جامعة غليزان
كلية العلوم الإقتصادية، التجارية وعلوم التسيير
قسم علوم التسيير

مطبوعة بيداغوجية بعنوان :

إحصاء 3

موجهة لطلبة السنة الثانية ليسانس علوم التسيير، ميدان العلوم الإقتصادية، التجارية وعلوم التسيير

من إعداد

د. مزواغي جيلالي

السنة الجامعية: 2024-2025

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة غليزان

People's Democratic Republic of Algeria
Ministry of Higher Education and Scientific Research
University of Relizane

جامعة غليزان
RELIZANE UNIVERSITY

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير
المجلس العلمي للكلية
رقم 03/ج غ/ ك ع إ ت ع ت / 2025

غليزان في : 24-02-2025

مستخرج من محضر المجلس العلمي للكلية

بناءا على محضر اجتماع المجلس العلمي للكلية المؤرخ بتاريخ : 23-02-2025 في دورته الاستثنائية الأولى، صادق أعضاء المجلس العلمي للكلية على المطبوعة البيداغوجية الموسومة بـ : **"إحصاء 3"** وفق المقرر الدراسي للمقياس، موجهة لطلبة سنة الثانية ليسانس علوم التسيير ميدان العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير جامعة غليزان، وبيان المطبوعة موضح أدناه :

الرقم	المطبوعة	إعداد الاستاذ (ة)	الخبراء	ملاحظات
01	إحصاء 3	د.مزواغي جيلالي	د. خليفة الحاج جامعة مستغانم د. قارة ابراهيم جامعة غليزان	مقبولة حسب تقارير الخبرة الايجابية

سلم هذا المستخرج للاستظهار بما يسمح به القانون

رئيس المجلس العلمي

رئيس المجلس العلمي للكلية
د. مزوري الطيب

تمهيد:

يعتبر الإحصاء فرعا مهما من فروع المعرفة لأنه يدرس بشكل أساسي الناحية الكمية للظواهر باستخدام الطرق والأساليب الإحصائية المناسبة كما يعرف أيضا بالعلم الذي يهتم بجمع البيانات، تنظيمها، تلخيصها، عرضها، تحليلها والتنبؤ بقيم الظاهرة المدروسة مستقبلا، وذلك للوصول إلى نتائج مقبولة وقرارات سليمة وفق شروط معينة من أجل اتخاذ القرار المناسب.

في علم الاحتمالات والإحصائيات، توزيع الاحتمال ((Probability distribution) هو إعطاء احتمال معين لكل مجموعة جزئية قابلة للقياس من مجموعة نتائج تجربة عشوائية ما.

التوزيعات الاحتمالية تلعب دورًا هامًا في دراسة الاقتصاد، سواء كانت توزيعات احتمالية متقطعة أو متصلة. التوزيعات الاحتمالية تساعد في تحديد الاحتمالات المختلفة لحدوث نتائج معينة في الاقتصاد، مما يساعد الاقتصاديين والباحثين في اتخاذ قرارات أفضل وفهم الظواهر الاقتصادية بشكل أعمق. في القطاع المالي، على سبيل المثال، يمكن استخدام التوزيعات الاحتمالية لتقدير الاحتمالات المختلفة لسعر الأصول المالية أو تقدير الخطر المالي. كما يمكن استخدام التوزيعات الاحتمالية المتصلة في دراسة الاحتمالات المتعلقة بالاقتصاد الكلي والنمو الاقتصادي.

إن المتطلبات اللازمة لتحقيق الأهداف والكفاءات المنشودة وضمان أقصى درجة من التحصيل استوجبت تقديم الدرس على 4 محاور رئيسة:

المحور الأول: أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتقطعة.

المحور الثاني: أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتصلة.

المحور الثالث: تقارب بعض التوزيعات الاحتمالية.

المحور الرابع: المتغيرات العشوائية المزدوجة.

ولكي يستطيع الطالب استيعاب هذا الدرس بسهولة يجب أن يكون على دراية ب:

- مفاهيم أساسية حول الرياضيات.
- الإحصاء الوصفي.
- الاحتمالات.

تتمثل الأهداف التعليمية في تمكين الطالب من:

- التعرف على أهم التوزيعات الاحتمالية المتقطعة والمستمرة.
- تمكين الطالب من القدرة على تطبيق التوزيعات الاحتمالية لمعالجة المشكلات الاقتصادية.
- استيعاب المتغيرات العشوائية المزدوجة.
- التعرف على التوزيعات ذات متغيرين.

الفهرس العام

الفصل الأول: أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

1- مفاهيم عامة حول المتغيرات العشوائية المتقطعة

نسمي المتغير العشوائي أنه من النوع المنفصل أو المتقطع إذا كانت قيمه معدودة (محدود أو غير محدود لكنه معدود) (ديب، 2009، صفحة 130)، ونكتب باختصار:

$$X = \{ x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$$

1-1- دالة الكتلة الاحتمالية

إذا كان (X) متغيرا عشوائيا في فضاء العينة (Ω) وكانت القيم التي يأخذها $X = \{ x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ فإن دالة الكتلة الاحتمالية $f(x) = P(X = x)$ تحقق الشرطين:

$$\begin{cases} f(x_i) \geq 0 \\ \sum_{\mathrm{i}} f(x_i) = 1 \end{cases}$$

2-1- المتوسط الحسابي والتباين

إذا كانت دالة الكتلة الاحتمالية (x) للمتغير العشوائي المتصل (x)، فإن الوسط الحسابي والتباين يعبر عنهما بالعلاقة التالية:

$$E(x) = \mu = \sum x\, f(x)$$

$$\sigma^2 = E(x^2) - [E(x)]^2 = E(x^2) - \mu^2, \ \ E(x^2) = \sum x^2\, f(x)$$

3-1- دالة التوزيع التراكمية

أما دالة التوزيع التراكمية $F(x)$ فتعطى كما يلي:

$$F(x) = \sum_{x_i<x} f(x_i) = 1$$

وتحقق الخواص التالية:

- $\lim\limits_{\mathrm{x}\to+\infty} F(x) = 1$
- $\lim\limits_{\mathrm{x}\to-\infty} F(x) = 0$
- $P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a)$
- $F(x)$ دالة غير متناقصة ومستمرة على الأقل من اليسار (بيداوي و دوة، 2016، الصفحات 29-30).

4-1- الدالة المولدة للعزوم

إذا كانت دالة الكتلة الاحتمالية $f(x)$ للمتغير العشوائي المتصل (x)، فإن الدالة المولدة للعزوم تعرف بالشكل التالي:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{X}^{i} e^{tX} . f(x)$$

مثال: أربعة أوراق البوكر (Poker) تحمل أرقام 1-2-3-4، نسحب بطاقتين منها عشوائيا بدون إرجاع وفي آن واحد، وليكن (X) متغيرا عشوائيا في فضاء العينة (Ω) وكانت القيم التي يأخذها هي مجموع أرقام البطاقتين المسحوبتين.

يمكننا الحصول على فضاء العينة: $\Omega = \{(\Omega) = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}\}$
قيم (X) هي مجموع كل ثنائية: $X = \{3,4,5,5,6,7\}$
إذن يمكن استنتاج توزيع المتغير العشوائي(X) بحساب احتمال كل قيمة يأخذها كما هو مبين في الجدول.

الجدول رقم 01: توزيع المتغير العشوائي(X)

x	$P(X=3)$	$P(X=4)$	$P(X=5)$	$P(X=6)$	$P(X=7)$
$f(x_i)$	1/6	1/6	2/6	1/6	1/6

المصدر: من إعداد الباحث استنادا إلى معطيات المثال.

الجدول رقم 02: دالة توزيع التراكمي.

x	3	4	5	6	7	8
$F(x_i)$	0	1/6	2/6	4/6	5/6	1

المصدر: من إعداد الباحث استنادا إلى معطيات المثال.

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & if\ x < 3 \\ 1/6 & if\ 3 \leq x < 4 \\ 2/6 & if\ 4 \leq x < 5 \\ 4/6 & if\ 5 \leq x < 6 \\ 5/6 & if\ 6 \leq x < 7 \\ 1 & if\ x > 7 \end{cases}$$

2- توزيع بيرنولي (Bernoulli Distribution)

2-1- مفاهيم أساسية:

توزيع بيرنولي هو توزيع احتمالي وضع من طرف باحث الرياضيات سويسري "جيمس بيرنولي" الذي تناوله في كتابه في القرن 17م، يصف نتيجة تجربة ثنائية تحدث لمرة واحدة (تجربة تحصل فقط نتيجتان محتملتان، مثل نجاح/فشل، صورة/كتابة، ضوء/ظلام،... إلخ).

توزيع بيرنولي يحدث في تجربة معينة نتائجها محددة بالنجاح أو الفشل وليكن المتغير (X) يأخذ القيمة (0) إذا كانت النتيجة فشلاً، و القيمة (1) إذا كانت النتيجة نجاحاً.

2-2- خصائص توزيع بيرنولي:

إن دالة كتلة الاحتمال $f(x)$ في هذه الحالة هي:

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} p^{x}(1-p)^{1-x} & x = 0\,,1 \\ 0 & x \neq 0\,,1 \end{cases}$$

حيث:

- $P(X = x)$: احتمال أن يكون المتغير العشوائي (X) يأخذ القيمة (x).
- (p): احتمال النجاح.
- $(1-p)$: احتمال الفشل ويرمز له كذلك بـ(q).

نقول بأن معلمة توزيع بيرنولي هي قيمة احتمال النجاح (p) ونرمز لهذا التوزيع بالرمز:

$$\boxed{X \sim Ber(p)}$$

مثال: عند رمي قطعة نقدية متجانسة ذات وجه وكتابة، لمرة واحدة فإن احتمال ظهور الصورة مساو لاحتمال ظهور الكتابة، لذا يمكن القول:

احتمال ظهور الصورة هو $p = 50\%$ أو $p = 0.5$

احتمال عدم ظهور الصورة هو $q = 50\%$ أو $q = 0.5$

2-3- التوقع الرياضي والتباين والدالة المولدة للعزوم:

أ) **التوقع الرياضي:**

نحاول حساب التوقع الرياضي بناء على العلاقات الرياضية المعروفة، نعلم أن: $\mu = E(x)$

$$\mu = E(x) = \sum_{X}^{i} X\, f(x) = \sum_{X=0}^{i=1} X\, f(x)$$

نقوم بتعويض: $f(x) = p^{x}(1-p)^{1-x}$

$$\mu = E(x) = \sum_{X=0}^{i=1} X\,(p^{x}(1-p)^{1-x}) = 0(p^{0}(1-p)^{1-0}) + 1(p^{1}(1-p)^{1-1})$$
$$= 0 + p$$

$$\boxed{\mu = E(x) = p}$$

ب) **التباين:**

$$\sigma_x^2 = E(x^2) - [E(x)]^2$$

نعلم أن: $E(x) = p$ وبالتالي فإن: $[E(x)]^2 = p^2$

كذلك من جهة أخرى: $E(x^2) = p$ لأن:

$$E(x^2) = \sum_{X=0}^{i=1} X^2\,(p^{x}(1-p)^{1-x}) = 0^2(p^{0}(1-p)^{1-0}) + 1^2(p^{1}(1-p)^{1-1}) = p$$

$$\sigma_x^2 = E(x^2) - [p]^2$$

إذن:

$$\sigma_x^2 = E(x^2) - [E(x)]^2$$
$$\sigma_x^2 = p - p^2$$

نقوم بتبسيط العلاقة على أساس p عامل مشترك، فنجد:

$$\sigma_x^2 = p(1-p)$$

نعلم أن: $(1-p) = q$

التباين في توزيع بيرنولي يعطى على أساس العلاقة:

$$\boxed{\sigma_x^2 = pq}$$

أما الانحراف المعياري:

$$\boxed{\sigma_x = \sqrt{pq}}$$

ج) **الدالة المولدة للعزوم:**

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{X}^{i} e^{tX}.f(x) = \sum_{X=0}^{i=1} e^{tX}.p^{x}(1-p)^{1-x}$$

$$= e^{0}.p^{0}(1-p)^{1-0} + e^{t}.p^{1}(1-p)^{1-1} = (1-p) + e^{t}p$$

$\boxed{M_X(t) = pe^{t} + q}$ وهي الدالة المولدة للعزوم (بداوي، 2018، صفحة 141).

د) **دالة كتلة الاحتمال:**

احتمال النجاح فإن المتغير العشوائي يأخذ القيمة واحد $(x = 1)$ وبالتالي فإن دالة كتلة الاحتمال تساوي $f(x) = p = 0.5$، وإذا كنا بصدد البحث عن احتمال الفشل فإن المتغير العشوائي يأخذ القيمة (0)، تصبح دالة كتلة الاحتمال $f(x) = 1 - p = q = 0.5$، ونكتب:

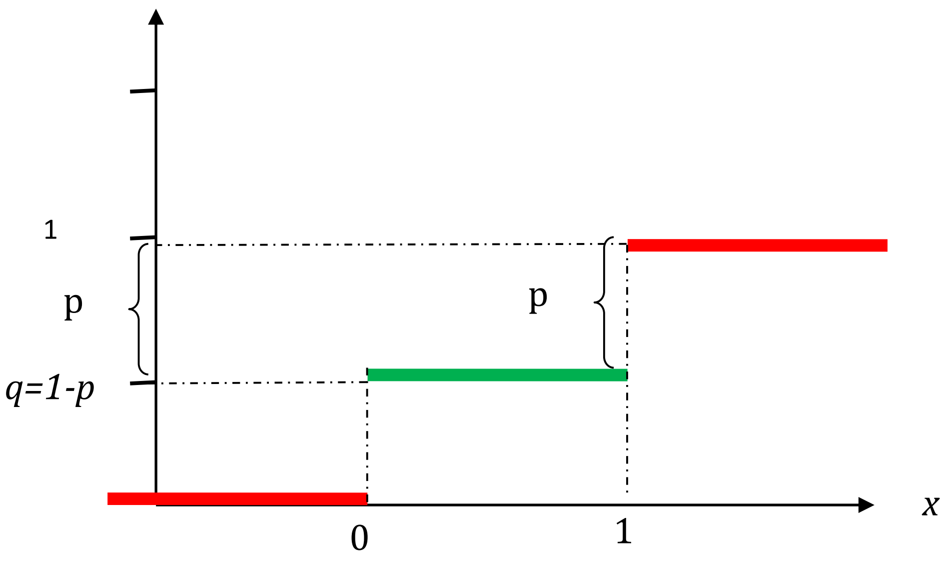
$$f(x) = \begin{cases} p & x = 1 \\ 1 - p = q & x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0.5 & x = 1 \\ 1 - 0.5 = 0.5 & x = 0 \end{cases}$$

ه) **دالة التوزيع الاحتمالي:**

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & if\ x < 0 \\ q & if\ 0 \leq x < 1 \\ 1 & if\ x > 1 \end{cases}$$

الشكل رقم 01: تمثيل دالة التوزيع الاحتمالي $F(x)$



المصدر: من إعداد الباحث استنادا إلى دالة التوزيع الاحتمالي.

2-4- مثال تطبيقي:

إذا علمت أن معلمة توزيع بيرنولي تساوي 0.65

- أوجد التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري.
- أحسب احتمال $P(X = 0)$

الحل:

نقول بأن معلمة توزيع بيرنولي هي قيمة احتمال النجاح $(p = 0.65)$ ونرمز لهذا التوزيع بالرمز:

$$\boxed{X \backsim Ber(p)}$$

$$\boxed{X \backsim Ber(0.65)}$$

التوقع الرياضي: $\boxed{\mu = E(x) = p = 0.65}$

بما أن $p = 0.65$ *فإن:* $q = 0.35$

التباين في توزيع بيرنولي يعطى على أساس العلاقة:

$$\boxed{\sigma_x^2 = pq = 0.65 * 0.35 = 0.2275}$$

أما الانحراف المعياري:

$$\boxed{\sigma_x = \sqrt{pq} = \sqrt{0.2275} = 0.477}$$

- أحسب احتمال $P(X = 0)$

$$f(x) = P(X = x) = p^x(1-p)^{1-x}$$

$$f(0) = P(X = 0) = 0.65^0(1-0.65)^{1-0}$$

$$P(X = 0) = 0.35 = q$$

3- توزيع ذو الحدين (Binomial Distribution)

3-1- مفاهيم أساسية

إذا كررنا محاولات مستقلة لتجربة بيرنولي ذات نتيجتين (فشل ونجاح)، وكان احتمال النجاح هو: p وكان احتمال الفشل هو: q، ثم حاولنا معرفة عدد مرات النجاح دون إعطاء أهمية لترتيبه فإننا نكون أمام تجربة تتوزع توزيعا ثنائيا (توزيع ذو الحدين) علما بأن p+q=1 (النجار، 2015، صفحة 105).

نقول أن المتغير العشوائي (X) يتبع التوزيع ذو الحدين إذا توفرت في التجربة الخصائص التالية:

- استقلال المحاولات عن بعضها، أي نحصل على احتمال نجاح أو احتمال فشل.
- المحاولات متماثلة غير منحازة، ومستقلة عن بعضها (السقاف، 2020، صفحة 104).
- p+q=1

3-2- خصائص توزيع ذو الحدين:

إذا كان X متغير عشوائي يمثل عدد مرات نجاح الحدث عند إجراء تجربة بيرنولي لمرات متعددة تساوي n مرة، فانه يأخذ القيم X={0,1,2,3,…,n} باحتمال قدره $P(X = x)$ يحسب كالتالي (Sochi, 2023, p. 89):

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} C_n^x p^x(1-p)^{n-x} & x = 0,1,2,\dots,n \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

$$P(X = x) = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}$$

حيث: $C_n^x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$

- (n) هو عدد مرات تكرار التجربة؛
- $P(X = x)$: احتمال أن يكون المتغير العشوائي (X) يأخذ القيمة (x)؛
- (p): احتمال النجاح.
- $(1 - p)$: احتمال الفشل ويرمز له كذلك بـ(q).

ونقول أن قانون احتمال (X) هو ثنائي الحدين ذا الوسيطين أو المعلمتين (n) و (p) ونرمز له بالرمز:

$$\boxed{X \sim Bin(n\,,p)}$$

مثال: عند رمي قطعة نقدية متجانسة ذات وجه وكتابة، لـ5 مرات ونترقب ظهور الصورة. رمي زهرة النرد ثلاث مرات وننتظر ظهور الوجه رقم 6.

3-3- التوقع الرياضي والتباين والدالة المولدة للعزوم:

في هذا التوزيع، يجب أن n يكون عدد صحيحًا موجبًا، وأن تكون قيمة p بين 0 و 1. إذا كان X يمثل تكرار تجربة بيرنولي لـn مرة، فيمكن الحصول على التوقع الرياضي، التبيان والدالة المولدة للعزوم كالتالي:

أ) **التوقع الرياضي:**

$$\boxed{\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = np}$$

ب) **التباين:**

$$\boxed{\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_x^2 = np(1-p) = npq}$$

أما الانحراف المعياري:

$$\boxed{\sigma_x = \sqrt{npq}}$$

ج) **الدالة المولدة للعزوم:**

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \prod_{i=1}^{n} E(e^{tX_i})$$

$\boxed{M_X(t) = (pe^t + q)^n}$ وهي الدالة المولدة للعزوم (Dodson & Arwini, 2008, p. 3).

د) **دالة كتلة الاحتمال:**

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} C_n^x p^x (1-p)^{n-x} & x = 0,1,2,\dots,n \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

3-4- أمثلة تطبيقية:

3-4-1- المثال الأول:

إذا كان (X) متغير عشوائي يتبع توزيع ذو الحدين، في تجربة تكررت 10 مرات، وp هو احتمال النجاح.

من أجل $X \sim Bin(10\,,0.25)$ و $X \sim Bin(10\,,0.50)$ ثم من أجل: $X \sim Bin(10\,,0.8)$

- احسب الاحتمالات
- الاحتمالية في الحالات الثلاثة.
- الحل: لقيم مختلفة لـ x (الذي يمثل عدد النجاحات). ثم كون جدول التوزيع ذو الحدين.

أرسم شكل دالة الكتلة

لحساب الاحتمالات نطبق القانون: $P(X = x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}$

لدينا $p = 0.25$

$$P(X = 0) = C_{10}^{0} * 0.25^{0} * (1-0.25)^{10-0} = 0.0977$$
$$P(X = 1) = C_{10}^{1} * 0.25^{1} * (1-0.25)^{10-1} = 0.2930$$
$$P(X = 2) = C_{10}^{2} * 0.25^{2} * (1-0.25)^{10-2} = 0.3506$$
$$P(X = 3) = C_{10}^{3} * 0.25^{3} * (1-0.25)^{10-3} = 0.2337$$
$$P(X = 4) = C_{10}^{4} * 0.25^{4} * (1-0.25)^{10-4} = 0.0923$$

و هكذا نقوم بالحساب إلى غاية $P(X = 10)$

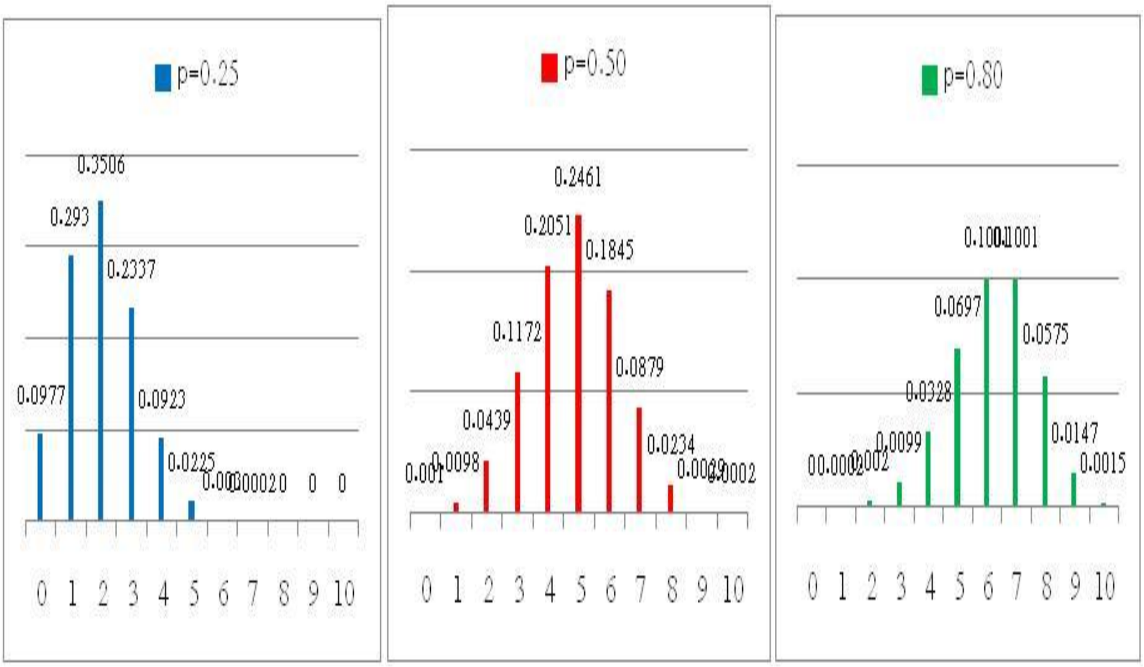
ثم نقوم بحساب الاحتمالات من أجل $p = 0.50$ وكذلك $p = 0.80$، تحصلنا على النتائج التالية.

الجدول رقم 03: دالة الكثافة الاحتمالية.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p = 0.25$											
$P(X = x)$	0.0977	0.293	0.3506	0.2337	0.0923	0.0225	0.003	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
$p = 0.50$											
$P(X = x)$	0.001	0.0098	0.0439	0.1172	0.2051	0.2461	0.1845	0.0879	0.0234	0.0029	0.0002
$p = 0.80$											
$P(X = x)$	0.0000	0.0002	0.002	0.0099	0.0328	0.0697	0.1001	0.1001	0.0575	0.0147	0.0015

المصدر: من إعداد الباحث استنادا إلى معطيات المثال التطبيقي 3-4

الشكل رقم 02: تمثيل دالة الكتلة الاحتمالية للتوزيع ذو الحدين.



المصدر: من إعداد الباحث بالاعتماد على معطيات الجدول رقم 01.

تُظهر الصورة الخصائص المختلفة للتوزيع الثنائي بناءً على قيمة احتمال النجاح (p):

- إذا كان $p = 0.5$، فإن التوزيع الثنائي يُوصف بأنه "متماثل".
- إذا كان $p < 0.5$، فإن التوزيع الثنائي يُوصف بأنه "موجب الالتواء".
- إذا كان $p > 0.5$، فإن التوزيع الثنائي يُوصف بأنه "سالب الالتواء".

3-4-2- المثال الثاني:

مجموعة رياضيين بصدد القفز الطويل، إذا كان احتمال نجاح الرياضي في تحقيق قفزة تفوق 6 أمتار هو 75%، وتم اختيار 5 رياضيين عشوائيا.

المطلوب:

- تكوين جدول التوزيع ذو الحدين.
- حساب الوسط الحسابي، التباين والانحراف المعياري.
- إيجاد احتمالات التالية:
- (أ) نجاح 3 رياضيين
- (ب) فشل 5 رياضيين
- (ج) نجاح رياضيين على الأقل في اجتياز 6 أمتار.

