + z)$.

Ecrire la matrice associée à L dans la base canonique $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, e_3)$. Soit $\mathcal{B}_2 = (e_1 + e_2\,,\, e_1 - e_2 + 2e_3\,,\, e_1 - e_2 - e_3)$: montrer que $\mathcal{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et trouver les matrices de passage $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ et $P_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}$. Quelle est la matrice de L dans la base $\mathcal{B}_2$?

Exercice 23 Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 3. Soient $\mathcal{B}_1 = (1, X, X^2, X^3)$ et $\mathcal{B}_2 = (1\,,\, X - 1\,,\, (X - 1)^2\,,\, (X - 1)^3)$ deux bases de E. Ecrire la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$, ainsi que la matrice de passage de $\mathcal{B}_2$ à $\mathcal{B}_1$.

Exercice 24 Soit a, b et c trois réels. On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, de matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathcal{B}' = (e_1 + e_2 + e_3\,,\, e_2\,,\, e_3)$: trouver la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Soit $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ (coordonnées dans $\mathcal{B}$) : quelles sont les composantes de u dans la base $\mathcal{B}'$? Quelle est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$?

Exercice 25 Soit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ matrice diagonale $n \times n$, avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$. A quelle condition D est-elle inversible ? Calculer alors D^{-1}.

Exercice 26 Inverser, lorsque c'est possible, les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 27 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer $(A - I)^n$ pour tout $n \geq 1$. En déduire A^n pour tout $n \geq 1$. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 28 Soit A une matrice carrée inversible. Montrer que A^t est inversible, et exprimer son inverse en fonction de celui de A.

Exercice 29 Pour tout réel t, on considère la matrice carrée d'ordre quatre suivante :

$$R(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & 2t\mathrm{e}^t & (t^2 - 4t)\mathrm{e}^t & 2 + 2(t-1)\mathrm{e}^t \\ 0 & \mathrm{e}^t & t\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^t - 1 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que pour tout réel t et tout réel s, on a $R(t)R(s) = R(t+s)$. Soit t un réel. Montrer que la matrice $R(t)$ est inversible, et calculer son inverse.

Exercice 30 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Trouver deux réels α et β tels que $A^2 = \alpha I_3 + \beta A$. En déduire que A est inversible et donner

son inverse.

Exercice 31 Soit A une matrice carrée vérifiant la relation $2A^5 - A^4 + 7A^2 - 3A + I = 0$, où I est la matrice identité de même taille que A. Montrer que A est inversible, et exprimer A^{-1} en fonction de A (et de ses puissances).

Exercice 32 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = A + B$. Montrer que A et B commutent. *[Indication : Calculer* $(I - A)(I - B)$*]*

Exercice 33 Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ déterminé relativement à la base canonique par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -7 & 3 & 1 & 5 \\ -4 & -6 & -11 & -1 \\ 4 & -6 & -7 & -5 \end{pmatrix}.$$

Déterminer le noyau de φ.

Exercice 34 Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$ est régulière, et calculer son inverse.

Chapitre 4

Résolution de systèmes d'équations

4.1 Généralités

Définition 4.1.1 *On appelle système d'équations linéaires de m équations en n inconnues un système de de la forme :*

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + ... + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad ... \\ a_{m,1}x_1 + ... + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases} \tag{4.1.1}$$

où les coefficients $a_{i,j}$ et b_j sont donnés, et où les x_i sont des inconnues dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

4.1.1 Notation matricielle

Peut s'écrire sous la forme matricielle:

$$AX = B$$

où

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & a_{1,n} \\ & ... & \\ a_{m,1} & & a_{m,n} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ \\ b_m \end{pmatrix}$$

Exemple 32

$$\begin{cases} 2x + y + 5z = -10 \\ x - 3y - 7z = 5 \\ x - z = 13 \end{cases}$$

La matrice associée est $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & -7 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *et* $b = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix}$

Alors on a $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & -7 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix}$.

4.1.2 Rang d'un système d'équations linéaires

Soit A une matrice de type (m, n)

Déterminant d'ordre r extrait de A :

On appelle déterminant d'ordre r extrait de A le déterminant d'une matrice carrée formée en supprimant dans A $(m - r)$ lignes et $(n - r)$ colonnes.

on appelle **rang de la matrice A** : l'ordre du déterminant non nul, d'ordre le plus élevé, extrait de A.

Exemple 33 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & 8 & 14 \end{pmatrix}$

les quatre déterminants d'ordre 3 sont nuls, par contre le déterminant d'ordre 2 extrait $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ *n'est par nul, A est de rang 2.*

On appelle rang de système le rang de la matrice A de ce système.

4.2 Etude de l'ensemble des solutions

Soit le système (4.1.1) que nous supposons de rang r et écrit de telle façon que le déterminant $\triangle$ des coefficients des r premières inconnues et r premières équations soit non nul.

4.2.1 Déterminant caractéristique

Déterminant caractéristique de (4.1.1)

On appelle déterminant caractéristique de (4.1.1) le déterminant de la forme

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{1,1} & .... & a_{1,r} & b_1 \\ & ..... & & \\ a_{r,1} & ..... & a_{r,r} & b_r \\ a_{k,1} & ..... & a_{k,r} & b_k \end{vmatrix} \quad ,k = r+1, r+2, ..., m.$$

4.2.2 Etude de l'ensemble des solutions

a) Si $r = m = n$ le système (4.1.1) admet une seule solution.

b) Si $r \prec m \prec n$, le système (4.1.1) indéterminé à $(n - r)$ paramètres.

c) Si $r \prec m$, et si l'un au moins des déterminants caractéristiques de (4.1.1) non nul, (4.1.1) n'a pas de solution.

d)Si $r \prec m$, et si les déterminants caractéristiques de (4.1.1) sont nuls, (4.1.1) réduit aux r équations et se résout comme dans le cas (b) .

