Republique Algerienne Democratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Relizane
Faculté des Sciences et de la Technologie

Cours Analyse 1, première année LMD- mathématique et informatiques

Dr: Beddani Abdallah

Année Universitaire 2023/ 2024

Introduction générale

Le document est destiné à une utilisation directe comme support de cours et de travaux dirigés pour les « première année Mathématiques et Informatique ». Le manuscrit est réparti en quatre parties essentielles. La première partie concerne le chapitre 1 : $\mathbb{R}$ est un corps commutatif, $\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné, Raisonnement par récurrence, $\mathbb{R}$ est un corps value, Intervalles, Bornes supérieure et inférieure d'un sous ensemble de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ est un corps Archimédien, Caractérisation des bornes supérieure et inférieure, La fonction partie entière. Ensembles bornés, Prolongement de $\mathbb{R}$: Droite numérique achevée $\mathbb{R}$, Propriétés topologiques de $\mathbb{R}$, Parties ouvertes fermées.

Le chapitre 2 est réservé aux Corps des Nombres Complexes**,** Opérations algébriques sur les nombres complexes, Module d'un nombre complexe z, Représentation géométrique d'un nombre complexe, forme trigonométrique d'un nombre complexe, Formules d'Euler, forme exponentielle d'un nombre complexe, Racines n-ième d'un nombre Complexe.

Le chapitre 3, traite les suites des nombres réels: Suites bornées, suites convergentes, propriétés des suites convergentes, opérations arithmétiques sur les suites convergentes, extensions aux limites infinies, Infiniment petites et Infiniment grandes, Suites monotones, suites extraites, suite de Cauchy, généralisation de la notion de la limite, Limite supérieure, Limite inférieure, Suites récurrentes.

Le chapitre 4 porte sur les Fonctions réelles d'une variable réelle,
Graphe d'une fonction réelle d'une variable réelle, Fonctions paires-impaires, Fonctions périodiques, Fonctions bornées, Fonctions monotones, Maximum local, Minimum local, Limite d'une fonction, Théorèmes sur les limites, Opérations sur les limites, Fonctions continues, Discontinuités de première et de seconde espèce, Continuité uniforme, Théorèmes sur les fonctions continues sur un intervalle fermé, Fonction réciproque continue, Ordre d'une variable-équivalence (Notation de Landau).

Le dernier chapitre porte sur les Fonctions dérivables, Dérivée à droite, dérivée à gauche, Interprétation géométrique de la dérivée, Opérations sur les fonctions dérivables, Différentielle-Fonctions différentiables, Théorème de Fermat, Théorème de Rolle, Théorème des accroissements finis, Dérivées d'ordre supérieur, Formule de Taylor, Extrémum local d'une fonction, Bornes d'une fonction sur un intervalle, Convexité d'une courbe. Point d'inflexion, Asymptote d'une courbe, Construction du graphe d'une fonction.

Table des Matières

Chapitre 1

Corps des Réels

1.1 Nombres réels

En mathématiques, nous travaillons avec les quatre ensembles de base suivants

1) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ est l'ensemble des entiers naturels.

2) $\mathbb{Z} = \{......., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ est l'ensemble des entiers relatifs.

3) $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}$ est l'ensemble des rationnels.

4) $D = \left\{ \frac{a}{10^k} / a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \right\}$ est l'ensemble des nombres décimaux.

Définition 1.1.1 *Un nombre rationnel est un nombre qui peut être représenté par une partie entière et une liste finie ou infinie périodique à partir d'un certain rang de décimales.*

Exemple 1 *4,255255255.....,0.333333.....5.232323.......... sont des nombres rationnels*

Définition 1.1.2 *Un nombre réel est un nombre qui peut être représenté par une partie entière et une liste finie ou infinie de décimales.*

Remarque 1 $\mathbb{R}$ *est l'ensemble des nombres réels.*

Si $x \notin \mathbb{Q}$ *dans ce cas on dit que* x *est un nombre irrationnel*

Exemple 2 $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ *et* $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ *c'est à dir* $\sqrt{2}$ *est un nombre irrationnel.*

Proposition 1.1.1 *Soint* $x, y \in \mathbb{R}$, *on a:*

$x \in \mathbb{Q}$ et $y \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow x + y \notin \mathbb{Q}$.

On note par $\forall$: quel que soit ou pour tout.

$\exists$: il exisite.

1.1.1 $\mathbb{R}$ est un corps commutatif

Définition 1.1.3 $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *est un corps commutatif car :*

1) Associative $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x + y) + z = x + (y + z)$.

2) Commutative $\forall x, y \in \mathbb{R}, x + y = y + x$.

3) Elément neutre $\exists 0_E \in \mathbb{R}, \forall x \in E, 0_E + x = x$.

4) Elément symétrique $\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R}$ *tel que* $x + x' = 0_E$.

5) Associative $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x.y).z = x.(y.z)$

6)Commutative $\forall x, y \in \mathbb{R}, x.y = y.x$

7) Elément neutre $\exists 1 \in \mathbb{R}^*, \forall x \in \mathbb{R}, 1.x = x$

8) Elément symétrique $\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists x' \in \mathbb{R}^*$ *tel que* $x.x' = 1$.

9) $x.(y + z) = x.y + x.z$ *(distributative).*

Relation d'ordre dans $\mathbb{R}$ ($\leq$ ou $\geq$)

1. R est réflexive $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}(x \leq x)$.
2. R est transitive $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow (x \leq z)$.
3. R est antiymétrique $\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}, (x \leq y)$ et $(y \leq x) \Rightarrow (y = x)$.

$\mathbb{R}$ est totalement ordonné car $\forall x, y \in \mathbb{R}$ on a $(x \leq y)$ ou $(y \leq x)$.

1.1.2 Raisonnement par récurrence

Le principe de récurrence permet de montrer qu'une assertion $P(n)$, dépendant de n, est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. La démonstration par récurrence se déroule en deux étapes :

1) On prouve $P(0)$.est vraie.

2) On suppose $n \geq 0$ donné avec $P(n)$ vraie, et on démontre alors que

l'assertion $P(n + 1)$ est vraie.

Enfin dans la conclusion, on rappelle que par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 3 *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq n$.*

1) On a $2^0 = 1 \geq 0$ c-à-dire $P(0)$ est vraie.

2) On suppose $P(n) : 2^n \geq n$ vraie, et on démontre alors que l'assertion $P(n+1) : 2^{n+1} \geq n+1$ est vraie.

On a

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n = 2^n + 2^n \geq n + 1$$

alors $P(n+1) : 2^{n+1} \geq n+1$ est vraie.

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq n$.

Exemple 4 *Montrons que quel que soit l'entier naturel n,*

l'entier $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7..................................(R_n).

Par récurrence montrons que (R_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si $n = 0$, $3^0 - 2^0 = 0 = 0.7 \Rightarrow 3^0 - 2^0$ est divisible par 7.$\Rightarrow R_0$ est vraie.

Supposons que (R_n) est vraie (l'hypothèse de récurrence), et montrons que (R_{n+1}) l'est aussi, c'est-à-dire:

$$3^{2(n+1)} - 2^{n+1} \text{ est divisible par} 7.$$

En effet:

$$\begin{aligned} 3^{2(n+1)} - 2^{n+1} &= 2.\left(3^{2n} - 2^n\right) + 7.3^{2n} \\ &= 2.7.k + 7.3^{2n} \text{ (l'hypothèse de récurrence)} \\ &= 7\left(2.k + 3^{2n}\right) = 7.k' \\ &\Rightarrow 3^{2(n+1)} - 2^{n+1} \text{ est divisible par} 7. \end{aligned}$$

Conclusion:

$$\forall n \in \mathbb{N}, 3^{2n} - 2^n \text{ est divisible par } 7.$$

1.1.3 Valeur absolue

Soit $x \in \mathbb{R}$, on appelle valeur absolue de x (notée $|x|$), le réel défini par

$$|x| = \begin{cases} x \textbf{ si } x \geq 0 \\ -x \textbf{ si } \ x < 0. \end{cases}$$

Propriétés de la valeur absolue

1)$\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0.$

2)$\forall x \in \mathbb{R}, r > 0, |x| \leq r \Longleftrightarrow -r \leq x \leq r.$

3)$\forall x, y \in \mathbb{R}, |x+y| \leq |x| + |y|.$

4)$\forall x, y \in \mathbb{R}, ||x| - |y|| \leq |x+y|.$

5)$\forall x, y \in \mathbb{R}, |xy| \leq |x| |y|.$

Preuve. Montrons que $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x+y| \leq |x| + |y|.$

On a $\begin{cases} -|x| \leq x \leq |x| \\ -|y| \leq y \leq |y| \end{cases}$

donc $-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$

alors $|x+y| \leq |x| + |y|.$

Montrons que $\forall x, y \in \mathbb{R}, ||x| - |y|| \leq |x+y|$

On a $\begin{cases} |x| = |x+y-y| \leq |x+y| + |y| \\ |y| = |y+x-x| \leq |x+y| + |x| \end{cases}$

donc $-|x+y| \leq |x| - |y| \leq |x+y|$

ce qui nous donne $||x| - |y|| \leq |x+y|.$ $\blacksquare$

1.1.4 Intervalles

Définition 1.1.4 *Soit I une partie de $\mathbb{R}$, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si*

$$\forall x, y \in I, \forall z \in \mathbb{R}, x \leq z \leq y \Longrightarrow z \in I.$$

Remarque: $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont des intervalles dans $\mathbb{R}$.

Intervalles bornés

$[a, b] = \{x, a \leq x \leq b\}$

$]a, b[= \{x, a < x < b\}$

$[a, b[= \{x, a \leq x < b\}$

$]a, b] = \{x, a < x \leq b\}$

Intervalles non borneés

$]-\infty, b] = \{x, x \leq b\}$

$]-\infty, b[= \{x, x < b\}$

$[a, +\infty[= \{x, a \leq x\}$

$]a, +\infty[= \{x, a < x\}$

$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

$\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$

$\mathbb{R}^- =]-\infty, 0]$

$\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

1.2 Bornes supérieure et inférieure d'un sous ensemble de $\mathbb{R}$

Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$.

1.2.1 Majorants, Minorants

1) A est majoré par M (ou $M \in \mathbb{R}$ est un majorant de A) si $\forall x \in A$, on *a*, $x \leq M$.

2) A est minoré par m (ou $m \in \mathbb{R}$ est un minorant de A) si $\forall x \in A$, on *a*, $x \geq m$.

3) A est borné si elle est à la fois majorée et minorée, c'est à dire

$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2$, $\forall x \in A$, on *a* $m \leq x \leq M$.

Proposition 1.2.1 *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Montrer que A majorée est équivalent à $-A = \{-a, a \in A\}$ est minoré.*

Preuve. A est majorée par M

donc $\forall x \in A$, on *a*, $x \leq M$

alos si $\forall x \in A$, on *a*, $-x \geq -M$.

c'est à dire $-A = \{-a, a \in A\}$ est minoré. ■

Définition 1.2.1 *On appelle borne supérieure de A le plus petit des majorants de A, on le note $sup(A)$.*

Définition 1.2.2 *On appelle borne inférieure de A le plus grand des minorants de A, on le note inf(A).*

Exemple 5 $A = [0,1]\,, \sup A = 1, \inf A = 0.$

$A = \left]0,1\right[\,, \sup A = 1, \inf A = 0.$

1.2.2 Caractérisation des bornes supérieures et inférieures

Proposition 1.2.2 *Soit A un sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{R}$ muni de la relation d'ordre usuelle. On a $M = sup(A)$ ssi :*

1) $\forall x \in A$, on a, $x \leq M$ *et*

2) $\forall \varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon \in A$ tel que $M - \varepsilon < x_\varepsilon \leq M$.

Preuve. Supposons $M = sup(A)$ donc M est un majorant de A, on considère $\varepsilon > 0$.

Comme M est le plus petit des majorants de A, $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant car plus petit que M.

Donc il existe $x_\varepsilon \in A$ tel que $M - \varepsilon < x_\varepsilon \leq M$.

Réciproquement, supposons que 1) et 2) soient vérifiés et montrons que $M = sup(A)$.

1) prouve que M est un majorant de A.

Il reste à montrer que c'est le plus petit.

Supposons il existe M' tel que $\forall x \in A$, on a, $x \leq M'$ et $M' < M$.

Si $\varepsilon = M - M'$, d'après 2), il existe $x_\varepsilon \in A$ tel que $M - \varepsilon < x_\varepsilon \leq M$,

alors il existe $x_\varepsilon \in A$ tel que $M' < x_\varepsilon \leq M$

est un contraduction. ■

Proposition 1.2.3 *Soit A un sous-ensemble non vide et minoré de $\mathbb{R}$ muni de la relation d'ordre usuelle. On a $m = \inf(A)$ ssi:*

1)$\forall x \in A$, on a, $x \geq m$.

2)$\forall \varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon \in A$ tel que $m < x_\varepsilon \leq m + \varepsilon$.

Preuve. Même méthode. ■

Proposition 1.2.4 *Soient A et B deux ensembles dans $\mathbb{R}$.*

1) Si $A \subset B$ *alors* $\sup A \leq \sup B$.

2) $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$

$\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$

3) Si $A \cap B \neq \emptyset$ *on a:* $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B)$.

$\inf(A \cap B) \geq \max(\inf A, \inf B)$.

4) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$

$\sup(A - B) = \sup A - \inf B$

$\inf(A + B) = \inf A + \inf B$

$\inf(A - B) = \inf A - \sup B$

5) Si $\alpha \geq 0$

$\sup \alpha A = \alpha \sup A$.

$\inf \alpha A = \alpha \inf A$.

5) Si $\alpha \leq 0$

$\sup \alpha A = \alpha \inf A$.

$\inf \alpha A = \alpha \sup A$.

1.2.3 Maximum, Minimum

Définition 1.2.3 *On appelle minimum de* A *le plus petit élément de* A*, on le note* $min(A)$.

Définition 1.2.4 *On appelle maximum de* A *le plus grand élément de* A*, on le note* $max(A)$.

Exemple 6 $A = [0,1], \max A = 1, \min A = 0$.

$A =]0,1[, \max A$ *n'existe pas*, $\min A$ *n'existe pas.*

Exemple 7 $A = \left\{1 - \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^*\right\}$

$\inf A = \min A = 0$.

Car $n = 1$*, nous donne* $1 - \frac{1}{n} = 0$.

et on a $1 - \frac{1}{n} \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

On montre que $\sup A = 1$

On a $1 - \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$\forall \varepsilon > 0$*, il existe* $x_\varepsilon = 1 - \dfrac{1}{1 + \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]} \in A$ *tel que* $1 - \varepsilon < x_\varepsilon \leq 1$.

Car on a $\frac{1}{\varepsilon} \leq 1 + \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ *donc* $\frac{1}{1+\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]} \leq \varepsilon$
c'est à dire $1 - \varepsilon \leq 1 - \frac{1}{1+\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]} \leq 1$.

1.2.4 Proprieté d'Archimed

$\mathbb{R}$ est archimédien, c'est à dire $\forall x, y \in \mathbb{R}$, avec $y > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $x < ny$.

1.2.5 Partie entière

Définition 1.2.5 *Soit x nombre réel, il existe un unique entier relatif noté $E[x]$, tel que*

$$E[x] \leq x < E[x] + 1.$$

Proposition 1.2.5 $\forall x \in \mathbb{R}$, $x = E[x] \Longleftrightarrow x \in \mathbb{Z}$.

Proposition 1.2.6 $\forall x, m \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$, $E\left[x + m\right] = E[x] + m$.

Remarque 2 *En général, $E(x + y) \neq E(x) + E(y)$ et $E(nx) \neq nE(x)$.*

Proposition 1.2.7 *La partie entière est croissante i.e*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \Longrightarrow E[x] \leq E[y].$$

Mais la partie entière n'est pas strictement croissante. Par exemple, $0 < \frac{1}{2}$ et $E[x] = E[\frac{1}{2}]$

1.2.6 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Théorème 1.2.1 *Entre deux réels différents quelconques, il existe un rationnel.*

Preuve. $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y$, $\exists r \in Q$ tel que $x < r < y$.

On pose $z = y - x$

$\mathbb{R}$ est archimédien, c'est à dire $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $1 < nz$.

Et $[nx] \leq nx \leq [nx] + 1$

alors $\frac{[nx]}{n} \leq x \leq \frac{[nx]+1}{n} \leq \frac{nx+1}{n} = x + \frac{1}{n} < y$.

donc $x \leq \frac{[nx]+1}{n} < y$ et $\frac{[nx]+1}{n} \in \mathbb{Q}$. ■

Exercice: $A = \left\{x \in \mathbb{Q}/x^2 \leq 2\right\}$

Montrer que n'admet pas de borne superieure dans $\mathbb{Q}$.

1.2.7 Droite numérique achevée $\mathbb{R}$

La droite réelle achevée est l'ensemble $\bar{\mathbb{R}}$ tel que $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Et on a:

1)$\forall x \in \mathbb{R}$, $x + (+\infty) = +\infty, x + (-\infty) = -\infty$

2) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty, (-\infty) + (-\infty) = -\infty$

3)$\forall x > 0$, $x.(+\infty) = +\infty, x.(-\infty) = -\infty$

4)$\forall x < 0$, $x.(+\infty) = -\infty, x.(-\infty) = +\infty$

5)$(+\infty).(+\infty) = +\infty, (-\infty).(-\infty) = +\infty$

$(+\infty).(-\infty) = -\infty, (-\infty).(+\infty) = -\infty$

6) $\forall x \in \mathbb{R}$, $-\infty < x < +\infty$.

1.2.8 Propriétés topologiques de $\mathbb{R}$

Définition 1.2.6 *Une partie $U \subset \mathbb{R}$ est dite ouverte si pour tout $x \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset U$. Une partie $F \subset \mathbb{R}$ est dite fermée si son complémentaire $U = \mathbb{R} \backslash F$ est ouvert.*

Exemple 8 $]a,b[,]a,+\infty[,]-\infty,b[,]-\infty,+\infty[$ *sont des ouverts.* $\{a\}, [a,b], [a,+\infty[,]-\infty,b],]-\infty,+\infty[$ *sont des fermés.* $\emptyset$ *et* $\mathbb{R}$ *sont à la fois ouverts et fermés.*

Exercice 1 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, Montrer que:

1) Si n^2 est pair, alors n est pair.

2) Si $2^n - 1$ est un nombre premier alors n est premier.

3) Si x et y sont différents alors les nombres $(x+1)(y-1)$ et $(x-1)(y+1)$ sont différents.

4) a et p sont deux entiers naturels; montrer que l'on a :(p premier et p divise a^2) $\Rightarrow p$ divise a.

5)$\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. Déduire que: $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.

Corecction

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, Montrons par un raisonnement par l'absurde que:

Si n^2 est pair, alors n est pair.

Supposons que: n n'est pas pair $\Rightarrow$ n est impair $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ tel que: $n = 2k+1$

donc

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2+4k+1 \\ &= 2\left(2k^2+2k\right)+1 \\ &= 2m+1 \end{aligned}$$

comme $m = 2k^2+2k \in \mathbb{N}$ on trouve n^2 est impair (contradiction avec l'hypothèse).

2) Si $2^n - 1$ est un nombre premier alors n est premier.

Supposons que n n'est pas premier$\Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{N}$ avec $b \neq 0$ tel que: $n = a \cdot b$, $(a,b) \neq (n,1)$ et $(a,b) \neq (1,n)$.

Alors

$$\begin{aligned} 2^n - 1 &= 2^{ab} - 1 \\ &= (2^a)^b - 1 \\ &= \left[(2^a) - 1\right]\left[P\left(2^a\right)\right] \end{aligned}$$

avec $\deg P\left(2^a\right) = b - 1$.

Mais $\left[(2^a)-1\right] \neq 2^n - 1$ et $\left[(2^a)-1\right] \neq 1$ c'est à dire $2^n - 1 = M \cdot \left[P\left(2^a\right)\right]$.

comme $M \neq 2^n - 1$ et $M \neq 1$ on trouve $2^n - 1$ n'est pas premier (contradiction avec l'hypothèse).

3) Si x et y sont différents alors les nombres $(x+1)(y-1)$ et $(x-1)(y+1)$ sont différents.

Supposons que $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1)$

c'est à dire $xy - x + y - 1 = xy + x - y - 1$

alors $x = y$ (contradiction avec l'hypothèse).

4) a et p sont deux entiers naturels, montrer que l'on a :

$$(\ p \text{ premier et } p \text{ divise } a^2\ ) \Rightarrow p \text{ divise } a.$$

Si p premier et p divise $a^2 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ tel que: $a^2 = k \cdot p \Rightarrow a \cdot a = k \cdot p$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} a \text{ divise } p \text{ et } k \text{ divise } a \text{ contradiction avec le fait que } p \text{ est premier.} \\ \text{ou bien: } p\text{divise } a \text{ et } a \text{ divise } k \end{array} \right. \Rightarrow p \text{ divise } a.$$

si p est premier alors $\sqrt{p}$ est un nombre irrationnel.

Supposons par l'absurde que: $\sqrt{p}$ est un nombre rationnel implique que $\exists a, b \in \mathbb{N}$, $(a, b) = 1$ avec $b \neq 0$ et

$$\begin{aligned} \sqrt{p} = \tfrac{a}{b} \quad & \Rightarrow p = \left(\tfrac{a}{b}\right)^2 \\ & \Rightarrow p \cdot b^2 = a^2 \\ & \Rightarrow p \text{ divise } a^2 \text{ mais } p \text{ premier} \\ & \Rightarrow p \text{ divise } a \\ & \Rightarrow a = k \cdot p,\ k \in \mathbb{N} \quad b^2 = p \cdot k^2 \\ & \Rightarrow p \text{ divise } b^2, \text{ mais } p \text{ premier} \\ & \Rightarrow p \text{ divise } b \\ & \Rightarrow p \neq 1 \end{aligned}$$

donc p est un diviseur commun de a et b contradiction avec $(a, b) = 1$ donc $\sqrt{p}$ est un nombre irrationnel.

5) $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. Déduire que: $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.

D'après (5) $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Supposons que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est rationnel.

Alors $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \in \mathbb{Q}$ ce qui nous donne $\sqrt{2} - \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$.

la somme des deux nombres rational est rational donc $2\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

c'est à dire$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ contradiction qui nous donne $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.