الحل:

- تكوين جدول التوزيع الثنائي (توزيع ثنائي):

لتكوين جدول التوزيع نطبق القانون:

$$P(X=x)=\begin{cases} C_n^x P^x(1-p)^{n-x} & x=0,1,2,\dots,n \\ 0 & else\ where. \end{cases}$$

p = احتمال نجاح الرياضي في تحقيق قفزة تفوق 6 أمتار = 0.75

n = عدد الرياضيين المختارين = 5

الجدول رقم 04: جدول التوزيع الثنائي.

x	P(X=x)
0	0.002
1	0.0375
2	0.1875
3	0.3125
4	0.3125
5	0.148

المصدر: من إعداد الباحث بالاعتماد على معطيات المثال.

- حساب الوسط الحسابي، التباين والانحراف المعياري:

الوسط الحسابي: $(\mu) = np = 5 \times 0.75 = 3.75$

التباين: $(\sigma^2) = np(1-p) = 5 \times 0.75 \times (1-0.75) = 0.9375$

الانحراف المعياري: $(\sigma) = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0.9375} = 0.9688$

- إيجاد الاحتمالات المطلوبة:

(أ) احتمال نجاح 3 رياضيين:

$$P(X = 3) = 0.3125$$

(ب) احتمال فشل 5 رياضيين:

$$P(X = 0) = 0.0020$$

(ج) احتمال نجاح رياضيين على الأقل في اجتياز 6 أمتار:

$$P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$$

$$P(X \geq 1) = 0.0375 + 0.1875 + 0.3125 + 0.3125 + 0.1480 = 0.9980$$

3-4-3- المثال الثالث:

يحاول مجموعة من الغطاسين التنافس على درجة التحمل تحت الماء، إذا كان احتمال خروج الغطاس من ماء المسبح قبل دقيقتين هو 80%، تم اختيار 6 غطاسين عشوائيا.

- أحسب أهم مقاييس النزعة المركزية والتشتت.
- أوجد الاحتمالات التالية:
- خروج غطاسين اثنين من ماء المسبح.
- استمرار 3 غطاسين حتى النهاية.
- خروج 5 غطاسين على الأقل.

الحل:

- أهم مقاييس النزعة المركزية والتشتت:

الوسط الحسابي $(\mu) = np = 6 \times 0.8 = 4.8$

التباين $(\sigma^2) = np(1-p) = 6 \times 0.8 \times (1-0.8) = 1.2$

الانحراف المعياري $(\sigma) = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1.2} = 1.0954$

- احتمالات الأحداث المطلوبة:

(أ) احتمال خروج غطاسين اثنين من ماء المسبح:

$$P(X = 2) = C_6^2 * (0.8)^2 * (0.2)^4 = 0.2048$$

(ب) احتمال استمرار 3 غطاسين حتى النهاية:

$$P(X = 3) = C_6^3 * (0.8)^3 * (0.2)^3 = 0.2304$$

(ج) احتمال خروج 5 غطاسين على الأقل:

$$P(X \geq 5) = P(X = 5) + P(X = 6)$$

$$= C_6^5 * (0.8)^5 * (0.2)^1 + C_6^6 * (0.8)^6 * (0.2)^0$$

$$= 0.0512 + 0.0082 = 0.0594$$

4-4-3- المثال الرابع:

في مسابقة للرماية، تم اختيار 12 راميا بشكل عشوائي للمشاركة. وتم تحديد أن احتمال أن ينجح أي رام في إصابة الهدف هو 0.7.

المطلوب:

- احسب الوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري لعدد الرماة الذين سينجحون في إصابة الهدف.

- احسب الاحتمالات التالية:
- احتمال أن ينجح 8 رماة في إصابة الهدف.
- احتمال أن ينجح 9 رماة على الأقل في إصابة الهدف.
- احتمال أن ينجح 6 رماة على الأكثر في إصابة الهدف.
- احتمال أن ينجح 7 رماة في إصابة الهدف.

الحل:

- حساب الوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري:

الوسط الحسابي: $(\mu) = np = 12 * 0.7 = 8.4$

التباين: $(\sigma^2) = np(1-p) = 12 * 0.7 * (1-0.7) = 2.52$

الانحراف المعياري: $(\sigma) = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2.52} = 1.5874$

- احتساب الاحتمالات المطلوبة:

احتمال أن ينجح 8 رماة في إصابة الهدف:

$$P(X=8) = C_{12}^{8} * (0.7)\text{^}8 * (0.3)\text{^}4 = 0.2365$$

احتمال أن ينجح 9 رماة على الأقل في إصابة الهدف:

$$P(X \geq 9) = P(X=9) + P(X=10) + P(X=11) + P(X=12)$$
$$= 0.1580 + 0.0760 + 0.0182 + 0.0022 = 0.2544$$

احتمال أن ينجح 6 رماة على الأكثر في إصابة الهدف:

$$P(X \leq 6) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) + P(X=6)$$
$$= 0.0000 + 0.0001 + 0.0011 + 0.0061 + 0.0210 + 0.0513 + 0.0901 = 0.1697$$

احتمال أن ينجح 7 رماة في إصابة الهدف:

$$P(X=7) = C_{12}^{7} * (0.7)^7 * (0.3)^5 = 0.1917$$

3-4-5- المثال الخامس:

في مؤسسة للنقل العمومي للبضائع، تم اخضاع 10 سائقين بشكل عشوائي للفحص والاختبار، وكان احتمال وجود سائق ارتكب حادث من قبل هو 40%.

المطلوب:

- احسب الوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري لعدد السائقين الذين لديهم سجل حوادث.
- احسب الاحتمالات التالية:
- احتمال أن يكون لدى 6 سائقين سجل حوادث.
- احتمال أن يكون لدى 7 سائقين على الأقل سجل حوادث.
- احتمال أن يكون لدى 4 سائقين على الأكثر سجل حوادث.
- قم بإنشاء جدول التوزيع لعدد السائقين الذين لديهم سجل حوادث.

الحل:

- احتساب الوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري:

الوسط الحسابي: $(\mu) = np = 10 * 0.4 = 4$

التباين: $(\sigma^2) = np(1-p) = 10 * 0.4 * (1-0.4) = 2.4$

الانحراف المعياري: $(\sigma) = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2.4} = 1.5492$

- احتساب الاحتمالات المطلوبة:

احتمال أن يكون لدى 6 سائقين سجل حوادث:

$$P(X=6) = C_{10}^{6} * (0.4)^6 * (0.6)^4 = 0.0864$$

احتمال أن يكون لدى 7 سائقين على الأقل سجل حوادث:

$$P(X \geq 7) = P(X=7) + P(X=8) + P(X=9) + P(X=10)$$
$$= 0.0288 + 0.0048 + 0.0003 + 0.0000 = 0.0339$$

احتمال أن يكون لدى 4 سائقين على الأكثر سجل حوادث:

$$P(X \leq 4) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$$
$$= 0.0046 + 0.0153 + 0.0511 + 0.0853 + 0.1024 = 0.2587$$

جدول التوزيع:

الجدول رقم 05: جدول التوزيع الثنائي.

احتمالية	عدد السائقين بسجل حوادث
0.0046	0
0.0153	1
0.0511	2
0.0853	3
0.1024	4
0.128	5
0.0864	6
0.0288	7
0.0048	8
0.0003	9
0	10

المصدر: من إعداد الباحث بالاعتماد على معطيات المثال.

4- توزيع بواسون (Poisson Distribution)

كان (Simon Denis Poisson (1781-1840 عالم رياضيات فرنسيًا مشهورًا طور مفهوم التوزيع التكراري في عام 1837 وسمي باسمه "توزيع بواسون"، حيث تظل احتمالات النجاح أو الفشل ثابتة طوال العملية بأكملها (Gupta, 2023, p. 25.17).

4-1- مفاهيم أساسية

وفقًا لقانون بواسون، فإن الأحداث العشوائية (مثل وقوع الزلازل أو المكالمات الهاتفية أو الأمراض المعدية) يمكن أن تُصف بشكل دقيق باستخدام توزيع بواسون. يأتي هذا القانون من فرضية مهمة تُسمى "الفرضية

البواسونية"، والتي تفترض أن معدل حدوث الأحداث هو ثابت على مدار فترة زمنية محددة (بيداوي و دوة، 2016، الصفحات 54-55).
وهو أحد التوزيعات الإحصائية المنفصلة، وهو توزيع لا نهائي قابل للعد. له استعمالات محددة في الظواهر المتعلقة بالزمن (معتوق، 2015، صفحة 33)، مثل حساب احتمالات عدد السفن التي ترسو في ميناء ما في وقت محدد (في الساعة، في الدقيقة، في اليوم، ...الخ)، أو حساب عدد الزبائن الوافدين إلى مصلحة حجوزات السفر خلال وحدة زمنية...

4-2- خصائص توزيع بواسون:

وفقًا لقانون بواسون، فإن الاحتمالية لحدوث عدد معين من الأحداث في فترة زمنية محددة يمكن حسابها باستخدام الصيغة التالية:

$$P(X) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^X}{X!} \dots\dots\dots \forall X = 1,2,3,\dots,\infty$$

ونكتب: $\boxed{X_i \sim P(\lambda)}$

$e = 2.718$ ثابت

λ هي معلمة (Parameter).

الشروط اللازمة لتطبيق توزيع بواسون هي:

- استقلال المحاولات عن بعضها؛
- ان يحتمل الحدث نتيجتين (نجاح أو فشل)؛
- حجم العينة (n) كبير واحتمال النجاح (p) ضئيل (السقاف، 2020، صفحة 105).

يمكن حساب الاحتمالات حسب توزيع بواسون كما هو مبين في الجدول.

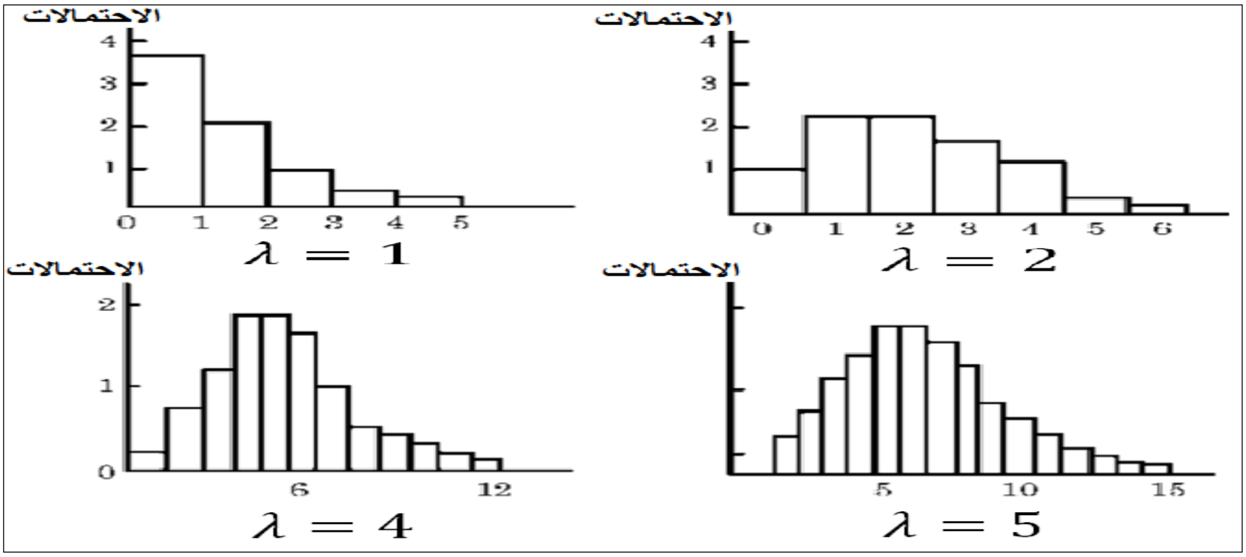
الجدول رقم 06: دالة الكثافة الاحتمالية.

x_i	0	1	2	3	…	X
$P(X = x)$	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{e^{-\lambda}.\lambda^2}{2}$	$\frac{e^{-\lambda}.\lambda^3}{6}$	…	$\frac{e^{-\lambda}.\lambda^X}{X!}$

المصدر: من إعداد الباحث.

يعد توزيع بواسون نموذجًا احتماليًا مفيدًا حيث تكون المعلمة الوحيدة المطلوبة هي (λ) متوسط الحدث، ويمكن استخلاص بقية خصائص التوزيع من هذه المعلمة. يوضح الشكل كيف تؤثر التغيرات في المتوسط (λ) على شكل وموضع منحنى توزيع بواسون. فمع زيادة قيمة المتوسط (λ)، ينتقل التوزيع إلى اليمين.

الشكل رقم 03: تمثيل دالة الكتلة الاحتمالية لتوزيع بواسون بمتوسطات مختلفة.



Source: (Gupta, 2023, p. 25.29)

<u>4-3- التوقع الرياضي والتباين والدالة المولدة للعزوم:</u>

أ) <u>التوقع الرياضي:</u>

القيمة المتوسطة أو المتوقعة لتوزيع بواسون هي (λ). وتمثل متوسط الأحداث على المدى الطويل خلال فترة زمنية إذا تم أخذ العديد من العينات العشوائية (Black, 2024, p. 150).

المتوسط $\mu = \lambda$

التوقع الرياضي: $E(X) = \lambda$

يمكن البرهنة عليها كما يلي:

$$\mu = E[X] = \sum_{x=0}^{+\infty} x\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{x}}{(x-1)!}$$

نجري تبديلا للمتغير وذلك بوضع $(x-1) = y$

$$\mu = E[X] = e^{-\lambda}\sum_{y=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{y+1}}{y!} = e^{-\lambda} * \lambda^{(y+1)} = \lambda$$

وبالتالي فإن التوقع الرياضي: $E(X) = \lambda$ مبرهنة (بداوي، 2018، صفحة 149).

ب) <u>التباين والانحراف المعياري:</u>

التباين: $\sigma^2 = \lambda$

الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{\lambda}$

يمكن البرهنة عليها كما يلي:

$$\sigma_x^2 = E(x^2) - [E(x)]^2$$

نعلم أن: $E(x) = \lambda$ وبالتالي فإن: $[E(x)]^2 = \lambda^2$

كذلك من جهة أخرى:

$$E(x^2) = E[x(x-1)x] = E[x(x-1)] + E(x) = \sum_{X=0}^{\infty} x(x-1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} + \lambda$$

$$= \lambda^2\left(e^{-\lambda}\right)\sum_{X=2}^{\infty}\frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} + \lambda$$

نجري تبديلا للمتغير وذلك بوضع $(x-2) = y$

$$E(x^2) = \lambda^2\left(e^{-\lambda}\right)\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\lambda^y}{y!} + \lambda = \lambda^2\left(e^{-\lambda}\right)\left(e^{\lambda}\right) + \lambda = \lambda^2 + \lambda$$

$$\sigma_x^2 = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2$$

$$\boxed{\sigma_x^2 = \lambda}$$

إذن $\boxed{\sigma_x^2 = \lambda}$ وهو ما تم البرهنة عليه (امطير، 2020، صفحة 193).

ج) الدالة المولدة للعزوم:

كما ويمكن استخراج الدالة المولدة الاحتمالية لتوزيع بواسون كما يلي:

$$M(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

4-4- أمثلة تطبيقية:

4-4-1- المثال الأول:

إذا كان متوسط عدد الأيام التي يمنع فيها خروج سفن الصيد بسبب العاصفة، هو 3 أيام خلال شهر جانفي من كل سنة.

فما هو احتمال أن يمنع خروج سفن الصيد لمدة 6 أيام شهر جانفي من السنة المقبلة؟

الحل:

$$P(X) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^X}{X!}$$

$$e = 2.718$$

متوسط عدد الأيام التي يمنع فيها خروج سفن الصيد بسبب العاصفة $\lambda = 3$

قانون التوزيع الاحتمالي $P(X = x_i) = \frac{e^{-3}.3^X}{X!}$

عدد الأيام التي يمنع فيها خروج سفن الصيد بسبب العاصفة المبحوث عنها $X = 6$

$$P(X = 6) = \frac{e^{-3}.3^6}{6!} = \frac{0.0498 * 729}{720} = \frac{36.3042}{720} = 0.0504$$

إذن تقريبا احتمال 5% يمنع خروج سفن الصيد بسبب العاصفة لمدة 6 أيام شهر جانفي من السنة المقبلة.

4-4-2- المثال الثاني:

إذا كان متوسط عدد الأيام التي تتعرض فيها منطقة معينة لهطول الأمطار في شهر مارس من كل سنة هو 4 أيام، فما هو احتمال أن تتعرض المنطقة لهطول الأمطار لمدة 7 أيام في شهر مارس من السنة المقبلة؟

الحل:

$$P(X) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^X}{X!}$$

$e = 2.718$

متوسط عدد الأيام التي تتعرض فيها منطقة معينة لهطول الأمطار هو $\lambda = 4$

قانون التوزيع الاحتمالي $P(X = x_i) = \frac{e^{-4}.4^X}{X!}$

احتمال أن تتعرض المنطقة لهطول الأمطار لمدة 7 أيام في شهر مارس من السنة المقبلة المبحوث عنها

$X = 7$

$$P(X = 7) = \frac{e^{-4}.4^7}{7!} = 0.593$$

إذن تقريبا احتمال5.93% أن تتعرض المنطقة لهطول الأمطار لمدة 7 أيام في شهر مارس من السنة المقبلة.

<u>3-4-4- المثال الثالث:</u>

إذا كان متوسط عدد الزلازل التي تحدث في منطقة معينة خلال شهر معين هو 2 زلزال، فما هو احتمال أن تحدث 5 زلازل في نفس الشهر؟

الحل:

$$P(X) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^X}{X!}$$

$e = 2.718$

متوسط عدد الزلازل هو $\lambda = 2$

قانون التوزيع الاحتمالي $P(X = x_i) = \frac{e^{-2}.2^X}{X!}$

عدد الزلازل التي تحدث خلال شهر المبحوث عنها $X = 5$

$$P(X = 5) = \frac{e^{-2}.2^5}{5!} = 0.361$$

إذن تقريبا احتمال 3.61% أن تتعرض المنطقة لخمسة زلازل في الشهر الواحد.

5- التوزيع الهندسي (Hypergeometric Distribution)

5-1- مفاهيم أساسية

ترتكز نظرية التوزيع الهندسي على نفس مبدأ تجربة بيرنولي التي تحتمل نتيجتين متضادتين (نجاح / فشل)، إلا أن التوزيع الهندسي يأخذ دراسة المتغير العشوائي الذي يمثل عدد مرات تكرار تجربة برنولي حتى يتم الحصول على أول نجاح بعد عدد من المحاولات الفاشلة (Tanveer, 2023, p. 112). المحاولات الفاشلة قد تكون 0 في حالة النجاح في المرة الأولى.

وبالتالي فإن التوزيع الهندسي هو حالة خاصة من توزيع ذي الحدين، وينتج من تكرار محاولة برنولي المستقلة، إلى غاية حدوث أول نجاح، باحتمال نجاح قدره (p).

5-2- خصائص التوزيع الهندسي:

مما سبق يمكن القول بأن الحصول على نتيجة "نجاح" في المرة الأولى معناه المتغير العشوائي x=1، أما إذا كانت المحاولة الأولى فاشلة والمحاولة الثانية ناجحة فهذا يعني أن x=2 وهكذا ...، وبالتالي فإن المتغير العشوائي (x) حسب قانون التوزيع الهندسي يأخذ القيم : $X = \{1,2,3, \ldots, \infty\}$.

تتمثل الشروط اللازمة لتطبيق التوزيع الهندسي في:

- استقلال المحاولات عن بعضها؛
- أن يحتمل الحدث نتيجتين (نجاح أو فشل)؛
- احتمالية النتيجة ستظل ثابتة طوال التجارب، أي أن $P(S) = p$. (Tanveer, 2023, p. 113)

إذا كانت هناك تجارب عشوائية مستقلة عن بعضها، تحتمل نتيجتين متضادتين باحتمال نجاح (p) واحتمال فشل (q) حيث $0 < p < 1$، بتكرار مستمر واحدة تلو الأخرى ويتوقف إلى غاية حدوث أول نجاح، وكان المتغير العشوائي (x) يمثل عدد مرات تكرار التجربة حتى يتم الحصول على أول نجاح، فإن دالة الاحتمال تكون على الشكل التالي:

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} p(q)^{(x-1)} & \forall X = \{1,2,3, \ldots, \infty\} \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

يمكن كذلك كتابة دالة الاحتمال وفق قانون التوزيع الهندسي كما يلي:

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} p(1-p)^{(x-1)} & \forall X = \{1,2,3, \ldots, \infty\} \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

ونكتب:

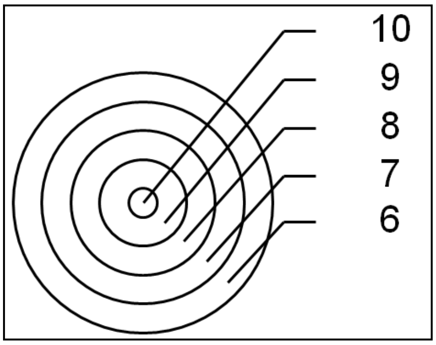
$$\boxed{X \backsim G(\mathrm{P})}$$

مثال:

في حصة الرماية، يقوم الجنود بالتصويب على الدَّريئة التي تأخذ شكل دائري، مقسمة إلى مناطق، وكل منطقة لها تنقيط، من مركزها بـ 10 نقاط ثم تتناقص كلما اتجهنا نحو محيطها بـ9-8-7-6 نقاط . مثلما هو مبين في الشكل رقم 4.

نفترض أن (x) متغير عشوائي يمثل عدد المحاولات للتسديد على (الدَّريئة) إلى غاية إصابة الهدف 10.

الشكل رقم 04: شكل الدَّريئة.



المصدر: من إعداد الباحث.

إذا كان احتمال إصابة المنطقة 10 هو (p) واحتمال عدم إصابة المنطقة 10 هو $(q = 1-p)$، فإن التوزيع الذي سيخضع له المتغير العشوائي المتقطع (x) سيكون التوزيع الهندسي (Geometric distribution) وبدالة كتلة الاحتمال:

$$P(X = x) = \quad p(q)^{x-1} \qquad x = 1 , 2 , 3, \ldots$$

يمكن تمثيل توزيع الهندسي عن طريق إعطاء 3 أمثلة:

- $n = 10 \qquad x = 1 , 2 , 3, \ldots 10 \qquad p = 0.2$
- $n = 10 \qquad x = 1 , 2 , 3, \ldots 10 \qquad p = 0.4$
- $n = 10 \qquad x = 1 , 2 , 3, \ldots 10 \qquad p = 0.8$

نقوم بحساب الاحتمالات كما يلي:

$$P(X = 1) = \quad 0.2(0.8)^{1-1} \quad = 0.2$$
$$P(X = 2) = 0.2 * (1 - 0.2)^{2-1} = 0.16$$
$$P(X = 3) = 0.2 * (1 - 0.2)^{3-1} = 0.128$$
$$P(X = 4) = 0.2 * (1 - 0.2)^{4-1} = 0.1024$$
$$P(X = 5) = 0.2 * (1 - 0.2)^{5-1} = 0.08192$$
$$P(X = 6) = 0.2 * (1 - 0.2)^{6-1} = 0.065536$$
$$P(X = 7) = 0.2 * (1 - 0.2)^{7-1} = 0.0524288$$
$$P(X = 8) = 0.2 * (1 - 0.2)^{8-1} = 0.04194304$$
$$P(X = 9) = 0.2 * (1 - 0.2)^{9-1} = 0.03355443$$
$$P(X = 10) = 0.2 * (1 - 0.2)^{10-1} = 0.02147484$$

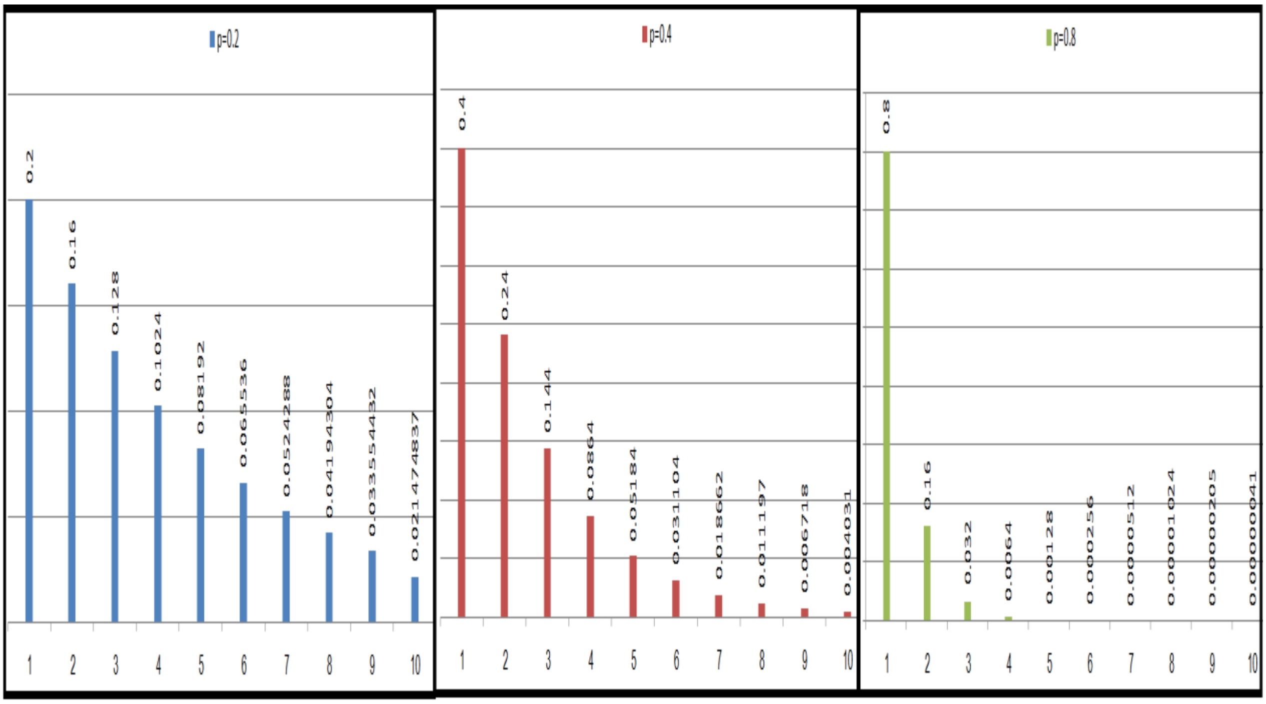
الجدول رقم 07: دالة الكثافة الاحتمالية حسب قانون التوزيع الهندسي.