Exemple 34 $\begin{cases} x + y + 2w = -2 \\ x + 2y + 3w = a \\ 3x + 5y + 8z = 2 \\ 5x + 9y + 14z = b \end{cases}$ *,a,b supposés donnés.*

la matrice de ce système $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 8 \\ 5 & 9 & 14 \end{pmatrix} .B = \begin{pmatrix} -2 \\ a \\ 2 \\ b \end{pmatrix}$

Les quatre déterminants d'ordre 3 sont nuls, par contre le déterminant d'ordre 2 extrait $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ *n'est par nul, A est de rang 2.*

les déterminants caractéristiques :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & a \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -2a + 4, \; D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & a \\ 5 & 9 & b \end{vmatrix} = -4a + b + 2$$

1) Si $D_1 \neq 0$ *ou* $D_2 \neq 0$ *alors* (S) *n'a pas de solution.*

2) Si $D_1 = D_2 = 0$ dons ce cas S indéterminé à un paramètre z

$$\begin{cases} x = -3z - 6 \\ y = z + 4 \end{cases}, z \in \mathbb{R}.$$

4.3 Méthodes de résolution d'un système linéaire

4.3.1 Résolution par la méthode de Cramer

Soit (S) un système carré c'est à dire sa matrice A est carrée, avec l'interprétation matricielle : $AX = B$. Si la matrice A est inversible on peut résoudre ce système par la méthode de Cramer. Nous noterons A_i la matrice A des coefficients dans laquelle on a remplacé la i ème colonne par la matrice B.

La résolution du système, par la méthode de Cramer, donne

$$x_i = \frac{det(A_i)}{det(A)}, i = 1, ..., n.$$

Exemple 35 *Avec la méthode de Cramer, résoudre* $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ -5x + 2y = -2 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ça nous donnera

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$$

et $\quad x = \dfrac{\det A_1}{\det A} = \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}} = \dfrac{6}{1} = 6, y = \dfrac{\det A_1}{\det A} = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -5 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}} = \dfrac{14}{1} = 14.$

$(x, y) = (6, 14)$ est une solution unique de ce système.

Exemple 36 *Résoudre* $\begin{cases} 5x + 7y - 3z = 16 \\ 3x - 2y + 4z = -7 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$

avec la méthode de Cramer.

Identifions d'abord la matrice des coefficients :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
et la matrice des constantes :
$$B = \begin{pmatrix} 16 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}$$
Nous obtenons :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 16 & 7 & -3 \\ -7 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 16 & -3 \\ 3 & -7 & 4 \\ 1 & 6 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 16 \\ 3 & -2 & -7 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Et

$$x = \frac{det(A_1)}{det(A)} = \frac{16\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} -7 & 4 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} -7 & -2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}}{5\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$x = \frac{16 \times (-2) - 7 \times (-17) - 3 \times 5}{5 \times (-2) - 7 \times (-7) - 3 \times (5)} = \frac{72}{24} = 3$$

$$y = \frac{det(A_2)}{det(A)} = \frac{5\begin{vmatrix} -7 & 4 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} - 16\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}}{24}$$

$$\text{y} = \frac{5 \times (-17) - 16 \times (-7) - 3 \times 25}{24} = \frac{-48}{24} = -2$$

$$z = \frac{det(A_3)}{det(A)} = \frac{5\begin{vmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + (16)\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{24}$$

$$\text{z} = \frac{5 \times (-5) - 7 \times (25) + 16 \times 5}{24} = \frac{-120}{24} = -5$$

donc $(3, -2, -5)$ est une solution unique de ce système.

4.3.2 Résolution par la méthode de la matrice inverse

Soit (S) un système carré, avec l'interprétation matricielle : $AX = B$.

Si la matrice A est inversible on peut résoudre ce système par la méthode de la matrice inverse comme suit:

On a

$$AX = B \Longleftrightarrow X = A^{-1}B$$

Exemple 37 *Résoudre* $\begin{cases} 5x + 7y - 3z = 16 \\ 3x - 2y + 4z = -7 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 16 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}$.

$\det A = 24$ alors A est inversible.

Calculons A^{-1} :

$$\text{com}(A) = \begin{pmatrix} +\det\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ +\det\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\text{com}(A) = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 5 \\ 4 & -2 & 2 \\ 22 & -29 & -31 \end{pmatrix} \Longrightarrow (com\,(A))^t = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 22 \\ 7 & -2 & -29 \\ 5 & 2 & -31 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,(com\,(A))^t = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} -2 & 4 & 22 \\ 7 & -2 & -29 \\ 5 & 2 & -31 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } X = A^{-1}B = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} -2 & 4 & 22 \\ 7 & -2 & -29 \\ 5 & 2 & -31 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} -2 \times 16 + 4 \times (-7) + 22 \times 6 \\ 7 \times 16 + (-2) \times (-7) + (-29) \times 6 \\ 5 \times 16 + 2 \times (-7) + (-31) \times 6 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 72 \\ -48 \\ -120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

alors $(3, -2, -5)$ est une solution unique de ce système.

4.3.3 Résolution par la méthode de Gauss

Les opérations élémentaires

Définition 4.3.1 *Soit (S) un système linéaire de n équations, p inconnues et à coeffcients dans* $\mathbb{R}$.

Notons $E1, E2, ..., En$ les équations de (S).

On appelle opération élémentaire sur les lignes de (S) l'une des opérations suivantes :

– Multiplier une équation Ei par un scalaire non nul a.

Cette opération est notée : $Ei \rightarrow aEi$.

– Ajouter à l'une des équations Ei un multiple d'une autre équation Ej .

Cette opération est notée : $Ei \rightarrow Ei + ßEj$.

– Echanger deux équation Ei et Ej : Cette opération est notée : $Ei \overrightarrow{\leftarrow} Ej$.

Proposition 4.3.1 *Une opération élémentaire sur les lignes de (S) transforme le système (S) en un système (S′) équivalent, c'est-a-dire ayant exactement les mêmes solutions que (S).*

Méthode de Gauss

Par une suite d'opérations élémentaires, on transforme le système (S) en un système (S′) équivalent et dont la matrice est triangulaire supérieure.