Exercice 2. Montrer par récurrence que:

1) $\forall n \in \mathbb{N}, 4^n + 6n - 1$ est un multiple de 9.

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,(k+1)\,(k+2) = \frac{1}{4} n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,.$

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^{n-1} \leq n!$. avec $n! = n\,(n-1)\,(n-2) \ldots 1$ et $0! = 1$

Correction: Montrons par récurrence que:

$$\begin{aligned}
1)\ \forall n &\in \mathbb{N}, 4^n + 6n - 1 \text{ est un multiple de 9.}\\
2)\ \forall n &\in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).\\
3)\ \forall n &\in \mathbb{N}^*, 2^{n-1} \leq n!. \text{ avec } n! = n(n-1)(n-2)...1 \text{ et } 0! = 1
\end{aligned}$$

1) $\forall n \in \mathbb{N}, 4^n + 6n - 1$ est un multiple de 9.........(R_n)

Si $n = 0$, $4^0 - 6 \cdot 0 - 1 = 0 = 0.9 \Rightarrow 4^0 - 6 \cdot 0 - 1$ est un multiple de 9 $\Rightarrow R_0$ est vraie.

Supposons que (R_n) est vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ (l'hypothèse de récurrence),

et montrons que (R_{n+1}) l'est aussi, c'est-à-dire:

$$4^{(n+1)} + 6(n+1) - 1 \text{ est un multiple de 9.}$$

En effet:

$$\begin{aligned}
4^{(n+1)} + 6(n+1) - 1 &= 4 \cdot 4^n + 6n + -1 + 6\\
&= 9.k + 3.4^n + 6 \text{ (l'hypothèse de récurrence)}\\
&= 9.k + 3(9k - 6n + 1) + 6 = 9(k + 3k - 2n + 1)\\
&\Rightarrow\ 4^{(n+1)} + 6(n+1) - 1 \text{ est un multiple de 9.}
\end{aligned}$$

Conclusion:

$$\forall n \in \mathbb{N}, 4^n + 6n - 1 \text{ est un multiple de 9.}$$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).(R_n)$

Si $n = 1, \sum_{k=1}^{1} k(k+1)(k+2) = 1(2)(3) = 6$ et $\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) = \frac{1}{4}1(2)(3)(4) = 6 \Rightarrow R_1$ est vraie.

Supposons que (R_n) est vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$ (l'hypothèse de récurrence), et montrons que (R_{n+1}) l'est aussi, c'est-à-dire:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

En effet:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2) &= \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) + (n+1)(n+2)(n+3) \\ &= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) + (n+1)(n+2)(n+3) \\ &= \frac{1}{4}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\end{aligned}$$

Conclusion:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^{n-1} \leq n!.\,(R_n)$ avec $n! = n(n-1)(n-2)...1$ et $0! = 1$

Pour $n = 1, 2^{1-1} = 2^0 = 1 \leq 1! = 1 \Rightarrow R_0$ est vraie.

Supposons que (R_n) est vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$ (l'hypothèse de récurrence),

et montrons que (R_{n+1}) l'est aussi, c'est-à-dire:

$$2^n \leq (n+1)!$$

En effet:

$$2^n = 2.2^{n-1} \leq 2.n! \leq (n+1).n! = (n+1)!$$

Conclusion:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^{n-1} \leq n!.$$

Exercice 3 A, B et C sont trois parties d'un ensemble$E$. Montrer que:

1) $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$.

2) $A \subset B \Leftrightarrow C_E^B \subset C_E^A \Leftrightarrow A \cup B = B$

3) $C_E^{A\cup B} = C_E^A \cap C_E^B$

4) $B=C \Leftrightarrow (A\cap B=A\cap C \text{ et } A\cup B=A\cup C)$

5) $(A\setminus B)\setminus C\subset A\setminus (B\cup C)$.

6) On suppose que:$A\cap B=A\cup C$ A-t-on $B=C$.

Correction

A, B et C sont trois parties d'un ensemble$E$.

1) Montrons que: $A\cup B=A\cap C\Leftrightarrow B\subset A\subset C$.

"$\Rightarrow$ " Montrons que: $A\cup B=A\cap C\Rightarrow B\subset A\subset C$

a) $B\subset A$, si $x\in B\Rightarrow x\in A\cup B\Rightarrow x\in A\cap C\Rightarrow x\in A\Rightarrow B\subset A$

b) $A\subset C$, si $x\in A\Rightarrow x\in A\cup B\Rightarrow x\in A\cap C\Rightarrow x\in A$ et $x\in C\Rightarrow A\subset C$

$\Rightarrow B\subset A\subset C$

"$\Leftarrow$ "$B\subset A\subset C\Rightarrow A\cup B=A\cap C$

a) $A\cup B\subset A\cap C$, si $x\in A\cup B\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x\in A\Rightarrow x\in C \\ \text{ou } x\in B\Rightarrow x\in A\Rightarrow x\in C\end{array}\right. \Rightarrow x\in A\cap C$

b) $A\cap C\subset A\cup B$, si $x\in A\cap C\Rightarrow x\in A\Rightarrow x\in A\cup B$

2) $A\subset B\Leftrightarrow C_E^B\subset C_E^A\Leftrightarrow A\cup B=B$

a) Montrons que: $A\subset B\Leftrightarrow C_E^B\subset C_E^A$

En effet:

"$\Rightarrow$ "si $x\in C_E^B\Rightarrow x\in E$ et $x\notin B\Rightarrow x\in E$ et $x\notin A$ car $A\subset B\Rightarrow x\in C_E^A$

"$\Leftarrow$ "si $x\in A\Rightarrow x\notin C_E^A\Rightarrow x\notin C_E^B\Rightarrow x\in B$

b) Montrons que: $C_E^B\subset C_E^A\Leftrightarrow A\cup B=B$

"$\Rightarrow$ "1) $A\cup B\subset B$?

si $x\in A\cup B\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x\in A\Rightarrow x\notin C_E^A\Rightarrow x\notin C_E^B\Rightarrow \mathbf{x}\in\mathbf{B} \\ \text{ou } \mathbf{x}\in\mathbf{B}\end{array}\right. \Rightarrow x\in B$

2)$B\subset A\cup B$ évident dans tous les cas.

"$\Leftarrow$ "$C_E^B\subset C_E^A$?

si $x\in C_E^B\Rightarrow x\notin B\Rightarrow x\notin A\cup B\Rightarrow x\notin A\Rightarrow x\in C_E^A$.

3) $C_E^{A\cup B}=C_E^A\cap C_E^B$

"$\subset$ "$C_E^{A\cup B}\subset C_E^A\cap C_E^B$?

si $x\in C_E^{A\cup B}\Rightarrow x\notin A\cup B\Rightarrow x\notin A$ et $x\notin B\Rightarrow x\in C_E^A$ et $x\in C_E^B\Rightarrow x\in C_E^A\cap C_E^B$

"$\supset$ " $C_E^A\cap C_E^B\subset C_E^{A\cup B}$

si $x\in C_E^A\cap C_E^B\Rightarrow x\in C_E^A$ et $x\in C_E^B\Rightarrow x\notin A$ et $x\notin B\Rightarrow x\notin A\cup B\Rightarrow x\in C_E^{A\cup B}$.

4) $B=C \Leftrightarrow (A\cap B = A\cap C \text{ et } A\cup B = A\cup C)$

"$\Rightarrow$" Montrons que: $(A\cap B = A\cap C \text{ et } A\cup B = A\cup C)$?

si $B=C \Rightarrow A\cap B = A\cap C$ et $A\cup B = A\cup C$

"$\Leftarrow$" Montrons que: $B=C$?

"$\subset$"si $x\in B \Rightarrow x\in A\cup B \Rightarrow x\in A\cup C$

$$\Rightarrow \begin{cases} x\in A \Rightarrow x\in A\cap B \text{ car on a } x\in B \Rightarrow x\in A\cap C \Rightarrow \mathbf{x}\in\mathbf{C} \\ \text{ou } \mathbf{x}\in\mathbf{C} \end{cases}$$

$\Rightarrow x\in C$

"$\supset$" si $x\in C \Rightarrow x\in A\cup C \Rightarrow x\in A\cup B$

$$\Rightarrow \begin{cases} x\in A \Rightarrow x\in A\cap C \text{ car on a } x\in C \Rightarrow x\in A\cap B \Rightarrow \mathbf{x}\in\mathbf{B} \\ \text{ou } \mathbf{x}\in\mathbf{B} \end{cases}$$

$\Rightarrow x\in B$

5) $(A\setminus B)\setminus C \subset A\setminus (B\cup C)$.

si $x\in (A\setminus B)\setminus C \Rightarrow x\in (A\setminus B)$

et $x\notin C \Rightarrow x\in A$ et $x\notin B$

et $x\notin C \Rightarrow x\in A$ et $(x\notin B$ et $x\notin C)$

c'est à dire $x\in A$ et $x\notin B\cup C \Rightarrow x\in A\setminus (B\cup C)$.

6) On suppose que: $A\cap B = A\cup C$ A-t-on $B=C$.

Non car par exemple: $A=\{1,2,4\}, B=\{1,2,4\}$ et $C=\{1,2\}$

on a: $A\cap B = A\cup C$ mais $B\neq C$.

Exercice 4 Soient E un ensemble, $A,B\in P(E)$.Résoudre dans $P(E)$ les équations suivantes:

$$\begin{aligned} 1)\ X\cup A &= B \text{ et } 2)\ X\cap A = B \\ 3)\ X-A &= B \text{ et } 4)\ X\bigtriangleup A = B. \end{aligned}$$

Correction

Soient E un ensemble non vide, et $P(E)$ l'ensemble de ses parties.

On suppose que $card\ E = n$.

Montrer par récurrence que:

$$card\ P\ (E) = 2^n, \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Par récurrence:

1ère étape:

Pour un ensemble qui contient un seul élément par exemple:

$E = \{a\} \Rightarrow P\ (E) = \{\varnothing, \{a\}\} \Rightarrow card\ P\ (E) = 2^1 = 2.$

donc la relation est vraie pour $n = 1$

2ème étape:

Supposons que pour un ensemble A_n qui contient n éléments alors: $card\ P\ (A_n) = 2^n$ et montrons que pour un ensemble A_{n+1} qui contient $n+1$ éléments alors: $card\ P\ (A_{n+1}) = 2^{n+1}$. En effet: si on a un ensemble A_{n+1} qui contient $n+1$ éléments alors: l'ensemble des parties contient les sous ensembles qui ont un lien avec les n premiers éléments qui sont 2^n sous ensembles et on ajoute les mêmes sous enembles mais qui contients l'élément d'ordre $(n+1)$ à chaque fois, alors $card\ P\ (A_{n+1}) = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$.

Exercice 5

Soient E un ensemble non vide, et $P\ (E)$ l'ensemble de ses parties.

On suppose que $card\ E = n$.Montrer par récurrence que:

$$card\ P\ \ (E) = 2^n.$$

$$card\ P\ \ (E) = 2^n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Correction

Soient E un ensemble, $A, B \in P\ (E)$ .Résoudre dans $P\ (E)$ les équations suivantes:

$$(1)\ X \cup A = B \qquad \text{et} \qquad (2)\ X \cap A = B$$

$$(3)\ X - A = B \qquad \text{et} \qquad (4)\ X \triangle A = B$$

(1) $X \cup A = B\ \Rightarrow A \subset B \Rightarrow X = C_B^A \cup Y$ avec$Y \subset A$

Alors l'ensemble des solutions est $\Gamma_1 = \left\{X = C_B^A \cup Y \text{ avec } Y \in P\,(A) \rightarrow \text{ ensemble des parties de } A\right\}$

(2) $X \cap A = B \Rightarrow B \subset A \Rightarrow X = B \cup Y$ avec$Y \subset C_E^A$

Alors l'ensemble des solutions est $\Gamma_2 = \left\{X = B \cup Y \text{ avec } Y \in P\left(C_E^A\right) \rightarrow \text{ ensemble des parties de } C_E^A\right\}$

(3) $X - A = B \Rightarrow A \cap B = \varnothing \Rightarrow X = B \cup Y$ avec$Y \subset A$

Alors l'ensemble des solutions est $\Gamma_3 = \{X = B \cup Y \text{ avec } Y \in P(A) \rightarrow \text{ ensemble des parties de } A\}$

(4) $X \triangle A = B \Rightarrow X = (B - A) \cup (A \cap B)$.

Exercice 6 Soient x et y deux réels.

Simplifier $\sqrt{x^2}$. Supposons $0 < x \leq 1 \leq y$.

Classer par ordre croissant : $\sqrt{x}$, x, x^2, $\sqrt{y}$, y, y^2, 0 et 1.

Exercice 7. Représenter l'allure des graphes des fonctions suivantes :

$x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \ln x$, $x \mapsto \mathrm{e}^x$, $x \mapsto |x|$, $x \mapsto E(x)$.

Exercice 8 a et b étant deux réels strictement positifs, montrer qu'on a les inégalités suivantes entre moyennes harmonique, géométrique et arithmétique :

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Exercice 9 $(a, b) \in \mathbb{N}^{*2}$. A quelle condition a-t-on $\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$?

Exercice 10 Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n^2+3}} \leq \frac{1}{2n}$.

Exercice 11 Etablir les inégalités suivantes, où a, b et c sont des réels.

$2ab \leq a^2 + b^2$. $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$. Dans quel cas y a-t-il égalité?

Exercice 12 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$2 < |x - 1| < 3$. $|x - 1| < |x - 2|$. $|x - 1| < x$. $(x^2 - 2x + 1)^3 \leq 1$.

Exercice 13

Déterminer $E(x)$ pour $x = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2003}\right)^2$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ une solution de l'inégalité $E(x)^2 - xE(x) + 3 \leq 0$.

Montrer que $x \geq 4,75$.

Exercice 14 Soient $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$\sum_{i=0}^{p-1} E(x + \frac{i}{p}) = E(px)$. $E(\frac{E(px)}{p}) = E(x)$.

Exercice 15 Soient $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$ deux familles de nombres réels. Montrer que :

$$\left| \sup_{i \in I}(a_i) - \sup_{i \in I}(b_i) \right| \leq \sup_{i \in I} |a_i - b_i| .$$

Exercice 16 Soient x et y deux réels tels que $0 < x \leq 1 \leq y$.

Classer par ordre croissant: $\sqrt{x}, x, x^2, \sqrt{y}, y, y^2, 0$ et 1.

Exercice 17 Résoudre dans $\mathbb{R}$

$\sqrt{1+x} = 1-x$. $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+1} = 1$. $\sqrt{4-x} > x+5$.

Correction

Solution de l'équation $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+1} = 1$.

Le domaine de définition:

$$\begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow x \geq \frac{-1}{3}.$$

Et on aussi

$$\begin{aligned} \sqrt{3x+1} - \sqrt{x+1} = 1 \quad & \Longrightarrow \sqrt{3x+1} = \sqrt{x+1} + 1 \\ & \Longrightarrow 3x+1 = x+1+2\sqrt{x+1}+1 \\ & \Longrightarrow 2x-1 = 2\sqrt{x+1} \end{aligned}$$

On élève les deux parties au carré en rajoutant dans le domaine de définition la condition $2x-1 \geq 0$ on trouve:

$$\begin{aligned} 4x^2 - 4x + 1 = 4x + 4 \quad & \Longleftrightarrow 4x^2 - 8x - 3 = 0 \\ & \Longleftrightarrow x_1 = 1 - \tfrac{\sqrt{7}}{2}, x_2 = 1 + \tfrac{\sqrt{7}}{2}. \end{aligned}$$

le domaine de définition:

$$\begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x \geq \tfrac{1}{2}$$

Comme $x_1 = 1 - \frac{\sqrt{7}}{2} < \frac{1}{2}$ et $x_2 = 1 + \frac{\sqrt{7}}{2} > \frac{1}{2}$, on obtient

La réponse est : $x = 1 + \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Le domaine de définition: $4 - x \geq 0$.

On sépare 2 cas: $x+5 < 0$ et $x+5 \geq 0$.

Si $x+5 < 0$, on a $\sqrt{4-x} > 0 > x+5$,

donc l'inégalité est toujours vraie pour les x vérifiant

$$\begin{cases} 4-x \geq 0 \\ x+5 < 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x < -5$$

Alors, $I_1 =]-\infty;-5[$. Si $x+5 \geq 0$,

$$\begin{aligned}\sqrt{4-x} > x+5 \quad &\Longrightarrow 4-x > x^2+10x+25 \\ &\Longrightarrow x^2+11x+21 < 0\end{aligned}$$

$\frac{-11-\sqrt{37}}{2} < x < \frac{-11+\sqrt{37}}{2}$ (le coefficient de x^2 étant égal à 1, donc est positif).

Donc, les solutions seront les x vérifiant

$$\left\{\begin{array}{r} x \in]\frac{-11-\sqrt{37}}{2}; \frac{-11+\sqrt{37}}{2}[\\ x+5 \geq 0. \end{array}\right.$$

Comme $\frac{-11-\sqrt{37}}{2} < -5 < \frac{-11+\sqrt{37}}{2}$,

on obtient $I_2 =]\frac{-11-\sqrt{37}}{2}; \frac{-11+\sqrt{37}}{2}[\bigcap[-5;+\infty[= [-5;\frac{-11+\sqrt{37}}{2}[$.

Réponse: $x \in I_1 \bigcup I_2 =]-\infty;-5[\bigcup[-5;\frac{-11+\sqrt{37}}{2}[=]-\infty;\frac{-11+\sqrt{37}}{2}[$.

Exercice 18 Etablir les inégalités suivantes, où a, b et c sont des réels.

$2ab \leq a^2+b^2$. $ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2$. Dans quel cas y a-t-il égalité?

Exercice 19 Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Montrer que $|a+b| = |a|+|b|$ si et seulement si a et b sont tous deux positifs ou tous deux négatifs. En déduire que $|a-b| = |a-c|+|b-c|$ si et seulement si $a \leq c \leq b$ ou $b \leq c \leq a$.

Exercice 20 Montrer que :

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, E(x)+E(y) \leq E(x+y) \leq E(x)+E(y)+1$. $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq E(2x)-2E(x) \leq 1$.

$\forall x \in \mathbb{R}, -2 \leq 3E(2x)-2E(3x) \leq 1$.

Correction La troisième question : Par définition de la partie entière, on a $\forall x \in \mathbb{R}$

$$2x-1 < E(2x) \leq 2x \Longleftrightarrow 6x-3 < 3E(2x) \leq 6x$$

Et

$$\begin{aligned}3x-1 < E(3x) \leq 3x \quad &\Longleftrightarrow 6x-2 < 2E(3x) \leq 6x \\ &\Longleftrightarrow -6x \leq -2E(3x) < -6x+2\end{aligned}$$

En faisant la somme des dernières inégalités de chaque ligne, on obtient

$$-3 < 3E(2x) - 2E(3x) < 2.$$

Comme $3E(2x) - 2E(3x)$ est un entier, on conclut que

$$-2 \leq 3E(2x) - 2E(3x) \leq 1.$$

Exercice 21. Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. En utilisant l'axiome d'Archimède, montrer que I contient à la fois une infinité de nombres rationnels et une infinité de nombres irrationnels.

Correction Il suffit de considérer le cas I est fermé. Soit $I = [a, b]$.

Montrons que la question peut être ramenée à trouver de tels nombres sur un intervalle $[0, c]$, $c \in \mathbb{R}^+$.

Remarquons d'abord que (un nombre rationnel)+(un nombre rationnel)=(un nombre rationnel) et (un nombre **ir**rationnel)+(un nombre rationnel)=(un nombre **ir**rationnel).

C'est-à-dire, en ajoutant un nombre **rationnel**, on ne change pas la rationalité ou l'irrationalité (trouvez vous-même des exemples montrant que ce n'est pas le cas pour les irrationnels: en ajoutant deux nombres irrationnels on peut obtenir un nombre rationnel comme un nombre irrationnel).

Soit $a \in \mathbb{Q}$. Si on a trouvé une suite de nombres rationnels $(q_1, q_2, \dots, q_k, \dots) \subset [0, b-a]$ et une suites de nombres irrationnels $(r_1, r_2, \dots, r_k, \dots) \subset [0, b-a]$, alors les suites $(q_1 + a, q_2 + a, \dots, q_k + a, \dots) \subset [a, b]$ et $(r_1 + a, r_2 + a, \dots, r_k + a, \dots) \subset [a, b]$; en plus, $q_i \neq q_j \Leftrightarrow q_i + a \neq q_j + a$, et de même pour r_i. Cela veut dire qu'une fois qu'on a trouvé des suites recherchées sur l'intervalle $[0, b-a]$, on peut les "transporter" sur l'intervalle $[a, b]$ parce que $a \in \mathbb{Q}$.

Si $a \notin \mathbb{Q}$, il suffit de trouver un nombre rationnel $d \in]a; b[$ (ce qui est toujours possible car les nombres rationnels découpent $\mathbb{R}$ en segments de longueurs aussi petites qu'on veut) et refaire les raisonnements précédents pour l'intervalle $[d; b] \subset [a; b]$.

Donc, il reste à montrer comment trouver des suites $(q_1, q_2, \dots, q_k, \dots)$, $q_i \in \mathbb{Q}$ et $(r_1, r_2, \dots, r_k, \dots)$, $r_j \notin \mathbb{Q}$ sur un intervalle $[0; c]$. Par l'axiome d'Archimède, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$

tel que $\frac{1}{n_0} < c$. Donc, $\forall n \geq n_0$, $\quad \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < c$. Donc, la suite infinie des nombres rationnels sur l'intervalle $[0;c]$ est donnée par exemple par $(\frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_0+1}, \frac{1}{n_0+2}, \dots)$. De même, par l'axiome d'Archimède, $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{\sqrt{2}}{m_0} < c$. Donc, $\forall m \geq m_0$, $\quad \frac{\sqrt{2}}{m} < \frac{\sqrt{2}}{m_0} < c$. Comme $\forall m \in \mathbb{Z}^*$, $\frac{\sqrt{2}}{m} \notin \mathbb{Q}$, la suite infinie des nombres irrationnels sur l'intervalle $[0;c]$ est donnée par $(\frac{\sqrt{2}}{m_0}, \frac{\sqrt{2}}{m_0+1}, \frac{\sqrt{2}}{m_0+2}, \dots)$.