	$p = 0.2$	$p = 0.4$	$p = 0.8$
x	$P(X = x)$	$P(X = x)$	$P(X = x)$
1	0.2	0.4	0.8
2	0.16	0.24	0.16
3	0.128	0.144	0.032
4	0.1024	0.0864	0.0064
5	0.08192	0.05184	0.00128

6	0.065536	0.031104	0.000256
7	0.0524288	0.018662	0.0000512
8	0.04194304	0.011197	0.00001024
9	0.03355443	0.006718	0.00000205
10	0.02147484	0.004031	0.00000041

المصدر: من إعداد الباحث استنادا إلى معطيات المثال.

الشكل رقم 5: تمثيل دالة الكتلة الاحتمالية حسب قانون التوزيع الهندسي.



المصدر: من إعداد الباحث استنادا إلى الجدول رقم 05.

5-3- التوقع الرياضي والتباين والدالة المولدة للعزوم:

أ) التوقع الرياضي:

إذا قمنا بتكرار تحربة بيرنولي (60 مرة= n)، مع احتمال النجاح (p) في كل تجربة هي 30% مثلا، يمكننا حساب المتوسط هنا في هذه الحالة بـ

$$\mu = np = 40 * 0.3 = 18$$

سيتم ملاحظة 18 نجاح في المتوسط.

إذا تجاهلنا الفشل إلى 60 تجربة فإن فإن متوسط طول الكتل حتى النجاح هو $\frac{1}{p} = \frac{1}{0.3} = 3.33$

وبالتالي يمكن تعميم ما توصلنا إليه، إذا كان لدينا (n) تجربة مع احتمال النجاح (p)، فإن المتوسط المتوقع هو تقريبًا(Nicholson, 2018, p. 137) :

$$E(x) = \mu = \frac{n}{np} = \frac{1}{p}$$

$$E(x) = \mu = \frac{1}{p}$$

ب) **التباين والانحراف المعيارى:**

$$\sigma^2 = \frac{q}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{q}{p^2}} = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}}$$

ج) **الدالة المولدة للعزوم:**

$$M(t) = \frac{pe^t}{(1-qe^t)}$$

5-4- أمثلة تطبيقية:

5-4-1- المثال الأول:

صندوق ألعاب يحتوي على 14 كرة زرقاء و7 كرات وردية. تتنافس طفلة وطفل على الفوز في هذه اللعبة.

1/ نطلب من الطفل سحب كرة من الصندوق مع إعادة ونعيد السحب حتى تظهر كرة زرقاء لأول مرة يكون فائزا.

- أدرس المتغير العشوائي X المعبر عن عدد مرات تكرار التجربة مع الطفل.
- ما احتمال أن يفوز الطفل بعد تكرار التجربة 6 مرات حتى تظهر الكرة الزرقاء؟

2/ نطلب من الطفلة سحب كرة من الصندوق مع إعادة ونعيد السحب حتى تظهر كرة وردية لأول مرة تكون فائزة.

- أدرس المتغير العشوائي المعبر عن عدد مرات تكرار التجربة مع الطفلة وليكن Y.
- ما احتمال أن تفوز الطفلة بعد تكرار التجربة 6 مرات حتى تظهر الكرة الوردية؟

3/ أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري في كلتا الحالتين.

الحل:

1/ دراسة المتغير العشوائي X المعبر عن عدد مرات تكرار التجربة مع الطفل:

ليكن الحدث (A) هو سحب الكرة الزرقاء، يكون لدينا احتمال حدوثه كما يلي:

$$P(A) = p = \frac{\text{عدد الكرات الزرقاء}}{\text{مجموع الكرات}} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$$

احتمال عدم حصول الحدث (A): $q = 1 - p = 1 - \frac{14}{21} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$

ليكن المتغير العشوائي X المعبر عن عدد مرات تكرار التجربة مع الطفل.

$$X \sim G(\text{p})$$

$$X \sim G(\frac{2}{3})$$

$$P(X = x) = \quad p(q)^{x-1} \qquad x = 1\,, 2\,, 3, \ldots$$

$$P(X = x) = \frac{2}{3}(\frac{1}{3})^{(x-1)}$$

- حساب احتمال أن يفوز الطفل بعد تكرار التجربة 6 مرات حتى تظهر الكرة الزرقاء.

$$P(X=6)= \frac{2}{3}*(\frac{1}{3})^{(6-1)} = \frac{2}{729}$$

احتمال أن يفوز الطفل بعد تكرار التجربة 6 مرات هو 729/2

2/ دراسة المتغير العشوائي Y المعبر عن عدد مرات تكرار التجربة مع الطفلة:

ليكن الحدث (B) هو سحب الكرة الوردية، يكون لدينا احتمال حدوثه كما يلي:

$$P(B)=p=\frac{\text{عدد الكرات الوردية}}{\text{مجموع الكرات}}=\frac{7}{21}=\frac{1}{3}$$

احتمال عدم حصول الحدث (B): $q=1-p=1-\frac{7}{21}=\frac{14}{21}=\frac{2}{3}$

ليكن المتغير العشوائي Y المعبر عن عدد مرات تكرار التجربة مع الطفلة.

$$X \sim G(\mathrm{p})$$

$$X \sim G(\frac{1}{3})$$

$$P(Y=y)= p(q)^{y-1} \qquad y=1\,,2\,,3,\dots$$

$$P(Y=y)= \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{y-1}$$

- حساب احتمال أن تفوز الطفلة بعد تكرار التجربة 6 مرات حتى تظهر الكرة الوردية.

$$P(Y=y)= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{6-1} = \frac{1}{3}*\frac{32}{243}=\frac{32}{729}$$

3/ حساب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري في كلتا الحالتين.

أ/ حالة المتغير العشوائي X المعبر عن عدد مرات تكرار التجربة مع الطفل.

المتوسط الحسابي:

$$\mu=\mathrm{E(x)}=\frac{1}{\mathrm{p}}=\frac{1}{2/3}=\frac{3}{2}$$

التباين:

$$\sigma^2=\frac{\mathrm{q}}{\mathrm{p}^2}=\frac{1-\mathrm{p}}{\mathrm{p}^2}=\frac{1/3}{(2/3)^2}=\frac{1/3}{4/9}=\frac{1}{3}*\frac{9}{4}=0.75$$

الانحراف المعياري:

$$\sigma=\sqrt{\frac{q}{p^2}}=\sqrt{\frac{1-p}{p^2}}=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{0.75}=0.866$$

ب/ حالة المتغير العشوائي Y المعبر عن عدد مرات تكرار التجربة مع الطفلة:

المتوسط الحسابي:

$$\mu=\mathrm{E(x)}=\frac{1}{\mathrm{p}}=\frac{1}{1/3}=3$$

التباين:

$$\sigma^2=\frac{\mathrm{q}}{\mathrm{p}^2}=\frac{1-\mathrm{p}}{\mathrm{p}^2}=\frac{2/3}{(1/3)^2}=\frac{2/3}{1/9}=\frac{2}{3}*9=6$$

الانحراف المعياري:

$$\sigma = \sqrt{\frac{q}{p^2}} = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}} = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{6} = 2.449$$

<u>2-4-5- المثال الثاني:</u>

كيس يحتوي على 6 قطع ذهبية و14 قطع فضية.

1/ يسحب شخص في كل مرة قطعة مع إعادتها ويعيد السحب حتى تظهر قطعة ذهبية لأول مرة.

- أدرس المتغير العشوائي X المعبر عن عدد مرات تكرار التجربة.
- ما احتمال أن يسحب الشخص بعد تكرار التجربة 5 مرات حتى تظهر قطعة ذهبية لأول مرة؟

2/ نطلب من شخص اخر (ثاني) السحب بنفس الطريقة.

- ما احتمال أن يسحب الشخص الثاني قطعة ذهبية في المحاولة الأولى؟

3/ أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري.

الحل:

1/ دراسة المتغير العشوائي X المعبر عن عدد مرات تكرار التجربة مع الشخص الأول:

ليكن الحدث (A) هو سحب القطعة الذهبية، يكون لدينا احتمال حدوثه كما يلي:

$$P(A) = p = \frac{\text{عدد القطع الذهبية}}{\text{مجموع القطع}} = \frac{6}{20}$$

احتمال عدم حصول الحدث (A): $q = 1 - p = 1 - \frac{6}{20} = \frac{14}{20}$

ليكن المتغير العشوائي X المعبر عن عدد مرات تكرار التجربة.

$$X \sim G(\mathrm{p})$$

$$X \sim G(\frac{6}{20})$$

$$P(X = x) = \quad p(q)^{x-1} \qquad x = 1\,,2\,,3, \ldots$$

$$P(X = x) = \frac{6}{20}(\frac{14}{20})^{(x-1)}$$

- حساب احتمال أن يسحب الشخص الأول بعد تكرار التجربة 5 مرات حتى تظهر القطعة الذهبية:

$$P(X = 5) = \frac{6}{20}(\frac{14}{20})^{(5-1)} = 0.07203$$

- حساب احتمال أن يسحب الشخص الثاني القطعة الذهبية في أول محاولة:

$$P(X = 1) = \frac{6}{20}(\frac{14}{20})^{(1-1)} = 0.3$$

3/ حساب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري في كلتا الحالتين.

المتوسط الحسابي:

$$\mu = \mathrm{E(x)} = \frac{1}{\mathrm{p}} = \frac{1}{6/20} = 3.33$$

التباين:

$$\sigma^2 = \frac{q}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} = \frac{14/20}{(6/20)^2} = 7.78$$

الانحراف المعياري:

$$\sigma = \sqrt{\frac{q}{p^2}} = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}} = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{7.78} = 2.79$$

3-4-5- المثال الثالث:

لاجراء قرعة الحج لسنة 1446 هجرية الموافقة لـ 2025 ميلادي، تم وضع أسماء المترشحين في قصاصات وطيها بإحكام ووضعها في صندوق. كما نعلم أن كل مترشح له عدد من القصاصات مساوي لعدد ترشحاته السابقة. إذا علمت أن الحاج عبد القادر لديه 12 قصاصة، والعدد الإجمالي للقصاصات هو: 445 قصاصة.

- ما احتمال أن يسحب الساحب قصاصة باسم الحاج عبد القادر في أول محاولة؟

الحل:

ليكن الحدث (A) هو سحب قصاصة باسم الحاج عبد القادر، يكون لدينا احتمال حدوثه كما يلي:

$$P(A) = p = \frac{\text{عدد قصاصات الحاج عبد القادر}}{\text{مجموع القطع}} = \frac{12}{445}$$

احتمال عدم حصول الحدث (A): $q = 1 - p = 1 - \frac{12}{445} = \frac{433}{445}$

ليكن المتغير العشوائي X المعبر عن عدد مرات تكرار التجربة.

$$X \sim G(\mathrm{p})$$

$$X \sim G(\frac{12}{445})$$

$$P(X = x) = \quad p(q)^{x-1} \qquad x = 1\ ,2\ ,3, \ldots$$

$$P(X = x) = \frac{12}{445}(\frac{433}{445})^{(x-1)}$$

- حساب احتمال أن يسحب الساحب قصاصة باسم الحاج عبد القادر في أول محاولة

$$P(X = 1) = \frac{12}{445}\left(\frac{433}{445}\right)^{(1-1)} = 0.0269$$

حساب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري في كلتا الحالتين.

$$\mu = \mathrm{E(x)} = \frac{1}{\mathrm{p}} = \frac{1}{\frac{12}{445}} = 37.08$$

$$\sigma^2 = \frac{q}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} = \frac{\frac{433}{445}}{(\frac{12}{445})^2} = 1335.43$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{q}{p^2}} = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}} = \sqrt{\sigma^2} = 36.54$$

6- التوزيع فوق الهندسي (Hypergeometric Distribution):

6-1- مفاهيم أساسية

إذا كان لدينا مجموعة من الكرات في كيس عددها الإجمالي نرمز له بـ(N)، وعلمنا أن هذه الكرات بلونين مختلفين وليكن مثلا الأبيض والأسود، علما أن عدد الكرات البيضاء هو (N_1)، وعدد الكرات السوداء هو(N_2).

نحاول الحصول على كرة بيضاء، فإننا عند سحب (n) كرة من (N) كرات بشكل عشوائي ثم فحصها، بذلك نكون أمام مشكلة توزيع ثنائي (نجاح: نحصل على كرة بيضاء/ فشل: لا نحصل على كرة بيضاء).

6-2- خصائص التوزيع فوق الهندسي:

نسمي المتغير العشوائي (x) هو عدد الكرات البيضاء المسحوبة.

فما هو احتمال الحصول على (x) من الكرات البيضاء عند سحب (n) كرة من (N)؟

نعلم أنه لحساب أي احتمال يكون حسب العلاقة التالية:

$$P = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية}}$$

- **ما هي الحالات الكلية الممكنة؟** في حالة سحب (n) كرة من (N) كرات بشكل عشوائي دون إرجاع والترتيب غير مهم؟

حسب قوانين الاحتمالات فإن هذه الحالة: حالة توفيقية $\longrightarrow$ $\begin{cases}\text{سحب بدون ارجاع} \\ \text{الترتيب غير مهم}\end{cases}$

أي سحب (n) كرة من (N) كرات يكون عدد الحالات الكلية الممكنة: $C_N^n = C_{N1+N2}^n$

مثال للتذكير:
$$C_N^n = \frac{N!}{n!\,(N-n)!} = \frac{6!}{2!\,(6-2)!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{2!\,(4)!} = 15$$ $$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

ما هي الحالات الملائمة؟ هي سحب (x) كرة من (N_1) كرات، وسحب الباقي الذي هو عبارة عن عدد السحبات (n) كرة منقوصة من سحب (x) كرة، أي سحب (x) كرة من (N_1) و سحب ($n-x$) كرة من (N_2).

وبما أن السحب يكون بشكل عشوائي دون إرجاع والترتيب غير مهم، فإن عدد الحالات الملائمة هي عبارة عن تقاطع حدثين، حدوث سحب (x) كرة من (N_1) وحدوث سحب ($n-x$) كرة من (N_2).

عدد الحالات الملائمة هو: $C_{N_1}^x \times C_{N_2}^{n-x}$

المتغير العشوائي (x) في هذه الحالة يتبع التوزيع **فوق الهندسي**، حيث الاحتمال $p(X = x_i)$ يعطى بالعلاقة التالية:

$$f(x) = p(X = x_i) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية}} = \frac{C_{N_1}^x \times C_{N_2}^{n-x}}{C_{N1+N2}^n} \qquad x = 0.1.2.3 \ldots n$$

$$\sum_{\mathrm{i}=0}^{n} p(X = x_i) = \sum_{\mathrm{i}=0}^{n} \frac{C_{N_1}^x \times C_{N_2}^{n-x}}{C_{N1+N2}^n} = \frac{1}{C_{N1+N2}^n} \sum_{\mathrm{i}=0}^{n} C_{N_1}^x \times C_{N_2}^{n-x} = \frac{C_{N1+N2}^n}{C_{N1+N2}^n} = 1$$

مثال:

تتيح مؤسسة الرهان الرياضي الجزائري لعبة يانصيب، مبدؤها يقوم على أساس 49 كرة مرقمة من 1 إلى 49، تدور في آلة تشبه البوتقة الزجاجية الشفافة بواسطة ضخ الرياح، لتقوم الآلة باختيار في كل مرة الكرة التي تعلق في فوهة لتسحبها كرقم فائز إلى غاية سحب 6 كرات.

يفوز بالجوائز كل من يتحصل على 4، 5 أو 6 أرقام صحيحة.

نعتبر المتغير العشوائي (x) في هذه الحالة يتبع التوزيع **فوق الهندسي**. ويمثل عدد الأرقام المسحوبة الصحيحة.

يمكن اعتبار عدد الكرات الإجمالي $(N = 49)$، عدد الكرات المسحوبة هو $(n = 6)$. أي سحب (x) كرة من عدد الكرات الصحيحة $(N_1 = 6)$ و سحب $(n - x)$ كرة من باقي الكرات الغير صحيحة $(N_2 = 43)$.

- احتمال الحصول على 5 أرقام صحيحة هو:

$$p(X = 5) = \frac{C_{N_1}^{x} \times C_{N_2}^{n-x}}{C_{N1+N2}^{n}} = \frac{C_6^5 \times C_{43}^1}{C_{49}^6} = \frac{6 \times 43}{13983816} = 0.000018443$$

$$C_6^5 = \frac{6!}{5!\,(6-5)!} = 6$$

$$C_{43}^1 = \frac{43!}{1!\,(43-1)!} = 43$$

$$C_{49}^6 = \frac{49!}{(6! \ * \ (49-6)!)} = 13983816$$

- احتمال الحصول على 6 أرقام صحيحة هو:

$$p(X = 6) = \frac{C_{N_1}^{x} \times C_{N_2}^{n-x}}{C_{N1+N2}^{n}} = \frac{C_6^6 \times C_{43}^0}{C_{49}^6} = \frac{1 \times 1}{13983816} == 0.000000071$$

$$C_{43}^0 = \frac{43!}{0!\,(43-0)!} = 1$$

6-3- التوقع الرياضي والتباين والدالة المولدة للعزوم:

أ) **التوقع الرياضي:** $E(X) = \mu = n\frac{N_1}{N}$

من أجل حساب توقع X نعلم أن: $E(X) = \Sigma x * P(X = x)$

$$P(X = x) = \frac{C_{N_1}^{x} \times C_{N_2}^{n-x}}{C_{N1+N2}^{n}}$$

$$E(X) = \Sigma\, x * \frac{C_{N_1}^{x} \times C_{N_2}^{n-x}}{C_{N1+N2}^{n}}$$

$$= \left(\frac{1}{C_{N1+N2}^{n}}\right) * \Sigma\, x * C_{N_1}^{x} \times C_{N_2}^{n-x}$$

$$\Sigma\, x * C_{N_1}^{x} * C_{N_2}^{n-x} = N_1 * C_{N1+N2}^{n}$$

$$E(X) = \left(\frac{1}{C_{N1+N2}^{n}}\right) * N_1 * C_{N1+N2}^{n}$$

$$E(X) = \left(\frac{1}{C_{N1+N2}^{n}}\right) * N_1 * C_N^n$$

$$E(X) = \left(\frac{1}{C_{N1+N2}^{n}}\right) * N_1 * \frac{(N1+N2)!}{n!\,(N1+N2-n)!}$$

$\boxed{E(X) = \mu = n\frac{N_1}{N}}$ وهو التوقع الرياضي المطلوب (ديب، 2009، صفحة 180).

ب) التباين والانحراف المعياري:

يحسب التباين كما يلي:

$$\sigma^2 = \frac{nN_1N_2(N-n)}{N^2(N-1)}$$

أما الانحراف المعياري:

$$\sigma = \sqrt{\frac{nN_1N_2(N-n)}{N^2(N-1)}}$$

6-4- أمثلة تطبيقية:

6-4-1- المثال الأول:

كيس من الحلوى يحتوي على 11 حبة منها 4 ذوق فراولة، و7 ذوق الكراميل، سحبت عشوائيا ودون إرجاع 5 قطع حلوى.

المطلوب:

- استنتج التوزيع الاحتمالي لعدد قطع الحلوى بذوق الفراولة المسحوبة.
- أوجد احتمال أن تكون عدد قطع الحلوى بذوق الفراولة المسحوبة هو:3
- أوجد احتمال سحب على الأقل 4 قطع حلوى بذوق الفراولة.
- أحسب التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري.

الحل:

نعتبر المتغير العشوائي (x) في هذه الحالة يتبع التوزيع **فوق الهندسي**. ويمثل عدد قطع الحلوى بذوق الفراولة المسحوبة**.**

$$f(x) = p(X = x_i) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية}} = \frac{C_{N_1}^{x} \times C_{N_2}^{n-x}}{C_{N1+N2}^{n}} \qquad x = 0.1.2.3\ldots n$$

يمكن اعتبار عدد قطع الحلوى الإجمالي $(N = 11)$، عدد قطع الحلوى المسحوبة هو $(n = 5)$.

عدد قطع الحلوى بذوق الفراولة $(N_1 = 4)$ ، قطع الحلوى بذوق غير الفراولة (الكراميل) $(N_2 = 7)$.

عدد الحالات الكلية الممكنة: $C_N^n = C_{N1+N2}^n = C_{11}^5$

واضح أن عدد الحالات الممكنة لسحب *3* قطع حلوى بذوق الفراولة من بين *4* هو C_4^3.

وعدد الحالات الممكنة لسحب (*2*=3-5) قطعتين من غير ذوق الفراولة من بين 7 هو C_7^2

وبالتالي فإن عدد **الحالات الملائمة** هو $C_4^3 \times C_7^1$

ومنه فإن الاحتمال يكون كالتالي:

$$f(x) = p(X = x_i) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية}} = \frac{C_{N_1}^{x} \times C_{N_2}^{n-x}}{C_{N1+N2}^{n}} = \frac{C_4^3 \times C_7^2}{C_{11}^5}$$

$$C_N^x = \frac{N!}{x!\,(N-x)!}$$

$$C_{11}^5 = \frac{11!}{5!\,(11-5)!} = \frac{11 * 10 * 9 * 8 * 7 * \cancel{6!}}{120 \cancel{* 6!}} = 462$$

$$C_4^3 = \frac{4!}{3!\,(4-3)!} = 4$$

$$C_7^2 = \frac{7!}{2!\,(7-2)!} = 21$$

$$f(x) = p(X = 3) = \frac{C_4^3 * C_7^2}{C_{11}^5} = \frac{4 \times 21}{462}$$

$$p(X = 3) = 0.1818$$

احتمال سحب 3 قطع الحلوى بذوق الفراولة المسحوبة هو: 0.1818

- احتمال سحب على الأقل 4 قطع حلوى بذوق الكراميل.

(سحب 1 قطعة حلوى بذوق الفراولة و4 كراميل) أو (سحب 0 قطعة حلوى بذوق الفراولة و 5 قطع بذوق كراميل)

أي نقوم بحساب: $p(X \le 1)$

$$p(X \le 1) = p(X = 1) + p(X = 0)$$

$$p(X \le 1) = \frac{C_4^1 \times C_7^4}{C_{11}^5} + \frac{C_4^0 \times C_7^5}{C_{11}^5}$$

$$p(X \le 1) = \frac{4 \times 35}{462} + \frac{1 \times 21}{462} = 0.3484$$

طريقة أخرى للحل:

نعتبر المتغير العشوائي (y) في هذه الحالة يتبع التوزيع **فوق الهندسي**. ويمثل عدد قطع الحلوى بذوق الكراميل المسحوبة.

$$\varphi(y) = p(Y = y_i) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية}} = \frac{C_{N_2}^{y} \times C_{N_1}^{n-y}}{C_{N1+N2}^{y}} \qquad Y = 0.1.2.3 \ldots n$$

- احتمال سحب على الأقل 4 قطع حلوى بذوق الكراميل. يمكن التعبير على هذه الحالة بـ: $p(Y \ge 4)$

(سحب 4 قطع حلوى بذوق كراميل و1 من الفراولة) أو (سحب 5 قطع حلوى بذوق كراميل و0 قطعة فراولة)

$$p(Y \ge 4) = p(Y = 4) + p(Y = 5)$$

$$p(Y \ge 4) = \frac{C_7^4 * C_4^1}{C_{11}^5} + \frac{C_7^5 * C_4^0}{C_{11}^5}$$

$$p(Y \geq 4) = \frac{140}{462} + \frac{21}{462} = 0.3484$$

- حساب التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري حسب الحالة الأولى لمحاولة سحب قطع الحلوى بذوق الفراولة.

التوقع الرياضي: $E(X) = \mu = n\frac{N_1}{N} = 5 * \frac{4}{11} = 1.818$

يحسب التباين كما يلي:

$$\sigma^2{}_x = \frac{nN_1N_2(N-n)}{N^2(N-1)} = \frac{5*4*7*(11-5)}{11^2(11-1)} = \frac{840}{1210} = 0.694$$

$$\sigma^2{}_x = 0.694$$

أما الانحراف المعياري:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{nN_1N_2(N-n)}{N^2(N-1)}} = \sqrt{0.694} = 0.833$$

$$\sigma_x = 0.833$$

<u>6-4-2- المثال الثاني:</u>

إدارة جزائرية تسعى لتكوين لجنة تحكيم ودراسة الطعون في القرارات الإدارية التي تصدر عنها. إذا علمت أن هذه الادراة تحتوي على 20 موظف منهم 8 رجال، و12 نساء، وأجريت بينهم قرعة لتشكيل هذه اللجنة والمكونة من 7 أعضاء، السحب يجرى عشوائيا ودون إرجاع.