Exemple 38

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 11 \\ 2x + 3y + 4z + t = 12 \\ 3x + 4y + z + 2t = 13 \\ 4x + y + 2z + 3t = 14 \end{cases}$$

Résoudre le système (S) :

$$\begin{cases} x+2y+3z+4t=11 & \\ -y-2z-7t=-10 & E2 \to E2-2E1 \\ -2y-8z-10z=-20 & E3 \to E3-3E1 \\ 4x+y+2z+3t=14 & E4 \to E4-4E1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y+3z+4t=11 & \\ -y-2z-7t=-10 & \\ -2y-8z-10t=-20 & E3 \to E3-2E2 \\ -7y-10z-13t=-30 & E4 \to E4-7E2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y+3z+4t=11 & \\ -y-2z-7t=-10 & \\ -4z+4t=0 & \\ 4z+36t=40 & E4 \to E4+E3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y+3z+4t=11 \\ -y-2z-7t=-10 \\ -4z+4t=0 \\ 40t=40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t=1 \\ z=t=1 \\ y=-2z-7t+10=1 \\ x=11-2y+3z+4t=2 \end{cases}$$

Le système (S) posséde donc l'unique solution (2, 1, 1, 1).

Exemple 39

$$\begin{cases} x+3y+5z-2t-7u=3 \\ 3x+y+z-2t-u=1 \\ 2x-y-3z+7t+5u=2 \\ 3x-2y-5z+7t+8u=2 \end{cases}$$

Résoudre (S)
$$\begin{cases} x+3y+5z-2t-7u=3 & \\ 3x+y+z-2t-u=1 & E2 \to E2-3E1 \\ 2x-y-3z+7t+5u=2 & E3 \to E3-2E \\ 3x-2y-5z+7t+8u=2 & E4 \to E4-3E1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x+3y+5z-2t-7u=3 & \\ -8y-14z+4t+20u=-8 & \\ -7y-13z+11t+19u=-3 & E4 \to 8E3-7E2 \\ -11y-20z+13t+29u=-18 & E4 \to 8E4-11E2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x+3y+5z-2t-7u=3 & \\ -8y-14z+4t+20u=-8 & \\ -6z+60t+12u=24 & \\ -6z+60t+12u=32 & E4 \to E4-E3 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x+3y+5z-2t-7u=3 & \\ -8y-14z+4t+20u=-8 & \\ -6z+60t+12u=24 & \\ 0=8 & \end{cases}$$
alors (S) n'a pas de solution.

Exercice 1 Discuter selon $m \in \mathbb{R}$ la possibilité du système d'inconnues $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} mx + 2my + 2mz = 1 \\ 2x + (2-m)y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + (2+m)z = 0 \end{cases}$$

et le résoudre effectivement en cas de possibilité.

Exercice 2

Résoudre le système :

$$\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ x - y + 2z = -2 \\ 2x - 4y + 2z = 1 \\ x + y - 3z = -1 \end{cases}$$

à l'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Discuter, selon $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ la possibilité du nouveau système déduit du précédent en conservant les premiers membres et en remplaçant les seconds :

$$\begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} \quad par \quad \begin{vmatrix} 1 \\ a \\ 1 \\ b \end{vmatrix}$$

et le résoudre effectivement dans le cas de possibilité.

Exercice 3

Résoudre le système :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 0 \\ 2x + 3y + 4z + 5t = 0 \\ 3x + 4y + 5z + 6t = 0 \\ 4x + 5y + 6z + 7t = 0 \end{cases}$$

d'inconnues $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Discuter la possibilité de résolution (et résoudre si possible) du système déduit du précédent en remplaçant le membre de droite :

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \text{ par } \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{vmatrix} \text{ puis par } \begin{vmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \\ a^3 \end{vmatrix}$$

où $(X, Y, Z, T) \in \mathbb{R}^4$ et $a \in \mathbb{Q}$..

Exercice 4 Discuter, selon $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ le rang puis discuter selon $(a, b, X, Y, Z, T) \in \mathbb{R}^6$ la possibilité du système :

$$\begin{cases} 2x & - & 4y & + & z & + & at & = & X \\ -2x & + & 7y & & & - & 3t & = & Y \\ x & - & 5y & + & 4z & + & 3t & = & Z \\ -x & + & 3y & + & z & + & bt & = & T \end{cases}$$

à l'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ et le résoudre effectivement dans le cas où le système est possible mais n'est pas un système de Cramer.

Déterminant et inversion de matrices

Exercice 5 Calculez le déterminant des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ -8 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 7 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Avez-vous une remarque à faire ? Précisez les matrices qui sont inversibles.

Exercice 6 Inversez, lorsque c'est possible, les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 16 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7 Pour chaque affirmation suivante, dites si elle est vraie ou fausse. Dans le cas où elle est fausse, donnez un contre-exemple et essayez de la corriger si possible.

$\forall\ (A,B) \in M_n(\mathbb{R})^2$, $\det(A+B) = \det(A)+\det(B)$; $\forall\ (A,B) \in M_n(\mathbb{R})^2$, $\det(AB) = \det(BA)$; $\forall\ (A,B) \in M_n(\mathbb{R})^2$, $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$; $\forall\ A \in M_n(\mathbb{R})$, $\det(A^t) = \det(A)$; $\forall\ A \in M_n(\mathbb{R})$, $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$, $\det(\lambda A) = \lambda.\det(A)$; $\forall\ A \in M_n(\mathbb{R})$, $\forall P \in M_n(\mathbb{R})$ inversible, $\det(P^{-1}AP) = \det(A)$.

Recommencez l'exercice en remplaçant le déterminant par la trace.

Exercice 8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier impair, et $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Montrez que A n'est pas inversible. Est-ce encore vrai pour n pair ?

Exercice 9 Soit $P \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $P^t = I_n$. Quelles valeurs peut prendre $\det(P)$?