Exercice 22

Soit $A = [-1, 0[\cup]1, 2]$. L'ensemble A est-il borné? Déterminer les bornes inférieure et supérieure de A si elles existent. A admet-il un plus petit élément, un plus grand élément?

Mêmes questions pour $B =]0, +\infty[$, $C = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\}$, $D = \{\frac{1}{1+|x|}; x \in \mathbb{R}\}$ et $E = \{\cos\frac{2n\pi}{7}; n \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 23 Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On définit :

$$A + B = \{x \in \mathbb{R}; \exists a \in A, \exists b \in B, x = a + b\}.$$

A quoi est égal $A + B$ dans le cas où $A = [1, 3]$ et $B = [2, 4[$?

dans le cas où $A =]-\infty, 0]$ et $B = [1, 2]$?

On suppose A et B majorés. Montrer que $A + B$ est majoré, et que :

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

Correction $A \subset \mathbb{R}$ est majorée $\Longleftrightarrow \exists a_0 \in \mathbb{R}$ tel que $a \leq a_0 \quad \forall a \in A$.

De même, $B \subset \mathbb{R}$ est majorée $\Longleftrightarrow \exists b_0 \in \mathbb{R}$ tel que $b \leq b_0 \quad \forall b \in B$.

On a alors $\forall x \in A + B: \quad x = a + b \leq a_0 + b_0 \implies A + B$ est majorée par $a_0 + b_0$.

Pour montrer que $Sup\,(A + B) = Sup\,A + Sup\,B$,

on va montrer 2 inégalités:

$Sup\,(A + B) \leq Sup\,A + Sup\,B$ et $Sup\,(A + B) \geq Sup\,A + Sup\,B$.

$\underline{Sup\,(A + B) \leq Sup\,A + Sup\,B.}$ $\quad Sup\,A + Sup\,B$ est un majorant de $A + B$.

Par définition $Sup\,(A + B)$ est le plus petit de tous les majorants,

donc $Sup\,(A + B) \leq Sup\,A + Sup\,B$.

$\underline{Sup\,(A + B) \geq Sup\,A + Sup\,B.}$

On va utiliser la propriété caractéristique de $Sup\, X$:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists x \in X \ \text{ tel que } Sup\, X - \epsilon < x \leq Sup\, X.$$

On fixe un $\epsilon > 0$ et on écrit cette propriété pour $Sup\, A$ et $\frac{\epsilon}{2}$, ensuite pour $Sup\, B$ et $\frac{\epsilon}{2}$:

$$\exists a \in A \ \text{ tel que } Sup\, A - \frac{\epsilon}{2} < a \leq Sup\, A.$$

$$\exists b \in B \ \text{ tel que } \ Sup\, B - \frac{\epsilon}{2} < b \leq Sup\, B.$$

En ajoutant les parties gauches de ces inégalités,

on obtient $Sup\, A + Sup\, B - \epsilon < a + b$,

et comme $A + B$ est majoré par $Sup\,(A + B)$,

on a $a + b \leq Sup\,(A + B)$. On a donc

$$Sup\, A + Sup\, B - \epsilon < a + b \leq Sup\,(A + B),$$

c'est-à-dire, $\forall \epsilon > 0$

$$Sup\, A + Sup\, B - \epsilon < Sup\,(A + B).$$

Montrons que cela implique $Sup\, A + Sup\, B \leq Sup\,(A + B)$,

en raisonnant par l'absurde. Supposons que

$$Sup\, A + Sup\, B > Sup\,(A + B).$$

Posons $\varepsilon_0 = Sup\, A + Sup\, B - Sup\,(A + B) > 0$

et écrivons la propriété caractéristique de $Sup\,(A + B)$,

pour ce ε_0: $\exists x \in A + B$ tel que:

$$Sup\, A + Sup\, B - \varepsilon_0 < x \leq Sup\,(A + B)$$

$$\begin{aligned}
&\iff \quad Sup\, A + Sup\, B - (Sup\, A + Sup\, B - Sup\,(A+B)) < x \leq Sup\,(A+B) \\
&\iff \quad Sup\,(A+B) < x \leq Sup\,(A+B) \\
&\implies \quad Sup\,(A+B) < Sup\,(A+B),
\end{aligned}$$

ce qui un absurde, donc on a bien

$$Sup\, A + Sup\, B \leq Sup\,(A+B).$$

Chapitre 2

Corps des nombres complexes

L'equation $x^2 + 1 = 0$ n'admet pas des solutions dans $\mathbb{R}$

Si $i^2 = -1$ alors l'equation $x^2 + 1 = 0$ admet deux solutions i et $-i$.

2.1 Opérations algébriques sur les nombres complexes

L'ensemble des nombres complexes noté par $\mathbb{C}$

et $\mathbb{C} = \left\{z = x + i.y / (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } i^2 = -1\right\}$

Si $x \in \mathbb{R}$, $x = x + i.0$.

Et si $y \in \mathbb{R}^*$ on a $i.y = 0 + i.y \notin \mathbb{R}$.

Remarque 3 $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Définition 2.1.1 *Si $z = x + iy$, la partie reélle de z noté Ré$(z) = x$ et la partie imaginaire noté Im $(z) = y$.*

Si $z = x + i.y$ et $z' = x' + i.y'$,

2.1.1 Addition

$$z + z' = x + x' + i.(y + y)$$

2.1.2 Multiplication

$$\begin{aligned} z.z' &= (x+i.y) . \left(x'+i.y'\right) \\ &= x.x' - y.y' + i. \left(x.y' + y.x'\right). \end{aligned}$$

$(\mathbb{C}, +, .)$ est un corps commutatif ou 0 est un élèment neutre pour la loi $(+)$ et 1 l'élèment neutre pour $(.)$.

Définition 2.1.2 *Si $z = x + iy$, le conjugué de z noté $\bar{z}$ et $\bar{z} = x - iy$.*

Proposition 2.1.1 *Soient z et $z' \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors*

1) $Ré(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$ et $Im\ (z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2}$.

2) $Ré(z+z') = Ré(z) + Ré(z')$ et $Im\ (z) = Im\ (z) + Im\ (z')$.

3) $Ré(\lambda z) = \lambda Ré(z)$ et $Im\ (\lambda z) = \lambda Im\ (z)$

4) $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z}'$

5) $\overline{z.z'} = \bar{z}.\bar{z}'$

6) $\bar{\bar{z}} = z$.

7) Si $\bar{z} = z$ alors $z \in \mathbb{R}$.

Exemple 9 *Simplifier le nombre complexe $z = \frac{3+5i}{(1-i)(2+3i)}$*

Alors:

$$\begin{aligned} z &= \frac{3+5i}{(1-i)(2+3i)} = \frac{(3+5i)(1+i)(2-3i)}{(1-i)(2+3i)(1+i)(2-3i)} \\ &= \frac{(3+5i)(2-3i+2i+3)}{2 \cdot 13} = \frac{(3+5i)(5-i)}{26} \\ &= \frac{(15-3i+25i+5)}{26} = \frac{20+22i}{26} = \frac{10}{13} + \frac{11i}{13}. \end{aligned}$$

2.2 Module et argument d'un nombre complexe

2.2.1 Module d'un nombre complexe

Soit $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Définition 2.2.1 *Le module d'un nombre complexe z noté,$|z|$ avec $|z| = \sqrt{z.\bar{z}}$.*

c'est à dire $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Proposition 2.2.1 *Soient $z = x + i.y$ et $z' = x' + i.y'$,*

1) $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$.

2) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

3) $||z| - |z'|| \leq |z + z'|$

4) $|z|^2 = z.\bar{z}$

5) $|z.z'| = |z| . |z'|$

6) $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}, z' \neq 0$.

7) $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{z.\bar{z}'}{z'.\bar{z}'} = \dfrac{z.\bar{z}'}{|z'|^2}$

Preuve. Exercice TD. ■

2.2.2 Argument d'un nombre complexe

Soit $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Définition 2.2.2 *L'argument d'un nombre complexe $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ noté,* $\arg z$ *et*

Si $z \neq 0, \begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}, \theta = \arg z.$

Si $z = 0$, $\arg z$ *n'existe pas.*

Si θ est l'argument $z = x + i.y$ alors

$$z = |z| (\cos\theta + i \sin\theta)$$

c'est à dire $\begin{cases} x = |z| \cos\theta, \\ y = |z| \sin\theta. \end{cases}$

Exemple 10 *$z = 1 + i$ alors $|z| = \sqrt{2}$*

et $z = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i\right)$

$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

donc $\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

Proposition 2.2.2 *Soient* $z = x + i.y$ *et* $z' = x' + i.y' \neq 0$, $\theta = \arg z, \theta' = \arg z'$ *alors*

$z.z' = |z| . |z'| \left(\cos\left(\theta + \theta'\right) + i \sin\left(\theta + \theta'\right)\right)$

$\arg(z_1.z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$.

Preuve. Exercice TD. ■

Proposition 2.2.3 *Soient* $z = x + i.y$ *et* $z' = x' + i.y' \neq 0$, $\theta = \arg z, \theta' = \arg z'$ *alors*

$\frac{z}{z'} = \frac{|z|}{|z'|} \left(\cos\left(\theta - \theta'\right) + i \sin\left(\theta - \theta'\right)\right)$.

$\arg \frac{z}{z'} = \arg(z_1) - \arg(z_2)$.

Proposition 2.2.4 $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)\ (2\pi)$ *si* z *est non nul.*

Preuve. Exercice TD. ■

Proposition 2.2.5 *Si* $n \in \mathbb{N}^*$, $z \in \mathbb{C}$ *on a* $\arg(z^n) = n \arg(z)$.

Preuve. Exercice TD. ■

2.3 Représentation géométrique d'un nombre complexe

Soient $z = x + i.y$ et $M(x, y)$ un point dans xoy.

Le point M s'appelle l'image du nombre complexe z et z est dit l'affixe du point M.

$$\begin{cases} |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{|z|} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{|z|} \end{cases}, \theta = \arg z.$$

2.4 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Si θ est l'argument $z = x + i.y$, alors

$$\begin{aligned} z &= x + i.y \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i. \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\ &= |z| (\cos\theta + i \sin\theta). \end{aligned}$$

la forme $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ s'appelle la forme trigonométrique du nombre complexe z.

On remarque que $\begin{cases} x = |z|\cos\theta, \\ y = |z|\sin\theta. \end{cases}$

Exemple 11 $z = 1 + i\sqrt{3}$ *alors* $|z| = 2$

et $z = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

donc $\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

donc $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

2.5 Forme exponentielle d'un nombre complexe

Il existe une relation entre la fonction exponetielle et le mombre complexe

Si $z = |z|(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z))$ alors $z = |z|\, e^{i\arg z}$.

C'est à dire

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

Et on remarque que

Si $z = x + i.y$ et $z' = x' + i.y' \neq 0$, $\theta = \arg z, \theta' = \arg z'$ alors

1) $\bar{z} = |z|\, e^{-i\theta}$.

2) $z.z' = |z|\,|z'|\, e^{i(\theta+\theta')}$

3) $\frac{z}{z'} = \frac{|z|}{|z'|} e^{i(\theta-\theta')}, z' \neq 0$.

2.6 Formules d'Euler

Si $z = x + i.y \neq 0$ et $\theta = \arg z$, alors

$\begin{cases} z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) & \text{Forme trigonométrique} \\ z = |z|\, e^{i\theta} & \text{Forme exponentielle} \end{cases}$

donc $\bar{z} = |z|(\cos\theta - i\sin\theta) = |z|\, e^{-i\theta}$

on trouve les formules d'Eler suivantes

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\\ \sin\theta &= \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\end{aligned}$$

Exemple 12 *Linéariser* $\cos x \sin^2 x$.

$$\begin{aligned}\cos x\sin^2 x &= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\cdot\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2\\ &= -\frac{1}{8}\left(e^{i3x}-e^{ix}-e^{-ix}+e^{-i3x}\right)\\ &= -\frac{1}{4}\left(\cos 3x-\cos x\right).\end{aligned}$$

2.7 Racines n-ième d'un nombre complexe

2.7.1 Racines carrées d'un nombre complexe

Pour déterminer les racines carrées d'un nombre complexe $z = x + iy$, on cherche les nombres α et β tels que:

$$(\alpha + i\beta)^2 = x + iy$$

d'où le système:

$$\begin{cases} \alpha^2-\beta^2 = x \\ \alpha^2+\beta^2 = \sqrt{x^2+y^2} \ \ \text{(équation entre les deux modules)} \\ 2\alpha\beta = y. \end{cases}$$

ce qui permet de définir α^2 et β^2 puis α, β en utilisant le signe entre α et β.

Exemple 13 *Calculer les racines carrées de* $z = 3 - 4i$.

On résout le système suivant:

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 3 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 5 \\ 2\alpha\beta = -4. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad 2\alpha^2 = 8 \\ &\Rightarrow \quad \alpha^2 = 4 \\ \textit{et } \beta^2 \quad &= \quad 1 \textit{ mais } \alpha\beta < 0 \\ \textit{d'où les racines sont} \quad &: \quad z_1 = 2 - i \textit{ et } z_2 = -2 + i \ . \end{aligned}$$

2.7.2 Racines n-ième

Pour trouver l'ensemble des racines n-ièmes de $z \neq 0$, $z_k = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$ avec $k = \{0, 1, 2, ..., n-1\}$.

Exemple 14 *Trouver les racines cubiques de* $z = 4\sqrt{2}\,(1+i)$.

En effet:

$$\begin{aligned} 1) \textit{ La forme trigonométrique de } z \textit{ est} \quad &: \\ z \quad &= \quad 4\sqrt{2}\,(1+i) = 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \quad 8 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}. \\ 2) \textit{ Une racine n-ième de } z \textit{ est} \quad &: \\ z_0 \quad &= \quad (8)^{\frac{1}{3}} \cdot e^{i\frac{\pi}{12}} = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{12}}. \\ 3) \textit{ d'où les racines cubiques de } z \quad &: \\ z_k \quad &= \quad z_0 \cdot u_k \\ &= \quad 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{12}} \cdot e^{i\frac{2k\pi}{3}} \\ &= \quad 2 \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)} \\ \textit{avec } k \quad &= \quad \{0, 1, 2\}. \end{aligned}$$

Remarque 4 *Quand on cherche à factoriser un polynôme réel* P *et qu'on a trouvé une racine imaginaire* z, *alors* $\bar{z}$ *est aussi une racine de* P.

Exemple 15 *Factoriser le polynôme:* $P = z^3 - z^2 + z - 1.$

Comme $z_1 = i$ *est une racine alors* $z_2 = -i$ *est aussi une racine et par suite par la méthode d'identification on trouve la troisième racine.*

$$P = (z - i)(z + i)(z - 1).$$

2.7.3 Formule de Moiver

Pour calculer $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en fonction de puissances de $\cos x$ et $\sin x$, on utilise la formule de moivre:

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}.$$

Exemple 16

$$\begin{aligned}
\cos 5x &= \operatorname{Re}\left(e^{5ix}\right) \ \textit{et} \ \sin 5x = \operatorname{Im}\left(e^{5ix}\right) \\
\textit{donc} &: (\cos x + i \sin x)^5 \\
&= \cos^5 x - 10\cos^3 x \sin^2 x + 5\cos x \sin^4 x + i\left(5\cos^4 x \sin x - 10\cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x\right) \\
&\Rightarrow \begin{cases} \cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x \sin^2 x + 5\cos x \sin^4 x \\ \sin 5x = 5\cos^4 x \sin x - 10\cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x \end{cases}.
\end{aligned}$$

Exercice 1. Déterminer le module et un argument des nombres complexes:

$a)$ $1 + i\ \sqrt{3},\ 2 - 2i.$

$b)$ $3 + i\sqrt{3},\ \ -1 + i\sqrt{3},\ \ \left(-1 + i\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^6,\ \cos(-\alpha) + i\sin\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$z^2 - 2z\ (\cos\theta + i\sin\theta) + 2i\ \sin\theta\ (\cos\theta + i\sin\theta) = 0, \theta \text{ étant un paramètre réel.}$$

Exercice 3. Calculer les deux sommes:

$$\begin{aligned}
a)\ U_n &= 1 + a\ \cos\theta + a^2\ \cos 2\theta + ... + a^n\ \cos n\ \theta. \\
b)\ U_n &= 1 + a\ \sin\theta + a^2\ \sin 2\theta + ... + a^n\ \sin n\ \theta.
\end{aligned}$$

et leurs limites U et V lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 5. Quelle condition faut-il imposer à z pour que:$|z+5| = |z-i\,|$?

a) Déterminer les racines cubiques de :$z_1 = 1+i$, $z_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$.

b) Si $t \in \mathbb{R}$, déterminer les racines $n^{ièmes}$ de $z_3 = \frac{1+it}{1-it}$.

Exercice 6. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} z^2+z+1 &= 0,\ z^2+z-1=0, 4z^2-10z+4=0, z^2=z-2 \\ z^4 &= 1, z+2+z^2=3z,\ \bar{z}^2-\bar{z}+1=0,\ z^4+z^2-12=0. \end{aligned}$$

Exercice 7. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le nombre complexe $z = \frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}$ est de module1. Pour quels $z \in \mathbb{C}$, existe-t-il $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que: $z = \frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}$.

Exercice 8.

Simplifier les expressions suivantes et exprimer le résultat sous forme cartésienne :

$$(2+3i)(4-5i)+(2-3i)(4+5i)\,; \quad \frac{4+5i}{-2+i}\,; \quad \mathrm{e}^{i\pi}\,; \quad \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}\,.$$

Donner module et argument des nombres suivants :

$$-3\,; \quad -i\,; \quad 1+i\sqrt{3}\,; \quad \frac{1+i}{1-i}\,; \quad (\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i})^4\,.$$

Exercice 9. Simplifier lex expressions suivantes ($\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$) :

$$\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}\,; \quad \frac{(1+2i)^2-(2-i)^3}{(1-i)^3+(2+i)^2}\,; \quad (1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^n\,.$$

Exercice 10 Pour $z \neq 2i$, on pose : $\phi(z) = \frac{z-3+i}{2i-z}$.

Déterminer $\{z \in \mathbb{C} \mid \phi(z) \in \mathbb{R}\}$. Déterminer $\{z \in \mathbb{C} \mid \arg(\phi(z)) = -\frac{\pi}{2}[\pi]\}$. Déterminer $\{z \in \mathbb{C} \mid |\phi(z)| = 2\}$.

Exercice 11

Donner la liste des racines cubiques de l'unité.

Calculer leur somme. Donner la liste des racines huitièmes de l'unité.

Soit $n \in \mathbb{R}^*$. Montrer que la somme des racines $n^{ème}$ de l'unité est nulle.

Exercice 12 Trouver les racines carrées de -4, i, $1-i$ et $3+4i$.

Exercice 13 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Exprimer sous forme simple : $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$.

Exercice 14. Montrer que $S = \cos\frac{\pi}{17} + \cos\frac{3\pi}{17} + \cdots + \cos\frac{15\pi}{17} \in \mathbb{Q}$.

Exercice 15. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$\overline{2iz} = 2z$; $z^2 - (3+2i)z + 5 + i = 0$; $e^z = 1 + i\sqrt{3}$.

Exercice 16 Déterminer les lieux de points suivants :

$$a)\ |z| < 2\,; \qquad b)\ |z - 1 - i| \leq 1\,.$$

Exercice 17

Soit A et B deux points distincts d'affixes a et b. Donner une CNS portant sur l'affixe z du point M pour qu'on ait $M \in (AB)$. Déterminer les nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que les points d'affixes respectives z,z^2 et z^4 soient alignés.

Exercice 18. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que $|z_1| < 1$ et $|z_2| = 1$. Montrer que $\frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z_1} z_2}$ est de module 1.

Exercice 19. Soient A, B et C trois points d'affixes respectives a, b et c. Montrer que ABC forme un triangle équilatéral *ssi* $a+jb+j^2c = 0$. (On rappelle que j désigne classiquement la racine cubique de l'unité de partie imaginaire strictement positive.)

Chapitre 3

Suites de Nombres réels

On appelle **suite d'éléments de nombres réels** une application d'un sous ensemble $A = \{n_0, n_0+1, \cdots\}$ de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$. On la note:

$$\begin{aligned} u &: A \to \mathbb{R} \\ n &\mapsto u(n) = u_n \end{aligned}$$

u_n est appelé **terme général** de la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$.

Exemple 17 $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, u_n = 2 + \frac{5}{n+1}$,
$v : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}, , v_n = \sqrt{n-1}$.

3.1 Suites bornées

3.1.1 Définitions

Définition 3.1.1 *Une suite (u_n) est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.*

Définition 3.1.2 *Une suite (u_n) est **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $m \leq u_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.*

Définition 3.1.3 *Une suite (u_n) est **bornée** si elle est major ée et minorée à la fois.*

Exemple 18

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n = 2 - \frac{1}{u_{n-1}}. \end{cases}$$

Montrons par récurrence que:

$$u_n > 1, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

En effet: pour $n = 0$, on a:$u_0 = 2 > 1$.

Supposons que: $u_n > 1$ et montrons que: $u_{n+1} > 1$.

on a:

$$u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n} > 2 - 1 = 1$$

3.2 Suites convergentes

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$, si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

c'est à dire $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$.

Exemple 19 $u_n = \frac{1}{n}, l = 0.$

On montre que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$ il suffit de montrer,

$\forall \varepsilon > 0, \exists N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \in \mathbb{N} : n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon.$

On a,

$\frac{1}{\varepsilon} \leq \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \Longrightarrow \frac{1}{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1} \leq \varepsilon$

et on a aussi,

$n \geq \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \Longrightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| \leq \frac{1}{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1} \leq \varepsilon.$

3.2.1 Propriétés des suites convergentes

Proposition 3.2.1 *Toute suite convergente est bornée. La réciproque est fausse.*

Proposition 3.2.2 *Le produit d'une suite bornée par une suite tendant vers 0 tend vers 0.*

Proposition 3.2.3 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes vers la même limite l et (w_n) une suite telle que:*

$$u_n \leq w_n \leq v_n \text{ ou bien } u_n < w_n < v_n$$

Alors la suite (w_n) est convergente sa limite est é gale à l.