المطلوب:

- استنتج التوزيع الاحتمالي لعدد الموظفين الرجال المسحوبين للمشاركة في تشكيل اللجنة.
- أوجد احتمال أن يكون عدد الموظفين الرجال في اللجنة هو:4
- أوجد احتمال سحب على الأقل 3 موظفين رجال.
- أحسب التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري.

<u>الحل:</u>

نعتبر المتغير العشوائي (x) في هذه الحالة يتبع التوزيع **فوق الهندسي**. ويمثل عدد الرجال المسحوبين للمشاركة في تشكيل اللجنة.

$$f(x) = p(X = x_i) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية}} = \frac{C_{N_1}^{x} \times C_{N_2}^{n-x}}{C_{N1+N2}^{n}} \qquad x = 0.1.2.3 \ldots n$$

يمكن اعتبار عدد الموظفين الإجمالي هو $(N = 20)$، عدد أعضاء اللجنة (العناصر المسحوبة) هو $(n = 7)$. عدد الموظفين الرجال $(N_1 = 8)$ ، عدد الموظفات من النساء $(N_2 = 12)$.

عدد الحالات الكلية الممكنة: $C_N^n = C_{N1+N2}^n = C_{20}^7$

واضح أن عدد الحالات الممكنة لسحب 4 رجال من بين 8 هو C_8^4.

وعدد الحالات الممكنة لسحب (3) نساء من بين 12 هو C_{12}^3

وبالتالي فإن عدد **الحالات الملائمة** هو $C_8^4 \times C_{12}^3$

ومنه فإن الاحتمال يكون كالتالي:

$$f(x) = p(X = x_i) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية}} = \frac{C_{N_1}^{x} \times C_{N_2}^{n-x}}{C_{N1+N2}^{n}} = \frac{C_8^4 \times C_{12}^3}{C_{20}^7}$$

$$C_N^x = \frac{N!}{x!\,(N-x)!}$$

$$C_{20}^7 = \frac{20!}{7!\,(20-7)!} = 77520$$

$$C_8^4 = \frac{8!}{4!\,(8-4)!} = 70$$

$$C_{12}^3 = \frac{12!}{3!\,(12-3)!} = 220$$

$$f(x) = p(X = 4) = \frac{C_8^4 \times C_{12}^3}{C_{20}^7} = \frac{70 * 220}{77520}$$

$$p(X = 4) = 0.1986$$

احتمال سحب 4 رجال هو:0.1986

احتمال سحب على الأقل 3 رجال من الموظفين لتشكيل اللجنة.

أي نقوم بحساب:$p(X \geq 3)$

$$p(X \geq 3) = p(X = 3) + p(X = 4) + p(X = 5) + p(X = 6) + p(X = 7)$$

$$p(X = 3) = 0.357$$

$$p(X = 4) = 0.1986$$

$$p(X = 5) = 0.048$$

$$p(X = 6) = 0.0043$$

$$p(X = 7) = 0.0001$$

$$p(X \geq 3) = 0.198 + 0.357 + 0.048 + 0.0043 + 0.0001 = 0.6074$$

طريقة أخرى للحل:

نعتبر المتغير العشوائي (x) في هذه الحالة يتبع التوزيع **فوق الهندسي**. نحن بصدد حساب $p(X \geq 3)$

$$p(X \geq 3) = 1 - p(x < 3)$$

$$p(X \geq 3) = 1 - (p(x = 2) + p(x = 1) + p(x = 0))$$

$$p(X = 0) = 0.0103$$

$$p(X = 1) = 0.0956$$

$$p(X = 2) = 0.2820$$

$$p(X \geq 3) = 1 - (0.0136 + 0.0965 + 0.2825) = 1 - 0.3926 = 0.6074$$

حساب التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري

التوقع الرياضي: $E(X) = \mu = n\frac{N_1}{N} = 7 * \frac{8}{20} = 2.8$

يحسب التباين كما يلي:

$$\sigma^2{}_x = \frac{nN_1N_2(N-n)}{N^2(N-1)} = 0.960$$

$$\sigma^2{}_x = 0.960$$

أما الانحراف المعياري:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{nN_1N_2(N-n)}{N^2(N-1)}} = \sqrt{0.960} = 0.979$$

$$\sigma_x = 0.979$$

الفصل الثاني: أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتصلة

1- مفاهيم عامة حول المتغيرات العشوائية المتصلة

نسمي المتغير العشوائي المتصل كل متغير يأخذ مجالا من مجموعة الأعداد الحقيقية IR لذلك سيمثل توزيعه الإحتمالي بدالة مستمرة تسمى دالة الكثافة الاحتمالية ($f(x)$)، يكون الاحتمال إحدى الصور الآتية:

$$P(a \leq x \leq b), P(x \leq a), P(x \geq b)$$

والتي يمكن حسابها باستخدام التكامل (بيداوي و دوة، 2016، صفحة 31):

$$P\ (x \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$

$$P\ (x \geq b) = \int_{b}^{+\infty} f(x)dx$$

$$P\ (a \leq x \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

وكأمثلة على المتغير العشوائي المستمر:

- كمية الحليب التي تنتجها مزرعة أبقار في اليوم تتراوح ما بين 100 لتر إلى 420 لتر($100 \leq x \leq 420$)؛
- كمية تساقط الأمطار في اليوم خلال شهر جانفي تتراوح ما بين 0 إلى 40 ملل ($0 \leq x \leq 40$)؛
- النقاط المتحصل عليها في مقياس الإحصاء لمستوى السنة الثانية ليسانس علوم التسيير تتراوح ما بين 0 إلى 19.75 ($0 \leq x \leq 19.75$).

إذن نلاحظ من خلال الأمثلة السابقة فإن المتغير العشوائي المستمر(x) يأخذ عدد لا نهائي من القيم محصورة ما بين الحد الأدنى والحد الأعلى.

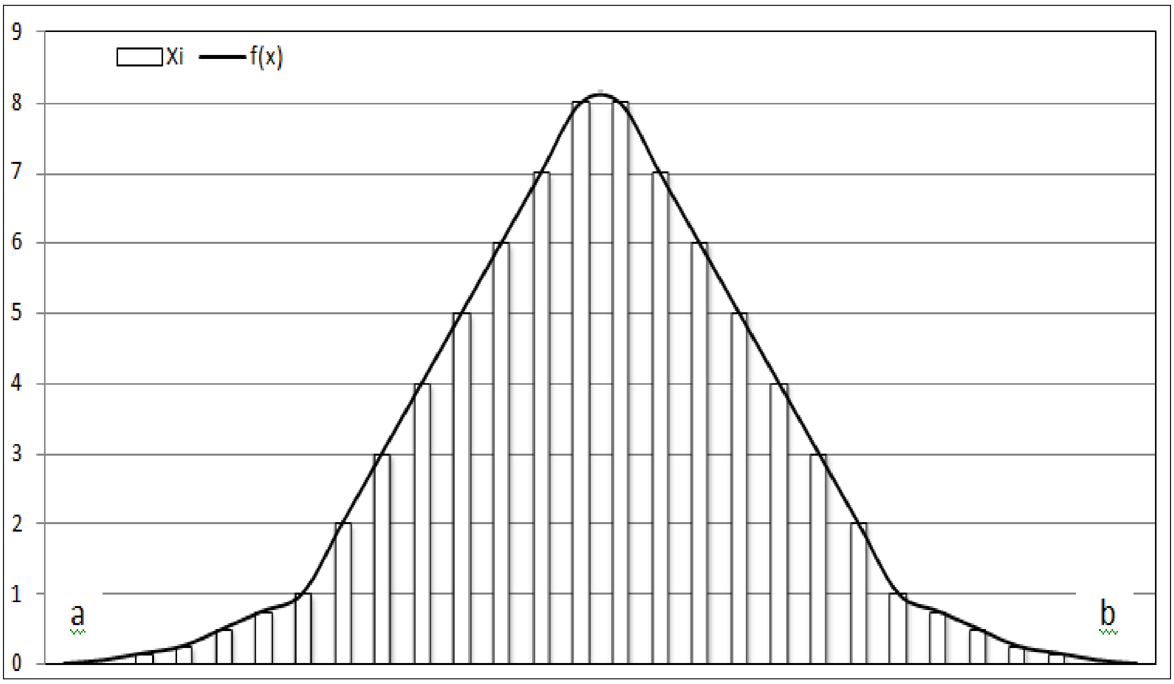
1-1- دالة الكثافة الاحتمالية

دالة الكثافة الاحتمالية ($f(x)$) في توزيع المتغيرات العشوائية المستمرة هي عبارة عن دالة مستمرة تمثل منحنى مستمر، تتميز بكونها:

- دالة موجبة $f(x) \geq 0 \quad \forall(a \leq x \leq b)$
- تكامل دال الكثافة الاحتمالية $f(x)$ على حدود قيم متغير العشوائي المستمر(x) تمثل مجموع الاحتمالات والتي تساوي الواحد الصحيح:

$$\int_{x=a}^{\mathrm{x=b}} f(x)\mathrm{dx} = 1$$

الشكل رقم 6: تمثيل دالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$ للمتغير العشوائي المستمر.



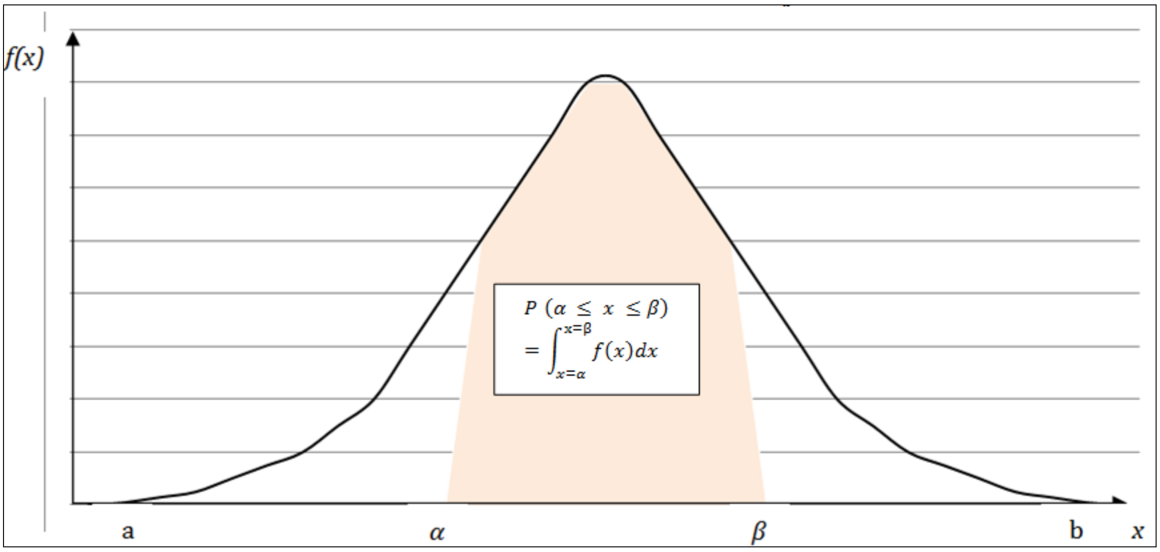
المصدر: من إعداد الباحث.

إذا كانت $f(x)$ دالة الكثافة الاحتمالية معرفة على المجال $[a\ ,\ b]$، ولحساب الاحتمال $P\ (\alpha\ \leq\ x\ \leq \beta)$ نقوم بحساب التكامل (جبار، 2010، الصفحات 133-135):

$$P\ (\alpha\ \leq\ x\ \leq \beta) = \int_{x=\alpha}^{x=\beta} f(x)dx \qquad \forall (a\ \leq\ x\ \leq\ b)$$

هذا التكامل يمثل مساحة المنطقة المظللة في الشكل 7 أدناه.

الشكل رقم 7: تمثيل منطقة الاحتمال في دالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$ للمتغير العشوائي المستمر.



المصدر: من إعداد الباحث.

2-1- المتوسط الحسابي والتباين

إذا كانت $f(x)$ دالة الكثافة الاحتمالية معرفة على المجال $[a\ ,\ b]$، فإن الوسط الحسابي والتباين يعبر عنهما بالعلاقة التالية:

$$E(x) = \mu = \int_{x=\alpha}^{x=\beta} xf(x)dx \qquad \forall(a \le x \le b)$$

$$\sigma^2 = E(x^2) - [E(x)]^2 = E(x^2) - \mu^2, \;\; E(x^2) = \int_{x=\alpha}^{x=\beta} x^2 f(x)dx$$

3-1- دالة التوزيع التراكمية

أما دالة التوزيع التراكمية $F(x)$ للمتغير العشوائي المستمر فتعطى بالعلاقة التالية:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

4-1- الدالة المولدة للعزوم

إذا كانت دالة الكتلة الاحتمالية $f(x)$ للمتغير العشوائي المستمر (x)، فإن الدالة المولدة للعزوم تعرف بالشكل التالي:

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\alpha_i}{i!} t^i$$

العزم الأول: أمثال $\frac{t}{1!}$ العزم من المرتبة الثانية: أمثال $\frac{t^2}{2!}$ .... العزم من المرتبة (r) هو أمثال $\frac{t^r}{r!}$ ... وهكذا (ديب، 2009، صفحة 154).

مثال:

إذا كانت $f(x)$ دالة الكثافة الاحتمالية معرفة على المجال $[0\ ,\ 3]$، حيث: $f(x) = \alpha x^2$

المطلوب:

- إيجاد قيمة (α).
- استنتج دالة التوزيع التراكمية.
- حساب الاحتمال $P(1 \le x \le 2)$

الحل:

- إيجاد قيمة (α)

نعلم أن من خصائص دال الكثافة الاحتمالية $f(x)$ التكامل على حدود قيم متغير العشوائي المستمر(x) تمثل مجموع الاحتمالات والتي تساوي الواحد الصحيح:

$$\Rightarrow \int_{x=a}^{x=b} f(x)\mathrm{dx} = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_{x=0}^{x=3} f(x)\mathrm{dx} = 1 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{dx} = 1$$

$$\int_{x=0}^{x=3} (\alpha x^2)\mathrm{dx} = 1 \Rightarrow \left.\frac{\alpha x^3}{3}\right|_0^3 = 1 \quad \Rightarrow \frac{\alpha 3^3}{3} = 1$$

$$9\alpha = 3 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{3}x^2}$$

- استنتاج دالة التوزيع التراكمية.

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx \ =\int_{-\infty}^{x}(\frac{1}{3}x^2)\mathrm{dx}=\frac{\frac{1}{3}x^3}{3}\Big|_{-\infty}^{x}=\frac{\frac{1}{3}x^3}{3}=\frac{x^3}{9}$$

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{if } x<0\\ \frac{x^3}{9} & \text{if } 0\le x<3\\ 1 & if\ x\ge 3\end{cases}$$

– حساب الاحتمال $\mathrm{P}\ (1\ \le\ \mathrm{x}\ \le 2)$

$$P\ (1\ \le\ x\ \le 2)=\int_{x=1}^{\mathrm{x}=2} f(x)dx=\int_{x=1}^{\mathrm{x}=2}(\frac{1}{3}x^2)\mathrm{dx}=\frac{x^3}{9}\Big|_{1}^{2}=\frac{2^3}{9}-\frac{1^3}{9}$$

$$=\frac{8}{9}-\frac{1}{9}=\frac{7}{9}$$

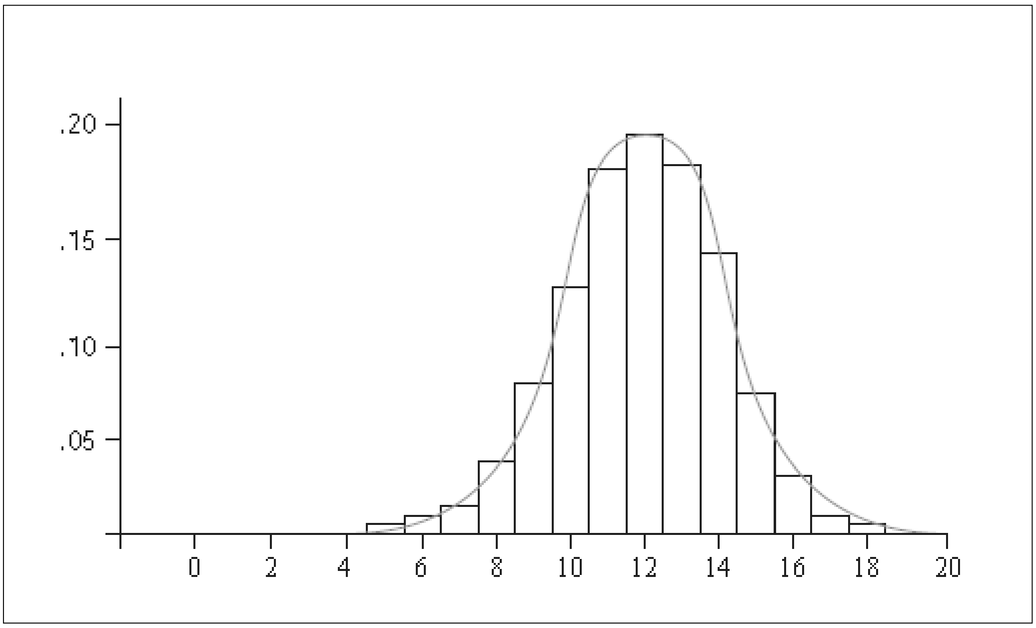
$$P\ (1\ \le\ x\ \le 2)=\frac{7}{9}$$

2- التوزيع الطبيعي (normal distribution)

2-1- مفاهيم أساسية

التوزيع الطبيعي هو نوع من أنواع توزيع الاحتمالات المستمرة، وبالتالي فإنه يتعلق بمتغير عشوائي مستمر (المسافة، الزمن، نقاط الطلبة، ... إلخ). يصف احتمالية أن يأخذ هذا المتغير نطاقًا معينًا من القيم، تم الطرق إليه من طرف الباحثان الفيزيائيان الفرنسيان Laplace et Gauss، إن تمثيل التوزيع الطبيعي يظهر على شكل جرس (أو منحنى Gauss).

الشكل رقم8: تمثيل منحنى دالة التوزيع الطبيعي.



المصدر: من إعداد الباحث.

2-2- خصائص التوزيع الطبيعي:

يتميز التوزيع الطبيعي المثالي بالخصائص التالية:

- التماثل.
- لانهائي في كلا الاتجاهين.
- له ذروة واحدة في المركز.
- مستمر (Nicholson, 2018, pp. 147-148).

دالة الكثافة لمنحنى التوزيع الطبيعي:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}$$

الانحراف المعياري $= \sigma$، الوسط الحسابي $= \mu$، $e = 2.718$ ، $\pi = 3.14$

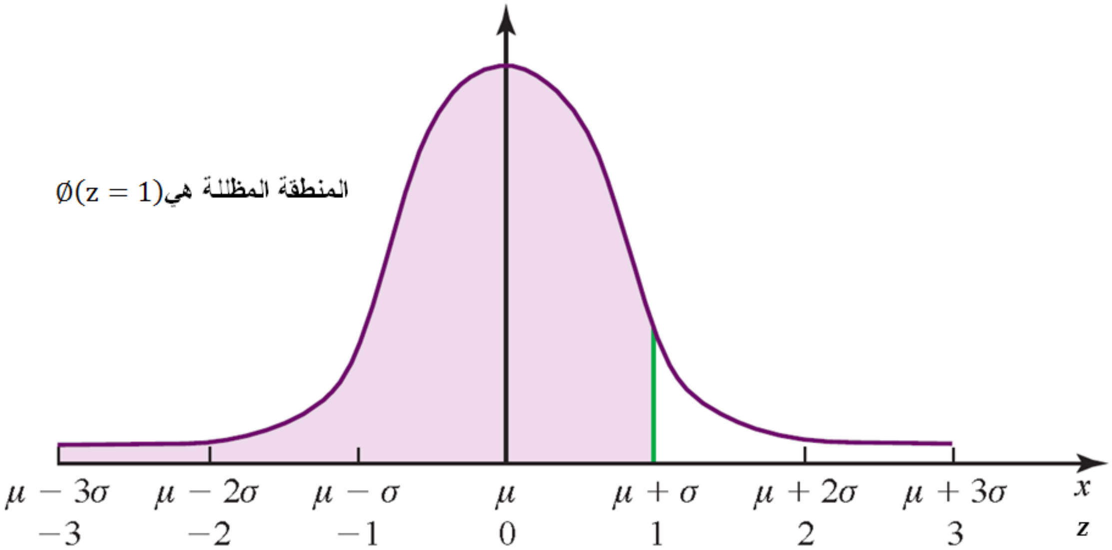
إذا كان المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي(μ) وتباين $((\sigma^2))$، نكتب:

$$X_i \sim N(\mu\ ,\sigma)$$

استخدام جداول التوزيع الطبيعي

تعطي الدالة $\emptyset(z)$ المساحة الواقعة أسفل منحنى التوزيع الطبيعي إلى يسار القيمة z، وهي المساحة المظللة في دالة التوزيع التراكمية كما هو مبين في الشكل، وبالتالي فإن المساحة الإجمالية أسفل المنحنى هي مجموع الاحتمالات والتي تساوي 1 الصحيح، أما المساحة الجزئية المعطاة بواسطة $\emptyset(z)$ تمثل احتمالية قيمة أصغر من z.

الشكل رقم9: تمثيل الدالة $\emptyset(z = 1)$ في منحنى دالة التوزيع الطبيعي.



Source: (Goldie, 2012, p. 156)

إذا كان المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي(μ) وتباين (σ^2)، فإن حساب احتمال $p(X_i)$ يتم حسابه عن طريق المتغير العشوائي المعياري z الذي يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي 1 وانحراف معياري 0

$$z \sim N(1\ ,0)$$

حيث: $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

ويُعطى بواسطة العلاقة التالية:

$$N(1\,,0)([\mathrm{a,b}]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

عند تحويل المتغير العشوائي (X_i) إلى متغير عشوائي معياري z فإن العلاقة تصبح كالتالي:

$$N(1\,,0)([\mathrm{a,b}]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{1}{2}z}$$

يمكن قياس المساحة الواقعة تحت المنحنى (المنطقة المظللة) عن طريق استخدام جدول التوزيع الطبيعي (أنظر الملحق رقم 01).

قواعد عامة:

- قاعدة: $P(Z \leq -a) = 1 - p(Z \leq a) = 1 - \emptyset(a)$
- قاعدة: $P(Z > a) = 1 - P(Z \leq a) = 1 - \emptyset(a)$
- قاعدة: $P(Z > -a) = p(Z \leq a) = \emptyset(a)$
- قاعدة: $P(\beta \leq Z \leq a) = p(Z \leq a) - p(Z \leq \beta) = \emptyset(a) - \emptyset(\beta)$

مثال: على سبيل المثال، إذا كنا بصدد البحث عن الاحتمال $P(Z \leq 0{,}83)$، فإننا بذلك نبحث عن $\emptyset(0{,}83)$ في جدول التوزيع الطبيعي.

للعثور على قيمة الاحتمال في جدول الاحتمالات:

1. ابحث عن الرقم الأول والرقم الأول بعد الفاصلة في العمود الأيسر أي نبحث عن 0.8 ؛
2. انتقل إلى الرقم الثاني (بعد الفاصلة) في الصف الأفقي، والذي هو 0.03 ؛
3. العدد الموجود في تقاطع العمود والصف هو قيمة الاحتمال المطلوبة، وهي 0,7967.

الشكل رقم10: كيفية البحث عن قيم $\emptyset(z)$ في جدول التوزيع الطبيعي.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289

المصدر: من إعداد الباحث.

3-2- التوقع الرياضي والتباين والدالة المولدة للعزوم:

أ) التوقع الرياضي:

$$\boxed{E(x) = \mu}$$

نعلم أنه في التوزيع الطبيعي المتوسط (μ) هو النقطة التي تصل عندها دالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$ إلى أعلى قيمة، وهي متناظرة حول المتوسط (μ).

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \quad = \int_{-\infty}^{+\infty} x \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}\right) dx$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

بوضع $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ نجد:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma z + \mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z)^2}{2}} dz$$

نقوم بتجزئة التكامل إلى جزئين:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z)^2}{2}} dz + \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z)^2}{2}} dz$$

$$E(x) = \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z)^2}{2}} dz + \mu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z)^2}{2}} dz$$

الجزء الأول من التكامل: $\int_{-\infty}^{+\infty} z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z)^2}{2}} dz = 0$ لأنها دالة فردية من الشكل: $z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z)^2}{2}} = g(z)$

$$g(-z) = g(z)$$

عندما يتم تكامل دالة فردية على مجال متماثل حول الصفر مثل $(\int_{-\infty}^{+\infty} g(z) dz)$، فإن المنطقة التي تقع فوق محور z (حيث $g(z) > 0$) تساوي المنطقة التي تقع تحت محور z (حيث $g(z) < 0$).