Exercice 10 Montrez que les déterminants ci-dessous sont nuls :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & \cos(x) & \cos(2x) \\ \cos(x) & \cos(2x) & \cos(3x) \\ \cos(2x) & \cos(3x) & \cos(4x) \end{vmatrix}.$$

Exercice 11 Deux matrices A et B sont telles que :

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{pmatrix} \quad et \quad BA = \begin{pmatrix} x & 14 \\ 14 & y \end{pmatrix}.$$

En utilisant trace et déterminant, trouvez x et y.

Exercice 12 Calculez les déterminants suivants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & c' & d' \\ -a & -b & c & d'' \\ -a & -b & -c & -d \end{vmatrix}; \quad D_2 = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}; \quad D_3 = \begin{vmatrix} a & x & x & b \\ x & a & b & x \\ x & b & a & x \\ b & x & x & a \end{vmatrix}.$$

Exercice 13 Calculez le déterminant suivant d'ordre $n+1$.

$$\begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{vmatrix}$$

Exercice 14 Soient $(x_i)_{i=1,\ldots,n}$ et $(y_j)_{j=1,\ldots,n}$ des scalaires. Calculez le déterminant Δ_n de la matrice de terme général $1 + x_i y_j$.

Exercice 15 Développez le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & a' & b & a'b \\ 1 & a & b' & ab' \\ 1 & a' & b' & a'b' \end{vmatrix}.$$

Vous trouverez $D = (a'-a)^2(b'-b)^2$.

Exercice 16 Soient $(a_i)_{i=1,\ldots,n}$ des scalaires et D_n le déterminant suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & \cdots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Montrez que pour tout polynôme P de la forme $P(X) = X^{n-1} + \alpha_{n-1}X^{n-2} + \cdots + \alpha_1 X + \alpha_0$, on a

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & \cdots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \\ P(a_1) & \cdots & P(a_n) \end{vmatrix}.$$

En déduire, en choisissant P comme il faut, que $D_n = \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) \cdot D_{n-1}$. En déduire (par récurrence) D_n.

Chapitre 5

Fiches TD avec la correction

5.1 Fiche TD 1

Exercice 1 :

• La loi interne " + "

$\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2, (x,y)+(x',y') = (x+x', y+y')$.

• La loi externe " $\cdot$ "

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \cdot (x,y) = (\lambda x, \lambda y)$.

Montrer que $\left(\mathbb{R}^2, +, \cdot\right)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 2 :

Soit E l'ensemble défini par

$$E = \left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\right\}$$

Montrer que E est un sev de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3:

Soit E un ev sur K et F_1et F_2 deux sev de E.

Montrer que $F_1 \cap F_2$ est un sev de E.

Exercice 4 :

$F_1 = \{(x,0,0) / x \in \mathbb{R}\}$et $F_2 = \left\{(0,y,z) / (y,z) \in \mathbb{R}^2\right\}$

Montrer que F_1et F_2 sont sev de $\mathbb{R}^3$.

Montrer que $F_1 \cap F_2 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

Exercice 5 :

1) Montrer que $e_1 = (1,1,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (1,1,1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2) Montrer que $\{\alpha e_1 + \beta e_2 / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$.

3) Montrer que $e_1 = (1,1,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (1,1,1), e_4 = (2,1,4)$ est une famille liées.

Exercice 6 :

Montrer que $e_1 = (1,2), e_2 = (0,1), e_3 = (1,1)$ est une famille génératrice, est-elle liée?.

5.1.1 Correction TD 1

Exercice 1 :

Montrons que $\left(\mathbb{R}^2, +, \cdot\right)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1- $(\mathbb{R}^2, +)$ est un groupe commutatif c'est à dire

Définition 5.1.1 - *Associative* $\forall\,(x,y)\,;(x',y')\,;(x'',y'') \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
\left[(x,y)+\left(x',y'\right)\right]+\left(x'',y''\right) &= \left(x+x',y+y'\right)+\left(x'',y''\right)\\
&= \left(\left(x+x'\right)+x'',\left(y+y'\right)+y''\right)\\
&= \left(x+\left(x'+x''\right),y+\left(y'+y''\right)\right)\\
&= \left(x',y\right)+\left(x+x'',y'+y''\right)\\
&= (x,y)+\left[\left(x',y'\right)+\left(x'',y''\right)\right]
\end{aligned}$$

- *Commutative* $\forall\,(x,y)\,;(x',y') \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
(x,y)+\left(x',y'\right) &= \left(x+x',y+y'\right)\\
&= \left(x',y'\right)+(x,y)
\end{aligned}$$

- *Il existe un élément neutre* $\exists\,(0,0) \in \mathbb{R}^2, \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, (x,y)+(0,0)=(x,y)$

- $\forall\,(x,y)\,;(x',y') \in \mathbb{R}^2, \exists\,(x',y')=(-x,-y) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $(x,y)+(x',y')=(0,0)$.

2) La loi externe doit vérifier:

- $\forall\,(x,y)\,;(x',y') \in \mathbb{R}^2, \forall\lambda \in \mathbb{R}, \lambda\,[(x,y)+(x',y')]=\lambda\,(x,y)+\lambda\,(x',y')$

- $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}, (\lambda_1+\lambda_2)\,(x,y)=\lambda_1\,(x,y)+\lambda_2\,(x,y)$

- $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda\cdot({}_1\lambda_2\cdot(x,y))=(\lambda_1.\lambda_2)\cdot(x,y)$

- $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, 1\cdot(x,y)=(x,y)$

Exercice 2 :

Soit E l'ensemble défini par

$$E=\left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1+2x_2-x_3=0\right\}.$$

Montrons que E est un sev de $\mathbb{R}^3$.

1) E$\neq \emptyset$

2) $\forall\,(x,y,z)\,;(x',y',z') \in E$ on a $(x,y,z)+(x',y',z') = (x+x',y+y',z+z') \in E$

car $x+2y-z=0; x'+2y'-z'=0 \Longrightarrow x+x'+2\,(y+y')-(z+z')=0$

3) $\forall$ $(x,y,z) \in E, \forall\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\lambda\,(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in E$.

Car $x+2y-z=0 \Longrightarrow \lambda x+2\lambda y-\lambda z=0$

Exercice 3:

Soit E un ev sur K et F_1et F_2 deux sev de E.