Proposition 3.2.4

$$Si \lim_{n\to+\infty} u_n = l \text{ alors} \lim_{n\to+\infty} |u_n| = |l\ |.$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0.$$

3.2.2 Opérations arithmétiques sur les suites convergentes

Théorème 3.2.1 *Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites convergentes $(u_n \to l, v_n \to l')$. Alors*

(1) La suite $(u_n + v_n)_n$ convergever vers $l + l'$.

(2) La suite $(u_n.v_n)_n$ convergever vers $l.l'$.

(3) Supposons $l \neq 0$. suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_n$ convergever vers $\frac{1}{l}$.

3.3 Extensions aux limites infinies

Définition 3.3.1 *Soit $(u_n)_{n\in N}$ une suite de nombres réels.*

Si $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$, on dit que la suite u_n tend vers $+\infty$

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Longrightarrow u_n > A.$$

Si $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$, on dit que la suite u_n tend vers $-\infty$.

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Longrightarrow u_n < -A.$$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

3.3.1 Suites monotones

Pour étudier la monotonie d'une suite on calcul la valeur suivante:

$$u_{n+1} - u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Donc on a les cas suivants:

$$\begin{array}{lcl} 1)\ \text{si } u_{n+1}-u_n & \geq & 0,\ \ \forall\, n\in\mathbb{N}\ \text{ alors la suite est dite } \textbf{croissante}. \\ 2)\ \text{si } u_{n+1}-u_n & > & 0,\ \ \forall\, n\in\mathbb{N}\ \text{ alors la suite est dite } \textbf{strictement croissante}. \\ 3)\ \text{si } u_{n+1}-u_n & \leq & 0,\ \ \forall\, n\in\mathbb{N}\ \text{ alors la suite est dite } \textbf{décroissante}. \\ 4)\ \text{si } u_{n+1}-u_n & < & 0,\ \ \forall\, n\in\mathbb{N}\ \text{ alors la suite est dite } \textbf{strictement décroissante}. \\ 5)\ \text{si } u_{n+1}-u_n & = & 0,\ \ \forall\, n\in\mathbb{N}\ \text{ alors la suite est dite } \textbf{constante}. \end{array}$$

Exemple 20

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n = 2 - \frac{1}{u_{n-1}}. \end{cases}$$

Alors on a:

$$u_{n+1} - u_n = 2 - \frac{1}{u_n} - u_n = -\frac{(u_n-1)^2}{u_n} < 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\ car\ u_n > 0.$$

donc la suite est décroissante.

Proposition 3.3.1 *1) Une suite croissante majorée est une suite convergente.*

2) Une suite décroissante minorée est une suite convergente.

3.3.2 Suites adjacentes:

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites deux suites adjacentes si et seulement si:

1) $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante,

2) $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante,

3) $\lim_{n\to+\infty}(V_n - U_n) = 0$,

4) $U_n \leq V_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

3.4 Suites extraites

On appelle une **sous-suite (suite extraite ou bien suite partielle)** d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite (v_k) définie par:

$$v_k = u_{(s(k))}, \forall k \in \mathbb{N}$$

avec:

$$\begin{array}{rcl} s & : & \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ k & \mapsto & s(k) \end{array}$$

est une application d'indice strictement croissante.

Exemple 21 *La suite* $(u_{2k})_{k\in\mathbb{N}}, \left(resp\,(u_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}\right)$ *est une sous suite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.4.1 Suite de Cauchy

On dit $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy, si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : m, n \geq N \Longrightarrow |u_n - u_m| \leq \varepsilon.$$

3.4.2 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème 3.4.1 *De toute suite réelle bornée on peut en extraite une sous suite convergente.*

3.5 Généralisation de notion de la limite

3.5.1 Points d'adhérence

Définition 3.5.1 *Un nombre a est dit valeur d'adhérence d'une suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *s'ilexiste une sous-suite* $(v_n)_{n\geq 0}$ *de* $(u_n)_{n\geq 0}$, *convergente vers a.*

On note par $Ad\left((u_n)_{n\geq 0}\right)$ l'ensemble des points d'adhérence de $(u_n)_{n\geq 0}$.

Exemple 22 $u_n = (-1)^n$.

$u_{2n} = 1, u_{2n+1} = -1.$

Donc $Ad\Big((u_n)_{n\geq 0}\Big) = \{-1, 1\}$.

3.5.2 Limite supérieure

On appelle limite supérieure la borne supérieure de $Ad\Big((u_n)_{n\geq 0}\Big)$.

On notera $\overline{\lim}\ u_n = \sup Ad\Big((u_n)_{n\geq 0}\Big)$.

Exemple 23 $u_n = (-1)^n$.

$u_{2n} = 1, u_{2n+1} = -1.$

Donc $Ad\Big((u_n)_{n\geq 0}\Big) = \{-1, 1\}$.

$\overline{\lim}\ u_n = 1.$

3.5.3 Limite inférieure

On appelle limite inférieure la borne supérieure de $Ad\Big((u_n)_{n\geq 0}\Big)$.

On notera $\underline{\lim}\ u_n = \inf Ad\Big((u_n)_{n\geq 0}\Big)$.

Exemple 24 $u_n = (-1)^n$.

$u_{2n} = 1, u_{2n+1} = -1.$

Donc $Ad\Big((u_n)_{n\geq 0}\Big) = \{-1, 1\}$.

$\underline{\lim}\ u_n = -1.$

3.5.4 Suites récurrentes

On a deux types de suites:

1. Une suite définie par un terme général qui est défini par un indice n.

Exemple 25

$$u_n = \frac{1}{n^2+1}, v_n = \sin n.$$

2. Une suite récurrente:

C'est une suite qui est définie par une relation entre ces termes d'ordre $n, n-1, n+1, \cdots$

Exemple 26

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n = \sqrt{u_{n-1}+1}. \end{cases}$$

Exemple 27

$$\begin{cases} u_0 = 2, u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{2}u_{n-1}. \end{cases}$$

Exercice 1. Calculer U_1, U_2 et U_3 dans les cas suivants:

1)$U_n = \frac{1}{n+1}\sin n\frac{\pi}{2}$ 2) $U_n = \frac{5\times7\times9\times\cdots\times(5+2n)}{4\times7\times10\times\cdots\times(4+3n)}$ 3)$U_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Correction:

Calculer U_1, U_2 et U_3 dans les cas suivants:

1)$U_n = \frac{1}{n+1}\sin n\frac{\pi}{2} \Rightarrow U_1 = \frac{1}{2}, U_2 = 0$ et $U_3 = -\frac{1}{4}$

2) $U_n = \frac{5\times7\times9\times\cdots\times(5+2n)}{4\times7\times10\times\cdots\times(4+3n)} \Rightarrow U_1 = \frac{5\times7}{4\times7}, U_2 = \frac{5\times7\times9}{4\times7\times10}$ et $U_3 = \frac{5\times7\times9\times11}{4\times7\times10\times13}$

3)$U_n = \frac{1}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 \Rightarrow U_1 = 1, U_2 = \frac{5}{8}$ et $U_3 = \frac{14}{27}$

Exercice 2. Calculer les limites suivantes:

1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n.(n+1)}\right)$, 2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^3+7}{n^2\sqrt{n^2+1}}$, 3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n^2+9}-\sqrt{n^2+4}$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{5}}-n^{\frac{1}{6}}}$, 5) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{2}\sin n\frac{\pi}{2}$, 6) $\lim\limits_{n\to+\infty} n+\sqrt[3]{1-n^3}$, 7) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin^2 n-\cos^3 n}{n}$

8) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2^n+3^n}{a^n}, a\in\mathbb{R}$, 9) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{3-\sin^2 n}$, 10) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^3+2^n}{3^n}$.

Correction: Calculer les limites suivantes:

1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n.(n+1)}\right)$, on a: $\frac{1}{n.(n+1)} = \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n.(n+1)}\right)$
$= \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{n+1}) = 1$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^3+7}{n^2\sqrt{n^2+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^3\left(1+\frac{7}{n^3}\right)}{n^3\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n^2+9}-\sqrt{n^2+4} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2+9}-\sqrt{n^2+4}}{\sqrt{n^2+9}+\sqrt{n^2+4}}\left(\sqrt{n^2+9}+\sqrt{n^2+4}\right)$
$= \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2+9-n^2-4}{\sqrt{n^2+9}+\sqrt{n^2+4}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{5}{\sqrt{n^2+9}+\sqrt{n^2+4}} = 0$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{5}}-n^{\frac{1}{6}}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{5}}}\frac{\left(1-n^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}\right)}{1-n^{\frac{1}{6}-\frac{1}{5}}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{5}}} = \lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{5}} = +\infty$

5) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{2}\sin n\frac{\pi}{2}$ n'existe pas car pour les deux sous suites:

$X_k = 4k \to +\infty$ quand $k\to+\infty$ et $Y_k = 4k+1 \to +\infty$ quand $k\to+\infty$

mais: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{X_k}{2}\sin X_k\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \neq \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{Y_k}{2}\sin Y_k\left(\frac{\pi}{2}\right) = +\infty$ par contre si la limite existe elle est unique

6) $\lim\limits_{n\to+\infty} n+\sqrt[3]{1-n^3}$ on a: $a^3+b^3 = (a+b)\left(a^2-ab+b^2\right) \Rightarrow (a+b) = \frac{a^3+b^3}{(a^2-ab+b^2)}$

alors: $\lim\limits_{n\to+\infty} n+\sqrt[3]{1-n^3} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^3+1-n^3}{n^2-n(1-n^3)^{\frac{1}{3}}+(1-n^3)^{\frac{2}{3}}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2\left(1-\left(\frac{1}{n^3}-1\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{1}{n^3}-1\right)^{\frac{2}{3}}\right)} =$
0

7) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\sin^2 n - \cos^3 n}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\sin^2 n}{n} - \frac{\cos^3 n}{n} = 0$

(on utilise: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n \cdot V_n = 0$ si $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$ et V_n est bornée)

8) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2^n+3^n}{a^n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3^n}{a^n}\right)\left[\frac{2^n}{3^n}+1\right] = \begin{cases} \text{n'existe pas si } a = -3 \\ 1 \text{ si } a = 3 \\ 0 \text{ si } |a| > 3 \\ \infty \text{si } |a| < 3 \end{cases}, a \in \mathbb{R}$

9) $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{3 - \sin^2 n} = \lim\limits_{n \to +\infty} e^{\frac{1}{n}\ln\left(3-\sin^2 n\right)} = 1$

(on utilise: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n \cdot V_n = 0$ si $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$ et V_n est bornée)

10) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^3+2^n}{3^n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^3}{3^n} = \lim\limits_{n \to +\infty} e^{3\ln(n)-n\ln 3} = \lim\limits_{n \to +\infty} e^{n\left(3\frac{\ln(n)}{n}-\ln 3\right)} = 0.$

Exercice 3. (U_n) est définie par: $U_n = \ln(1 + U_{n-1})$ avec $U_0 \rangle\ 0$ .Chercher la limite de U_n.

Correction:

(U_n) est définie par: $U_n = \ln(1 + U_{n-1})$ avec $U_0 \rangle\ 0$.

Chercher la limite de U_n.

on pose: $f\ (x) = \ln(1 + x) - x \Rightarrow f\ '(x) = -\frac{x}{1+x} < 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n < U_{n-1} \Rightarrow U_n$ est décroissante

puisque elle est minorée par 0 car $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 0 \Rightarrow (U_n)$ est convergente$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \ln(1 + U_{n-1})$

$\Rightarrow l = \ln(1 + l) \Rightarrow l = 0.$

Exercice 4.

a) Soit (U_n) une suite croissante, montrer que la suite $(V_n) = \frac{U_1+U_2+....+U_n}{n}$ est croissante.

Si (U_n) est une suite convergente peut-on en déduire que (V_n) l'est aussi.

Correction:

a) Soit (U_n) une suite croissante, montrer que la suite $(V_n) = \frac{U_1+U_2+....+U_n}{n}$ est croissante.

$V_{n+1} - V_n = \left(\frac{U_1+U_2+....+U_{n+1}}{n+1}\right) - \left(\frac{U_1+U_2+....+U_n}{n}\right) = \frac{n(U_1+U_2+....+U_{n+1})-(n+1)(U_1+U_2+....+U_n)}{n(n+1)}$

$=\frac{nU_{n+1}-(U_1+U_2+....+U_n)}{n(n+1)} > 0$ car: $U_{n+1} > U_k,\ \forall k \in \{1, ..., n\} \Rightarrow V_n$ est croissante.

Si (U_n) est une suite convergente peut-on en déduire que (V_n) l'est aussi.

Si (U_n) est une suite convergente$\Rightarrow (U_n)$ est majoée par M car elle est croissante

$\Rightarrow (V_n) = \frac{U_1+U_2+....+U_n}{n} \leq \frac{M+M+....+M}{n} = M$

conclusion: V_n est croissante majorée par $M \Rightarrow (V_n)$ converge.

Exercice 5. Posons $U_1 = \frac{1}{4}, U_2 = \frac{1.3}{4^2 2!}$ et $\forall n \geq 3, U_n = \frac{1.3.5....(2n-1)}{4^n.n!}$

Montrer l'inégalité $\frac{U_{n+1}}{Un} < \frac{1}{2}$. En déduire la limite de la suite (U_n) .

Correction:

Exercice 5. Posons $U_1 = \frac{1}{4}, U_2 = \frac{1.3}{4^2 2!}$ et $\forall n \geq 3, U_n = \frac{1.3.5....(2n-1)}{4^n.n!}$

Montrons l'inégalité $\frac{U_{n+1}}{Un} < \frac{1}{2}$.

$\frac{U_{n+1}}{Un} - \frac{1}{2} = \frac{(2n+1)}{4(n+1)} - \frac{1}{2} = \frac{(2n+1)-2(n+1)}{4(n+1)} = -\frac{1}{4(n+1)} < 0 \Rightarrow \frac{U_{n+1}}{Un} < \frac{1}{2}$.

En déduire la limite de la suite (U_n) .

$\frac{U_{n+1}}{Un} < \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow (U_n)$ est décroissante et puisque (U_n) est minorée par 0

$\Rightarrow (U_n)$ converge. Par suite on pose: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \alpha \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{U_{n+1}}{Un} < \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{\alpha} < \frac{1}{2}$

si $\alpha \neq 0 \Rightarrow 1 < \frac{1}{2}$ contradiction$\Rightarrow \alpha = 0$ car:$\alpha \geq 0$.

Exercice 6. Soient $(U_n)_{n \geq 2}$ et $(V_n)_{n \geq 1}$ deux suites telles que:

$$U_n = \frac{n+7}{n-1} \quad \text{et } V_n = \frac{n+2}{n}$$

1) Montrer que $(V_n)_{n \geq 1}$ est une sous-suite de $(U_n)_{n \geq 2}$.

2) Soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par $b_n = \frac{2-5^n}{3.5^n+1}$ trouver une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que b_n en soit extraite.

Correction:

Soient $(U_n)_{n \geq 2}$ et $(V_n)_{n \geq 1}$ deux suites telles que:

$$U_n = \frac{n+7}{n-1} \quad \text{et } V_n = \frac{n+2}{n}$$

1) Montrer que $(V_n)_{n \geq 1}$ est une sous-suite de $(U_n)_{n \geq 2}$.

Si $V_n = U_{\varphi(n)} \Rightarrow \frac{n+2}{n} = \frac{\varphi(n)+7}{\varphi(n)-1} \Rightarrow (n+2)(\varphi(n) - 1) = n(\varphi(n) + 7) \Rightarrow \varphi(n) = \frac{8n+2}{2} = 4n + 1$

qui est une sous suite croissante en fonction de $n \Rightarrow (V_n)_{n \geq 1}$ est une sous-suite de $(U_n)_{n \geq 2}$.

2) Soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par $b_n = \frac{2-5^n}{3.5^n+1}$ trouver une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que b_n en soit extraite.

$a_n = \frac{2-n}{3.n+1}, n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7. Soit q un nombre réel tel que $|q| \langle 1$.

1) Montrer que: $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

2) Soit $S_n = q + q^2 + q^3 + ... + q^n$; calculer $(1-q) S_n$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

Correction:

Soit q un nombre réel tel que $|q| \langle 1$.

1) Montrons que: $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

Si $q = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

Si $q \neq 0$

Montrons que: $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que: $\forall n \geq \eta_\varepsilon \Rightarrow |q^n| \leq \varepsilon$

$|q^n| \leq \varepsilon \Rightarrow |q|^n \leq \varepsilon \Rightarrow n \ln(|q|) \leq \ln \varepsilon \Rightarrow n \geq \frac{\ln \varepsilon}{\ln(|q|)}$ car: $\ln(|q|) < 0$

Alors il suffit de poser: $\eta_\varepsilon = \max\left(0, \left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln(|q|)}\right]\right)$.

2) Soit $S_n = q + q^2 + q^3 + ... + q^n$; calculer $(1-q) S_n$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

$(1-q) S_n = (1-q)\left(q + q^2 + q^3 + ... + q^n\right) = q - q^{n+1} = q(1-q^n)$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \lim\limits_{n \to +\infty} q\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{q}{1-q}$.

Exercice 8. On considère la suite définie par:

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + \frac{1}{U_n} \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Montrer que $U_n \rangle \sqrt{2}$ pour tout $n \geq 0$ et que (U_n) est strictement décroissante.

2) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

3) On pose $V_n = U_n - \sqrt{2}$. Montrer que: $V_{n+1} = \frac{(V_n)^2}{2U_n}$ et en déduire que: $V_{n+1} < \frac{(V_n)^2}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

4) Montrer que: $0 < V_n < \frac{1}{2^{2^n - 1}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Correction:

On considère la suite définie par:

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + \frac{1}{U_n} \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Montrons que $U_n \rangle \sqrt{2}$ pour tout $n \geq 0$ $\qquad (R_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Par récurrence: $U_0 = 2 \rangle \sqrt{2} \Rightarrow R_0$ est vraie

Supposons que: (R_n) est vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ et montrons que: (R_{n+1}) est vraie ç-à-d: $U_{n+1} \rangle \sqrt{2}$?

En effet: $U_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}U_n + \frac{1}{U_n} - \sqrt{2} = \frac{U_n^2+2-\sqrt{2}U_n}{2U_n} = \frac{\left(U_n-\sqrt{2}\right)^2}{2U_n} > 0$.

Montrons que: (U_n) est une suite décroissante.

$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}U_n + \frac{1}{U_n} - U_n = \frac{1}{U_n} - \frac{1}{2}\ U_n = \frac{2-U_n^2}{2U_n} < 0$ car: $U_n \rangle \sqrt{2}$

$\Rightarrow (U_n)$ est une suite décroissante.

2) Calculons: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

(U_n) est une suite décroissante minorée par: $\sqrt{2}$, donc c'est une suite convergente.

On a: $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + \frac{1}{U_n} \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}U_n + \frac{1}{U_n}\right) \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{\beta} \Rightarrow \beta = \sqrt{2}$ car: $U_n \rangle \sqrt{2}$

3) On pose $V_n = U_n - \sqrt{2}$. Montrer que: $V_{n+1} = \frac{(V_n)^2}{2U_n}$ et en déduire que: $V_{n+1} < \frac{(V_n)^2}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$V_{n+1} = U_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}U_n + \frac{1}{U_n} - \sqrt{2} = \frac{\left(U_n-\sqrt{2}\right)^2}{2U_n} = \frac{(V_n)^2}{2U_n}$ et puisque: $U_n \rangle \sqrt{2}$

$\Rightarrow V_{n+1} = \frac{(V_n)^2}{2U_n} < \frac{(V_n)^2}{2\sqrt{2}} \Rightarrow V_{n+1} < \frac{(V_n)^2}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

4) Montrons que: $0 < V_n < \frac{1}{2^{2^n-1}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Puisque: $U_n \rangle \sqrt{2} \Rightarrow V_n > 0$ et parsuite: $V_{n+1} < \frac{(V_n)^2}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow V_n < \frac{(V_{n-1})^2}{2} < \frac{\left(\frac{(V_{n-2})^2}{2}\right)^2}{2} = \frac{(V_{n-2})^4}{2^{2^2-1}} < \cdots < \frac{(V_{n-n})^{2^n}}{2^{2^n-1}} < \frac{1}{2^{2^n-1}}$ car: $V_0 < 1$.

Exercice 9. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par:

$$\begin{cases} U_0 = a \\ U_{n+1} = \frac{4U_n + 2}{U_n + 5}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1) Pour quelles valeurs de$a$ la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle constante ?

2) Montrer que s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $U_{n_0} = -2$, alors $U_{n_0-1} = -2$.

2) En déduire que si $U_0 \neq -2$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \neq -2$.

3) On suppose que $U_0 \neq -2$ et on pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 2}$.

a) Vérifier que $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

b) En déduire l'expression de U_n en fonction de n et de V_0.

c) Etudier alors la convergence de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Correction:

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par:

$$\begin{cases} U_0 = a \\ U_{n+1} = \frac{4U_n + 2}{U_n + 5}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1) Pour quelles valeurs de$a$ la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle constante ?

(U_n) est une suite constante$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{4U_n + 2}{U_n + 5} = U_n$

$\Rightarrow 4U_n + 2 = U_n (U_n + 5) \Rightarrow U_n^2 + U_n - 2 = 0 \Rightarrow U_n = -2$ ou $U_n = 1 \Rightarrow a = 1$ ou $a = -2$

2) Montrer que s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $U_{n_0} = -2$, alors $U_{n_0-1} = -2$.

s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $U_{n_0} = -2 \Rightarrow \frac{4U_{n_0-1} + 2}{U_{n_0-1} + 5} = -2 \Rightarrow U_{n_0-1} = -2$.

3) En déduire que si $U_0 \neq -2$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \neq -2$.

Par l'absurde supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$,tel que $U_n = -2$

$\Rightarrow U_{n-1} = -2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow U_0 = -2$ (d'après (2))

donc contrdiction car: $U_0 \neq -2 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, U_n \neq -2$.

4) On suppose que $U_0 \neq -2$ et on pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 2}$.

Exercice 10. On considère la suite définie par:

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + \frac{3}{2U_n} \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Montrer que $U_n \rangle 0$ pour tout $n \geq 0$.

2) On suppose que la suite U_n est convergente, quelle est la valeur l de sa limite ?

3) Montrer que $U_n - l \rangle 0$ pour tout $n \geq 1$.(Remplacer l par sa valeur).

4) En déduire que (U_n) est décroissante.

5) Conclure.