وبالتالي، فإن مجموع تلك المساحتين يكون صفرًا. $\int_{-\infty}^{+\infty} z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z)^2}{2}} dz = 0$

الجزء الثاني من التكامل: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z)^2}{2}} dz \quad = 1$

دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي القياسي (حيث $\mu = 0$ و $\sigma = 1$)، نستخدم طريقة حساب الحدود والتكاملات بالنظر إلى نتيجة معروفة:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \quad = \sqrt{\pi}$$

نضع: $x = \frac{z}{\sqrt{2}}$ و $dz = \sqrt{2}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(z)^2}{2}} dz = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{2}.\sqrt{\pi} = \sqrt{2\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z)^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} .\sqrt{2\pi} = 1$$

وبالتالي فإننا نقوم بالتعويض $\int_{-\infty}^{+\infty} z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z)^2}{2}} dz = 0$ و $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z)^2}{2}} dz = 1$

$$E(x) = \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z)^2}{2}} dz + \mu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z)^2}{2}} dz$$

$$E(x) = (\sigma .0) + (\mu. 1) = \mu$$

$$\boxed{E(x) = \mu}$$

ب) <u>التباين والانحراف المعياري:</u>

$$\boxed{V(x) = \sigma^2}$$

نعلم أن $V(X) = E[X^2] - (E[X])^2$

و $E(x) = \mu$ ومنه $(E[X])^2 = \mu^2$

نقوم بتقدير $E[X^2]$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x^2 * f(x)\right) dx$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) * e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

بوضع $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ نجد:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{z^2}{2}\right)}$$

و $x = \sigma z + \mu$

إذن: $x^2 = (\sigma + \mu)^2$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left((\sigma z + \mu)^2 * \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{z^2}{2}\right)}\right)\right) dz$$

$$(\sigma z + \mu)^2 = \sigma^{2z^2} + 2\sigma\mu z + \mu^2$$

$$E[X^2] = \int \left(\sigma^{2z^2} + 2\sigma\mu z + \mu^2\right) * \left(\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{z^2}{2}\right)}\right)\right) dz$$

$$E[X^2] = \sigma^2 * \int \left(z^2 * \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) * e^{-\frac{z^2}{2}}\right) dz + 2\sigma\mu$$

$$* \int \left(z * \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) * e^{-\frac{z^2}{2}}\right) dz + \mu^2 * \int \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) * e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

الجزء الأول من التكامل: $\int \left(z^2 * \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) * e^{-\frac{z^2}{2}}\right) dz = \mathbf{1}$

الجزء الثاني من التكامل:0 $\int \left(z * \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) * e^{-\frac{z^2}{2}}\right) dz = 0$

الجزء الثالث من التكامل:1 $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) * e^{-\frac{z^2}{2}} = 1$

ومنه: $E[X^2] = \sigma^2 * 1 + 2\sigma\mu * 0 + \mu^2 * 1$

$$E[X^2] = \sigma^2 + \mu^2$$

$$V(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$V(X) = (\sigma^2 + \mu^2) - \mu^2$$

$$\boxed{V(X) = \sigma^2}$$

ج) <u>الدالة المولدة للعزوم:</u>

الدالة المولدة للعزوم للتوزيع الطبيعي المعياري Z يمكن التعبير عنها بالصورة التالية:

$$\boxed{M_{Z(t)} = E[e^{tZ}] = e^{\frac{t^2}{2}}}$$

حيث:

$M_{Z(t)}$ هي الدالة المولدة للعزوم.

$E[e^{tZ}]$ تمثل القيمة المتوقعة.

e هو الأساس الطبيعي.

t هو المتغير الذي نستخدمه لتوليد العزوم.

$$M_{Z(t)} = E[e^{tZ}] = \int e^{tz} * f_{Z(z)} dz$$

$$f_{Z(z)} = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) * e^{-\frac{z^2}{2}}\right)$$

$$M_{Z(t)} = \int e^{tz} * \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) * e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$M_{Z(t)} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) * \int e^{-\frac{z^2}{2} + tz} dz = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) * \int e^{-\frac{1}{2} * (z^2 - 2tz)} dz$$

$$z^2 - 2tz = (z - t)^2 - t^2$$

$$\int e^{-\frac{1}{2} * ((z-t)^2 - t^2)} dz = e^{\frac{t^2}{2}} * \int e^{-\frac{1}{2} * (z-t)^2} dz$$

$$\int e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi}$$

التكامل الناتج هو تكامل دالة الكثافة للتوزيع الطبيعي، ومنه: $M_{Z(t)} = e^{\frac{t^2}{2}}$

2-4- أمثلة تطبيقية:

2-4-1- المثال الأول:

نعتبر المتغير العشوائي X الذي يخضع للتوزيع الطبيعي، وسطه الحسابي 25 وانحرافه المعياري 2.5

1/ أحسب الاحتمالات التالية:

$P(X\leq 23.1)$, $P(X\leq 18.2)$, $P(X\geq 20)$, $P(14 \leq X \leq 23)$

2/ أوجد قيم a و b و c حيث:

$p(z < a) = 0.8238$
$p(z > b) = 0.0901$
$p(z < c) = 0.5000$

الحل:

X متغير عشوائي وسطه الحسابي $(\mu = 20)$ وانحرافه المعياري $(\sigma = 3)$ حيث: $X\sim N(\mu,\sigma)$

1/ حساب الاحتمالات: نعلم أن: $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ حيث: $Z\sim N(0,1)$

A. $P(X \leq 23.1) = P(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}) = P(Z \leq \frac{23.1-25}{2.5}) = P(Z \leq -0,76) = 1 - P(Z \leq 0,76) = 1 - \emptyset(0,76)$

من جدول توزيع (Z) نجد: $1 - \emptyset(0,53) = 1 - 0.7764$

$P(X \leq 23.1) = 0.2236$

B. $P(X\leq 18.2) = P(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}) = P(Z \leq \frac{18.2-25}{2.5}) = P(Z \leq -2.72)$

قاعدة: $\boxed{\boldsymbol{P(Z \leq -a) = 1 - \emptyset(a)}}$

$= 1 - \emptyset(2.72) = 1 - 0,9967 = 0,0033$

من جدول توزيع (Z) نجد: $\emptyset(2.72) = 0,9967$

ومنه: $P(X \leq 18.2) = 0.0033$

C. $P(X \geq 20) = P(Z \geq \frac{x-\mu}{\sigma}) = P(Z \geq \frac{20-25}{2.5}) = P(Z \geq -2.00)$

قاعدة: $\boxed{\boldsymbol{P(Z \geq -a) = P(Z \leq a) = \emptyset(a)}}$

$= \emptyset(2.00) = 0,9772 = P(Z \leq 2.00)$

$P(X \geq 20) = 0.9772$

D. $P(14 \leq X \leq 23) = P\left(\frac{14-25}{2.5} \leq Z \leq \frac{23-25}{2.5}\right)$

$= P(-4.4 \leq Z \leq -0.8) = P(0.8 \leq Z \leq 4.4)$

$= P(Z \leq 4.4) - P(Z \leq 0.8)$

$= \emptyset(4.4) - \emptyset(0.8) = 0,9999 - 0,7881 = 0,2118$

$P(14 \leq X \leq 23) = 0.2118$

2/ إيجاد قيم a و b و c

$p(z < a) = 0.8238 \rightarrow a=0.93$

$p(z > b) = 0.0901 \rightarrow p(z < b) = 1 - 0.0901 \rightarrow p(z < b) = 0.9099$

$\rightarrow b=1.34$

$p(z < c) = 0.5000 \rightarrow c=0$

2-4-2- المثال الثاني:

يتوقع أحد الاقتصاديين أن استهلاك أوروبا للطاقة خلال الشتاء سيتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي 80 وحدة وتباين 144 وحدة.

- أحسب احتمال أن يكون هذا الاستهلاك للطاقة أقل من 77 وحدة خلال شتاء 2024.
- أحسب احتمال أن يكون هذا الاستهلاك للطاقة يتراوح ما بين 80 و83 وحدة.
- أحسب حجم استهلاك الطاقة المقابل للاحتمال $p(X \leq x) = 0.2$.

الحل:

- أحسب احتمال أن يكون هذا الاستهلاك للطاقة أقل من 77وحدة خلال شتاء 2024.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{144} = 12$$

$$p(X \leq 77) = P(Z \leq \tfrac{x-\mu}{\sigma}) = P(Z \leq \tfrac{77-80}{12}) = P(Z \leq -0.25)$$

$$= 1 - P(Z \leq +0.25) = 1 - \emptyset(0,25) = 1 - 0.5987$$

$$p(X \leq 77) = 0.4013$$

- أحسب احتمال أن يكون هذا الاستهلاك للطاقة يتراوح ما بين 80 و83 وحدة.

$$P(80 \leq X \leq 83) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(\frac{80-80}{12} \leq Z \leq \frac{83-80}{12}\right)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 0.25)$$

$$= p(Z \leq 0.25) - p(Z \leq 0)$$

$$= \emptyset(0,25) - \emptyset(0.00)$$

$$= 0.5987 - 0.5000 = 0.0987$$

$$P(80 \leq X \leq 83) = 0.0987$$

- أحسب حجم استهلاك الطاقة المقابل للاحتمال $p(X \leq x) = 0.2$.

$$p(X \leq x) = 0.2 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = 0.2 \Rightarrow \emptyset\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = 0.2 \Rightarrow$$

لا يمكننا إيجاد قيمة z في جدول قانون التوزيع الطبيعي ولكن يمكن إيجاد قيمة 0.8 إذن نضع:

$$P\left(Z \leq -\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right) = 1 - 0.2 = 0.8 \quad \Rightarrow \emptyset\left(-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right) = 0.8$$

$$-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = 0.85 \Rightarrow \frac{x-80}{12} = -0.85$$

$$\boxed{x = 69.8}$$

3-4-2- المثال الثالث:

ليكن X متغير عشوائي يخضع للتوزيع الطبيعي وسطه الحسابي 0 وانحرافه المعياري 1 ((X~N(0,1))

أوجد: α، β، γ، θ حيث:

$P(\theta \leqslant X \leqslant 2{,}5)=0{,}0117$
$P(\gamma \leqslant X \leqslant -0{,}36)=0{,}2538$
$P(X \leqslant \beta)=0{,}6700$
$P(X \leqslant \alpha)=0{,}2578$

الحل:

$P(\theta \leqslant X \leqslant 2{,}5)=0{,}0117$
$P(\gamma \leqslant X \leqslant -0{,}36)=0{,}2538$
$P(X \leqslant \beta)=0{,}6700$
$P(X \leqslant \alpha)=0{,}2578$
$\theta= 2{,}1$
$\gamma= - 1{,}25$
$\beta=0{,}44$
$\alpha = - 0{,}65$

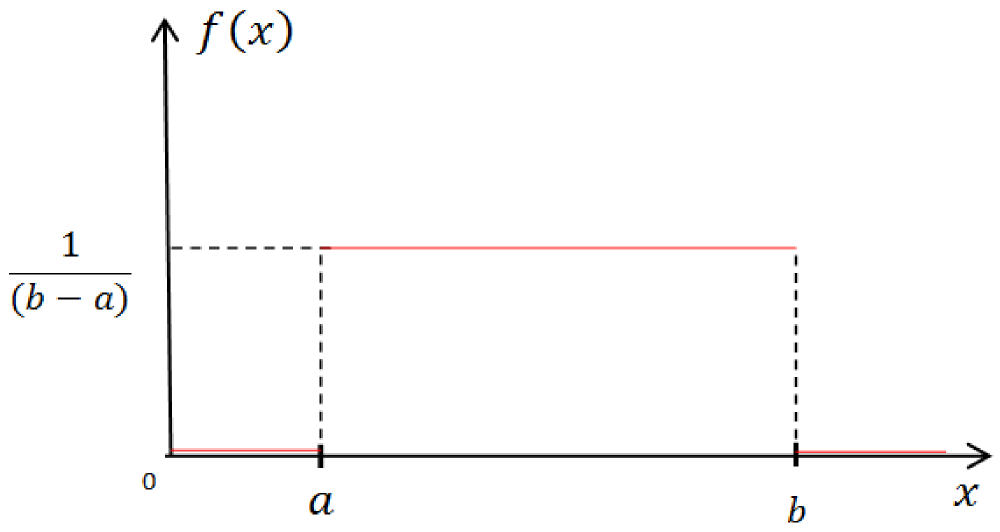
3- التوزيع المنتظم (Uniform Distribution)

3-1- مفاهيم أساسية

التوزيع المنتظم هو نوع من التوزيعات الاحتمالية حيث تكون الاحتمالات لكل القيم في مجال معين متساوية. يعني هذا أن أي نتيجة ضمن هذا المجال لها نفس الفرصة للظهور. التوزيع المنتظم هو نموذج بسيط وفعّال لتحليل العديد من الظواهر حيث تكون الفرص متساوية لكل نتيجة. يُستخدم على نطاق واسع في الاحصاءات، علم البيانات، والعديد من المجالات الأخرى.

عند تمثيل دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع المنتظم نجدها تظهر بشكل مستطيل بسيط (أنظر الشكل رقم11)، كون دالة الكثافة $f(x)$ ثابتة على مدى مجموعة من القيم $x \in [a - b]$، وتساوي الصفر خارج هذا المجال (Goldie, 2012, p. 249).

الشكل رقم 11: تمثيل منحنى دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع المنتظم.



المصدر: من إعداد الباحث.

أمثلة:

- تمر حافلة لنقل المسافرين كل نصف ساعة فهذا المتغير وهو وقت انتظار حتى وصول الحافلة يعتبر متغيرا عشوائيا يتبع التوزيع المنتظم حيث $x \in [0 - 30]$؛
- في ورشة خياطة يتم إنتاج بذلة رياضية كل 20 دقيقة، موزع بشكل منتظم حيث $x \in [0 - 20]$؛
- تجوب مضيفة الطائرة الأروقة كل 10 دقائق، هذه العملية موزعة توزيعا منتظما حيث $x \in [0 - 10]$.

<u>3-2- خصائص التوزيع المنتظم:</u>

يعتبر التوزيع المنتظم أبسط أنواع التوزيعات المستمرة، يعبر عن دالة كثافته الاحتمالية كالتالي:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \le x < b \\ 0 & \text{غير ذلك} \end{cases}$$

يعبر عن التوزيع المنتظم (**<u>Uniform Distribution</u>**) اختصارا بـ:

$$X_i \backsim U(a\,, b)$$

أما دالة التوزيع التراكمية للقانون المنتظم :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & si\ x \ge b \end{cases}$$

حيث: $x - a$ هي طول الفترة الملائمة (أو المبحوث عنها)، أما $b - a$ هي طول الفترة كاملة.

كمثال عن ذلك، في مصنع صناعة النسيج تايال الجزائر(TAYAL) المتواجد بسيد خطاب ولاية غليزان، يمكن تمثيل فترة إنتاج بذلة رياضية كل 20 دقيقة على سبيل المثال فقط، موزع بشكل منتظم حيث $x \in [0 - 20]$، ليأتي المفتش المشرف (supervisor) ليراقب عملية الإنتاج لمدة 15 دقيقة، وبالتالي نبحث عن احتمال إنتاج بذلة رياضية في وقت أقل من 15 دقيقة حتى يتسنى للمفتش المراقب مشاهدة بذلة رياضية منتجة بشكل نهائي.

هنا طول الفترة الملائمة $x - a = 15$ أما طول الفترة كاملة $b - a = 20$، وبالتالي دالة التوزيع في هذا المثال تكون بالشكل التالي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \le 0 \\ \dfrac{x-0}{20-0} & 0 \le x \le 20 \\ 1 & si\ x \ge 20 \end{cases}$$

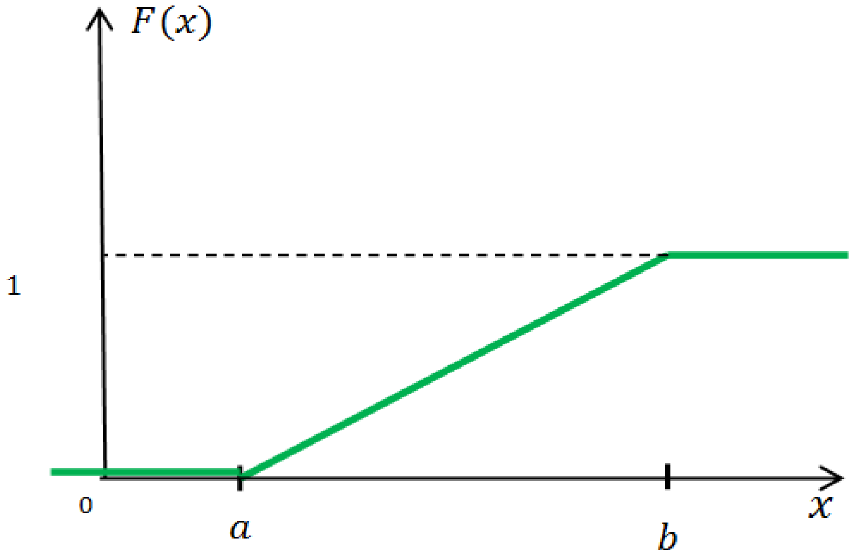
$$p(x = 15) = \frac{\text{طول الفترة}}{\text{طول الفترة الكاملة}} = F(20) = \frac{x-a}{b-a} = \frac{15-0}{20-0} = \frac{15}{20} = 0.7500$$

إذن احتمال إنتاج بذلة في 15 دقيقة مدة تفتيش المشرف المراقب (supervisor) هو 0.7500

دالة كثافته الاحتمالية كالتالي:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{20} & 0 \le x < 20 \\ 0 & \text{غير ذلك} \end{cases}$$

الشكل رقم 12: تمثيل منحنى دالة التوزيع التراكمية للتوزيع المنتظم.



المصدر: من إعداد الباحث.

3-3- التوقع الرياضي والتباين والدالة المولدة للعزوم:

أ) التوقع الرياضي:

$$\boxed{E(X) = \frac{a+b}{2}}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

نعلم أن دالة الكثافة الاحتمالية هي كالتالي:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \leq x < b \\ 0 & \text{غير ذلك} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx$$

$$\int_a^b x dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

$$E(X) = \left(\frac{1}{b-a}\right)\left(\frac{b^2 - a^2}{2}\right)$$

$$E(X) = \left(\frac{1}{b-a}\right)\left(\frac{(b-a)(b+a)}{2}\right)$$

$$E(X) = \left(\frac{\cancel{(b-a)}(b+a)}{2\,\cancel{(b-a)}}\right)$$

$$\boxed{E(X) = \frac{a+b}{2}}$$

ب) <u>التباين والانحراف المعياري:</u>

التباين: $\boxed{\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}}$

الانحراف المعياري: $\boxed{\sigma = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}}$

$$\sigma^2 = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

$$E(X) = \frac{(a + b)}{2}$$

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 f(x)\, dx$$

$$f(x) = \frac{1}{(b - a)} \quad (for\ a \le x \le b)$$

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 * \left(\frac{1}{(b - a)}\right) dx$$

$$\int_a^b x^2\, dx = \frac{(x^3)}{3}$$

$$\int_a^b x^2\, dx = \left(\frac{b^3}{3}\right) - \left(\frac{a^3}{3}\right) = \frac{(b^3 - a^3)}{3}$$

$$E(X^2) = \left(\frac{1}{(b - a)}\right) * \left(\frac{(b^3 - a^3)}{3}\right)$$

$$b^3 - a^3 = (b - a)(b^2 + ab + a^2)$$

$$E(X^2) = \frac{\left((b - a)(b^2 + ab + a^2)\right)}{\left(3(b - a)\right)} = \frac{(b^2 + ab + a^2)}{3}$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

$$\sigma^2 = \frac{(b^2 + ab + a^2)}{3} 3 - \left(\frac{(a + b)}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{4(b^2 + ab + a^2)}{12}\right) - \left(\frac{3(a^2 + 2ab + b^2)}{12}\right)$$

$$\sigma^2 = \frac{(4b^2 + 4ab + 4a^2 - 3a^2 - 6ab - 3b^2)}{12}$$

$$= \frac{(b^2 + a^2 - 2ab)}{12}$$

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}}$$

ج) الدالة المولدة للعزوم:

$$\boxed{M_{X(t)} = \left(\frac{1}{t(b\ -\ a)}\right) * \ (e^{tb}\ -\ e^{ta}) \qquad (\ t\ \neq\ 0)}$$

$$M_{x(t)} = \ E[e^{tx}]$$

$$M_{X(t)} = \int_a^b e^{tx} * \ f(x)dx$$

$$f(x) = \ \frac{1}{(b\ -\ a)}$$

$$M_{X(t)} = \ \int_a^b e^{tx} * \left(\frac{1}{(b\ -\ a)}\right) dx$$

$$\int_a^b e^{tx}\, dx \ = \ \left(\frac{1}{t}\right) * \ e^{tx}$$

$$M_{X(t)} = \ \left(\frac{1}{t}\right) * \ e^{tx} * \left(\frac{1}{(b\ -\ a)}\right) dx$$

$$M_{X(t)} = \ \left(\frac{1}{(b\ -\ a)}\right) * \ \left[\left(\frac{1}{t}\right) * \ e^{tb} - \left(\frac{1}{t}\right) * \ e^{ta}\right]$$

$$\boxed{M_{X(t)} = \left(\frac{1}{t(b\ -\ a)}\right) * \ (e^{tb}\ -\ e^{ta}) \qquad (\ t\ \neq\ 0)}$$

3-4- أمثلة تطبيقية:

3-4-1- المثال الأول:

في محطة النقل عبر السكك الحديدية يمر قطار كل ساعة واحدة ابتداء من الساعة 8 صباحا إلى غاية 16 مساءا، يدخل المحطة مسافر على الساعة 12.10 وينتظر قدوم القطار. إذن فزمن وصول القطار إلى هذه المحطة هو متغير عشوائي x موزع بانتظام على المجال $[0 \ -60]$ دقيقة.

في هذا المثال، يمثل زمن وصول القطار متغيرًا عشوائيًا موزعًا بشكل منتظم بين 0 و 60 دقيقة. يمكن استخدام هذا التوزيع لتحليل احتمالات زمن الانتظار للمسافر في المحطة.

فترة الانتظار: يبدأ من الساعة 12:10 وحتى الساعة 13:00. لذا، يمكن اعتبار زمن الوصول موزعًا بشكل منتظم بين 0 و 60 دقيقة (حيث 0 لحظة دخول المسافر و60 دقيقة تعني انتهاء الساعة 13:00).

المساحة العينة: $x \in [0\ -60]$

دالة الكثافة الاحتمالية:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{60}, & 0 \le x < 60 \\ 0, & \text{غير ذلك}. \end{cases}$$

دالة التوزيع:

دالة التوزيع في هذا المثال تكون بالشكل التالي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0 \\ \dfrac{x-0}{60-0} & 0 \leq x \leq 60 \\ 1 & si\ x \geq 60 \end{cases}$$

المتوسط:

$$E(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{0+60}{2} = 30$$

التباين:

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(60-0)^2}{12} = 300$$

حساب احتمالات انتظار المسافر لأكثر من 30 دقيقة:

نظرًا لأن زمن وصول القطار X موزع بشكل منتظم على الفترة [0,60] دقيقة، يمكننا حساب الاحتمال من خلال معرفة المساحة تحت دالة الكثافة الاحتمالية.

$$p(x > 30) = \frac{\text{طول الفترة}}{\text{طول الفترة الكاملة}}$$

$$= F(30) = \frac{x-a}{b-a} = \frac{30-0}{60-0} = \frac{30}{60} = 0.5$$

$$p(x > 30) = 0.5000$$

ما هو احتمال انتظار المسافر ما بين 5 دقيقة و40 دقيقة

$$P(5 \leq X \leq 40) = \int_5^{40} f(x)\ dx$$

$$P(5 \leq X \leq 40) = F(40) - F(5)$$

$$p(x = 40) = \frac{\text{طول الفترة}}{\text{طول الفترة الكاملة}} = F(5) = \frac{x-a}{b-a} = \frac{40-0}{60-0} = \frac{40}{60}$$

$$p(x = 5) = \frac{\text{طول الفترة}}{\text{طول الفترة الكاملة}} = F(5) = \frac{x-a}{b-a} = \frac{5-0}{60-0} = \frac{5}{60}$$

$$P(5 \leq X \leq 40) = F(40) - F(5) = \frac{40}{60} - \frac{5}{60} = \frac{35}{60}$$

$$P(5 \leq X \leq 40) = 0.5833$$

3-4-2- المثال الثاني:

في مصنع، يتم إنتاج قطع غيار بشكل آلي. زمن إنتاج كل قطعة يُعتبر متغيرًا عشوائيًا موزعًا بشكل منتظم بين 20 و50 دقيقة.

المطلوب:

- استخرج دالة الكثافة الاحتمالية f(x) لزمن إنتاج القطع.

- احسب التوقع الرياضي E(X) لزمن إنتاج قطعة.
- احسب التباين لزمن إنتاج القطعة.
- احسب احتمال أن يتم إنتاج قطعة في زمن 30 دقيقة أو أقل.
- إذا كان لديك 5 قطع تم إنتاجها، احسب احتمال أن يكون زمن إنتاج كل منها أقل من 35 دقيقة.