Montrons que $F_1 \cap F_2$ est un sev de E.

1) $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$ car $0_E \in F_1 \cap F_2$

2) $\forall x,y \in F_1 \cap F_2$ on a $x,y \in F_1$ et $x,y \in F_2$

alors $x+y \in F_1$ et $x+y \in F_2$ donc $x+y \in F_1 \cap F_2$

3) $\forall x \in F_1 \cap F_2$ et $\forall\lambda \in \mathbb{R}$ on a $x \in F_1$, $x \in F_2$ et $\forall\lambda \in \mathbb{R}$

donc $\lambda x \in F_1$ et $\lambda x \in F_2$ c'est à dire $\lambda x \in F_1 \cap F_2$.

Exercice 4 :

$F_1 = \{(x,0,0)\,/x \in \mathbb{R}\}$et $F_2 = \left\{(0,y,z)\,/\,(y,z) \in \mathbb{R}^2\right\}$

Montrons que F_1et F_2 sont sev de $\mathbb{R}^3$.

Même méthode comme ex 2

Montrons que $F_1 \cap F_2 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

$$\begin{aligned}(x,y,z) \quad &\in \quad F_1 \cap F_2 \Longrightarrow (x,y,z) \in F_1 \text{ et } (x,y,z) \in F_2 \\ &\Longrightarrow \quad z=y=0 \text{ et } x=0\end{aligned}$$

donc $F_1 \cap F_2 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

Exercice 5 :

1) Montrer que $e_1 = (1,1,0)\,, e_2 = (0,1,0)\,, e_3 = (1,1,1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Libre

$\alpha\,(1,1,0) + \beta\,(0,1,0) + \gamma\,(1,1,1) = (0,0,0)$

$$\text{donc} \begin{cases} \alpha+\gamma=0 \\ \alpha+\beta+\gamma=0 \\ \gamma=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=0 \\ \gamma=0 \end{cases}$$

Génératrice

$\forall \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$\alpha(1,1,0)+\beta(0,1,0)+\gamma(1,1,1)=(x,y,z)$

$$\begin{cases} \alpha+\gamma=x \\ \alpha+\beta+\gamma=y \\ \gamma=z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha=x-z \\ \beta=y-x \\ \gamma=z \end{cases}$$

donc $(x-z)(1,1,0)+(y-x)(0,1,0)+z(1,1,1)=(x,y,z)$

2) Montrer que $\{\alpha e_1+\beta e_2/\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$.

Même méthode comme ex 2

3) Montrons que $e_1=(1,1,0), e_2=(0,1,0), e_3=(1,1,1), e_4=(2,1,4)$ est une famille liées.

$(2,1,4)=4(1,1,1)-2(1,1,0)-(0,1,0)$

Exercice 6 :

Montrons que $e_1=(1,2), e_2=(0,1), e_3=(1,1)$ est une famille génératrice,

$\forall \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^2$

$\alpha(1,2)+\beta(0,1)+\gamma(1,1)=(x,y)$

$$\begin{cases} \alpha+\gamma=x \\ 2\alpha+\beta+\gamma=y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha=x-\lambda \\ \beta=y-2x+\lambda \end{cases}$$

donc

$(x,y)=(x-1)(1,2)+(y-2x+1)(0,1)+(1,1)$

$e_1=(1,2), e_2=(0,1), e_3=(1,1)$ est une famille génératrice,

est liée car

$.(1,2)=(0,1)+(1,1)$

5.2 Fiche TD 2

Exercice 1 :

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application définie par:

$$f(x, y, z) = (x - z, 2x + y - 3z, -x + 2z)$$

et (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Calculer $f(e_1), f(e_2)$ et $f(e_3)$.

Exercice 2 :

Soit E l'ensemble défini par

$$\begin{aligned} E &= \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 = 2x_2 = x_3\right\} \\ F &= \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\right\} \end{aligned}$$

1) E et F sont des sev de $\mathbb{R}^3$, déterminer une base de E et une base de F.

2) Y a-t-il $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.

Exercice 3:

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

dont l'image de la base canonique (e_1, e_2, e_3) est:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= -7e_1 - 6e_2 \\ f(e_2) &= 8e_1 + 7e_2 \\ f(e_3) &= 6e_1 + 6e_2 - e_3 \end{aligned}$$

1. Pour tout vecteur $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

* Calculer $f(x)$.

* Déterminer $f \circ f(x)$.

2. f est-elle inversible.

Exercice 4 :

Soit u l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$$u(x) = x_1 + x_2 + x_3$$

1. Montrer que u est une application linéaire.
2. Déterminer $Im(u)$ et de $ker(u)$ et leur dimensions.

5.2.1 Correction TD 2

Exercice 1 :

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application définie par:

$$f(x, y, z) = (x - z, 2x + y - 3z, -x + 2z)$$

et (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$

1. Montrons que f est une application linéaire.

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, et $a = (x, y, z), b = (x\prime, y\prime, z') \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} f(\lambda a + \mu b) &= f(\lambda x + \mu x\prime, \lambda y + \mu y\prime, \lambda z + \mu z\prime) \\ &= (\lambda x + \mu x\prime - (\lambda z + \mu z\prime), 2(\lambda x + \mu x\prime) + \lambda y + \mu y\prime + 3(\lambda z + \mu z\prime), -(\lambda x + \mu x\prime) + 2(\lambda z + \mu z\prime) \\ &= \lambda(x - z, 2x + y - 3z, -x + 2z) + \mu\left(x' - z', 2x' + y' - 3z', -x' + 2z'\right) \\ &= \lambda f(a) + \mu f(b). \end{aligned}$$

2. Calculons $f(e_1) = (1, 2, -1)$, $f(e_2) = (0, 1, 0)$ et $f(e_3) = (-1, -3, 2)$

Exercice 2 :

Soit E l'ensemble défini par

$$\begin{aligned} E &= \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 = 2x_2 = x_3\right\} \\ F &= \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\right\} \end{aligned}$$

1) E et F sont des sev de $\mathbb{R}^3$, déterminons une base de E et une base de F.