Exercice 11. Posons:

$$\forall n \geq 1 \quad X_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad Y_n = X_n + \frac{1}{n!}$$

Montrer que les suites $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes et que leur limite commune est un nombre irrationnel.

Exercice 12. Ėtant donné les nombres a et b vérifiant $0 \langle a \langle b$, on considère les deux suites:

$$U_n = \sqrt{U_{n-1}V_{n-1}} \text{ et } V_n = \frac{U_{n-1}+V_{n-1}}{2} \quad \text{avec } U_0 = a \quad \text{et} \quad V_0 = b$$

Montrer que ces deux suites convergent et admettent même limite.

Remarque 5 *V_n est bien définie car (3)$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, U_n \neq -2$.*

a) *Vérifier que $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique.*

$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{\frac{U_{n+1}-1}{U_{n+1}+2}}{\frac{U_n-1}{U_n+2}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad (V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est une suite géométrique de raison* $\frac{1}{2}$.

b) *En déduire l'expression de U_n en fonction de n et de V_0.*

$V_n = \frac{1}{2^n}V_0$ *et* $V_n = \frac{U_n-1}{U_n+2} \Rightarrow U_n = \frac{2V_n+1}{1-V_n} = \frac{2\frac{1}{2^n}V_0+1}{1-\frac{1}{2^n}V_0} = \frac{2V_0+2^n}{2^n-V_0}$

c) *Etudier alors la convergence de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.*

Si $U_0 = a = 1 \Rightarrow \forall\ n \in \mathbb{N},\ V_n = 0 \Rightarrow \ \forall n \in \mathbb{N}, U_n = 1$

Si $U_0 = a \neq 1 \Rightarrow \forall\ n \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1$.

Exercice 10. On considère la suite définie par

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + \frac{3}{2U_n} \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Montrons que $U_n \rangle 0$ pour tout $n \geq 0$.

Montrons par récurrence que: $\forall n \in \mathbb{N} : U_n > 0 \ldots\ldots (A_n)$

Pour $n = 0$ on a: $U_0 = 1 > 0 \Rightarrow (A_0)$ est vraie. Supposons que (A_n) est vraie pour un $n \in \mathbb{N}$.

et montrons que(A_{n+1}) est vraie ç-a-d:$U_{n+1} > 0$?

en effet: :$U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + \frac{3}{2U_n} > 0$

D'où $U_n > 0 . \forall n \in \mathbb{N}$.

2) On suppose que la suite U_n est convergente, quelle est la valeur l de sa limite ?

Si U_n est convergente$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}U_n + \frac{3}{2U_n}\right) \Rightarrow l = \frac{1}{2}l + \frac{3}{2l} \Rightarrow l = \sqrt{3}$

car $l = -\sqrt{3}$ ne convient pas.

3) Montrer que $U_n - l \ \rangle 0$ pour tout $n \geq 1$.(Remplacer l par sa valeur).

Montrer que $U_n - \sqrt{3} \rangle\ 0$ pour tout $n \geq 1 \ldots. (B_n)$

Montrons par récurrence que: $\forall n \in \mathbb{N}^* : U_n \ -\sqrt{3}\ \ > 0.....(B_n)$

Pour $n = 1$ on a: $U_1 = 2 > \sqrt{3} \Rightarrow (B_1)$ est vraie. Supposons que (B_n) est vraie pour un $n \in \mathbb{N}$.

et montrons que(B_{n+1}) est vraie ç-a-d:$U_{n+1} - \sqrt{3}\ \ > 0$?

en effet: :$U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + \frac{3}{2U_n} - \sqrt{3} = \frac{\left(U_n - \sqrt{3}\right)^2}{2U_n} > 0$

D'où $U_n\ \ > \sqrt{3}.\forall n \in \mathbb{N}$.

4) En déduire que (U_n) est décroissante.

$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}U_n + \frac{3}{2U_n} - U_n = \frac{\left(\sqrt{3}+U_n\right)\cdot\left(\sqrt{3}-U_n\right)}{2U_n} < 0$ car: $U_n\ \ > \sqrt{3}.\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (U_n)$ est décroissante.

5) Conclure.

Puisque (U_n) est une suite décroissante minorée par: $\sqrt{3}$, donc c'est une suite convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \sqrt{3}$.

Exercice 11. Posons:

$$\forall n \geq 1 \quad X_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} \qquad \text{et} \quad Y_n = X_n + \frac{1}{n!}$$

Montrer que les suites $(X_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ sont adjacentes et que leur limite commune est un nombre irrationnel.

1) Montrons que les suites $(X_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ sont adjacentes?

a) On a: $Y_n - X_n = \frac{1}{n!} \Rightarrow Y_n \geq X_n, \forall n \in \mathbb{N}$, et $\lim\limits_{n \to +\infty}(Y_n - X_n) = 0$

b) $X_{n+1} - X_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0 \Rightarrow X_n$ est croissante.

c) $Y_{n+1} - Y_n = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \begin{cases} 0 \text{ si } n = 1 \\ \frac{2-n}{(n+1)!} < 0 \text{ si } n \geq 2 \end{cases}$

$\Rightarrow Y_{n+1} - Y_n \leq 0 \Rightarrow Y_n$ est décroissante.

$(X_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ sont deux suites adjacentes avec:

$\lim\limits_{n \to +\infty} Y_n = \lim\limits_{n \to +\infty} X_n = \alpha$ et $X_n < \alpha < Y_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

2) Supposons par l'absurde que $\alpha \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{N}$ et $b \neq 0$ avec $\alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow X_n < \frac{a}{b} < Y_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow X_b < \frac{a}{b} < Y_b\ \ (n = b) \Rightarrow b!X_b < b!\frac{a}{b} < b!Y_b \Rightarrow M < (b-1)!a < M+1$ avec $M = b!X_b \in \mathbb{N}$

Donc contradiction car on a un entier naturel compris entre deux entiers consécutifs$\Rightarrow \alpha \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 12. Ėtant donné les nombres a et b vérifiant $0 \langle a \langle b$, on considère les deux suites:

$$U_n = \sqrt{U_{n-1}V_{n-1}} \text{ et } V_n = \frac{U_{n-1}+V_{n-1}}{2} \quad \text{avec } U_0 = a \quad \text{et} \quad V_0 = b$$

Montrer que ces deux suites convergent et admettent la même limite.

Correction

1) Montrons que: $U_n > 0$ et $V_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}. \cdots (\Re_n)$

Par récurrence: $U_0 = a > 0$ et $V_0 = b > 0 \Rightarrow \Re_0$ est vraie. Supposons que $(\Re_n)$ est vraie pour un $n \in \mathbb{N}$.

et montrons que $(\Re_{n+1})$ est vraie ç-à-d: $U_{n+1} > 0$ et $V_{n+1} > 0$?

$U_{n+1} = \sqrt{U_nV_n} > 0$ et $V_{n+1} = \frac{U_n+V_n}{2} > 0 \Rightarrow U_n > 0$ et $V_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

2) Montrons que: $V_n \geq U_n, \forall n \in \mathbb{N}$

On a: $V_n - U_n = \frac{U_{n-1}+V_{n-1}}{2} - \sqrt{U_{n-1}V_{n-1}} = \frac{\left(\sqrt{U_{n-1}}-\sqrt{V_{n-1}}\right)^2}{2} \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

3) Etudions la monotonie de chaque suite:

On a: $V_n \geq U_n \Rightarrow U_n \cdot V_n \geq U_n^2 \Rightarrow \sqrt{U_n \cdot V_n} \geq U_n \Rightarrow U_{n+1} \geq U_n, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow U_n$ est une suite croissante.

Par suite: $V_n \geq U_n \Rightarrow 2\,V_n \geq V_n + U_n \Rightarrow V_n \geq V_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow V_n$ est une suite décroissante.

4) On a: U_n est une suite croissante et majorée par b alors elle converge, et V_n est une suite décroissante

et minorée par a alors elle converge.

5) Si on pose: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \alpha$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \beta \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{U_{n-1}V_{n-1}}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{U_{n-1}+V_{n-1}}{2}$

$\Rightarrow \alpha = \sqrt{\alpha\beta}$ et $\beta = \frac{\alpha+\beta}{2} \Rightarrow \alpha = \beta$ donc les deux suites sont adjacentes.

Exercice 13 Etudier la convergence des suites de terme général u_n définies ci-dessous.

$u_n = \frac{n^2+5n-7}{2n^2-3}$; $u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$; $u_n = n - \sqrt{(n+1)(n+2)}$;

$u_n = \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$; $u_n = \frac{\sin n}{n+1}$; $u_n = \frac{n \sin^2 n - \cos^3 n}{n^2+1}$; $u_n = E\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^{(-1)^n}\right)$.

Exercice 14

Soit (u_n) une suite de nombres réels tels que les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite.

Montrer que la suite (u_n) converge.

et prouver un énoncé analogue concernant (u_{3n}), (u_{3n+1}), (u_{3n+2}).

Exercice 15 Soit (u_n) une suite de nombres réels strictement positifs.

On suppose qu'il existe $k \in]0,1[$ tel que $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

On suppose qu'il existe $k > 1$ tel que $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

Etudier la convergence des suites de terme général x^n, $\frac{x^n}{n!}$.

Chercher des exemples montrant que si $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, on ne peut pas conclure.

Exercice 16 On considère la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Montrer que $s_{2n} - s_n \geq \frac{1}{2}$ pour tout $n \geq 1$. En déduire que la suite (s_n) est divergente.

Exercice 17 Montrer que la somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est divergente.

Exercice 18 On considère la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n} + \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$.

Montrer que c'est une suite divergente.

Même question pour $v_n = \frac{(-1)^n n^2 + n}{3n^2+1}$.

Exercice 19 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + u_n^2).$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, quelle est sa limite?

Montrer que si $-1 \leq u_0 \leq 1$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente dans les autres cas.

Correction

Il faut montrer que $u_{n+1} - u_n \geq 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$. On a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} + \frac{u_n^2}{2} - u_n = \frac{1}{2}(u_n^2 - 2u_n + 1) = \frac{1}{2}(u_n - 1)^2 \geq 0.$$

En supposant $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, posons

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = l.$$

Alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n^2 = \lim_{n\to+\infty} u_n \cdot \lim_{n\to+\infty} u_n = l^2.$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(1+u_n^2) \implies \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}u_n^2) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty} u_n^2$$

$$l = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}l^2 \iff \frac{1}{2}(l-1)^2 = 0 \iff l = 1.$$

Il suffit de montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Rémarquons que $u_n > 0\ \forall n \geq 1$. Montrons par récurrence que $u_n \leq 1\ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

$$-1 \leq u_0 \leq 1 \iff 0 \leq u_0^2 \leq 1 \implies \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}+\frac{1}{2}u_0^2 \leq \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \implies \frac{1}{2} \leq u_1 \leq 1$$

donc l'hypothèse est vraie au rang 1. Supposons qu'elle est vrai au rang n : $\ u_n \leq 1$.

Alors $u_{n+1} = \frac{1}{2}(1+u_n^2) \leq \frac{1}{2}(1+1) = 1$, c'est-à-dire, l'hypothèse est vraie au rang $n+1$, d'où elle est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

Raisonnons par l'absurde: supposons qu'il existe un u_0 tel que $|u_0| > 1$ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Comme $u_1 = \frac{1}{2}(1+u_0^2) = \frac{1}{2}(1+|u_0|^2) > \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$ et la suite est croissante, on a $u_n > 1\ \ \forall n \geq 1$. Posons $\epsilon = u_1 - 1 > 0$.

Pour cet ϵ, par définition de la limite, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$

$$|u_n - \lim_{n\to+\infty} u_n| < \epsilon = u_1 - 1.$$

On trouve

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1 \text{ et } |u_n - 1| < u_1 - 1$$

et comme $u_n > 1$ on a,

$$u_n - 1 < u_1 - 1$$

d'ou $u_n < u_1 \;\; \forall n \geq n_0$, ce qui contredit le fait que la suite est croissante.

Exercice 20 Pour tout entier n non nul, on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes. Que peut-on en déduire?

Correction

Montrons que $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante:

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0.$$

Montrons que $(v_n)_{n\geq 1}$ est décroissante:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n} \\ &= (u_{n+1} - u_n) + (\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}) \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{n+1}(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}) < 0. \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = \lim_{n\to+\infty}(u_n - (u_n + \frac{1}{n})) = -\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Bilan : les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes, donc, convergent vers une même limite.

Exercice 21 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes, de limites respectives ℓ_1 et ℓ_2. On suppose que $\ell_1 < \ell_2$. Montrer qu'alors il existe un entier n_0 tel que pour tout $N \geq n_0$, on a : $u_n < v_n$.

Correction Fixons un $\epsilon > 0$ tel que $l_1 + \epsilon < l_2 - \epsilon$.

Comme $l_1 + \epsilon < l_2 - \epsilon \iff \epsilon < \frac{l_2 - l_1}{2}$ et $l_2 - l_1 > 0$, un tel ϵ existe (on peut prendre, par exemple, $\epsilon = \frac{l_2 - l_1}{4}$).

Alors, pour cet ϵ,

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_1 \;\; |u_n - l_1| < \epsilon \iff l_1 - \epsilon < u_n < l_1 + \epsilon$$

$$\exists n_2 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_2 \;\; |v_n - l_2| < \epsilon \iff l_2 - \epsilon < v_n < l_2 + \epsilon$$

Alors $\forall n \geq n_0 := max\,(n_1, n_2)$, on a

$$u_n < l_1 + \epsilon < l_2 - \epsilon < v_n.$$

Exercice 22. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On définit une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la formule :

$$v_n = u_{n+1} - u_n.$$

Calculer la somme:

$$\sum_{k=0}^{n} v_k.$$

On pose $u_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$. Calculer v_n. En déduire la valeur de la somme :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2.$$

Trouver un polynôme P de degré 4 tel que $P(X+1) - P(X) = X^3$. En déduire la valeur de la somme :

$$\sum_{k=0}^{n} k^3.$$

Exercice 23. Calculer la valeur des sommes :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} k.k!$$

Correction

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \cdots + (u_n - u_{n-1}) + (u_{n+1} - u_n) = u_{n+1} - u_0.$$

2.

$$v_n = u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n+1}{6}((n+2)(2n+3) - n(2n+1)) =$$

$$\frac{n+1}{6}(2n^2 + 3n + 4n + 6 - 2n^2 - n) = \frac{n+1}{6}(6n+6) = (n+1)^2$$

d'où

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} v_{k-1} = u_n - u_0 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{0}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. Posons $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ et trouvons ses coefficients en utilisant $P(x+1) - P(x) = x^3$. On a

$$a(x+1)^4 + b(x+1)^3 + c(x+1)^2 + d(x+1) + e - (ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) = x^3$$

$$(a-a)x^4 + (4a+b-b)x^3 + (6a+3b+c-c)x^2 + (4a+3b+2c+d-d)x + (a+b+c+d+e-e) = x^3$$

Deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux, d'où les équations sur a, b, c, d:

$$\begin{cases} 4a = 1 \\ 6a + 3b = 0 \\ 4a + 3b + 2c = 0 \\ a + b + c + d = 0 \end{cases}$$

Remarquons qu'il n'y a pas de conditions sur e ce qui est logique car e disparaît dans

$P(x+1)-P(x)$. Cela veut dire qu'on peut prendre e quelconque, par exemple, $e=0$.

$$\begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{4} \\ d = 0 \end{cases}$$

Donc,

$$P(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{4}x^2(x^2-2x+1) = (\frac{x(x-1)}{2})^2$$

et

$$P(x+1)-P(x) = x^3,$$

d'où

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \sum_{k=0}^{n}(P(k+1)-P(k)) = P(n+1)-P(0) = P(n+1) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

4.

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{1}{k}) = \sum_{k=1}^{n} \ln(\frac{k+1}{k}) = \sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1)-\ln k) = \ln(n+1)-\ln 1 = \ln(n+1).$$

$$\sum_{k=0}^{n} k\cdot k! = \sum_{k=0}^{n}(k+1-1)k! = \sum_{k=0}^{n}((k+1)k!-k!) = \sum_{k=0}^{n}((k+1)!-k!) = (n+1)!.$$

Exercice 24.. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante qui tend vers 0.

Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs ou nuls.

On définit une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $b_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$. Montrer que les suites extraites $(b_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. En déduire que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Correction

Raisonnons pas absurde: supposons qu'il existe un $a_k < 0$. Alors, $\forall n \geq k$ on a $a_n \leq a_k < 0$. Posons $\epsilon = -a_k > 0$.

Comme

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0,$$

pour cet ϵ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > n_0$ on a $|a_n| < \epsilon = -a_k$. Posons $n_1 = max\,(n_0; k)$. Alors $\forall n > n_1 \geq k$ on a $|a_n| = -a_n < -a_k = \epsilon \iff a_n > a_k$ ce qui contredit le fait que la suite est décroissante.

Comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, $a_p - a_{p-1} \leq 0$ $\forall p \in \mathbb{N}$. Donc

$$b_{2n+2} - b_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+2}(-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k \leq 0$$

ce qui veut dire que la suite $(b_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

$$b_{2n+3} - b_{2n+1} = (b_{2n+2} - a_{2n+3}) - (b_{2n} - a_{2n+1}) = (b_{2n+2} - b_{2n}) - a_{2n+3} + a_{2n+1} =$$

$$a_{2n+2} - a_{2n+1} - a_{2n+3} + a_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq 0$$

donc la suite $(b_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Ensuite,

$$\lim_{n\to+\infty}(b_{2n+2} - b_{2n+1}) = \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

donc les suites extraites $(b_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien adjacentes,

donc, convergent vers une même limite.

On peut en conclure que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la même limite.

Chapitre 4

Fonctions réelles à une variable réelle

4.1 Graphe d'une fonction réelle d'une variable réelle

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

D_f est le domaine de définition de f

On appelle graphe d'une fonction les points $M(x, f(x))$ ou $x \in D_f$.

et on écrit

$$G_f = \{(x, y)/x \in D_f \text{ et } y = f(x)\}$$

Exemple 28 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$

$$\begin{aligned} G_f &= \{(x, y)/x \in D_f \ et \ y = f(x)\} \\ &= \{(x, x)/x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

4.1.1 Fonctions paires-impaires

f est paire si

$$1)\forall x \in D_f \text{ on a } -x \in D_f$$
$$2)\forall x \in D_f,\ f(x) = f(-x)$$

Définition 4.1.1 *f est paire le graphe de la fonction f est symétrique par rapport à l'axe des y.*

f est impaire si

$$1)\forall x \in D_f \text{ on a } -x \in D_f$$
$$2)\forall x \in D_f,\ f(x) = -f(-x).$$

Définition 4.1.2 *f est impaire le graphe de f est symétrie par rapport à l'origine*

Exemple 29 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$

f est paire car

graphe est symétrique par rapport à l'axe des y.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x$

f est impaire car

graphe est symétrie par rapport à l'origine.

4.1.2 Fonctions périodiques

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et T un nombre réel, $T > 0$.

La fonction f est dite périodique s'il existe $T \in \mathbb{R}$ tel que

$$1)\forall x \in D_f \text{ on a } x + T \in D_f$$
$$2)\forall x \in D_f, f(x+T) = f(x).$$

Définition 4.1.3 *On appelle période de f le plus petit nombre positif T tel que $f(x+T) = f(x), \forall x \in D_f$.*

Exemple 30 $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R},\ f(x)=\sin x$

$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R},\ f(x)=\cos x$

$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R},\ f(x)=\tan x$

4.1.3 Fonctions bornées

Soit $U\subset D_f$. On dit que:

f est majorée sur U si $\exists M\in\mathbb{R},\forall x\in U,f(x)\leq M$.

f est minorée sur U si$\exists m\in\mathbb{R},\forall x\in U,f(x)\geq m$.

f est bornée sur U si f est à la fois majorée et minorée sur U, c'est-à-dire si $\exists M\in\mathbb{R},\forall x\in U,|f(x)|\leq M$.

Exemple 31 *1)* $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R},f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2+1}$

on a $0\leq f(x)\leq 1$.

2) $g:[1,+\infty[\rightarrow\mathbb{R},g(x)=\dfrac{3x}{e^x}$

on a $0\leq g(x)\leq\frac{3}{e}$.

4.1.4 Fonctions monotones

f est croissante sur $U\subset D_f$ si

$$\forall x,y\in U,x\leq y\Longrightarrow f(x)\leq f(y).$$

f est décroissante sur $U\subset D_f$ si

$$\forall x,y\in U,x\leq y\Longrightarrow f(x)\geq f(y)$$

Exemple 32 *)* $f:\mathbb{R}^+\rightarrow\mathbb{R},f(x)=2x+3$

f est croissante

2) $g:[1,+\infty[\rightarrow\mathbb{R},g(x)=-x+5$

g est décroissante

4.1.5 Maximum local, Minimum local

Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $[a,b]$ et $x_0 \in \left]a,b\right[$.

On dit que la fonction f admet un **maximum local** au point x_0 s'il existe un réel r tel que

$$\forall x \in \left]x_0 - r, x_0 + r\right[\subset [a,b], f(x) \leq f(x_0).$$

On dit que la fonction f admet un **minimum local** au point x_0 s'il existe un réel r tel que

$$\forall x \in \left]x_0 - r, x_0 + r\right[\subset [a,b], f(x_0) \leq f(x).$$

4.2 Limite d'une fonction

Soit $a \in \mathbb{R}$. Dans tout ce chapitre, on dira qu'une fonction f de domaine de définition D_f

est définie au voisinage de a s'il existe un réel $h > 0$ tel que l'on soit dans un des trois cas suivants :

$D_f \cap [a-h,a])\backslash\{a\} = [a-h,a[$i.e. f est définie dans un voisinage à gauche de a et éventuellement non définie en a ;

$D_f \cap [a,a+h])\backslash\{a\} =]a,a+h]$ i.e. f est définie dans un voisinage à droite de a et éventuellement non définie en a ;

$D_f \cap [a-h,a+h])\backslash\{a\} = [a-h,a+h]\backslash\{a\}$ i.e. f est définie dans un voisinage de a et éventuellement nondéfinie en a.