الحل:

في هذا المثال، يمثل زمن انتاج قطعة غيار متغيرًا عشوائيًا موزعًا بشكل منتظم بين20 و 50 دقيقة.
يمكن استخدام هذا التوزيع لتحليل احتمالات زمن الانتظار للحصول على انتاج وحدة قطع غيار.

المساحة العينة:$x \in [20 - 50]$

دالة الكثافة الاحتمالية:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{50-20}, & 20 \leq x < 50 \\ 0, & \text{غير ذلك.} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{30}, & 20 \leq x < 50 \\ 0, & \text{غير ذلك.} \end{cases}$$

دالة التوزيع:

دالة التوزيع في هذا المثال تكون بالشكل التالي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 20 \\ \dfrac{x-20}{30} & 20 \leq x \leq 50 \\ 1 & si\ x \geq 50 \end{cases}$$

المتوسط:

$$E(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{20+50}{2} = 35$$

التباين:

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(50-20)^2}{12} = 75$$

حساب احتمالات انتظار خروج انتاج قطعة واحدة لأقل من 30 دقيقة:

نظرًا لأن زمن انتاج قطعة غيار X موزع بشكل منتظم على الفترة [20,50] دقيقة، يمكننا حساب الاحتمال من خلال معرفة المساحة تحت دالة الكثافة الاحتمالية.

$$p(x > 30) = \frac{\text{طول الفترة}}{\text{طول الفترة الكاملة}}$$

$$= F(30) = \frac{x-a}{b-a}$$

$$= \frac{30-20}{50-20} = \frac{10}{30} = 0.33$$

$$p(x > 30) = 0.33$$

4- التوزيع الأسي (Exponential distribution)

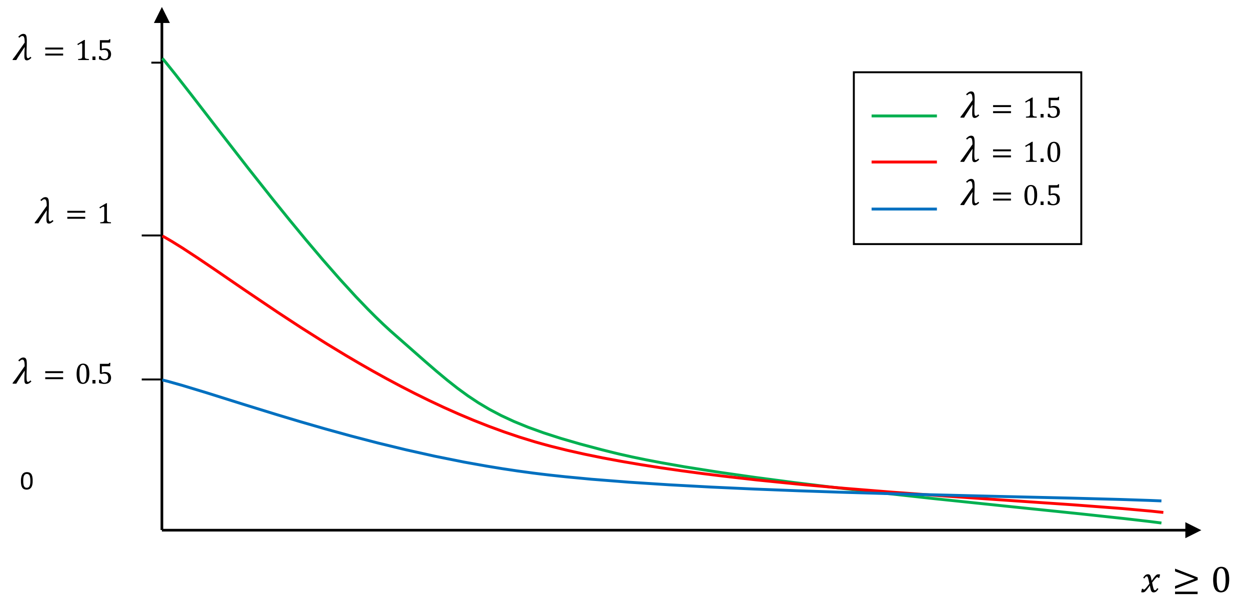
4-1- مفاهيم أساسية

نقول أن المتغير العشوائي X يتبع توزيع أسّي بمعلمة λ إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-X\lambda} & , x \geq 0 , \quad \lambda > 0 \\ 0 & , x < 0 , \quad \lambda > 0 \end{cases}$$

الشكل الموالي يبين تمثيل دالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$ للتوزيع الأسي:

الشكل رقم 13: تمثيل منحنى دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الأسي.



المصدر: من إعداد الباحث.

يعبر عن التوزيع الأسي (**exponential distribution**) اختصارا بـ:

$$X_i \sim EXP(\lambda)$$

ومن أمثلة التوزيع الأسي:

يوصف هذا التوزيع بكثير من الظواهر مثل أعمار بعض السلع الكهربائية – الوقت اللازم حتى تتعطل بعض الأجهزة الإلكترونية – وقت الانتظار اللازم لحدوث ما (الصياد، 2008، صفحة 204).

4-2- خصائص التوزيع الأسي:

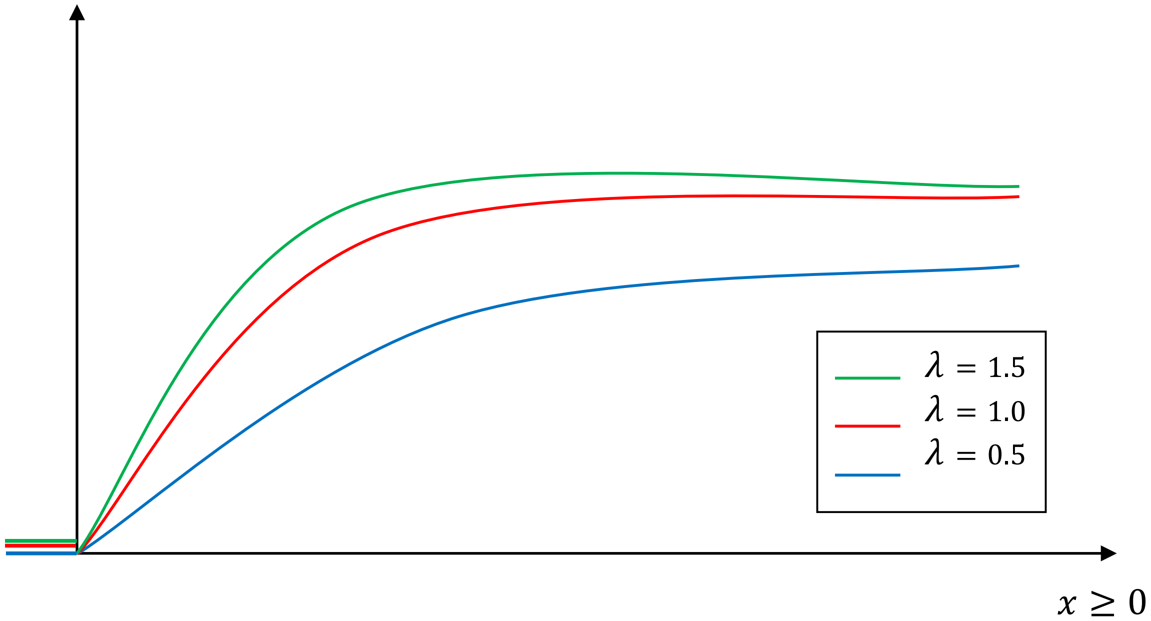
يمكن إيجاد دالة التوزيع الاحتمالية التراكمية كما يلي:

$$F(x) = P(X = x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \lambda \int_0^x e^{-\lambda x}\, dx = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & if\ x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & if\ x \geq 0 \end{cases}$$

وهي دالة التوزيع التراكمي في حالة التوزيع الأسّي.

الشكل رقم 14: تمثيل منحنى دالة التوزيع الأسي.



المصدر: من إعداد الباحث.

يفترض أن الآلة وضعت في الخدمة، وكان X الوقت اللازم حتى تتعطل هذه الآلة عن العمل. يتبع توزيع أسّي بمعلمة λ، فإنه مهما كانت قيمة a فإن الاحتمال:

$$\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X} > a + b}{\mathrm{X} > a}\right) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{X} > a)}{\mathrm{P}(\mathrm{X} > a + b)}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{a}}}{\mathrm{e}^{-\lambda(\mathrm{a+b})}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{b}\lambda} = \mathrm{P}(\mathrm{X} > b)$$

إذن يتميز التوزيع الأسي بالخواص التالية:

$$\mathrm{p}(\mathrm{x} > a) = \mathrm{e}^{-\mathrm{a}\lambda}$$

$$\mathrm{p}(\mathrm{x} < a) = 1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{a}\lambda}$$

$$\mathrm{p}(\mathrm{a} < x < b) = \mathrm{e}^{-\mathrm{a}\lambda} - \mathrm{e}^{-\mathrm{ab}}$$

4-3- التوقع الرياضي والتباين والدالة المولدة للعزوم:

أ) **التوقع الرياضي:**

$$\boxed{\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \mu = \frac{1}{\lambda}}$$

يمكن إثبات هذه العلاقة كما يلي:

نعلم أن دالة الكثافة الاحتمالية هي كالتالي:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-x\lambda} & , x \geq 0 , \quad \lambda > 0 \\ 0 & , x < 0 , \quad \lambda > 0 \end{cases}$$

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x f(x) dx$$

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x \left(\lambda e^{-x\lambda}\right) dx$$

$$E(X) = \lambda \int_0^{+\infty} x\,(e^{-x\lambda})dx$$

نجزئ التكامل:

$$\int_0^{+\infty} x\,(e^{-x\lambda})dx = -\frac{x}{\lambda}\,(e^{-x\lambda})\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{\lambda}\,x\,(e^{-x\lambda})\Big|_0^{+\infty}$$

الجزء الأول من التكامل: بما أن $x \to +\infty$ فإن $-\frac{x}{\lambda}\,(e^{-x\lambda}) \to 0$

ولما $x = 0$ فإن $-\frac{x}{\lambda}\,\left(e^{-x\lambda}\right) = 0$

إذن: $-\frac{x}{\lambda}\,(e^{-x\lambda})\Big|_0^{+\infty} = 0$

الجزء الثاني من التكامل: $\frac{1}{\lambda}\,x\,(e^{-x\lambda})\Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{\lambda^2}\,(0-1) = \frac{1}{\lambda^2}$

$$\int_0^{+\infty} x\,(e^{-x\lambda})dx = 0 + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$E(X) = \lambda \int_0^{+\infty} x\,(e^{-x\lambda})dx$$

$$E(X) = \lambda\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$$

ب) <u>التباين والانحراف المعياري:</u>

التباين: $\boxed{\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}}$

الانحراف المعياري: $\boxed{\sigma = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda}}$

ويكون إثبات ذلك كالتالي:

نعلم أن:

$$\sigma^2 = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$$

$$f(x) = \lambda e^{-x\lambda}$$

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-x\lambda}\,dx$$

$$E(X^2) = \lambda \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x\lambda}\,dx$$

نجري التكامل بالتجزئة:

$$E(X^2) = \lambda\left(\left(\frac{(-x^2)}{\lambda} e^{-x\lambda}\right)\Big|_0^{+\infty} + \frac{2}{\lambda}\int_0^{+\infty} xe^{-x\lambda}\,dx \right)$$

الجزء الأول من التكامل: بما أن $x \to +\infty$ فإن: $\left(\frac{(-x^2)}{\lambda} e^{-x\lambda}\right)\Big|_0^{+\infty} = 0$

الجزء الثاني من التكامل: نلاحظ أن $\int_0^{+\infty} xe^{-x\lambda}\, d$ يمثل التوقع الرياضي $E(X)$

أي : $E(X) = \int_0^{+\infty} xf(x)dx$

وبالتالي فإن الجزء الثاني من التكامل يمكن التعبير عليه بالعلاقة: $\frac{2}{\lambda}\int_0^{+\infty} xe^{-x\lambda}\,dx = \frac{2}{\lambda}E(x)$

نعلم أن: $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

وبالتالي فإن: $\frac{2}{\lambda}\int_0^{+\infty} xe^{-x\lambda}\,dx = \frac{2}{\lambda}\frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2}$

$$E(X^2) = 0 + \frac{2}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$

$$\sigma^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

ج) **الدالة المولدة للعزوم:**

تعطى الدالة المولدة للعزوم حسب التوزيع الأسي بالعلاقة التالية:

$$M_{X(t)} = \frac{\lambda}{\lambda - t} \qquad ; t < \lambda$$

$$M_{X(t)} = E[e^{tX}] = \int e^{tx} f(x)dx$$

$$M_{X(t)} = \int_0^{\infty} e^{tx} * \lambda * e^{-\lambda x}dx$$

$$M_{X(t)} = -\frac{\lambda}{t} * e^{tx} * e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} - \left(-\frac{\lambda}{t}\right) * \int_0^{\infty} e^{(t-\lambda)x}\,dx$$

الجزء الأول من التكامل: مساوي للصفر لأن $e^{tx} * e^{-\lambda x} \to 0$ حيث $x \to +\infty$

الجزء الثاني من التكامل: $\int_0^{+\infty} e^{(t-\lambda)x}\,dx = \frac{\lambda}{\lambda - t}$

$$M_{X(t)} = -\left(-\frac{\lambda}{t}\right) * \frac{\lambda}{\lambda - t} = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

4-4- أمثلة تطبيقية:

4-4-1- المثال الأول:

نفرض أن وقت انتظار المريض لدوره للدخول إلى قاعة الطبيب المعالج مقاسة بالدقائق هو متغير عشوائي أسي، وسيطه $\lambda = \frac{1}{37}$ ، يصل المريض إلى قاعة الانتظار وفي نفس اللحظة يمر قبله شخص آخر داخل قاعة العلاج، المطلوب:

- ما هو احتمال أن المريض ينتظر أكثر من 12 دقيقة.

- ما هو احتمال أن المريض ينتظر أقل من 5 دقائق.
- ما هو احتمال أن المريض ينتظر ما بين 12 دقيقة إلى 18 دقيقة؟

حل المثال الأول:

احتمال أن المريض ينتظر أكثر من 12 دقيقة:

$$p(X > x) = e^{-x\lambda} \ggg p(x > 12) = e^{-12*\frac{1}{37}} = 0.727$$

احتمال أن المريض ينتظر أقل من 5 دقائق:

$$p(X < x) = 1 - e^{-x\lambda} \ggg p(x < 5) = 1 - e^{-5*\frac{1}{37}} = 1 - 0.864 = 0.136$$

احتمال أن المريض ينتظر ما بين 12 دقيقة إلى 18 دقيقة:

$$p(x_1 < X < x_2) = e^{-a\lambda} - e^{-ab} \quad \rightarrow p(12 < x < 18) = e^{-12*\frac{1}{37}} - e^{-18*\frac{1}{37}}$$
$$= 0.727 - 0.673 = 0.054$$

4-4-2- المثال الثاني:

مصنع سيارات علامة (Fiat) بوهران يقوم بتركيب سيارات وضمان خدمات ما بعد البيع، ليكن المتغير العشوائي المستمر X يمثل الوقت (بالساعات) حتى وصول الزبون إلى مصلحة خدمة ما بعد البيع، يتبع توزيعًا أسّيًا مع معامل معدل $\lambda = \frac{1}{4}$ (مما يعني أن متوسط الوقت بين وصول زبون وآخر هو ربع ساعة).

- ما هو احتمال أن يكون الوقت حتى الوصول التالي أقل من ساعة؟
- ما هو الوقت المتوقع حتى الوصول التالي؟
- ما هو التباين في وقت الوصول؟

حل المثال الثاني:

- احتمال أن يكون الوقت حتى الوصول التالي أقل من ساعة:

$$p(X < x) = 1 - e^{-x\lambda} \ggg p(x < 1) = 1 - e^{-1*\frac{1}{3}} = 1 - 0.7165 = 0.2835$$

- القيمة المتوقعة للتوزيع الأسّي تُعطى بالعلاقة:

$$\boxed{\mathrm{E(X)} = \mu = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1/3} = 3}$$

- التباين في التوزيع الأسّي يُعطى بالعلاقة:

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{(1/3)^2} = 9}$$

- الانحراف المعياري في التوزيع الأسّي يُعطى بالعلاقة:

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}} = 3}$$

5- توزيع غاما (Gamma distribution)

5-1- مفاهيم أساسية

يُعتبر هذا التوزيع نظرية أساسية لتوليد عدة توزيعات احتمالية، ومن أبرزها التوزيع الأسي. يتميز بأنه يعالج المتغيرات العشوائية التي تكون قيمتها موجبة دائمًا. يعتمد هذا التوزيع في تطبيقاته على مختلف الحالات العملية، حيث يُستخدم لتفسير الظواهر التي تتطلب قياس الزمن أو الفترات (بيداوي و دوة، 2016، الصفحات 51-53).

من أبرز الأمثلة على استخدامه هو قياس فترات الانتظار، مثل الوقت المستغرق بين المكالمات الهاتفية أو وصول الزبائن إلى متجر. كما يُعتبر مهمًا في المجال الطبي، حيث يُستخدم لتوقع الفترات الزمنية لبقاء المرضى خلال حالات معينة.

نقول أن المتغير العشوائي المستمر وليكن X ذو توزيع غاما، فان دالة التوزيع الاحتمالي تأخذ الشكل التالي:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, & x > 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$$

حيث: α, β تمثل معلمات هذا النموذج وهي أكبر من 0

$\Gamma(\alpha)$ تمثل دالة غاما لأويلر وتأخذ الشكل التالي:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy$$

دالة غاما هي دالة رياضية مهمة في التحليل الرياضي. إذا كان لدينا عدد صحيح موجب n، فإن دالة غاما تُعرف بالشكل التالي:

$$\Gamma(\alpha) = (n-1)!$$

يمكن ذكر بعض الخصائص المتعلقة بدالة غاما:

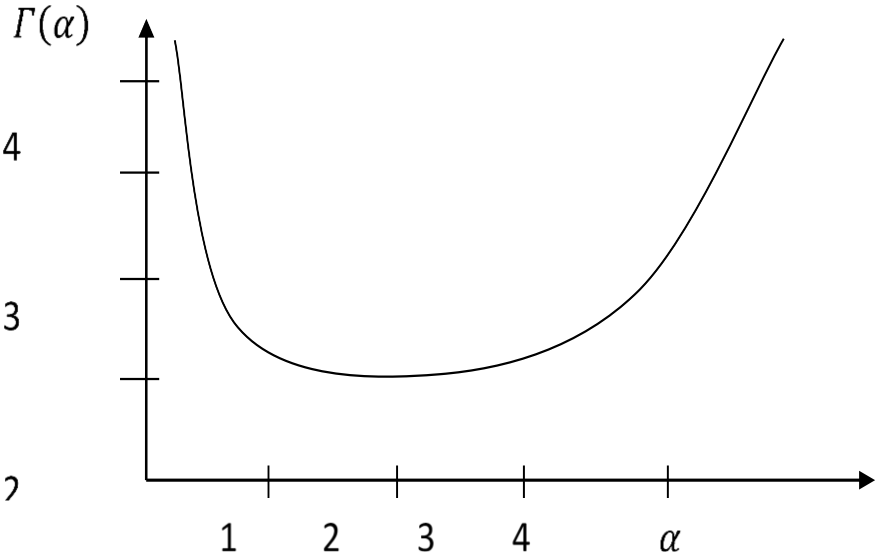
$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$$

$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(\alpha - 1) = \frac{\Gamma(\alpha)}{(\alpha - 1)} \qquad (for\ \alpha > 1)$$

الشكل رقم 15: تمثيل منحنى دالة غاما (gamma function).



المصدر: من إعداد الباحث.

ونكتب:

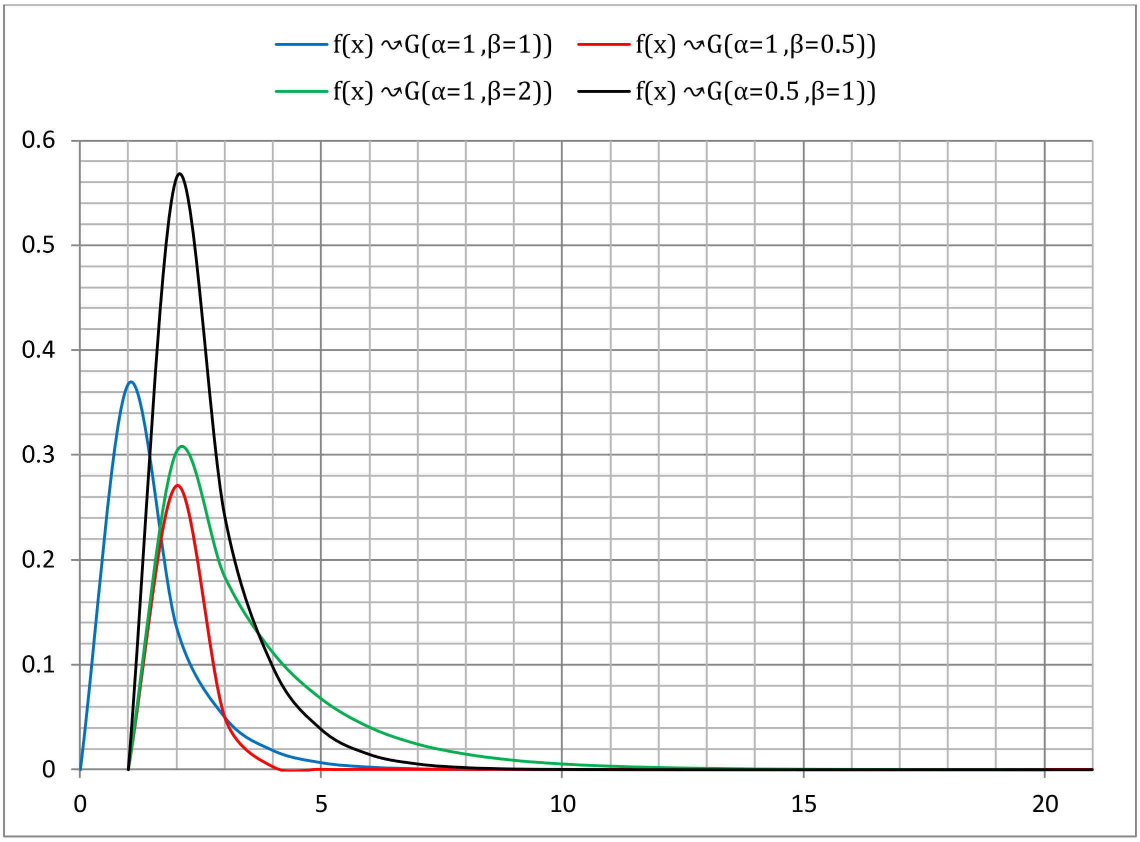
$$X_i \sim GAMMA(\alpha\ ,\beta)$$

الجدول رقم 08: بعض قيم الاحتمالات حسب قانون توزيع غاما.

x	f(x) ~G(α=1 ,β=1))	f(x) ~G(α=1 ,β=0.5))	f(x) ~G(α=1 ,β=2))	f(x) ~G(α=0.5 ,β=1))
0	0	0	0	0
1	0.3679	0.2707	0.3033	0.5642
2	0.1353	0.0498	0.1839	0.2419
3	0.0498	0.0025	0.1116	0.0978
4	0.0183	0.0001	0.0677	0.0385
5	0.0067	0	0.0406	0.0146
6	0.0025	0	0.0244	0.0055
7	0.0009	0	0.0149	0.002
8	0.0003	0	0.009	0.0007
9	0.0001	0	0.0055	0.0003
10	0.00005	0	0.0034	0.0001
11	0.00002	0	0.0021	0.00005
12	0.000007	0	0.0013	0.00002
13	0.000002	0	0.0008	0.000007
14	0.0000007	0	0.0005	0.000002

المصدر: من إعداد الباحث.

الشكل رقم 16: التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع غاما.



المصدر: من إعداد الباحث استنادا إلى البيانات في الجدول رقم 08.