$E = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 = 2x_2 = x_3\right\}$

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2, 2x_2) \\ &= x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 2) \end{aligned}$$

$(1,0,0),(0,1,2)$ sont libre alors $\{(1,0,0),(0,1,2)\}$ une base de E

$F=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3/x_1+2x_2+x_3=0\right\}$

$$\begin{aligned}(x_1,x_2,x_3) &= (x_1,x_2,-x_1-2x_2)\\ &= x_1(1,0,-1)+x_2(0,1,-2)\end{aligned}$$

$(1,0,-1),(0,1,-2)$ sont libre alors $\{(1,0,-1),(0,1,-2)\}$ une base de F

2) Y a-t-il $E\oplus F=\mathbb{R}^3$.

Exercice 3:

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

dont l'image de la base canonique (e_1,e_2,e_3) est:

$$\begin{aligned}f(e_1) &= -7e_1-6e_2\\ f(e_2) &= 8e_1+7e_2\\ f(e_3) &= 6e_1+6e_2-e_3\end{aligned}$$

1. Pour tout vecteur $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$

* Calculons $f(x)$.

$$\begin{aligned}f(x) &= f(x_1,x_2,x_3)\\ &= f(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3)\\ &= x_1f(e_1)+x_2f(e_2)+x_3f(e_3)\\ &= x_1(-7e_1-6e_2)+x_2(8e_1+7e_2)+x_3(6e_1+6e_2-e_3)\\ &= (-7x_1+8x_2+6x_3,-6x_1+7x_2+6x_3,-x_3)\end{aligned}$$

* Déterminons $f\circ f(x)$.

$$\begin{aligned} f \circ f(x) &= f\left((-7x_1 + 8x_2 + 6x_3, -6x_1 + 7x_2 + 6x_3, -x_3)\right) \\ &= \text{.....} \end{aligned}$$

2. f est-elle inversible.

$$f(x) = (a, b, c)$$

$$\begin{cases} a = -7x_1 + 8x_2 + 6x_3 \\ b = -6x_1 + 7x_2 + 6x_3 \\ c = -x_3 \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} a - 6c = -7x_1 + 8x_2 \\ b - 6c = -6x_1 + 7x_2 \\ x_3 = -c \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} a + 6c = -7x_1 + 8x_2 \\ b + 6c = -6x_1 + 7x_2 \\ x_3 = -c \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -7(a + 6c) + 8(b + 6c) \\ x_2 = -6(a + 6c) + 7(b + 6c) \\ x_3 = -c \end{cases}$$

donc f est surjective

et $ker(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / f(x_1, x_2, x_3) = 0_{\mathbb{R}^3}\} = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

c'est a dire f est injective

finalement f est bijective donc est inversible

Exercice 4 :

Soit u l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$$u(x) = x_1 + x_2 + x_3$$

1. Montrons que u est une application linéaire.

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, et $a = (x, y, z), b = (x\prime, y\prime, z') \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} f(\lambda a + \mu b) &= f(\lambda x + \mu x\prime, \lambda y + \mu y\prime, \lambda z + \mu z\prime) \\ &= (\lambda x + \mu x\prime + (\lambda z + \mu z\prime) + (\lambda z + \mu z\prime) \\ &= \lambda (x + y + z) + \mu \left(x' + y + z'\right) \\ &= \lambda f(a) + \mu f(b). \end{aligned}$$

2. Déterminer $Im(u)$ et de $ker(u)$ et leur dimensions.

$Im(u) = \mathbb{R}$

car $\forall x \in \mathbb{R}, \exists (x, y, z) = (x, 0, 0)$ avec $f(x, 0, 0) = x$.

$\dim \mathbb{R} = 1$

$$\begin{aligned} ker(u) &= \{(x_1, x_2, x_3) / u(x_1, x_2, x_3) = 0\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \\ &= \{(x_1, x_2, -x_1 - x_2) / x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

$(x_1, x_2, -x_1 - x_2) = x_1 (1, 0, -1) + x_2 (0, 1, -1)$

et $(1, 0, -1), (0, 1, -1)$ sont libre c'est a dire $\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$ est une base de $ker(u)$

donc $\dim ker(u) = 2$.

5.3 Fiche TD 3

Exercice 1: Considérons les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculer les matrices $AB, BA, CD, 2A + B, A - 4B$.

Que remarquez vous(pour AB, BA) .

Exercice 2: Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et A, B les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & \alpha \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer le déterminant de A, puis le déterminant de B.

Exercice 3: Soit f une application linéaire définie par

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x + y + 7z \\ -10y + 2z \\ 7x - 12z + y \end{pmatrix}$$

Donner la matrice associée a l'application f.

Exercice 4: Soient A, B les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\sqrt{2} \\ 5 & 0.2 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Donner l'application linéaire associée à la matrice A.

puis l'application linéaire associée à la matrice B.

Exercice 5: Soient $E = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ et $F = \{(1, 0, 2), (4, 1, 0), (0, 5, 1)\}$ deux bases de $(\mathbb{R})^3$.

Denner la matrice de passage P_{EF}.

Exercice 6: On pose $e_1 = (1, 1, 0), e_2 = (0, 1, 1)$et $e_3 = (1, 0, 1)$.

1. Montrer que $B = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Ecrire la matrice de passage P_{CB} de la base canonique C de $\mathbb{R}^3$ à la base B.

5.3.1 Correction TD 3

Exercice 1: Considérons les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculons les matrices $AB = \begin{pmatrix} 26 & 4 \\ 17 & 3 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 9 & 31 \end{pmatrix}$

$CD = \begin{pmatrix} 5 & 18 \\ -12 & -11 \\ 11 & 43 \end{pmatrix}, 2A + B = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}, A - 4B = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 30 & 7 \end{pmatrix}.$

On remarque que $AB \neq BA$.