Définition 4.2.1 *Soit $a, l \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction définie au voisinage de a. On dit que f admet l pour limite en a si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, |x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

on écrit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

Exemple 33 $\lim\limits_{x \to 0} (3x+1) = 1$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha = \frac{\varepsilon}{3} > 0, \forall x \in D_f, |x-0| < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow |(3x+1) - 1| < \varepsilon$$

4.2.1 Limite à gauche, à droite

Définition 4.2.2 *Soit $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction définie au voisinage de a.*

1 On dit que f admet l pour limite à gauche en a si la restriction de f à $D_f \cap]-\infty, a[$ admet l pour limite en a. Dans ce cas, cette limite est unique et on la note $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, , a - \alpha < x < a \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

2- On dit que f admet l pour limite à droite en a si la restriction de f à $D_f \cap]a, +\infty[$admet l pour limite on la note $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, a < x < a + \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Exemple 34

$$\begin{array}{ccl} f & : & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x & \to & f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & si \quad x \geq 0 \\ 4x + 5 & si \quad x < 0 \end{cases} \end{array}$$

On a

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$ *et* $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 5.$
Dans ce cas on dit que f n'admet pas une limiteen 0.

Proposition 4.2.1

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \Longleftrightarrow \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = l$$

4.2.2 Unicité de la limite

Théorème 4.2.1 *Soit f une fonction définie au voisinage de a. Si f admet une limite l en a, elle est unique. On note alors*

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$
Si f est définie en a et admet une limite en a, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

4.2.3 Caractérisation séquentielle de la limite

Théorème 4.2.2 *Caractérisation séquentielle de la limite*

Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. Soit $l \in \mathbb{R}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$

(ii) Pour toute suite (u_n) à valeurs dans D_f de limite a, $(f(u_n))$ a pour limite l.

4.2.4 Méthode.

Pour montrer qu'une fonction f n'admet pas de limite en a, il suffit de trouver deux suites (u_n) et (v_n)de même limite a telles que $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$,possèdent des limites différentes.

Exemple 35 *La fonction $x \to \sin \dfrac{1}{x}$ n'admet pas de limite en 0.*

$$(u_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}), (v_n = \frac{1}{\pi + 2n\pi})$$

$$(f(u_n)) \to 1, (f(v_n)) \to 0,$$

possèdent des limites différentes

Théorème 4.2.3 *Soient f et g deux fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. Soient $l, l\prime, \in \mathbb{R}$.*

Théorème 4.2.4 *Si* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ *et* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l\prime$

Alors

1) $\lim\limits_{x \to a} f(x) + g(x) = l + l\prime$

2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) g(x) = ll\prime$

3) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l\prime}$ *si* $l\prime \neq 0$

4.2.5 Composition de limites

Proposition 4.2.2 *Soient f une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ et g une fonction définie au voisinage de $b \in \mathbb{R}$. Soit enfin $l \in \mathbb{R}$.*

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ *et* $\lim\limits_{x \to b} g(x) = l$ *alors* $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = l$

4.2.6 Passage à la limite

Soient f et g deux fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. Soient $l, l\prime, m, M \in R$.

(i) Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l\prime$ et si f $\leq$ g au voisinage de a, alors $l \leq l\prime$.

(ii) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ et f $\leq$ M au voisinage de a, alors $l \leq M$.

(iii) Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ et f $\geq$ m au voisinage de a, alors l $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

4.2.7 Théorèmes d'encadrement, de minoration et de majoration

Théorème 4.2.5 *Théorèmes d'encadrement, de minoration et de majoration*

Soient $a, l \in \mathbb{R}$. Soit f ,m et M trois fonctions définies au voisinage de a.

Théorème 4.2.6 *Théorème des gendarmes/d'encadrement :*

Si $\lim\limits_{x \to a} h(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l$ et $h \leq f \leq g$ au voisinage de a, alors f admet une limite en a et celle-ci vaut l.

Théorème 4.2.7 *Théorème de minoration :*

Si lim $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$ et $g \leq f$au voisinage de a, alors f admet une limite en a et celle-ci vaut $+\infty$.

Théorème 4.2.8 *Théorème de majoration :*

Si lim $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$ et $g \geq f$ au voisinage de a, alors f admet une limite en a et celle-ci vaut $-\infty$.

Corollaire 4.2.9 *Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. Si $|f| \leq g$ au voisinage de a et si l$\lim\limits_{x \to a} g(x)$= 0, alors* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$

Corollaire 4.2.10 *Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. Si f est bornée au voisinage de a et si $\lim\limits_{x \to a} g(x)$= 0, alors* $\lim\limits_{x \to a} f(x) g(x) = 0$

Exemple 36

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

car $\sin \frac{1}{x}$ *bornée et* $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$

4.3 Continuité d'une fonction

Définition 4.3.1 . *Soit a un réel et f une fonction définie au voisinage de a. On dit que f est continue en a si f est définie en a et*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

C'est-à-dire

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, , |x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Exemple 37 *La fonction*

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \quad &\to \quad f(x) = \begin{cases} e^{-\dfrac{1}{x^2}} & si \;\; x \geq 0 \\ 0 \;\; si \;\; x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

est continue en 0.

car

$$\lim_{x\to 0} e^{-\dfrac{1}{x^2}} = 0 = f(0)$$

Définition 4.3.2 *Soit a un réel et f une fonction définie au voisinage de a. On dit que f*

1)f est continue à gauche en a si

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

C'est-à-dire

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, a - \alpha < x < a \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

.2)f est continue à droite en a si

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

C'est-à-dire

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, a < x < a + \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Exemple 38 *La fonction*

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \quad &\rightarrow \quad f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & si \;\; x > 1 \\ 2 & si \;\; x = 1 \\ 3x & si \;\; x < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

est continue en 0.

car $\lim\limits_{x \to 0^{+}} f(x) = 2 = f(1)$ *et* $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = 3 \neq f(1)$

f *est continue à droite en 1 mais n'est pas ontinue à gauche en 1.*

dans ce cas f *n'est pas ontinue en* 1.

Proposition 4.3.1 f *est définie en* $a \Longleftrightarrow f$ *est continue à droite et continue à gauche en* a.

4.3.1 Prolongement par continuité

Définition 4.3.3 *Soit* f *un efonction définie au voisinage de* a *mais non définie en* a. *On dit que* f *est prolongeable par*

continuité en a *si* f *admet une limite finie* l *en* a. *Le prolongement* g *de* f *définie par*

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & si \;\; x \neq a \\ l & si \;\; x = a \end{cases}$$

est alors continu en a.

Exemple 39 $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ *et* $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

Le prolongement g *de* f *définie par*

$$g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & si \;\; x \neq 0 \\ 0 & si \;\; x = 0 \end{cases}$$

4.3.2 Continuité ponctuelle et composition

Proposition 4.3.2 *Soit* f *une fonction définie au voisinage de* a *et continue en* a. *Soit* g *une fonction définie au voisinage de f(a) et continue en f(a). Alors* $g \circ f$ *est continue en* a.

4.3.3 Continuité sur un intervalle

Dans ce paragraphe, I désigne un intervalle.

Définition 4.3.4 *Continuité sur un intervalle*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. *On dit que* f *est continue sur* I *si* f *est continue en tout point de* I.

On note $C(I, \mathbb{R})$ *ou* $C^0(I, \mathbb{R})$ *l'ensemble des fonctions continues sur* I *à valeurs dans* $\mathbb{R}$

4.3.4 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 4.3.1 *Soit* f *une fonction continue sur intervalle* $[a, b]$. *Pour tout réel* y *compris entre* $f(a)$ *et* $f(b)$, *il existe* $x \in [a, b]$ *tel que* $y = f(x)$..

Proposition 4.3.3 *Soit* f *une fonction continue sur intervalle* $[a, b]$. *Pour tout réel* y *compris entre* $f(a)$ $f(b) < 0$, *il existe* $x \in [a, b]$ *tel que* $f(x) = 0$.

Exemple 40 *Montrons que* $x + xe^{(x-1)(x+2)} = 0$ *admet une solution*

On pose

$$f(x) = x + xe^{(x-1)(x+2)}$$

et on aussi $f(1) = 2 \geq 0$ *et* $f(-2) = -4 < 0$.

alors il existe x *tel que* $f(x) = 0$.

4.3.5 Opérations sur les fonctions continues

Théorème 4.3.2 . *Soient* f *et* g *deux fonctions continues au point* a. *Alors* $f + g, f - g, fg$ *sont continues, ainsi que* $\dfrac{f}{g}$ *si* $g(a) \neq 0$.

Exercice 1. Calculer les limites suivantes:

1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) - \ln x$ 2) $\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha}e^{-\sqrt{x}}$ 3) $\lim_{x\to0^+} \left(\ln(\sin x) - \ln x\right)$

4) $\lim_{x\to0} n\frac{\sin nx}{\sin mx}$ 5) $\lim_{x\to0^+} \frac{x^x-1}{x}$

6) $\lim_{x\to a} \frac{\cos x-\cos a}{x-a}$ 7) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$

8) $m, n \in \mathbb{N}$ étudier $\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x^n}-\sqrt{1-x^m}}{x^n}$

Correction:

Calculer les limites suivantes:

$$
\begin{aligned}
&1)\lim_{x\to+\infty}\tfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)-\ln x && =\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{\sqrt{(1+x^2)}}{x}\right)\\
& && =\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}}{x}\right)\\
& && =\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}\right)=0\\
&2)\lim_{x\to+\infty}x^{\alpha}e^{-\sqrt{x}} && =\lim_{x\to+\infty}e^{\alpha\ln x}e^{-\sqrt{x}}\\
& && =\lim_{x\to+\infty}e^{\alpha\ln x-\sqrt{x}}\\
& && =\lim_{x\to+\infty}e^{\sqrt{x}\left(\frac{2\alpha\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-1\right)}=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&3)\lim_{x\to0^+}(\ln(\sin x)-\ln x) && =\lim_{x\to0^+}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)=0\text{ car: }\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=1\\
&4)\lim_{x\to0}n\frac{\sin nx}{\sin mx} && =\lim_{x\to0}n\frac{nx}{mx}\frac{\frac{\sin nx}{nx}}{\frac{\sin mx}{mx}}\\
& && =\frac{n^2}{m}\text{ car:}\frac{\sin y}{y}\to0\text{ qd: }y\to0\\
&5)\lim_{x\to0^+}\frac{x^x-1}{x} && =\lim_{x\to0^+}\frac{e^{x\ln x}-1}{x}\\
& && =\lim_{x\to0^+}\frac{\left(e^{x\ln x}-1\right)\ln x}{x\ln x}=\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty\\
& && \text{car: }\lim_{x\to0^+}\frac{\left(e^{x\ln x}-1\right)}{x\ln x}=\lim_{y\to0}\frac{(e^y-1)}{y}\\
& && =e^0=1\text{ par définition de la dérivée.}\\
&6)\lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a} && =-\sin a\text{ par définition de la dérivée.}\\
&7)\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} && =\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x}\frac{1-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}+\sqrt{1-\frac{a}{x}}}{\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}\\
& && =\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0\\
&8)\quad\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^n}-\sqrt{1-x^m}}{x^n} && =\quad\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^n}-\sqrt{1-x^m}}{x^n}\cdot\frac{\sqrt{1+x^n}+\sqrt{1-x^m}}{\sqrt{1+x^n}+\sqrt{1-x^m}}\\
& && =\lim_{x\to0}\frac{x^n-x^m}{x^n\left(\sqrt{1+x^n}+\sqrt{1-x^m}\right)}\\
& && =\lim_{x\to0}\frac{1-x^{m-n}}{\left(\sqrt{1+x^n}+\sqrt{1-x^m}\right)}\\
& && =\begin{cases}\frac{1}{2}\text{ si }m>n\\ 0\text{ si }m=n\\ -\infty\text{ si }m<n\end{cases}
\end{aligned}
$$

Exercice 2. Trouver le domaine de définition des fonctions suivantes:
$f\ (x)=\sqrt{\frac{2+3x}{5-2x}},\quad g\ (x)=\ln(4x+3)\,,\ h\,(x)=\sqrt{x^2-2x-5}.$

Correction:

Trouver le domaine de définition des fonctions suivantes:

$f\ (x) = \sqrt{\frac{2+3x}{5-2x}}, \quad g\ (x) = \ln(4x+3)\,,\ h\,(x) = \sqrt{x^2-2x-5}$

1) $D_f = \left\{x \in \mathbb{R}/\frac{2+3x}{5-2x} \geq 0 \text{ et } 5-2x \neq 0\right\}$

alors: $\frac{2+3x}{5-2x} \geq 0 \Leftrightarrow 2+3x \geq 0$ et $5-2x > 0$

ou $2+3x \leq 0$ et $5-2x < 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{2}{3}$ et $x < \frac{5}{2}$

ou $x \leq -\frac{2}{3}$ et $x > \frac{5}{2} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{2}{3}, \frac{5}{2}\right[$

$D_g = \{x \in \mathbb{R}/4x+3 > 0\} \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{3}{4}, +\infty\right[$.

$D_h = \left\{x \in \mathbb{R}/x^2-2x-5 \geq 0\right\} \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, 1-\sqrt{6}\right] \cup \left[1+\sqrt{6}, +\infty\right[$

Exercice 3. Soient:$h\ (x) = \sqrt{x^2+1}, \quad g\ (x) = \ln(x + h\ (x))\,,\ f\ (x) = \frac{g\ (x)}{x}$.

1) Montrer que:$h\ (x) > -x\ \forall x \in \mathbb{R}$, en déduire D_f.

2) Calculer $g\ (x) + g\ (-x)$ et en déduire que g est impaire et que f est paire.

3) Vérifier que: $\sqrt{x^2+1}h\ '(x) + x\ h\ (x) = x + x\sqrt{x^2+1}$.

Correction:

Soient:$h\ (x) = \sqrt{x^2+1}, \quad g\ (x) = \ln(x + h\ (x))\,,\ f\ (x) = \frac{g\ (x)}{x}$.

Montrer que:$h\ (x) > -x\ \forall x \in \mathbb{R}$, en déduire D_f.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $h\ (x) + x = \sqrt{x^2+1} + x > 0$ si $x \geq 0$ et $h\ (x) + x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} > 0$ si $x < 0$

Alors: $\forall x \in \mathbb{R}$, $h\ (x) + x > 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}^*$.

Calculer $g\ (x) + g\ (-x)$ et en déduire que g est impaire et que f est paire.

$$\begin{aligned} g(x) + g(-x) &= \ln(x + h\ (x)) + \ln(-x + h\ (-x)) \\ &= \ln\left[\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\right] \\ &= \ln 1 = 0 \end{aligned}$$

alors $g\ (x) = -g\ (-x) \Rightarrow g$ est impaire.

Vérifier que: $\sqrt{x^2+1}h\ '(x) + x\ h\ (x) = x + x\sqrt{x^2+1}$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+1}h'(x)+xh(x) &= \sqrt{x^2+1}h'(x)+xh(x) \\
&= \sqrt{x^2+1}\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}+x\sqrt{x^2+1} \\
&= x+x\sqrt{x^2+1}
\end{aligned}$$

Exercice 4. Soit $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ une fonction définie par: $f\ (x)=\frac{\ln(1+x)}{x} si\ x\neq 0$ et f $(0)=1$

Montrer que f est continue en 0.

Correction:

Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$une fonction définie par: $f\ (x)=\frac{\ln(1+x)}{x} si\ x\neq 0$ et $f\ (0)=1$

Montrer que f est continue en 0.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(1+0)}{x-0} \\
&= \frac{1}{1+0} \text{ car la dérivée de } \frac{\ln(1+x)}{x} \text{ est } \frac{1}{1+x} \\
&= 1=f(0)\Rightarrow f \text{ est continue en } 0.
\end{aligned}$$

Exercice 5. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$une fonction définie par: $f\ (x)=\frac{\cos x-1}{x} si\ x\neq 0$ et $f\ (0)=0.$

Montrer que f est continue en 0.

Correction:

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$une fonction définie par: $f\ (x)=\frac{\cos x-1}{x} si\ x\neq 0$ et $f\ (0)=0$

Montrer que f est continue en 0.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 0}{x-0} \\
&= -\sin 0 \text{ car la dérivée de } \cos x \text{ est } \sin x \\
&= 0=f(0)\Rightarrow f \text{ est continue en } 0.
\end{aligned}$$

Exercice 6. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$une fonction définie par: $f\ (x)=x-[x]\,,[]$ est la partie entière.

Montrer que f est discontinue en tout point de $\mathbb{Z}$.

Correction:

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$une fonction définie par: $f\ (x) = x - [x]\,,[]$ est la partie entière.

Par définition: $[x] = \max \beta$ avec $\beta \leq x$ et $\beta \in \mathbb{Z}$.

Montrer que f est discontinue en tout point de $\mathbb{Z}$.

Théorème: Si

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} f(x) &= \alpha \text{ avec: } \alpha \text{ est une constante unique} \\ &\Rightarrow \forall X_n \text{ une suite avec } x_n \to x_0 \text{ qd } n \to +\infty \\ \text{alors } \lim_{n \to +\infty} f(x_n) &= \alpha \end{aligned}$$

Pour notre problème soit $x_0 \in \mathbb{Z}$, on $f\ (x_0) = x_0 - [x_0] = 0$

Mais si on pose: $x_n = x_0 - \frac{1}{n}$ qui ont des valeurs à gauche de $x_0 \Rightarrow [x_n] = x_0 - 1$ et on a:

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} f(x_n) &= \lim_{n \to +\infty} x_n - [x_n] = \lim_{n \to +\infty} x_0 - \frac{1}{n} - x_0 - 1 = 1 \neq f(x_0) \\ &\Rightarrow f \text{ est discontinue en tout point de } \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Exercice 7. Peut-on prolonger par continuité sur $\mathbb{R}$ les fonctions suivantes:

$$f\ (x) = \sin x\ \sin \frac{1}{x}, \quad g\ (x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2},\ h(x) = \frac{1}{x} \ln \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right).$$

Correction:

Peut-on prolonger par continuité sur $\mathbb{R}$ les fonctions suivantes:

$$f\ (x) = \sin x\ \sin \frac{1}{x}, \quad g\ (x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2},\ h(x) = \frac{1}{x} \ln \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)$$

1) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ et $f\ (x) = \sin x\ \sin \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \sin x \sin \frac{1}{x} = 0 \text{ car } \lim_{x \to 0} \sin x = 0 \text{ et } -1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$$

Alors le prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$ existe et il est de la forme:

$$\begin{array}{rcl} F & : & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto & F(x) = \begin{cases} \sin x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \ \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

2) $g : \mathbb{R} - \{1, -1\} \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to -1} g(x) = \lim_{x \to -1} \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} = -\infty$$

Alors le prolongement par continuité n'existe pas.

$h : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} h(x) &= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right) - \ln\left(\frac{e^0+e^{-0}}{2}\right)}{x - 0} \\ &= \left(\frac{e^0 - e^{-0}}{2}\right) = 0 \text{ car: } \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \end{aligned}$$

Alors le prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$ existe et il est de la forme:

$$\begin{array}{rcl} H & : & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto & H(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \ \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Exercice 8. Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction définie par: $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$.

L'équation $f(x) = 0$ admet-elle une solution?

Correction:

Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction définie par: $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$.

L'équation $f(x) = 0$ admet-elle une solution?

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}(1 - x \ln x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

Alors la fonction f est continue dans $]0,+\infty[$ en plus:

$$\left[\lim_{x\to 0} f(x)\right]\left[\lim_{x\to+\infty} f(x)\right] < 0$$

d'après le théorème des valeurs intermédiare: $\exists c \in\ ]0,+\infty[$ tel que: $f(c) = 0$.

Exercice 9. Soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ une fonction définie par: $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin x - x\cos x$.

Soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ une fonction définie par: $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin x - x\cos x$.

L'équation $f(x) = 0$ admet-elle une solution dans $]0, 2\pi[$?

On a: $f(\pi) = \pi$ et $f(2\pi) = -2\pi$, Alors la fonction f est continue dans $[0, 2\pi]$ en plus:

Exercice 10 Donner des intervalles de $\mathbb{R}$ sur lesquels la fonction partie entière est constante. Donner les plus grands tels intervalles au sens de l'inclusion. La fonction partie entière est-elle croissante, décroissante? La représenter graphiquement.

Exercice 11 Calculer les limites suivantes si elles existent :

$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-3x-2}{x^2-4}$.

$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{x^2-9} \cos \pi x$.

$\lim_{x\to 0} \frac{x}{a} E\left(\frac{b}{x}\right)$ où $a, b > 0$.

$\lim_{x\to+\infty} (x + 2^x)^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 12

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante et négative. Montrer que f a une limite finie ℓ en $+\infty$ et que $\ell = \sup\{f(x); x \geq 0\}$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un fonction croissante; montrer qu'elle admet en tout point $x \in \mathbb{R}$ un limite \`a gauche et une limite \`a droite. Donner un exemple d'une telle fonction n'ayant pas de limite en 0.

Exercice 13 Pour chacune des fonctions suivantes, donner son ensemble de définition dire si elle est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$; $f(x) = \sin x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 14

Montrer que toute application continue d'un segment dans lui-même admet un point fixe (i.e. il existe x tel que $f(x) = x$).

Indication : on utilisera la fonction $g = f - Id$.

Soit $f\ :\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Montrer qu'elle a un point fixe : il existe $x_0\in\mathbb{R}$ tel que $f(x_0)=x_0$.

Soit $f\ :\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue et périodique. Montrer qu'elle est bornée. En déduire qu'elle admet un point fixe.

Exercice 15

Soit $f\ :[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ une fonction continue qui admet une limite finie ℓ en $+\infty$. Montrer que f est bornée sur $[0,+\infty[$.

Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ continue telle que la limite de f en $+\infty$ existe et soit nulle; prouver que, pour tout $a\geq 0$, il existe $b\geq a$ en lequel f atteint son maximum sur $[a,+\infty[$.

Exercice 16 Soit $f\ :I\to\mathbb{R}$ une fonction continue (I intervalle). Que pensez-vous des affirmations suivantes (on justifiera avec soin chaque réponse, soit en utilisant des résultats du cours soit en construisant des contre-exemples) :

l'image d'un intervalle est un intervalle;

l'image d'un intervalle ouvert est un intervalle ouvert;

l'image d'un intervalle fermé est un intervalle fermé;

l'image d'un intervalle borné est un intervalle borné;

l'image d'un intervalle fermé borné est un intervalle fermé borné.

Exercice 17 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=x-E(x)$.

Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}, 0\leq f(x)<1$.

Montrer que la fonction f est périodique, donner "sa" période.