2-5- خصائص توزيع غاما:

إن استخراج دالة التوزيع التراكمية من دالة الكثافة الاحتمالية يكون عبر المراحل التالية:

$$f(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}$$

$$F(x) = 1 - e^{-2x} \ (for\ x \geq 0)$$

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

$$F(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{\beta^{\alpha} * \Gamma(\alpha)}\right) * t^{\alpha-1} * e^{-\frac{t}{\beta}}dt$$

نضع =/u=t/β بحيث $t = \beta u$ و $dt = \beta du$

$$F(x) = \int_0^{x/\beta} \left(\frac{1}{\beta^{\alpha} * \Gamma(\alpha)}\right) * (\beta u)^{\alpha-1} * e^{-\frac{\beta u}{\beta}} * \beta\, du$$

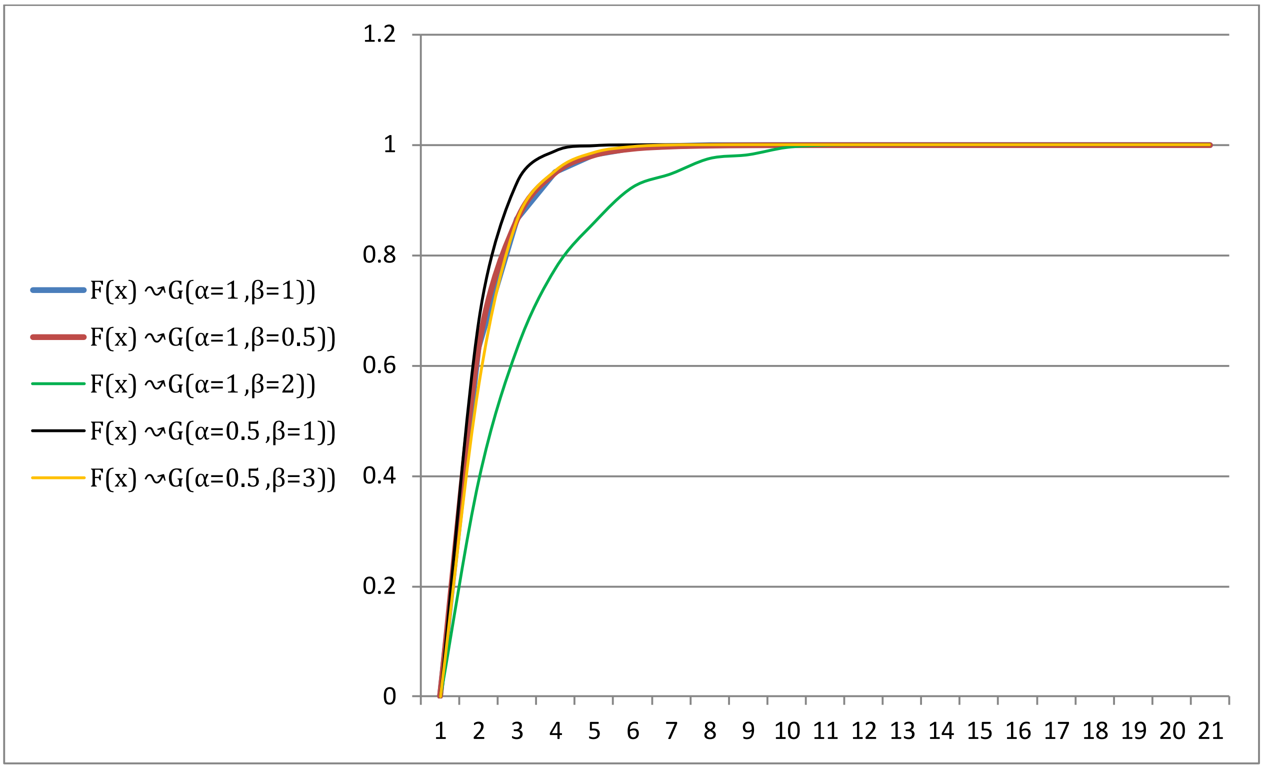
$$F(x) = \left(\frac{1}{(\beta^{\alpha-1} * \Gamma(\alpha))}\right) * \int_0^{x/\beta} u^{\alpha-1} * e^{-u}du$$

يمثل $\int_0^{x/\beta} u^{\alpha-1} * e^{-u}du$ دالة غاما غير المكتملة، وبالتالي:

$$F(x) = \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right) * \gamma\left(\alpha, \frac{x}{\beta}\right)$$

دالة γ تشير إلى دالة غاما غير المكتملة، وهي تُستخدم في حسابات الإحصاء والاحتمالات.

الشكل رقم 17: التمثيل البياني لدالة التوزيع غاما.



المصدر: من إعداد الباحث استنادا إلى البيانات في الجدول رقم 08.

3-5- التوقع الرياضي والتباين والدالة المولدة للعزوم:

أ) **التوقع الرياضي:** $\boxed{E(X) = \mu = \alpha\,\beta}$

يمكن إثبات هذه العلاقة كما يلي:

نعلم أن دالة الكثافة الاحتمالية هي كالتالي:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, & x > 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{0}^{+\infty} x f(x) dx$$

$$E(X) = \int_{0}^{+\infty} x \left(\frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}\right) dx$$

نقوم بتبسيط العلاقة بإخراج الجزء الثابت من التكامل:

$$E(X) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{+\infty} x \left(x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}\right) dx$$

لدينا: $x\left(x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}\right) = x^{\alpha} e^{-\frac{x}{\beta}}$

$$E(X) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{+\infty} x^{\alpha} e^{-\frac{x}{\beta}} dx$$

نضع $(y = \frac{x}{\beta})$ أي $\beta y = x$ ولما نشتق $\beta dy = dx$

إذن نقوم بتعويض $\beta y = x$:

$$E(X) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}(\beta y)^{\alpha}e^{-\frac{\beta y}{\beta}}\beta dy$$

$$E(X) = \frac{\beta^2}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}y^{\alpha}e^{-y}dy$$

$$E(X) = \frac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}y^{\alpha}e^{-y}dy$$

حيث: $\int_0^{+\infty}\beta^{\alpha}e^{-y}dy = \Gamma(\alpha+1)$

$$E(X) = \frac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha+1)$$

$$\boxed{E(X) = \alpha\,\beta}$$

ب) التباين والانحراف المعياري:

التباين: $\boxed{\sigma^2 = \alpha\,\beta^2}$

الانحراف المعياري: $\boxed{\sigma = \sqrt{\alpha\,\beta^2} = \beta\sqrt{\alpha}}$

ويكون إثبات ذلك كالتالي:

نعلم أن:

$$\sigma^2 = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

$$E(X) = \alpha\,\beta$$

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty}x^2 f(x)\,dx$$

$$f(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}$$

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty}x^2\left(\frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}\right)dx$$

$$E(X^2) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}x^2\left(x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}\right)dx$$

$$E(X^2) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}x^{\alpha+1}e^{-\frac{x}{\beta}}dx$$

نضع $(u = \frac{x}{\beta})$ أي $\beta u = x$ ولما نشتق $\beta du = dx$

إذن نقوم بتعويض $\beta u = x$:

$$E(X^2) = \frac{\beta^2}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}(\beta u)^{\alpha+1}e^{-\frac{\beta u}{\beta}}\beta du$$

$$E(X^2) = \frac{\beta^2.\beta^{\alpha+1}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} u^{\alpha+1} e^{-u} du$$

$$\int_0^{+\infty} u^{\alpha+1} e^{-u} du = \Gamma(\alpha+2)$$

$$E(X^2) = \frac{\beta^2.\beta^{\alpha+1}}{\beta^\alpha}$$

$$= \beta^2.\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)} = \beta^2.\frac{(\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$$

$$E(X^2) = \beta^2\alpha(\alpha+1)$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

$$\sigma^2 = \beta^2\alpha(\alpha+1) - (\alpha\,\beta)^2$$

$$\sigma^2 = \beta^2\alpha(\alpha+1) - \beta^2\,\alpha^2$$

$$= \beta^2\,\alpha^2 + \beta^2\,\alpha - \beta^2\,\alpha^2$$

$$\sigma^2 = \beta^2\,\alpha$$

ج) **<u>الدالة المولدة للعزوم:</u>**

تعطى الدالة المولدة للعزوم حسب توزيع غاما بالعلاقة التالية:

$$M_{X(t)} = (1-\beta t)^{-\alpha}$$

5-4- أمثلة تطبيقية:

5-4-1- المثال الأول:

إذا علمت أن (X) متغير عشوائي مستمر يتبع توزيع غاما، قم بتقدير دالة الكثافة الاحتمالية$f(x)$ ، في كل من الحالات التالية:

- الحالة 1: $((\alpha = 0.5\,, \beta = 0.5))$
- الحالة 2: $((\alpha = 0.8\,, \beta = 1))$
- الحالة 3: $((\alpha = 1\,, \beta = 2))$
- الحالة 4: $((\alpha = 2\,, \beta = 4))$

إذا علمت أن $X = \{0,1,2,3,\dots,10\}$ ، قم بحساب قيم دالة الكثافة الاحتمالية$f(x)$ ، ثم مثلها بيانيا (نكتفي بالحالة 4 فقط).

حل المثال الأول:

- تقدير دالة الكثافة الاحتمالية$f(x)$:

نعلم أن دالة الكثافة الاحتمالية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, & x > 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$$

- الحالة 1: $((\alpha = 0.5\,, \beta = 0.5))$:

$$f(x) = \frac{1}{0.5^{0.5}\Gamma(0.5)} x^{0.5-1} e^{-\frac{x}{0.5}}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} x^{-0.5} e^{-2x}}$$

- الحالة 2: $((\alpha = 0.8\ , \beta = 1))$:

$$f(x) = \frac{1}{1^{0.8}\Gamma(0.8)} x^{0.8-1} e^{-\frac{x}{1}}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\Gamma(0.8)} x^{-0.2} e^{-x}}$$

- الحالة 3: $((\alpha = 1\ , \beta = 2))$:

$$f(x) = \frac{1}{2^{1}\Gamma(1)} x^{1-1} e^{-\frac{x}{2}}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}}$$

- الحالة 4: $((\alpha = 2\ , \beta = 4))$:

$$f(x) = \frac{1}{4^{2}\Gamma(2)} x^{2-1} e^{-\frac{x}{4}}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{16} x e^{-\frac{x}{4}}}$$

- حساب قيم دالة الكثافة الاحتمالية$f(x)$ ، ثم تمثيلها بيانيا:

لدينا: $X = \{0,1,2,3, \ldots ,10\}$

ودالة الكثافة الاحتمالية:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{16} x e^{-\frac{x}{4}}}$$

نقوم بتعويض في كل مرة قيمة (x) في ودالة الكثافة الاحتمالية ، ونتحصل على قيم $f(x)$ المبينة في الجدول.

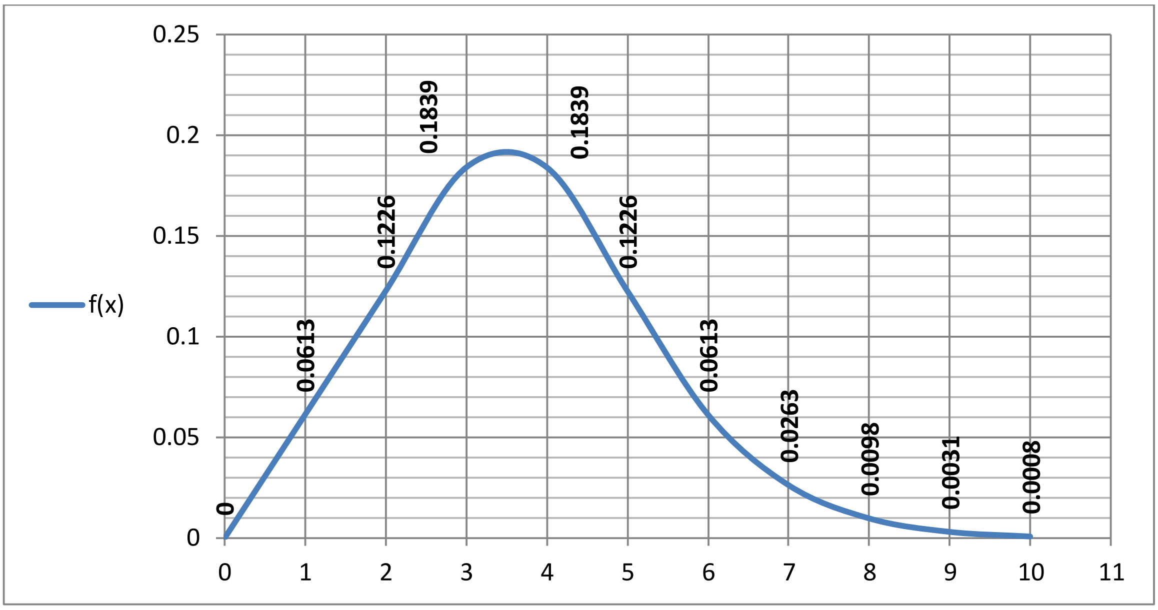
الجدول رقم 09: دالة الكثافة الاحتمالية حسب قانون توزيع غاما.

x_i	$f(x_i)$
0	0
1	0.0613
2	0.1226
3	0.1839
4	0.1839
5	0.1226
6	0.0613
7	0.0263
8	0.0098
9	0.0031
10	0.0008

المصدر: من إعداد الباحث استنادا إلى معطيات المثال.

التمثيل البياني يكون عن طريق رسم المنحنى في معلم متعامد ومتجانس، إذ تمثل قيم x_i محور الفواصل، أما قيم $f(x_i)$ فتمثل محور التراتيب.

الشكل رقم 18: التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية $f(x_i)$ لتوزيع غاما.



المصدر: من إعداد الباحث استنادا إلى معطيات المثال.

5-4-2- المثال الثاني:

في شركات التأمين الجزائرية، يُقدر أن الوقت حتى حدوث حادث في نظام تأمين السيارات يتبع توزيع غاما. نفترض أن متوسط الوقت حتى حدوث حادث وانحرافه المعياري في كل شركة تأمين هو كالتالي:

- شركة (SAA): متوسط الوقت حتى حدوث حادث هو 12 يوم وانحرافه المعياري 4 أيام.

- شركة (CAAT): متوسط الوقت حتى حدوث حادث هو 15 يوم وانحرافه المعياري 3 أيام.
- شركة (CAAR): متوسط الوقت حتى حدوث حادث هو 22 يوم وانحرافه المعياري 5 أيام.
- شركة (CRMA): متوسط الوقت حتى حدوث حادث هو 35 يوم وانحرافه المعياري 7 أيام.

المطلوب:

- تعريف المتغير العشوائي (X) في هذا المثال.
- حساب معلمات توزيع غاما ($X_i \backsim GAMMA(\alpha\,,\beta)$) في كل الحالات.
- تقدير دالة الكثافة الاحتمالية في كل الحالات.

حل المثال الثاني:

- تعريف المتغير العشوائي (X) في هذا المثال.

X: هو الوقت حتى حدوث حادث في نظام تأمين السيارات. كل شركة تأمين لديها نموذج مختلف لوقت حدوث الحوادث يعتمد على البيانات التاريخية.

- حساب معلمات توزيع غاما ($X_i \backsim GAMMA(\alpha\,,\beta)$) في كل الحالات.

شركة (SAA):

التوقع الرياضي: $\boxed{E(X) = \alpha\,\beta = 12}$

الانحراف المعياري: $\boxed{\sigma = \sqrt{\alpha\,\beta^2} = \beta\sqrt{\alpha} = 4}$

التباين: $\boxed{\sigma^2 = \alpha\,\beta^2 = 16}$

$$\beta = 16/12 = 1.33$$

$$\alpha = 12/\beta = 12/1.33 \approx 9.02$$

شركة (CAAT):

التوقع الرياضي: $\boxed{E(X) = \alpha\,\beta = 15}$

الانحراف المعياري: $\boxed{\sigma = \sqrt{\alpha\,\beta^2} = \beta\sqrt{\alpha} = 3}$

التباين: $\boxed{\sigma^2 = \alpha\,\beta^2 = 9}$

$$\beta = 9/15 = 0.6$$

$$\alpha = 15/\beta = 15/0.6 \approx 25$$

شركة (CAAR):

التوقع الرياضي: $\boxed{E(X) = \alpha\,\beta = 22}$

الانحراف المعياري: $\boxed{\sigma = \sqrt{\alpha\,\beta^2} = \beta\sqrt{\alpha} = 5}$

التباين: $\boxed{\sigma^2 = \alpha\,\beta^2 = 25}$

$$\beta = 25/22 = 1.14$$

$$\alpha = 22/\beta = 22/1.14 \approx 19.3$$

شركة (CRMA):

التوقع الرياضي: $\boxed{E(X) = \alpha\,\beta = 35}$

الانحراف المعياري: $\boxed{\sigma = \sqrt{\alpha\,\beta^2} = \beta\sqrt{\alpha} = 7}$

التباين: $\boxed{\sigma^2 = \alpha\,\beta^2 = 49}$

$$\beta = 49/35 = 1.4$$

$$\alpha = 35/\beta = 35/1.4 \approx 25$$

- تقدير دالة الكثافة الاحتمالية في كل الحالات.

شركة (SAA): $f(x) = \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, & x > 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{1}{1.33^{9.02}\Gamma(9.02)} x^{9.02-1} e^{-\frac{x}{1.33}}, & x > 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$$

شركة (CAAT): $f(x) = \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, & x > 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{1}{0.6^{25}\Gamma(25)} x^{25-1} e^{-\frac{x}{0.6}}, & x > 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$$

شركة (CAAR): $f(x) = \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, & x > 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{1}{1.14^{19.3}\Gamma(19.3)} x^{19.3-1} e^{-\frac{x}{1.14}}, & x > 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$$

شركة (CRMA): $f(x) = \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, & x > 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{1}{1.4^{25}\Gamma(25)} x^{25-1} e^{-\frac{x}{1.4}}, & x > 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$$

6- توزيع بيتا (Beta distribution)

6-1- مفاهيم أساسية

يتم تعريف توزيع بيتا على المجال $[0-1]$. إذا كان المتغير العشوائي X يتبع هذا التوزيع، فإن تعبير دالة كثافة الاحتمال يتم تمثيلها عادةً على النحو التالي:

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \qquad ,0 \le x \le 1$$
$$f(x) = 0 \qquad x \notin [0,1]$$

$\alpha > 0$ و $\beta > 0$.

$B(\alpha,\beta)$ هي دالة بيتا beta function حيث:

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

ومنه:

$$\frac{1}{B(\alpha,\beta)} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$$

أي يمكن صياغة دالة الكثافة الاحتمالية كما يلي:

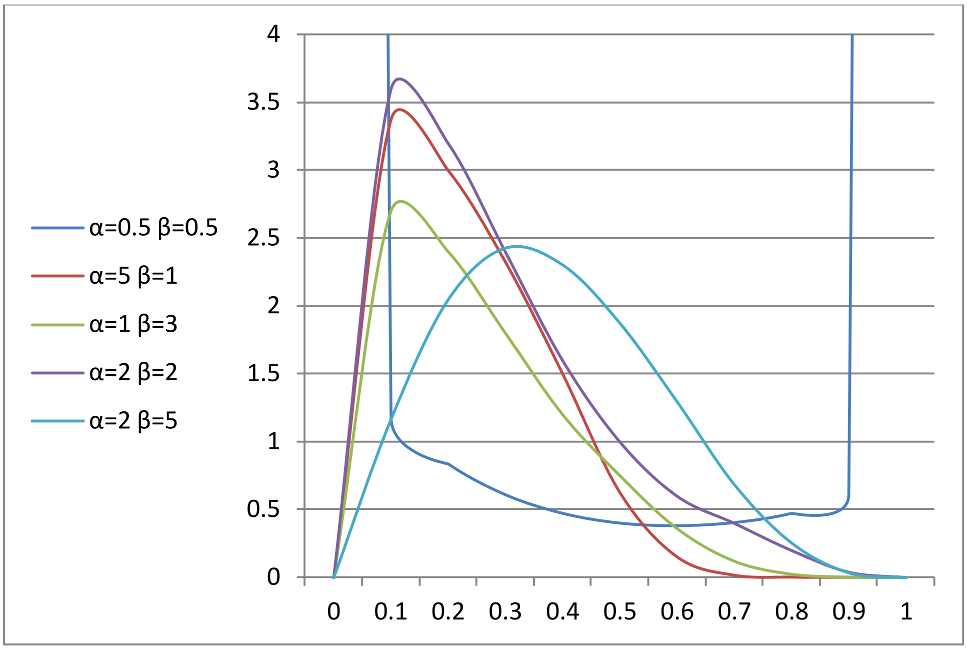
$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$$

الجدول رقم 10: بعض قيم الاحتمالات لمتغير عشوائي مستمر حسب قانون توزيع بيتا.

x	α=0.5 β=0.5	α=5 β=1	α=1 β=3	α=2 β=2	α=2 β=5
0	100	0	0	0	0
0.1	1.177	3.375	2.7	3.6	1.166
0.2	0.834	3	2.4	3.2	2.048
0.3	0.607	2.325	1.8	2.4	2.428
0.4	0.47	1.5	1.2	1.6	2.304
0.5	0.398	0.625	0.75	1	1.875
0.6	0.379	0.15	0.36	0.6	1.296
0.7	0.402	0.015	0.12	0.4	0.686
0.8	0.47	0.001	0.024	0.2	0.256
0.9	0.607	0	0.003	0.04	0.036
1	100	0	0	0	0

المصدر: من إعداد الباحث.

الشكل رقم 19: التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية $f(x_i)$ لتوزيع بيتا.



المصدر: من إعداد الباحث استنادا إلى البيانات في الجدول رقم 10.

<u>2-6- خصائص توزيع بيتا:</u>

لحساب دالة التوزيع التراكمية $F(x)$ لتوزيع بيتا من دالة الكثافة $f(x)$، نستخدم العلاقة التالية:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$$

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{B(\alpha,\beta)} t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt$$

يتم حساب قيم $F(x)$ باستخدام التكامل العددي، بتعويض قيم (x) والمعلمات α و β.

فمثلا أجرينا بعض الحسابات لدالة التوزيع $F(x)$ من أجل المعلمات التالية:

$\alpha = 0.5\ \beta = 0.5$، $\alpha = 5\ \beta = 1$، $\alpha = 1\ \beta = 3$، $\alpha = 2\ \beta = 2$، $\alpha = 2\ \beta = 5$ ومن أجل $x \in [0-1]$ تحصلنا على النتائج التالية:

الجدول رقم 11: قيم دالة التوزيع حسب قانون توزيع بيتا.

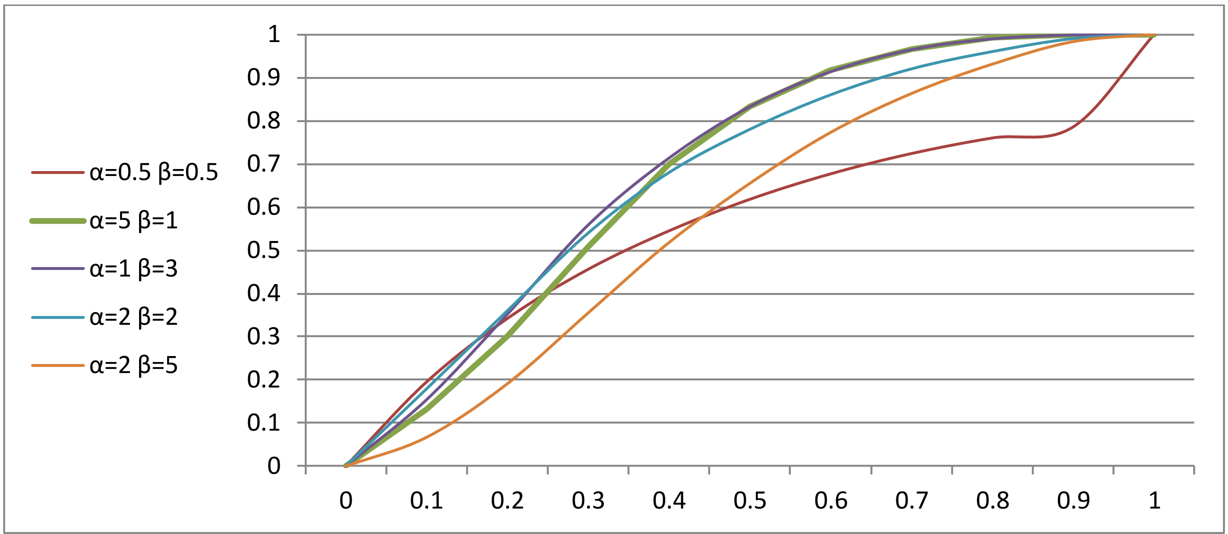
	$F(x)$	$F(x)$	$F(x)$	$F(x)$	$F(x)$
x	α=0.5 β=0.5	α=5 β=1	α=1 β=3	α=2 β=2	α=2 β=5
0	0	0	0	0	0
0.1	0.195	0.133	0.154	0.179	0.067
0.2	0.342	0.3	0.352	0.36	0.191
0.3	0.456	0.508	0.559	0.54	0.355
0.4	0.545	0.7	0.714	0.68	0.518

0.5	0.618	0.833	0.833	0.78	0.655
0.6	0.677	0.917	0.914	0.86	0.773
0.7	0.724	0.967	0.965	0.92	0.863
0.8	0.76	0.993	0.99	0.96	0.931
0.9	0.786	0.999	0.999	0.99	0.983
1	1	1	1	1	1

المصدر: من إعداد الباحث استنادا إلى معطيات المثال.

ومن ثم يكون التمثيل البياني لدالة التوزيع التراكمية كما هو مبين في الشكل رقم 20 أدناه.

الشكل رقم 20: التمثيل البياني لدالة التوزيع بيتا.



المصدر: من إعداد الباحث استنادا إلى البيانات في الجدول رقم 11.