Exercice 2: Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et A, B les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & \alpha \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

On calcule le déterminant de A,

$$\begin{aligned} \det A &= 2 \times 5 - 1 \times 29 - 1 \times 33 \\ &= -52 \end{aligned}$$

le déterminant de B.

$$\det B = -2 - 7\alpha$$

Exercice 3: Soit f une application linéaire définie par

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x + y + 7z \\ -10y + 2z \\ 7x - 12z + y \end{pmatrix}$$

Donnons la matrice associée a l'application f.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 0 & -10 & 2 \\ 7 & 1 & -12 \end{pmatrix}$$

Exercice 4: Soient A, B les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\sqrt{2} \\ 5 & 0.2 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Donnons l'application linéaire associée à la matrice A.

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y + -\sqrt{2}z \\ 5x + 0.2y + z \\ x + 5y + 6z \end{pmatrix}$$

L'application linéaire associée à la matrice B.

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x + 10y \\ 7x + y \end{pmatrix}$$

Exercice 5: Soient $E = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ et $F = \{(1,0,2), (4,1,0), (0,5,1)\}$ deux bases de $(\mathbb{R})^3$.

Dennons la matrice de passage P_{EF}.

$(1,0,2) = 1(1,0,0) + 0(0,1,0) + 2(0,0,1)$

$(4,1,0) = 4(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,0,1)$

$(0,5,1) = 0(1,0,0) + 5(0,1,0) + 1(0,0,1)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 6: On pose $e_1 = (1,1,0), e_2 = (0,1,1)$et $e_3 = (1,0,1)$.

1. Montrons que $B = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Libre car

si $\alpha(1,1,0) + \beta(0,1,1) + \gamma(1,0,1) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} \alpha+\gamma=0 \\ \alpha+\beta+\gamma=0 \\ \beta+\gamma=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=0 \\ \gamma=0 \end{cases}$$

et $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ donc $B = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. La matrice de passage P_{CB} de la base canonique C de $\mathbb{R}^3$ à la base B.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Histoire des Espaces Vectoriels

L'étude des espaces vectoriels s'inscrit dans l'évolution historique des mathématiques, en particulier dans le contexte du développement de l'algébre et de la géométrie. Dès l'Antiquité, les mathématiciens grecs s'intéressent aux grandeurs géométriques, mais ce n'est qu'à l'époque moderne que les outils permettant une véritable abstraction des concepts liés aux vecteurs voient le jour.

Le XVIIe siècle marque un tournant décisif avec l'apparition de la géométrie analytique grâce à René Descartes. Ce dernier introduit une manière novatrice de relier l'algébre et la géométrie à travers un système de coordonnées permettant de représenter les figures géométriques par des équations. Cette approche, bien qu'encore limitée à des dimensions finies et à des contextes géométriques concrets, constitue les prémices de ce que l'on appellera plus tard les espaces vectoriels.

Durant le XVIIIe siècle, les mathématiciens s'intéressent de plus en plus aux équations différentielles et aux séries, ce qui les pousse à manipuler des objets plus abstraits comme les fonctions. Néanmoins, ce n'est qu'au XIXe siècle que la notion de vecteur commence à émergér de manière explicite. Parmi les pionniers, Hermann Grassmann joue un rôle central. En 1844, il publie *Die lineale Ausdehnungslehre*, où il propose une formalisation des opérations sur des objets généralisés préfigurant nos vecteurs modernes. Toutefois, son travail ne reçoit pas immédiatement l'attention qu'il mérite.

Parallèlement, Arthur Cayley et William Rowan Hamilton apportent des contributions importantes à l'étude des structures algébriques, notamment les matrices et les quaternions, qui seront plus tard liés à la théorie des espaces vectoriels. Les matrices permettent une représentation naturelle des applications linéaires, concept fondamental dans cette théorie.

Au tournant du XXe siècle, l'esprit des mathématiques évolue vers davantage de rigueur et d'abstraction. C'est dans ce contexte que la définition moderne de l'espace vectoriel s'impose : un ensemble muni d'une addition et d'une multiplication par un scalaire, satisfaisant huit axiomes fondamentaux. Cette formalisation permet de généraliser la notion de vecteur bien au-delà du cadre géométrique. Désormais, les objets considérés peuvent être des polynômes, fonctions, suites ou matrices, à condition qu'ils obéissent aux règles définies.

Cette abstraction se développe davantage avec l'analyse fonctionnelle, discipline s'intéressant

aux espaces de fonctions et aux opérateurs. Les espaces vectoriels deviennent la structure de base de concepts avancés comme les espaces normés, préhilbertiens et de Hilbert. Ces derniers, introduits par David Hilbert, généralisent les propriétés de la géométrie euclidienne à des dimensions infinies, utiles en physique théorique, notamment en mécanique quantique.

L'influence des espaces vectoriels dépasse le cadre des mathématiques pures. En physique, ils servent à décrire position, vitesse ou état quantique. En économie, ils modélisent des ensembles de production. En informatique, ils sont essentiels dans le traitement du signal, l'image ou l'apprentissage automatique. Leur puissance réside dans leur cadre unificateur et rigoureux.

Aujourd'hui, les espaces vectoriels sont enseignés tôt dans les formations scientifiques. Ils sont au coeur de l'algèbre linéaire : applications linéaires, sous-espaces, bases, dimension, diagonalisation, formes bilinéaires, transformations orthogonales, etc. Leur maîtrise est cruciale pour les disciplines avancées.

En conclusion, la théorie des espaces vectoriels est le fruit d'une évolution historique riche allant de la géométrie concrète à l'abstraction contemporaine. Elle illustre l'universalité des structures mathématiques et continue de nourrir les sciences et les technologies modernes.

Histoire des Applications Linéaires

L'étude des applications linéaires est intimement liée à celle des espaces vectoriels et de l'algèbre linéaire en général. Depuis les débuts de la géométrie analytique au XVII siècle, les transformations du plan et de l'espace, telles que les rotations, les translations et les homothéties, sont déjà des cas particuliers d'applications linéaires ou affines. Cependant, la notion abstraite d'application linéaire apparaît plus tard, au fur et à mesure que les mathématiques gagnent en rigueur et en abstraction.