Faire une représentation graphique de f.

Exercice 18 Soit $f\ :\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'au moins une des trois situations suivantes se produit :

[(i)] f admet un point fixe $x\in\mathbb{R}$; [(ii)] $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$; [(iii)] $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

Indication : on utilisera la fonction $g=f-Id$.

Correction Supposons que f n'admette pas de point fixe $x\in\mathbb{R}$, c'est-à-dire $\nexists x_0$ tel que $g(x_0)=0$.

Alors $\nexists(x_1;x_2)\in\mathbb{R}^2$ *tels que* $g(x_1)\leq 0$ *et* $g(x_2)\geq 0$.

(En effet, supposons le contraire: $\exists(x_1;x_2)\in\mathbb{R}^2$ tels que $g(x_1)\leq 0$ et $g(x_2)\geq 0$; on peut supposer $x_1<x_2$. Alors la fonction g est continue sur $[x_1;x_2]$ et $0\in$

$[g(x_1), g(x_2)]$. Comme l'image continue d'un intervalle est un intervalle, $g(x_1) \in Im\, g,\ g(x_2) \in Im\, g \quad \Longrightarrow [g(x_1), g(x_2)] \subset Im\, g \quad \Longrightarrow 0 \in Im\, g$. Donc, par le théorème des valeurs intérmediaires, $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $g(x_0) = 0$, ce qui contredit la supposition que $\nexists x_0$ tel que $g(x_0) = 0$).

Cela veut dire que $\forall x \in \mathbb{R}$,

soit $g(x) \geq 0 \iff f(x) \geq x \implies \lim_{x\to+\infty} f(x) \geq \lim_{x\to+\infty} x = +\infty \implies \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$,

soit $g(x) \leq 0 \iff f(x) \leq x \implies \lim_{x\to-\infty} f(x) \leq \lim_{x\to-\infty} x = -\infty \implies \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Exercice 19 Montrer qu'une fonction périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ayant une limite quand x tend vers $+\infty$ est constante sur $\mathbb{R}$.

Correction Raisonnons par l'absurde. Soit p la période de f. Supposons $\exists x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_1) \neq f(x_2)$ (supposons par exemple $f(x_1) > f(x_2)$). Posons $\epsilon = f(x_1) - f(x_2) > 0$. Comme $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$, pour cet ϵ

$$\exists x_0 \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \geq x_0 \text{ on a } |f(x) - l| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Par l'axiome d'Archimède, $\exists n_1,\ n_2 \in \mathbb{N}$ tels que $x_1 + n_1 p > x_0$ et $x_2 + n_2 p > x_0$. On a alors

$$|f(x_1) - l| = |f(x_1 + n_1 p) - l| < \frac{\epsilon}{2} \qquad et \qquad |f(x_2) - l| = |f(x_2 + n_2 p) - l| < \frac{\epsilon}{2},$$

d'où

$$\epsilon = f(x_1) - f(x_2) = |f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1) - l + l - f(x_2)| \leq |f(x_1) - l| + |l - f(x_2)| = |f(x_1) - l| + |f(x_2) - l| < \frac{\epsilon}{2} +$$

on a obtenu $\epsilon < \epsilon$ ce qui est une contradiction.

Exercice 20 On considère la fonction g définie sur l'intervalle $J_1 =]\frac{\pi}{\ln 3}, \frac{\pi}{\ln 2}[$ par :

$$g(x) = \ln\left(-\frac{\sin(x \ln 2)}{\sin(x \ln 3)}\right).$$

Calculer les limites de g aux bornes de J_1, démontrer que l'image de J_1 par g est $\mathbb{R}$.

Correction $\ln 3 > 1 > \ln 2 > \frac{1}{2} \implies \frac{\pi}{\ln 3} < \pi < \frac{\pi}{\ln 2} < 2\pi$. Donc, $\forall x$ tel que $\frac{\pi}{\ln 3} < x < \frac{\pi}{\ln 2}$ on a

$$0 < \frac{\pi}{\ln 3}\ln 2 < x\,\ln 2 < \frac{\pi}{\ln 2}\ln 2 = \pi \qquad \implies \qquad \sin(x\,\ln 2) > 0 \qquad et$$

$$\pi = \frac{\pi}{\ln 3}\ln 3 < x\,\ln 3 < \frac{\pi}{\ln 2}\ln 3 < 2\pi \qquad \implies \qquad \sin(x\,\ln 3) < 0$$

(on a utilisé $\frac{\ln 3}{\ln 2} < 2$ parce que $\ln 3 < \ln 4 = 2\ln 2$.) Donc, $f(x) := -\frac{\sin(x\,\ln 2)}{\sin(x\,\ln 3)} > 0$ pour $\frac{\pi}{\ln 3} < x < \frac{\pi}{\ln 2}$, donc $g(x) = \ln(f(x))$ est définie correctement pour $x \in]\frac{\pi}{\ln 3}; \frac{\pi}{\ln 2}[$.

La fonction $g(x)$ est continue sur $]\frac{\pi}{\ln 3}; \frac{\pi}{\ln 2}[$ parce que le dénominateur $\sin(x\,\ln 3) \neq 0$ sur $]\frac{\pi}{\ln 3}; \frac{\pi}{\ln 2}[$. Ensuite, comme

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{\ln 3}^+} f(x) = 0 \quad et \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{\ln 2}^-} f(x) = +\infty$$

on a

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{\ln 3}^+} g(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{\ln 3}^+} \ln(f(x)) = -\infty \quad et \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{\ln 3}^+} g(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{\ln 2}^-} \ln(f(x)) = +\infty.$$

Donc le théorème des valeurs intérmediaires implique que l'image de $]\frac{\pi}{\ln 3}; \frac{\pi}{\ln 2}[$ par g est $\ln(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$.

Chapitre 5

Fonctions dérivables

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, x_0 un point de I, et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f **est dérivable en** x_0, s'il existe un nombre réel unique α tel que:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f\ (x) - f\ (x_0)}{x - x_0} = \alpha$$

α est appelé dérivée de f au point x_0 est noté $f\ '(x_0)$.

La fonction est dérivable dans tout l'intervalle I quand elle est dérivable en tout point x_0 de I.

D'autre part si on pose: $x - x_0 = h$ alors on a:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f\ (x_0 + h) - f\ (x_0)}{h} = \alpha$$

Exemple 41 *Trouver la dérivée de $f\ (x) = \sin x$ en utilisant la d éfinition de la dérivée.*

En un point x_0:

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0}\\
&= \lim_{x\to x_0}2\frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}{x-x_0}\\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}\cdot\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\\
&= \cos x_0\ ,\ \textit{car: }\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}=1
\end{aligned}$$

Alors $\forall x\in\mathbb{R},(\sin x)'=\cos x$.

Proposition 5.0.4 (1) *Si f n'est pas continue en un point x_0, alors elle n'est pas dé rivable en ce point.*

Proposition 5.0.5 (2) *Une fonction $f: I\to\mathbb{R}$ est dérivable en point x_0 si et seulement si elle admet en ce point des dérivées à droite*

$$\left(\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)\ \textit{et à gauche}\ \left(\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)\ \textit{égales à }\alpha.$$

Quelques propriétés sur les fonctions dérivables

Proposition 5.0.6 *Etant donnés un intervalle I et deux fonctions $f: I\to\mathbb{R}$ et $g: I\to\mathbb{R}$ dérivables en un point x_0 de I, alors:*

1) $f+g$ est dérivable en x_0 et $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

2) $a\cdot f$ est dérivable en x_0 et $(a\cdot f)'(x_0)=a\cdot f'(x_0),\forall a\in\mathbb{R}$.

3) $f\cdot g$ est dérivable en x_0 et $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$.

4) Si $g(x_0)\neq 0$, donc $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)\ -\ f(x_0)\cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$.

Dérivée d'une fonction composée

Proposition 5.0.7 *Soient $f: I\to J$ et $g: J\to\mathbb{R}$ et x_0 un point de I.*

Si la fonction f est dérivable en x_0 et si g est dérivable en $f(x_0)$ alors $g\circ f$ est dérivable en x_0 et on a:

$$(g\circ f)'(x_0)=f'(x_0)\cdot\left[g'(f(x_0))\right]$$

Exemple 42

$$[\sin(f\ \ (x))]' = f\ '(x) \cdot \cos(f\ \ (x))$$

Dérivée d'une fonction réciproque

Proposition 5.0.8 *Soient $f : I \to J$ une fonction bijective, x_0 un élé ment de I et $y_0 = f(x_0)$ l'élément de J. Pour que $f^{\ -1}$ est dérivable en y_0 il faut et il suffit que:*

f est dérivable en x_0, $f\ '(x_0)$ non nul et $f^{\ -1}$ est continue en y_0. Alors:

$$\left(f^{\ -1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f\ '(x_0)} = \frac{1}{(f\ ' \circ f^{\ -1})(y_0)}$$

Exemple 43 *On note la fonction réciproque de* $\sin x$ *par* $\arcsin x$ *alors la d érivée de est:*

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Remarque 6 *Toujours on donne le résultat en fonction de la première variable de la fonction réciproque donnée.*

Dérivées d'ordre supérieure

On note les dérivées d'ordre supérieure d'une fonction f qui est dérivable dans I un intervalle de $\mathbb{R}$ par: $f^{\ (n)} : I \to \mathbb{R}$ vérifiant:

i) $f^{\ (0)} = f$.

ii) $f^{\ (k+1)} = \left(f^{(k)}\right)'$, pour tout $k = 0, 1, ..., n-1$.

5.0.6 Fonction de classe C^n

Proposition 5.0.9 *Une fonction de classe C^n, est une fonction continue et admet des dé rivées continues jusqu'à l'ordre n. Et on dit également que f est n fois continûement dérivable.*

Nous alons envisager ici la méthode pratique pour étudier la classe d'une fonction.

1) Si $n = 0$:

dans ce cas on a pas une fonction de classe C^0 mais on écrit une fonction de classe $C(I)$ c'est les fonctions continues dans un intervalle I.

2) Si $n = 1$ (fonction de classe $C^1(I)$):

Une fonction de classe $C^1(I)$ est une fonction continue et la première dérivée de cette fonction **existe** et **continue** en tout point de I**.**

a) Existence

Pour étudier l'existence de la première dérivée on utilise la définition de la dérivée en tout point x_0 de I ç'est à dire on calcul:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f\ (x) - f\ (x_0)}{x - x_0} = \alpha$$

Alors on les cas suivants:

i) Si $\alpha = \pm\infty$ ou bien α est égale deux limites ou plus ou bien la limite à gauche est différente à la limite à droite, alors la limite n'existe pas et donc la fonction n'est pas de classe C^1.

ii) Si α est égale à une constante unique alors la limite existe et on passe à l'étude de la continuété de la dérivée.

b) Continuété de la première dérivée

Pour étudier la continuété de la première dérivée en x_0 on calcul $f'(x)$ ensuite on calcul:,

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = \beta \text{ alors si } \beta \neq \alpha$$

Donc la première dérivée n'est pas continue ce qui permet de dire que f n'est pas de classe C^1. Par contre si:

$$\beta = \alpha$$

Alors la première dérivée est continue ce qui permet de dire que f est de classe C^1.

3) Si $n = 2$ (fonction de classe $C^2(I)$):

Une fonction de classe $C^2(I)$ est une fonction telle que ça dérivée est de classe $C^1(I)$. Donc on fait le même travail que le deuxième cas mais on utilise f' au lieu de f.

Remarque 7 *Si f n'est pas de classe $C^n(I)$, alors elle n'est pas de classe $C^k(I)$, $\forall k \geq n+1$.*

Exemple 44 *Soit la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par:*

$$f\ (x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 \quad si\ x = 0 \end{cases}$$

Etudier la classe de f?

1) La continuété de f?

La fonction est continue dans $\mathbb{R}^*$.

Et en $x = 0$, on a:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} &= 0 \ car \ \lim_{x \to 0} x^2 = 0 \ et \ \sin \frac{1}{x} \ est\ bornée. \\ &= f\ (0)\,. \end{aligned}$$

Donc f est continue dans $\mathbb{R}$.

2) f est elle de classe C^1?

La fonction f est dérivable dans $\mathbb{R}^*$, mais le seul problème est le point 0.

i) Existence de la 1ère dérivée en 0?

$$\lim_{x \to 0} \frac{f\ (x) - f\ (0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \ existe.$$

ii) La continuété de la 1ère dérivée en 0?

$f\ '(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x \to 0} f\ '(x)$ *n'existe pas, donc la 1ère dérivée n'est pas continue en 0.*

Conclusion: *f n'est pas de classe C^1.*

5.0.7 Théorème de Rolle

Théorème 5.0.3 *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, dé rivable sur $]a, b[$ et telle que: $f\ (a) = f\ (b)$.*

Alors il existe une constante $c \in\ ]a, b[$ telle que: $f\ '(c) = 0$.

Exemple 45 *Pour montrer que l'équation $\sin x + \cos x = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]0, \pi[$. On utilise la fonction $f\ (x) = e^x \sin x - 1$ qui est continue dans $[0, \pi]$,* *dérivable dans* $]0,\pi[$ *et* $f\ (0) = f\ (\pi) = -1$. *Donc d'après ROLLE* $\exists c \in\ ]0,\pi[$ *telle que:* $f\ '(c) = 0 \Rightarrow e^c \sin c + e^c \cos c = 0 \Rightarrow \sin c + \cos c = 0.$

5.0.8 Théorème des accroissement finis

Théorème 5.0.4 *Soit* f *une fonction continue sur un intervalle* $[a,b]$, *dé rivable sur* $]a,b[$. *Alors il existe une constante* $c \in\ ]a,b[$ *tel que:*

$$f\ (b) - f\ (a) = (b-a)\, f\ '(c)\,.$$

Exemple 46 *Montrons l'inégalité suivante:*

$$\forall x \in\ ]0,1[\,,\ \arcsin x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ .$$

On applique le théorème des accroissements finis sur la fonction $\arcsin x$ *dans* $[0,x] \subset [0,1]$. *Alors il existe une constante* $c \in\ ]0,x[$ *tel que:*

$$\begin{aligned} f\ (x) - f\ (0) &= (x-0)\, f\ '(c)\,, .f\ '(c) = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}}. \\ \textit{Mais} &: \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \textit{car:} c < x. \\ &\Rightarrow \arcsin x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

5.0.9 Thorème de l'Hobital

Théorème 5.0.5 *Soient* f *et* g *deux fonctions dérivables au voisinage de* $x_0 \in\ ]a,b[$.

$$\begin{aligned} \textit{Si} \lim_{x\to x_0} f\ (x) &= A \textit{ et } \lim_{x\to x_0} g\ (x) = B \textit{ où } A,B \textit{ sont tous les deux nuls} \\ \textit{ou tous les deux infinis, } g'(x) &\neq 0 \textit{ pour } x \textit{ voisin de } x_0, \textit{ et si } \lim_{x\to x_0} \frac{f\ '(x)}{g'(x)} \textit{ existe alors:} \\ \lim_{x\to x_0} \frac{f\ (x)}{g\,(x)} &= \lim_{x\to x_0} \frac{f\ '(x)}{g'(x)}. \end{aligned}$$

Exemple 47

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}}{1} = 2.$$

5.1 Formules de Taylor

5.1.1 Théorème des acroissement finis

Théorème 5.1.1 *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, dé rivable sur $]a,b[$. Alors il existe une constante $c \in\ ]a,b[$ tel que:*

$$f\ (b) - f\ (a) = (b-a)\, f\ '(c)\,.$$

5.1.2 Théorème des acroissement finis généralisés

Théorème 5.1.2 *Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$, dé rivables sur $]a,b[$ avec g $'$ne s'annule pas sur $]a,b[$, alors il existe une valeur c de $]a,b[$ telle que:*

$$\frac{f\ (b) - f\ (a)}{g\ (b) - g\ (a)} = \frac{f\ '(c)}{f\ '(c)}.$$

5.1.3 Formule de Taylor-Lagrange

Soit f de classe C^n sur $[a,b]$, $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$, alors il existe une valeur c de $]a,b[$ telle que:

$$\begin{aligned} f\ (b) &= \sum_{p=0}^{n} \frac{(b-a)^p}{p!} f^{\ (p)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{\ (n+1)}(c)\,. \\ &= f\ (a) + (b-a)\ \ f\ '(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{\ (n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{\ (n+1)}(c)\,. \end{aligned}$$

Cette formule est connue par la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n. De plus le terme $\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{\ (n+1)}(c)$ est appelé reste de Lagrange.

Remarque 8 *Si on pose: $n = 0$ dans la formule de Taylor-Lagrange, on trouve l'égalit é des accroissements finis.*

5.1.4 Formule de Taylor-Young

Soit f définie sur un intervalle I, admettant en un point $a \in I$ des dérivées jusqu'à l'ordre n. Alors il existe un voisinage V de a et une fonction $\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ tels que:

$$\begin{aligned} \forall x \in V,\ f(x) &= \sum_{p=0}^{n} \frac{(x-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x) \text{ et } \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0. \\ &= f(a) + (x-a) f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x) \text{ et } \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0. \end{aligned}$$

C'est la formule de Taylor avec un reste de Young $((x-a)^n \varepsilon(x))$.

5.1.5 Formule de Maclaurin

C'est la formule de Taylor-Lagrange avec $b = x, a = 0$ et $c = \theta x$ avec $0 < \theta < 1$, c'est à dire:

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{x^p}{p!} f^{(p)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \text{ avec } 0 < \theta < 1.$$

5.2 Développements limités

Définition 5.2.1 *Soit f une fonction définie au voisinage d'un point x_0, sauf peut- être en x_0. On dit que f admet un développement limité (D.L) d'ordre n au voisinage de x_0 s'ils existes des nombres ré els $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et une fonction ε tels que pour tout élément $x \in I \subset \mathbb{R}$:*

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n \varepsilon(x-x_0), \\ \textit{avec } \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x-x_0) &= 0. \\ \textit{on pose } &: P(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n \\ & \quad \textit{c'est la partie régulière du D.L, et elle est unique.} \\ & \quad (x-x_0)^n \varepsilon(x-x_0) \textit{ est le reste du D.L, on peut l'écrire } o((x-x_0)^n), \\ \textit{avec } \lim_{x\to x_0} \frac{o((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n} &= 0 \end{aligned}$$

- Si $x_0 = 0$ on a:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x), \textit{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

-Si $x_0 = \pm\infty$ *on pose dans la formule du D.L au voisinage de* 0, $X = \frac{1}{x}$*, et on aura:*

$$\begin{aligned} f\ \ (x) &= a_0 + a_1 \frac{1}{x} + ... + a_n \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^n} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\ , \\ \textit{avec}\ \lim_{x\to\pm\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) &= 0. \end{aligned}$$

On peut déterminer la formule du D.L à l'aide de la formule de taylor-Young, alors sous les hypothèses de la formule de Taylor on a:

$$\begin{aligned} f\ \ (x) &= a_0 + a_1 (x - x_0) + ... + a_n (x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon (x - x_0)\ , \\ \text{avec}\ \lim_{x\to x_0} \varepsilon (x - x_0) &= 0. \\ \text{avec}\quad &: \quad a_0 = f\ \ (0)\ \text{ et } a_k = \frac{f^{\ (k)}(x_0)}{k!}\ \text{ où } 1 \leq k \leq n. \end{aligned}$$

5.2.1 Principaux développement limité

Les fonctions suivantes admettent un D.L au voisinage de 0.

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)\ \text{ avec} \\ \lim_{x\to 0} \frac{o(x^n)}{x^n} &= 0, \forall x \in \mathbb{R}. \text{(ordre n)} \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o\left(x^{2p+1}\right)\ \text{ avec} \\ \lim_{x\to 0} \frac{o\left(x^{2p+1}\right)}{x^{2p+1}} &= 0, \forall x \in \mathbb{R}. \text{(ordre 2p+1)} \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o\left(x^{2p}\right)\ \text{ avec} \\ \lim_{x\to 0} \frac{o\left(x^{2p}\right)}{x^{2p+1}} &= 0, \forall x \in \mathbb{R}. \text{(ordre 2p)} \\ (1+x)^m &= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + ... + \frac{m(m-1)...(m-p+1)}{p!} x^p + o(x^p)\,, \\ \forall x &\in \left]-1, +\infty\right[, m \in \mathbb{R} - \mathbb{N} \\ \text{et si } m &\in \mathbb{N}\ \text{alors: } (1+x)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k\ x^k. \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \end{aligned}$$

5.2.2 Propriétés des développements limités

Parité

Si f est une fonction paire (resp impaire) alors dans la partie régulière du D.L on a que les puissances paires (resp impaires).

Continuité

Si f admet un D.L d'ordre n de partie régulière $a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ alors

$$\lim_{x\to 0} f\ (x) = a_0 \text{ d'où } f \text{ est continue en 0 ou est prolongeable par continuité en 0.}$$

Dérivabilité

Si f admet un D.L d'ordre n de partie régulière $a_0+a_1x+...+a_nx^n$ $(n \geq 1)$ alors f est dérivable en 0 et $f\,'(0) = a_1$.

5.2.3 Opérations sur les développements limités

Soit f une fonction qui admet un D.L à l'ordre n de partie régulière P_n et g une autre fonction qui admet un D.L à l'ordre m de partie régulière Q_{m} avec $c = \min(n, m)$ alors:

1) **Somme:**

$f + g$ admet un D.L à l'ordre c de partie régulière $P_c + Q_c$.

2) **Produit:**

$f \times g$ admet un D.L à l'ordre c de partie régulière R_c, obtenue en ne conservant dans $P_n \times Q_m$ que les monômes de degré p avec $p \leq c$.

3) **Produit par un scalaire:**

$\lambda\cdot\ f$ admet un D.L à l'ordre n de partie régulière $\lambda \cdot P_n$.

4) **Quotient:**

$\frac{f}{g}$ admet un D.L à l'ordre s de partie régulière R_S qui est la division suivant les puissances croissantes de f par g.

5) **composée:**

$f \circ g$ admet un D.L à l'ordre c de partie régulière R_c, obtenue en ne conservant dans $P_n \circ Q_m$ que les monômes de degré p avec $p \leq c$.

Exercice 1. En utilisant la définition de la dérivée, trouver la dérivée $f\,'$de f dans les cas suivants (préciser sur quel ensemble f est dérivable):

$$a) f\ (x) = \frac{2}{(x-3)^2} \quad b)\ g\ (x) = \sqrt{1+x^2} \quad c) h\ (x) = \sin 2x.$$

Correction:

En utilisant la définition de la dérivée, trouver la dérivée $f\,'$de f dans les cas suivants (préciser sur quel ensemble f est dérivable):

$$a) f\ (x) = \frac{2}{(x-3)^2} \quad b)\ g\ (x) = \sqrt{1+x^2} \quad c) h\ (x) = \sin 2x.$$

Par définition:

$$f\,'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f\ (x) - f\ (x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f\ (x_0+h) - f\ (x_0)}{h}$$

En un point x_0 on a:

1)

$$\begin{aligned} f\,'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f\ (x_0+h) - f\ (x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2}{(x_0+h-3)^2} - \frac{2}{(x_0-3)^2}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 2 \frac{\frac{(x_0-3)^2-(x_0+h-3)^2}{(x_0+h-3)^2(x_0-3)^2}}{h} = \lim_{h \to 0} 2 \frac{\frac{2(x_0-3)h+h^2}{(x_0+h-3)^2(x_0-3)^2}}{h} \\ &= \frac{4}{(x_0-3)^3} \end{aligned}$$

Alors: $\forall x \in \mathbb{R} - \{3\}$ on a : $f\,'(x) = \frac{4}{(x-3)^3}$.

2)

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x_0^2}}{x-x_0}\\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x_0^2}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x_0^2}\right)}\\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{x+x_0}{\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x_0^2}\right)} = \frac{x_0}{\sqrt{1+x_0^2}}
\end{aligned}$$

Alors: $\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $g'(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

3)

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{\sin 2x-\sin 2x_0}{x-x_0}\\
&= \lim_{x\to x_0} 2\frac{\sin\left(\frac{2x-2x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{2x+2x_0}{2}\right)}{x-x_0}\\
&= \lim_{x\to x_0} 2\frac{\sin(x-x_0)}{x-x_0}\cdot\cos(x+x_0)\\
&= 2\cos 2x_0 \text{ , car: } \lim_{x\to x_0}\frac{\sin(x-x_0)}{x-x_0}=1
\end{aligned}$$

Alors: $\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $h'(x)=2\cos 2x$rrection:

Exercice 2. Démontrer qu'entre deux racines réelles de $e^x\sin x=1$, il existe au moins une racine réelle de $e^x\cos x=-1$.

Correction:

Démontrer qu'entre deux racines réelles de $e^x\sin x=1$, il existe au moins une racine réelle de $e^x\cos x=-1$.

$e^x\sin x=1\Leftrightarrow \sin x=e^{-x}$. Alors si on pose: $f(x)=\sin x-e^{-x}$ la fonction est continue et dérivable dans $\mathbb{R}$.

Donc si on deux racines de $f(x)\Rightarrow f(a)=f(b)=0$, d'aprés le théorème de Rolle,

$\exists c\in\mathbb{R}$ telle que: $f'(c)=0\Rightarrow \cos c+e^{-c}=0\Rightarrow \cos c=-e^{-c}\Rightarrow e^c\cos c=-1$ d'où l'existence de la racine.

Exercice 3. Calculer en utilisant la règle de l'hôpital les limites suivantes:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x},\ \lim_{x\to 1}\frac{1+\cos\pi x}{x^2-2x+1},\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 2x)}$$

Correction:

Calculer en utilisant la règle de l'hôpital les limites suivantes:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}, \lim_{x\to 1}\frac{1+\cos \pi x}{x^2-2x+1}, \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 2x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{1}=2, \lim_{x\to 1}\frac{1+\cos \pi x}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{-\pi\sin \pi x}{2x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{-\pi^2\cos \pi x}{2}=\frac{\pi^2}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-3\sin 3x}{\cos 3x}}{\frac{-2\sin 2x}{\cos 2x}}=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3x\sin 3x}{3x}}{\frac{2x\sin 2x}{2x}}=\frac{9}{4}.$$

Exercice 4. Soit la fonction :

$$f\ :\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto f\ (x)=\begin{cases} x^2\log|x\ |\ \text{ si }\ x\neq 0\\ 0\ \text{ si } x=0\end{cases}$$

1) Etudier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2) Etudier la dérivabilité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3) La fonction f est-elle de classe $C^{\ 1}$? de classe $C^{\ 2}$? Justifier.

Correction:

Soit la fonction :

$$f\ :\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto f\ (x)=\begin{cases} x^2\log|x\ |\ \text{ si }\ x\neq 0\\ 0\ \text{ si } x=0\end{cases}$$

Etudier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Remarque: Dans $\mathbb{R}^*$ la fonction est bien définie et elle est de classe $C^{\ 2}$.

Pour $x=0$:

$$\lim_{x\to 0}x^2\log|x\ |=0=f\ (0)$$

Alors f est une fonction continue en 0.

Etudier la dérivabilité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Pour $x=0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f\ (x)-f\ (0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}x\log|x\ |=0$$

Alors la fonction est dérivable en 0.

La fonction f est-elle de classe C^1? de classe C^2? Justifier.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \begin{cases} 2x\log x + x & \text{si } x > 0 \\ 2x\log -x - x & \text{si } x < 0 \end{cases} = 2x\log|x| + |x| \text{ si } x \neq 0 \\ \lim_{x\to 0} f'(x) &= \lim_{x\to 0} 2x\log|x| + |x| = 0 = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

Alors la première dérivée existe et elle est continue, donc f est de classe C^1 dans $\mathbb{R}$. Pour la classe C^2?

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} 2\log|x| + \frac{|x|}{x} = -\infty$$

Ce qui implique que f n'est pas de classe C^2 dans $\mathbb{R}$.

Exercice 5. Soit la fonction :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

1) Etudier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2) Etudier la dérivabilité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3) Les mêmes questions pour la fonction:

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

g est-elle de classe C^2?

Correction:

Soit la fonction :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

Etudier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Remarque: Dans $\mathbb{R}^*$ la fonction est bien définie et elle est dérivable.

Pour $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} x \ \sin \frac{1}{x} = 0 = f \ (0) \left(\text{ car: } -1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1 \text{ et } \lim_{x \to 0} x = 0 \right)$$

Alors f est une fonction continue en 0.

.

Pour $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f \ (x) - f \ (0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x} \text{ n'existe pas.}$$

Alors la fonction n'est pas dérivable en 0.

Les mêmes questions pour la fonction:

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto g \ (x) = \begin{cases} x^2 \ \sin \frac{1}{x} \text{ si } \ x \neq 0 \\ 0 \ \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

Etudier la continuité de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Remarque: Dans $\mathbb{R}^*$ la fonction est bien définie et elle est de classe C^2.

Pour $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} x^2 \ \sin \frac{1}{x} = 0 = f \ (0) \left(\text{ car: } -1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1 \text{ et } \lim_{x \to 0} x^2 = 0 \right)$$

Alors g est une fonction continue en 0.

.

Pour $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f \ (x) - f \ (0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0. \left(\text{ car: } -1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1 \text{ et } \lim_{x \to 0} x = 0 \right)$$

Alors la fonction est dérivable en 0.

g est-elle de classe C^1?

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x \to 0} f'(x) \text{ n'existe pas}$$

Donc g n'est pas de classe C^1, alors elle n'est pas de classe C^2.

Exercice 6. Soient:

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin x^5 \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{l} g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin \sqrt[5]{x} \end{array}$$

Montrer que f est dérivable en 0 et que g ne l'est pas .

Correction:

Soient:

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin x^5 \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{l} g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin \sqrt[5]{x} \end{array}$$

Montrer que f est dérivable en 0 et que g ne l'est pas .

$$\lim_{x \to 0} \frac{f\ (x) - f\ (0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x^5}{x} \lim_{x \to 0} x^4 \left(\frac{\sin x^5}{x^5} \right) = 0$$

Alors f est dérivable en 0.

$$\lim_{x \to 0} \frac{g\ (x) - g\,(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x^{\frac{1}{5}}}{x} \lim_{x \to 0} x^{\frac{-4}{5}} \left(\frac{\sin x^{\frac{1}{5}}}{x^{\frac{1}{5}}} \right) = +\infty$$

Alors g n'est pas dérivable en 0.

Exercice 7. Déterminer $f^{(n)}(x)$ dans les cas suivants: $a)$ $f\ (x) = \cos x$, $b)$ $f\ (x) = \sin x$, $c)$ $f\ (x) = \frac{1}{1-x}$.

Correction:

Déterminer $f^{(n)}(x)$ dans les cas suivants: $a)$ $f\ (x) = \cos x$, $b)$ $f\ (x) = \sin x$, $c)$ f

$(x) = \frac{1}{1-x}$.

$$a)\ f'(x) = -\sin x,\ f''(x) = -\cos x,\ f^{(3)}(x) = \sin x, f^{(4)}(x) = \cos x$$

$$\Rightarrow\ f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos x \text{ si } n = 4k, k \in \mathbb{N} \\ -\sin x \text{ si } n = 4k+1, k \in \mathbb{N} \\ -\cos x \text{ si } n = 4k+2, k \in \mathbb{N} \\ \sin x \text{ si } n = 4k+3, k \in \mathbb{N} \end{cases} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

$$b)\ f'(x) = \cos x,\ f''(x) = -\sin x,\ f^{(3)}(x) = -\cos x, f^{(4)}(x) = \sin x$$

$$\Rightarrow\ f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin x \text{ si } n = 4k, k \in \mathbb{N} \\ \cos x \text{ si } n = 4k+1, k \in \mathbb{N} \\ -\sin x \text{ si } n = 4k+2, k \in \mathbb{N} \\ -\cos x \text{ si } n = 4k+3, k \in \mathbb{N} \end{cases} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

$$c)\ f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2},\ f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3},\ f^{(3)}(x) = \frac{2 \cdot 3}{(1-x)^4},$$

Donc par récurrence on trouve:

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

Exercice 8.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction:

$$\begin{aligned} f_n &: [n, n+1] \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log x \end{aligned}$$

2) En déduire la nature de la suite de terme général: $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$.

Correction:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction:

$$\begin{aligned} f_n &: [n, n+1] \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log x \end{aligned}$$

La fonction: $\log x$ est continue dans $[n, n+1]$ et dérivable dans $]n, n+1[$ alors d'après le théorème des accroissement finis, il existe un $c \in]n, n+1[$ tel que:

$$\begin{aligned} f_n(n+1) - f_n(n) &= (n+1-1) f_n{}'(c) \\ &\Rightarrow \log(n+1) - \log(n) = \frac{1}{c}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

En déduire la nature de la suite de terme général: $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$

$$\begin{aligned} \log(2) - \log(1) &= \frac{1}{c_1} \leq 1, c_1 \in]1,2[\\ \log(3) - \log(2) &= \frac{1}{c_2} \leq \frac{1}{2}, c_2 \in]2,3[\\ &\cdots \\ \log(n+1) - \log(n) &= \frac{1}{c_n} \leq \frac{1}{n}, c_n \in]n, n+1[\end{aligned}$$

Par la somme des deux membres on obtient:

$$\log(n+1) - \log(1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = U_n$$

Passant à la limite on trouve:

$$\lim_{n \to +\infty} \log(n+1) = +\infty \leq \lim_{n \to +\infty} U_n \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty.$$

Exercice 9.

1) Etudier la dérivabilité de la fonction:

$$f\ (x) = x\frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x-1} \text{ si } x \neq 1\ ,\ f\ (1) = 1$$

2) Determiner a, b tels que: la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par:

$$f\ (x) = \sqrt{x} \text{ si } 0 \leq x \leq 1\ ,\ f\ (x) = ax^2 + bx + 1 \text{ si non}$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Correction:

(1) Etudier la dérivabilité de la fonction:

$$f\ \ (x) = x\frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1} \text{ si } x \neq 1\ ,\ f\ \ (1) = 1$$

Si $x \neq 1$ alors la fonction est dérivable. Pour $x = 1$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+}\frac{f\ \ (x)-f\ \ (1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1^+}\frac{x\frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x\frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}-1}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1^+}\frac{x\,(x-1)-1}{x-1} = +\infty\end{aligned}$$

Alors f n'est pas dérivable au point 1.

Determiner a, b tels que: la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par:

$$f\ \ (x) = \sqrt{x} \text{ si } 0 \leq x \leq 1\ ,\ f\ \ (x) = ax^2 + bx + 1 \text{ si non}$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Le seul problème est le point 1

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f\ \ (x)-f\ \ (1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{ax^2+bx+1-a-b-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{ax^2+bx-a-b}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)\,(ax+b+a)}{(x-1)} =$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f\ \ (x)-f\ \ (1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$$

Alors pour que f soit dérivable au point 1, en particulier sur $\mathbb{R}_+^*$. il suffit que: $2a + b = \frac{1}{2}$.

Exercice 10.

1) Montrer que:

$$\forall x \geq 0,\ x - \frac{x^2}{2} \leq \log(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

(on ne calculera qu'une seule dérivée pour chaque inégalité).

2) En déduire que :

$$\lim_{x\ \to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

Correction:

Montrer que:

$$\forall x \geq 0,\ x - \frac{x^2}{2} \leq \log(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

(on ne calculera qu'une seule dérivée pour chaque inégalité).

En effet si on pose:

$$f\ (x) = x - \frac{x^2}{2} - \log(1+x) \text{ et } g\ (x) = \log(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

On trouve:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - x - \frac{1}{1+x} = \frac{(1+x)(1-x)-1}{1+x} = \frac{-x^2}{1+x} \leq 0 \text{ si } x \geq 0 \\ &\Rightarrow f \text{ est une fonction décroissante} \Rightarrow f\ (x) \leq f\ (0) = 0, \forall x \geq 0 \end{aligned}$$

et:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{1+x} - 1 + x - x^2 = \frac{1 + (1+x)\left(-1 + x - x^2\right)}{1+x} = \frac{x^3}{1+x} \geq 0 \\ &\Rightarrow g \text{ est une fonction croissante} \Rightarrow g(x) \geq g\ (0) = 0, \forall x \geq 0 \end{aligned}$$

Conclusion:

$$\forall x \geq 0,\ x - \frac{x^2}{2} \leq \log(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

En déduire que :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

On a:

$$\begin{aligned} \forall x &\geq 0,\ x - \frac{x^2}{2} \leq \log(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \\ &\Rightarrow \forall x \geq 0,\ 1 - \frac{x}{2} \leq \frac{\log(1+x)}{x} \leq 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} \end{aligned}$$

d'après la régle d'encadrement on trouve:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

Exercice 11. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$une fonction périodique de période $T>0$.

1) On suppose que f a une limite en $+\infty$, montrer que f est constante.

2) On suppose que f monotone, montrer que f est constante. Solution d'exercices

Correction:

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$une fonction périodique de période $T>0$.

1) On suppose que f a une limite en $+\infty$, montrer que f est constante.

On a:

$$f\ (x+T)=f\ (x)\,,\forall x\in\mathbb{R}$$

On pose:

$$\lim_{x\to+\infty} f\ (x)=\alpha$$

Supposons par l'absurde qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que: $f\ (a)\neq\alpha$,la suite $a_n=a+nT$ tend vers $+\infty$ et $f\ (a_n)=f\ (a)$ ce qui donne:

$$\lim_{n\to+\infty} f\,(a_n)=f\,(a)=\alpha \text{ contradiction avec: } f\,(a)\neq\alpha\Rightarrow\forall a\in\mathbb{R}, f\,(a)=\alpha.$$

2) On suppose que f monotone, montrer que f est constante.

a) Si f est strictement croissante$\Rightarrow \forall x<y\Rightarrow f\ (x)<f\ (y)$ mais il existe un $n\in\mathbb{N}$ tel que: $x+nT>y\Rightarrow f\ (y)<f\ (x+nT)=f\ (x)\Rightarrow f\ (x)<f\ (y)<f\ (x)$ d'où la contradiction.

b) Si f est strictement décroissante$\Rightarrow \forall x<y\Rightarrow f\ (x)>f\ (y)$ mais il existe un $n\in\mathbb{N}$ tel que: $x+nT>y\Rightarrow f\ (y)>f\ (x+nT)=f\ (x)\Rightarrow f\ (x)>f\ (y)>f\ (x)$ d'où la contradiction.

Donc la fonction est constante.

Exercice 12 Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont dérivables en 0 ?

$f(x)=x$; $f(x)=|x|$; $f(x)=\sqrt{x}$; $f(x)=\cos x$; $f(x)=E(x)$; $f(x)=\frac{\sin x}{x}$; $f(x)=|x-2|$;

Exercice 13

Déterminer tous les couples de réels (a,b) tels que la fonction g définie par

$$g(x)=\begin{cases} ax^2-x+2 & si\ x\leq 1\\ \frac{b}{x} & si\ x>1\end{cases}$$

soit continue en 1; dérivable en 1.

On pose ici : $a = 1$ et $b = -1$. Calculer, si elle existe, la valeur de $\lim\limits_{x \to 1} g'(x)$, puis tracer C_g, la courbe représentative de g.

La fonction g est-elle dérivable en 1 ? Pourquoi ?

Comment se manifeste graphiquement le résultat obtenu pour la valeur de $\lim\limits_{x \to 1} g'(x)$?

Exercice14 Soit f dérivable en $x \in \mathbb{R}$, calculer $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+3h)-f(x-h)}{h}$.

Exercice 15 Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[-1, 1]$. Montrer que f est C^1 sur $]-1, 1[$.

Exercice 16. Démontrer que la dérivée d'une fonction paire est impaire et la dérivée d'une fonction impaire est paire. Expliquer le sens géometrique de ce fait.

Exercice 17. Déterminer $f'(a)$ pour $f(x) = (x - a)\varphi(x)$, où la fonction φ est continue en a. Application : déterminer $f'(1)$ pour $f(x) = (x - 1)(x - 2) \dots (x - 1000)$.

Exercice 18. Déterminer les limites suivantes en utilisant la règle de L'Hospital :

$$a) \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 4x + 3} \; ; \quad b) \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \; ; \quad c) \lim_{x \to 1} \frac{(x^2 - 1)x}{|x - 1|} \; ; \quad d) \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 3x + 2}{(x + 2)\ln(x + 1)} \; ;$$

$$e) \lim_{x \to 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} \; ; \quad f) \lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} \; ; \quad g) \lim_{x \to +\infty} x \sin \frac{1}{x} \; ; \quad h) \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} \; ;$$

$$i) \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x} \; ; \quad j) \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} \right) .$$

Exercice 19. Appliquer la formule des accroissements finis à $f(x) = \ln(|\ln x|)$ entre k et $k + 1$ ($k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$). En déduire que

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k} > \ln(\ln(n + 1)) - \ln(\ln 2)),$$

puis la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}$.

Exercice 20. Soit f une fonction 2 fois dérivable sur $[a, b]$ telle que $f(a) = f(b) = 0$, et soit $x_0 \in]a, b[$.

Déterminer le réel K tel que la fonction φ, définie sur $[a, b]$ par : $\varphi(t) = f(t) - K(t-a)(t-b)$ s'annule au point x_0.

En appliquant le théorème de Rolle à la fonction φ sur $[a, x_0]$, puis sur $[x_0, b]$ (K ayant la valeur trouvée au 1.), démontrer qu'il existe un $c \in]a, b[$ tel que : $f(x_0) = \frac{(x_0-a)(x_0-b)}{2} f''(c)$.

Exercice 21. Soit une fonction continue sur $[a, b]$ et n fois dérivable sur $]a, b[$. Sachant que f s'annule en $n+1$ valeurs réelles *distinctes* dans $[a, b]$, montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Exercice 22.Soient f et g deux fonctions de classe C^2 sur $[a, b]$, telles que $f(a) = g(a)$ et $f(b) = g(b)$ et $\forall x \in [a, b]$, $f''(x) \leq g''(x)$. Démontrer que $\forall x \in [a, b]$, $\ g(x) \leq f(x)$.

Exercice 23. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\forall x \in [0, 1]$, $f'(x) > 0$.

Montrer que $\exists \lambda > 0$ tel que $\forall x \in [0, 1]$, $f'(x) \geq \lambda$.

Si $f(0) = 0$, montrer que $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) \geq \lambda x$.

Exercice 24 On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \sqrt{1 - \frac{\sin x}{x}}$.

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^*$ et admet un prolongement par continuité en 0 dont on justifiera soigneusement l'existence.

Montrer que f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$ et calculer f' en ces points.

Montrer l'existence et déterminer la valeur de $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ et en déduire que f est dérivable à droite en 0.

Déduire à l'aide d'une propriété de parité sur $\mathbb{R}^*$ que f est dérivable à gauche en 0 sans être dérivable.

Exercice 25.

$\ln(1 + |x|)$; $f(x) = \sqrt{|x|}$; $f(x) = \frac{x}{\ln x}$.

Exercice 26. Soit f fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ si $x > 0$ et $f(x) = 0$ si $x \leq 0$.

Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (en particulier en $x = 0$).

Étudier l'existence de $f''(0)$.

Démontrer par récurrence sur n que que pour tout $x > 0$, $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}}$ ou P_n est un polynôme dont on précisera le degré. Donner P_1 et P_2.

Montrer alors que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 27. Soit P un polynôme à coefficients réels. On veut montrer que l'équation $P(x) = e^x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, n'admet qu'un nombre fini de solutions.

Soit n un entier naturel. Montrer que si l'équation $P^{(n)}(x) = e^x$ a au moins k solutions ($k \in \mathbb{N}^*$), alors l'équation $P^{(n+1)}(x) = e^x$ a au moins $k - 1$ solutions.

En déduire que l'équation $P(x) = e^x$ a au plus $deg\, P + 1$ solutions. Conclure.

Exercice 28. Sous quel angle se coupent les courbes $y = x^2$ et $x = y^2$?

Bibliographie

[1] Wieslawa J. Kaczor, Maria T. Nowak, *Problèmes d'analyse 1: Nombres réels, suites et séries*, EDP Sciences, 2008.

[2] Rhodes Rémi, *Cours d'analyse 1ère année*, 10 décembre 2008.

[3] Guy Lafaille, Christian Pauly, *Cours d'analyse 1 Licence 1er semestre*, janvier 2006.

[4] *Analyse - Exo7 - Cours de mathématiques.*

[5] Jean-Marie Monier, *Analyse : cours et 300 exercices corrigés. Tome 1, 1 ère année*, Paris : Dunod, 1999.