Les premières formes d'applications linéaires sont liées à la représentation de systèmes d'équations linéaires. Au XVIII siècle, les mathématiciens comme Cramer ou Gauss étudient ces systèmes en développant des méthodes de résolution impliquant des matrices. Ces matrices, que l'on manipule sans le formalisme moderne, représentent en réalité des transformations linéaires, même si le concept n'est pas encore défini clairement.

C'est au XIXe siècle que la notion d'application linéaire commence à être formalisée, parallèlement au développement des structures algébriques. Avec l'avènement des espaces vectoriels, il devient naturel d'étudier les fonctions qui respectent les opérations d'addition vectorielle et de multiplication par un scalaire. Ces fonctions sont précisément les applications linéaires. Les travaux de Grassmann, Hamilton, et plus tard ceux de Peano et de Steinitz, permettent de poser les bases rigoureuses de cette théorie.

Une application linéaire entre deux espaces vectoriels est définie comme une fonction qui préserve la structure linéaire, c'est-à-dire qui satisfait les propriétés : $f(u+v) = f(u) + f(v)$ et $f(\lambda u) = \lambda f(u)$ pour tous vecteurs u, v et tout scalaire λ. Ce type d'application permet de modéliser une grande variété de phénomènes mathématiques, physiques et techniques.

La théorie des applications linéaires prend toute son ampleur avec l'introduction des matrices comme outil de représentation. Une application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie peut être entièrement décrite par une matrice, et réciproquement. Cela permet non seulement de simplifier leur manipulation, mais aussi d'étudier leurs propriétés (injectivité, surjectivité, bijectivité, noyau, image, etc.) en termes algébriques.

Au XX siècle, les applications linéaires jouent un rôle central dans l'analyse fonctionnelle, où l'on considère des espaces vectoriels de dimension infinie, tels que les espaces de fonctions. Les opérateurs linéaires, qui sont des applications linéaires d'un espace fonctionnel dans un autre,

deviennent essentiels pour l'étude des équations différentielles, des intégrales, et plus largement de tout phénomène exprimé par des transformations continues.

En physique, les applications linéaires modélisent des systèmes linéaires où les effets sont proportionnels aux causes. En mécanique quantique, les opérateurs linéaires sur des espaces de Hilbert représentent les observables physiques. En informatique, on les retrouve dans l'algèbre matricielle, le traitement d'image, l'apprentissage automatique, ou encore la compression de données.

Aujourd'hui, les applications linéaires sont omniprésentes dans l'enseignement des mathématiques. Leur compréhension est essentielle pour aborder des sujets variés allant de la géométrie projective à l'analyse numérique, en passant par la théorie des graphes, les probabilités, ou la cryptographie. Elles forment un pont entre l'abstraction mathématique et les applications concrètes dans les sciences et l'ingénierie.

Histoire des matrices

Les matrices sont des objets mathématiques très utilisés aujourd'hui, notamment en algèbre linéaire, en physique, en informatique, etc. Voici un aperçu de leur histoire, depuis leurs origines jusqu'à leur développement moderne.

Les premières traces de ce qui pourrait être considéré comme l'usage de matrices remontent à la Chine antique, vers -200. Le livre des Neuf Chapitres sur l'Art Mathématique (Jiuzhāng Suànshù) contient des méthodes pour résoudre des systèmes d'équations linéaires, qui sont en fait équivalentes à la méthode d'élimination de Gauss. Bien que le concept de matrice n'ait pas encore été formalisé, les Chinois représentaient les coefficients sous forme de tableaux, ce qui préfigure l'utilisation des matrices.

Au XVII siècle, des mathématiciens européens comme Leibniz s'intéressent à la résolution de systèmes linéaires. Leibniz introduit même une forme primitive de déterminant sans utiliser le terme "matrice". Au XVIII siècle, Gabriel Cramer présente la règle de Cramer pour résoudre des systèmes linéaires carrés à l'aide de déterminants. Bien que la notion de matrice n'ait pas encore été développée, ces idées posent les bases de la théorie des matrices.

Ce n'est qu'en 1850 que James Joseph Sylvester et Arthur Cayley, deux mathématiciens britanniques, commencent à formaliser la théorie des matrices. Cayley introduit les premières notions modernes sur les opérations matricielles (addition, multiplication) et publie en 1858 un

mémorandum sur la théorie des matrices, où il formalise la notion de matrice. Il y démontre également ce qui deviendra le théorème de Cayley-Hamilton, qui stipule qu'une matrice satisfait son propre polynôme caractéristique.

Au XX siècle, les matrices connaissent une expansion rapide, devenant centrales dans des domaines aussi divers que la mécanique quantique (avec Heisenberg et Dirac), l'algèbre linéaire moderne, les graphes, et les transformations géométriques, entre autres.

Dans l'ensemble, l'histoire des matrices montre leur évolution d'un outil pratique pour résoudre des systèmes linéaires à une partie fondamentale de l'algèbre moderne et des applications dans de nombreuses sciences.

Bibliographie

[1] E. Azouly, J. Avignant, G. Auliac, Problèmes Corrigés de mathématiques , DEUG MIAS/SM, Ediscience(Dunod pour la nouvelle édition) Paris 2002.

[2] E. Azouly, J. Avignant, G. Auliac, les mathématiques en Licence. Tome 1 : Cours + exos, MIAS.MASS.SM, Ediscience (Dunod pour la nouvelle édition) Paris 2003.

[3] E. Azouly, J. Avignant, G. Auliac, les mathématiques en Licence. Tome 2 : Cours + exos, MIAS.MASS.SM, Ediscience (Dunod pour la nouvelle édition) Paris 2003.

[4] R. Godement Cours d'algèbre. Hermann, 1966.

[5] M. H. Mortad, Exercices Corrigés d'Algèbre, Première Année L.M.D., Edition "Dar el Bassair"(Alger-Algérie), 2012.

[6] M. Queysanne, Algèbre, collection U, Armand Colin, 1971.

[7] Imene Medjadj, Cours d'Algèbre I et II avec Exercices Corrigés. U.S.T.O. 2017.