6-3- التوقع الرياضي والتباين والدالة المولدة للعزوم:

أ) **التوقع الرياضي:** $\boxed{E(X) = \mu = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$

لإثبات ذلك نستخدم تعريف القيمة المتوقعة:

$$E(X) = \int_0^1 xf(x)dx$$

$$E(X) = \int_0^1 x\frac{1}{B(\alpha,\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$

$$E(X) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}dx$$

باستخدام خاصية التكامل لدالة بيتا:

$$\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}dx = \frac{B(a+1,b)}{(a+b+1)}$$

نحصل على:

$$E(X) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} * \frac{B(\alpha+1,\beta)}{(\alpha+\beta+1)}$$
$$= \Gamma(\alpha+1) * \frac{\Gamma(\beta)}{\left(\Gamma(\alpha+\beta+1) * B(\alpha,\beta)\right)}$$
$$= \frac{\alpha}{(\alpha+\beta)}$$

وبالتالي، نستنتج أن:

$$E(X) = \mu = \frac{\alpha}{(\alpha + \beta)}$$

ب) التباين والانحراف المعياري:

التباين: $\sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)\ (\alpha+\beta)^2}$

الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)\ (\alpha+\beta)^2}}$

ويكون إثبات ذلك كالتالي:

نعلم أن:

$$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2]$$
$$= \int_0^1 (x - \mu)^2 f(x)\, dx$$
$$= \int_0^1 \left(x - \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2 \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\ x^{\alpha-1}\ (1-x)^{\beta-1}\ dx$$
$$= \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \int_0^1 \left(x - \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2\ x^{\alpha-1}\ (1-x)^{\beta-1}\ dx$$
$$= \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \int_0^1 \left(x^2 - 2x * \frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2\right) x^{\alpha-1}\ (1-x)^{\beta-1}\ dx$$

$$\int_0^1 x^a * (1-x)^b dx = \frac{B(a+1,b)}{(a+b+1)}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} * \left(\frac{B(\alpha+2,\beta)}{(\alpha+\beta+2)} - 2 * \frac{\frac{\alpha}{(\alpha+\beta)B(\alpha+1,\beta)}}{(\alpha+\beta+1)} + \frac{\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^{2B(\alpha,\beta)}}{(\alpha+\beta)}\right)$$

$$= \frac{1}{B(\alpha,\beta)} * \left(\frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta)}{\left(\Gamma(\alpha+\beta+2)\right)} - \frac{2\alpha}{\alpha+\beta} * \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\left(\Gamma(\alpha+\beta+1)\right)} + \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^{2\Gamma(\alpha)} * \frac{\Gamma(\beta)}{\left(\Gamma(\alpha+\beta)\right)}\right)$$

$$= \frac{\alpha\beta}{\left((\alpha+\beta+1)*\ (\alpha+\beta)^2\right)}$$

ج) **الدالة المولدة للعزوم:**

$$M(t) = E[e^{tX}]$$

$$= \int_0^1 e^{tx} *\ f(x)dx$$

$$= \int_0^1 e^{tx} \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\ x^{\alpha-1}\ (1-x)^{\beta-1}dx$$

باستخدام خاصية التكامل لدالة بيتا:

$$\int_0^1 x^a *\ (1-x)^b *\ e^{tx}dx\ = \frac{B(a+1,b)}{(a+b+1)} *\ M_{B(a+1,b,t)}$$

حيث $M\_B(a,b,t)$ هي دالة مولدة للعزوم لتوزيع بيتا.

نحصل على:

$$M(t) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} * \left(\frac{B(\alpha+1,\beta)}{(\alpha+\beta+1)}\ *\ M_{B(\alpha+1,\beta,t)} - \frac{B(\alpha,\beta+1)}{(\alpha+\beta+1)} *\ M_{B(\alpha,\beta+1,t)}\right)$$

$$M(t) = \Gamma(\alpha+1) * \frac{\Gamma(\beta)}{\left(\Gamma(\alpha+\beta+1) * B(\alpha,\beta)\right)} *\ M_{B(\alpha+1,\beta,t)} - \Gamma(\alpha) * \frac{\Gamma(\beta+1)}{\left(\Gamma(\alpha+\beta+1) * B(\alpha,\beta)\right)} *\ M_{B(\alpha,\beta+1,t)}$$

وهي الدالة المولدة للعزوم في توزيع بيتا.

6-4- أمثلة تطبيقية:

6-4-1- المثال الأول:

إذا علمت أن $B(\alpha,\beta)$ هي دالة بيتا beta function، فأحسب قيمها ثم التوقع الرياضي والتباين في كل حالة من الحالات التالية:

- ✓ $B(2,8)$
- ✓ $B(3,4)$
- ✓ $B(10,4)$
- ✓ $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

حل المثال الأول:

نعلم أن:

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

الحالة 1: $B(2,8) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \frac{\Gamma(2)\Gamma(8)}{\Gamma(2+8)} = \frac{2!8!}{10!} = \frac{80640}{3628800} = 0.022$

التوقع الرياضي: $E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{2}{10}$

التباين: $\sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)\ (\alpha+\beta)^2} = \frac{2*8}{(2+8+1)(2+8)^2} = 0.145$

الحالة 2: $B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \frac{\Gamma(3)\Gamma(4)}{\Gamma(3+4)} = \frac{2!3!}{6!} = \frac{12}{720} = 0.016$

التوقع الرياضي: $E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{3}{7}$

التباين: $\sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)\ (\alpha+\beta)^2} = \frac{3*4}{(3+4+1)(3+4)^2} = \frac{12}{8*49} = 0.0306$

الحالة 3: $B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \frac{\Gamma(10)\Gamma(4)}{\Gamma(10+4)} = \frac{9!3!}{14!} = \frac{1}{40000}$

التوقع الرياضي: $E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{10}{14} = 0.714$

التباين: $\sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)\ (\alpha+\beta)^2} = \frac{10*4}{(10+4+1)(10+4)^2} = 0.0136$

الحالة 4: $B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})} = \frac{\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{1} = \pi$

التوقع الرياضي: $E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{0.5}{1} = 0.5$

التباين: $\sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)\ (\alpha+\beta)^2} = \frac{0.5*0.5}{(0.5+0.5+1)(0.5+0.5)^2} = \frac{0.25}{2*1} = 0.125$

6-4-2- المثال الثاني:

المتغير عشوائي X له توزيع بيتا مع معلمتين $\alpha = 3$ و $\beta = 2$، احسب:

- ✓ دالة الكثافة $f(x)$
- ✓ التوقع الرياضي $E[X]$
- ✓ التباين σ^2 والانحراف المعياري σ

الحل:

دالة الكثافة $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$$

حيث $\alpha = 3$ و $\beta = 2$

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(2+3)}{\left(\Gamma(3)\Gamma(2)\right)} * x^{3-1} * (1-x)^{2-1}$$

$$f(x) = 12 * x^2 * (1-x)$$

دالة التوزيع: $F(x)$

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{B(\alpha,\beta)} t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\, dt$$

التوقع الرياضي $E[X]$:

$$E[X] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{3}{5}$$

التباين σ^2 والانحراف المعياري σ:

$$\sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)\,(\alpha+\beta)^2} = \frac{3*2}{(3+2+1)(3+1)^2} = \frac{1}{16}$$

$$P(0.2 \le X \le 0.6):$$

7- توزيع كاي مربع (Chi-square distribution)

7-1- مفاهيم أساسية

جاءت فكرة توزيع كاي تربيع من نظرية التوزيع الطبيعي المعياري، حيث إذا كانت $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ متغيرات عشوائية مستقلة لكل منها توزيع طبيعي معياري، فإن مجموع مربعات هذه المتغيرات يرمز له بالرمز: $\chi 2 = {X_1}^2 + {X_2}^2 + {X_3}^2 \; \dots + {X_n}^2$، وتوزيع هذا المجموع هو ما يعرف بتوزيع "كاي تربيع" وبالتالي عندما نقول أن المتغير (X) يتبع توزيع "كاي تربيع" فهذا يعني أن هذا المتغير هو عبارة عن مجموع مربعات (n) من المتغيرات العشوائية المستقلة والتي يخضع كل منها للتوزيع الطبيعي، أي أن عدد درجات الحرية (n) يتبع عدد المتغيرات، ولهذا العدد (n) أهمية كبيرة تظهر في أثناء استخدام جداول (χ_n^2)، (ديب، 2009، صفحة 209) وهذه الجداول تعطي قيم الاحتمالات التالية:

$$P(X = x) = \int_{X_0}^{+\infty} f(x)dx$$

وهذا ما يمكن التعبير عنه كما يلي: $X_i \backsim N(\mu, \sigma)$ فإن $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ حيث: $z \backsim N(1, 0)$ يكافيء منطقيا:

$$z^2 \backsim \chi_n^2 \text{ :حيث } Z^2 = \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2$$

يمكن ملاحظة أن هذا التوزيع هو حالة خاصة من توزيع غاما عندما تكون: $\alpha = \frac{n}{2}$ و $\beta = 2$.

حيث يمكن استخراج دالة الكثافة الاحتمالية لكاي تربيع بتعويض قيم $\alpha = \frac{n}{2}$ و $\beta = 2$.

نذكر بدالة الكثافة الاحتمالية لقانون غاما تأخذ الشكل التالي:

$$f(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} \qquad , x > 0$$

حيث: α, β تمثل معلمات هذا النموذج وهي أكبر من 0

$\Gamma(\alpha)$ تمثل دالة غاما وتأخذ الشكل التالي:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy$$

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \qquad , x > 0$$

$$f(x) = 0 \qquad x \le 0$$

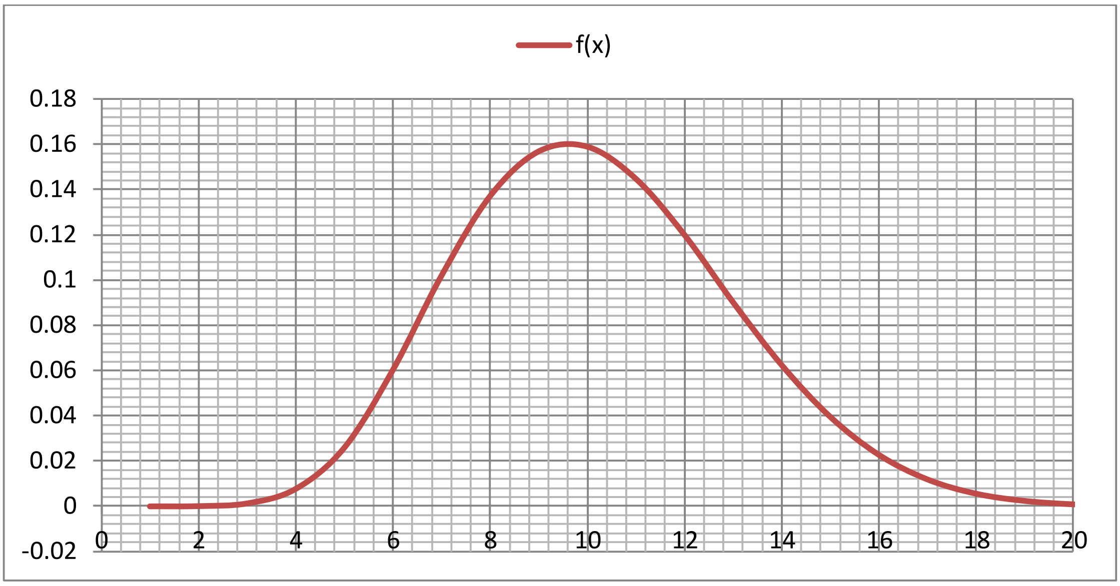
مثال: من أجل $(n = 20)$ و$x \in [0 - 20]$، نقوم بحساب قيم دالة الكثافة الاحتمالية المقابلة لكل قيمة من قيم (x) ثم نحاول تمثيلها بيانيا.

الجدول رقم 12: قيم دالة الكثافة الاحتمالية حسب قانون توزيع كاي تربيع.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f(x)	0	0.0001	0.0013	0.0077	0.0259	0.0603	0.102	0.1372	0.157	0.1591	0.1449
x		11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
f(x)		0.1201	0.0903	0.0625	0.0396	0.0228	0.0119	0.0056	0.0024	0.0009	0.0003

المصدر: من إعداد الباحث استنادا إلى معطيات المثال.

الشكل رقم 20: التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية حسب قانون توزيع كاي تربيع.



المصدر: من إعداد الباحث استنادا إلى معطيات المثال.

2-7- خصائص توزيع كاي مربع:

دالة التوزيع التراكمية لتوزيع كاي تربيع تُعطى بالصيغة التالية:

$$F(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

حيث:

$x > 0$ هو المتغير العشوائي؛

n هو درجة الحرية (عدد المتغيرات العشوائية المستقلة المربعة)؛

$\Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{x}{2}\right)$ هي دالة غاما غير كاملة؛

$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ هي دالة غاما كاملة.

باستخدام هذه الصيغة، يمكن حساب دالة التوزيع التراكمية لتوزيع كاي تربيع لقيم مختلفة من x وn.

هناك جداول خاصة بهذا التوزيع تبين قيم χ_n^2 النظرية، (القيم الحرجة)، عند درجة حرية معينة ومستوى معنوية يرمز له بـα (أنظر الملحق رقم 02)، فمثلا لإيجاد قيم χ_n^2 عند درجة حرية 7 ومستوى

معنوية $\alpha = 0.005$ نبحث عنها في الجدول، وهي نقطة التقاء السطر 7 مع العمود $\chi^2_{0.005}$، نجدها تساوي 20.278.

الشكل رقم21: كيفية البحث عن قيم χ^2_n في جدول توزيع كاي تربيع.

df	$\chi^2_{0.100}$	$\chi^2_{0.050}$	$\chi^2_{0.025}$	$\chi^2_{0.010}$	$\chi^2_{0.005}$
1	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750
6	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955

المصدر: من إعداد الباحث.

تمثل القيمة 20.278 قيمة المتغير العشوائي χ^2_n التي تعطي احتمال متراكم قدره 0.995 للمجال $[0 - 20.278]$، أو هي قيمة المتغير العشوائي χ^2_n التي تعطي احتمال متراكم قدره 0.005 للمجال $[20.278 - (+\infty)]$.

وهذا يعني أن:

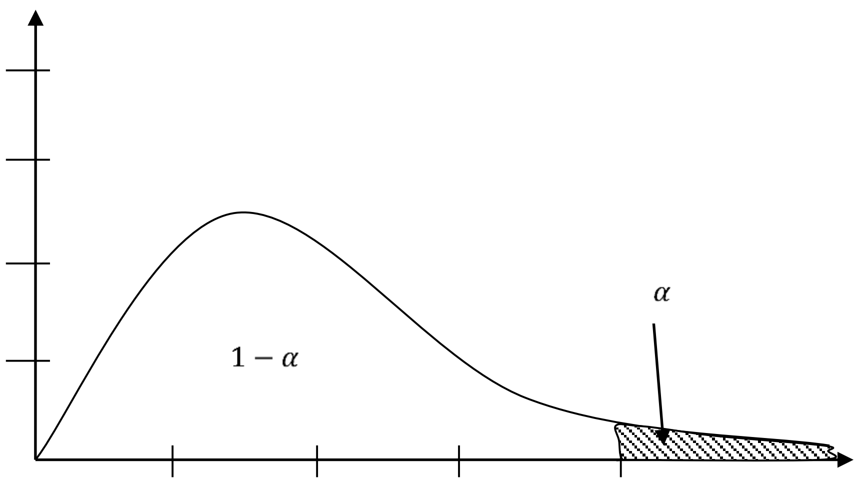
$$P(X = x) = \int_0^{\chi^2_n} f(x^2)dx^2 = 1 - \alpha$$

أو:

$$P(X = x) = \int_{\chi^2_n}^{+\infty} f(x^2)dx^2 = \alpha$$

نحاول إظهار ما سبق في الشكل التالي:

الشكل رقم22: التمثيل البياني للقيم الجدولية لـ χ^2_n.



المصدر: من إعداد الباحث.

يتميز توزيع كاي مربع بكونه:

- غير متماثل: توزيع كاي مربع هو توزيع غير متماثل، حيث يكون الانحراف المعياري أكبر من الوسط.
- غير محدد في المنطقة السالبة: توزيع كاي مربع هو توزيع احتمالي مستمر يأخذ قيماً موجبة فقط، ولا يمكن أن يأخذ قيماً سالبة.
- قيم توزيع كاي مربع تتراوح من الصفر إلى ما لا نهاية.
- انحراف موجب: توزيع كاي مربع هو توزيع ملتوٍ إلى اليمين، أي أن معظم القيم تتجمع على الجانب الأيسر من التوزيع مع وجود بعض القيم الكبيرة على الجانب الأيمن (السقاف، 2020، صفحة 110).
- إذا كان x_1, x_2 متغيرين عشوائيين مستقلين ويتبعان توزيع χ^2 كاي تربيع بدرجتي حرية على التوالي n_1, n_2 فإن المتغير العشوائي (x_1+x_2) يتبع توزيع χ^2 كاي تربيع بدرجة حرية $(n=n_1+n_2)$.

3-7- التوقع الرياضي والتباين والدالة المولدة للعزوم:

أ) **التوقع الرياضي:** $E(X)=\mu=n$

إثبات هذه العلاقة انطلاقا من المتغير (X) الذي يتبع توزيع "كاي تربيع" بدرجة حرية (n).

نضع: $X = \sum_1^n z_i^2$ حيث (z_i) متغير عشوائي طبيعي معياري.

من خصائص التوزيع الطبيعي المعياري:

$$E(z)=0$$
$$\sigma_z^2=1$$

من تعريف القيمة المتوقعة:

$$E(X)=\int_0^1 xf(x)dx$$

$$\begin{aligned} E(X) &= E\left(\sum\nolimits_1^n z_i^2\right) \\ &= \sum\nolimits_1^n E(z_i^2) \\ &= \sum\nolimits_1^n \sigma_z^2 \\ &= \sum\nolimits_1^n 1 \\ &= n \end{aligned}$$

ب) **التباين والانحراف المعياري:**

التباين يعطى بالعلاقة التالية: $\sigma^2=2n$

أما الانحراف المعياري: $\sigma=\sqrt{2n}$

أثبات أن: $\sigma^2=2n$

$$\sigma^2 = \sigma^2_{\sum_1^n z_i^2}$$

نعلم أن: $\sigma^2_{z^2}=2$

$$\begin{aligned} &= \sum \sigma^2_{z^2} \\ &= \sum 2 \\ &= 2n \end{aligned}$$

ج) <u>الدالة المولدة للعزوم:</u>

نعلم أن:

$$M(t) = E[e^{tX}]$$
$$= \int_0^{+\infty} e^{tx} * f(x)dx$$
$$= \int_0^{+\infty} e^{tx} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx$$
$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{+\infty} e^{tx} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx$$
$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{+\infty} e^{-(\frac{1}{2}-t)x} x^{\frac{n}{2}-1} dx$$

نقوم بوضع: $y = -(\frac{1}{2} - t)x$ ومنه: $x = \frac{2y}{1-2t}$ أي: $dx = \frac{2dy}{1-2t}$

$$M(t) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{+\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}-1}y^{\frac{n}{2}-1}}{(1-2t)^{\frac{n}{2}-1}} \frac{2e^{-y}}{1-2t} dy$$
$$M(t) = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})(1-2t)^{\frac{n}{2}}} \int_0^{+\infty} y^{\frac{n}{2}-1}e^{-y} dy$$
$$\int_0^{+\infty} y^{\frac{n}{2}-1}e^{-y} dy = \Gamma(\frac{n}{2})$$
$$M(t) = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})(1-2t)^{\frac{n}{2}}} \Gamma(\frac{n}{2})$$
$$M(t) = \frac{1}{(1-2t)^{\frac{n}{2}}}$$
$$\boxed{M(t) = (1-2t)^{-\frac{n}{2}}}$$

وهي الدالة المولدة للعزوم (بداوي، 2018، صفحة 197).

<u>7-4- أمثلة تطبيقية:</u>

7-4-1- المثال الأول:

يعتبر مجمع (ORAVIO) مجمع تربية الدواجن للغرب بمستغانم، ومن بين وحداته المؤسسة العمومية الاقتصادية MOSTAVI، المتخصص في تربية الدواجن، في حظيرة تابعة لهذه المؤسسة تم وزن عينة من 25 دجاجة مع افتراض أن توزيع أوزان الدجاج يتبع توزيع طبيعي. وكانت النتائج كما هي مبينة في الجدول.

الجدول رقم 13: قيم أوزان الدجاج في الحظيرة.

الأوزان	3.05	3	2.95	2.9	2.85	2.8	2.75	2.7	2.65	2.6	2.55	2.5
3.1	3.2	3.15	3.7	3.65	3.6	3.55	3.5	3.45	3.4	3.35	3.3	3.25

المصدر: من إعداد الباحث استنادا إلى معطيات المثال.

المطلوب:

- استخدم توزيع كاي تربيع لاختبار ما إذا كان متوسط أوزان الدجاج في الحظيرة يساوي 3.5 كغ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

الحل:

ليكن x متغير عشوائي يمثل أوزان الدجاج. يتبع توزيع χ^2 كاي تربيع بدرجة حرية $n = 25$

صياغة الفرضيات:

الفرضية الصفرية (H_0): متوسط وزن الدجاج يساوي 4 كغ.

الفرضية البديلة (H_1): متوسط وزن الدجاج لا يساوي 4 كغ.

نستخدم توزيع كاي تربيع لأن المتغير العشوائي (وزن الدجاج) يتبع توزيع طبيعي.

درجة الحرية = $n - 1 = 25 - 1 = 24$.

نفرض أن متوسط وزن الدجاج هو 4 كغ:

نحسب مجموع مربعات الانحرافات عن المتوسط:

$$\Sigma(x - 3.5)^2 = 1.0 + 0.9025 + 0.81 + 0.7225 + 0.64 + 0.5625 + 0.49 + 0.4225 + 0.36 + 0.3025 + 0.25 + 0.2025 + 0.16 + 0.1225 + 0.09 + 0.0625 + 0.04 + 0.0225 + 0.01 + 0.0025 + 0.0 + 0.0025 + 0.01 + 0.0225 + 0.04 = 7.25$$

$$\Sigma(x - 3.5)^2 = 7.25$$

قيمة الإحصائية = $\frac{\Sigma(x - 3.5)^2}{3.5} = \frac{7.25}{3.5} = 2.071$

مقارنة قيمة الإحصائي بالقيمة الحرجة:

مستوى المعنوية = 5% = 0.05

القيمة الحرجة من جدول توزيع كاي تربيع عند درجة حرية 24 وعند مستوى معنوية 0.05 هي 36.415

اتخاذ القرار:

قيمة الإحصائية (2.071) أصغر من القيمة الحرجة او الجدولية (36.415)

لذلك، نقبل الفرضية الصفرية H_0 ونرفض الفرضية البديلة H_1.

نستنتج أن متوسط وزن الدجاج يساوي 3.5 كغ عند مستوى معنوية 5%.

7-4-2- المثال الثاني:

إذا كان x متغير عشوائي يتبع توزيع χ^2 كاي تربيع بدرجة حرية n=14 احسب الاحتمالات التالية:

$$p(2.03 < x < 4.12)$$

$$p(x > 15)$$

$$p(x < 21)$$

$$p(\mathrm{x} < 1)$$
$$p(2.03 < \mathrm{x} < 4.12)$$

الحل:

احتمال $p(\mathrm{x} > 15)$:

قيمة كاي تربيع عند 15 = 15

باستخدام جدول توزيع كاي تربيع أو حاسبة إحصائية:

$P(x > 15) = 1 - P(x \leq 15) = 1 - 0.4754 = 0.5246$

إذن، الاحتمال المطلوب هو $P(x > 15) = 0.5246$ أو 52.46%.

احتمال $p(\mathrm{x} < 21)$:

قيمة كاي تربيع عند 21 = 21

باستخدام جدول توزيع كاي تربيع أو حاسبة إحصائية:

$P(x < 21) = P(x \leq 21) = 0.9054$

إذن، الاحتمال المطلوب هو $P(x < 21) = 0.9054$ أو 90.54%.

احتمال $p(\mathrm{x} < 1)$:

قيمة كاي تربيع عند 1 = 1

باستخدام جدول توزيع كاي تربيع أو حاسبة إحصائية:

$P(x < 1) = P(x \leq 1) = 0.0005$

إذن، الاحتمال المطلوب هو $P(x < 1) = 0.0005$ أو 0.05%.

احتمال $p(2.03 < \mathrm{x} < 4.12)$:

احسب قيمة كاي تربيع المقابلة للحدود السفلى والعليا:

قيمة كاي تربيع عند الحد السفلي 2.03 = 2.03

قيمة كاي تربيع عند الحد العلوي 4.12 = 4.12

احسب احتمال الحصول على قيم بين 2.03 و4.12 باستخدام دالة التوزيع التراكمي لتوزيع كاي تربيع:

$$P(2.03 < x < 4.12) = P(x > 2.03) - P(x > 4.12)$$

حيث:

$$P(x > 2.03) = 1 - P(x \leq 2.03)$$
$$P(x > 4.12) = 1 - P(x \leq 4.12)$$

باستخدام جدول توزيع كاي تربيع أو حاسبة إحصائية:

$$P(x \leq 2.03) = 0.0529$$
$$P(x \leq 4.12) = 0.9692$$

لذلك:

$$P(2.03 < x < 4.12) = (1 - 0.0529) - (1 - 0.9692)$$
$$= 0.9163 - 0.0308 = 0.8855$$

إذن، الاحتمال المطلوب هو $P(2.03 < x < 4.12) = 0.8855$ أو 88.55%.

8- توزيع ستيودنت (Student's t-distribution)

8-1- مفاهيم أساسية

توزيع ستيودنت (Student's t-distribution) هو توزيع احتمالي يستخدم في الإحصاء، خاصة في تحليل البيانات ذات العينة الصغيرة. يتميز بأنه له ذيول أطول مقارنة بالتوزيع الطبيعي، مما يجعله أكثر حساسية للقيم المتطرفة.

8-2- خصائص توزيع ستيودنت:

ليكن المتغيران العشوائيان Y و Z مستقلين، حيث يتبع Z توزيعًا طبيعيًا معياريًا، $Z \sim N(0,1)$، و Y يتبع توزيع كاي تربيع بدرجة حرية v.

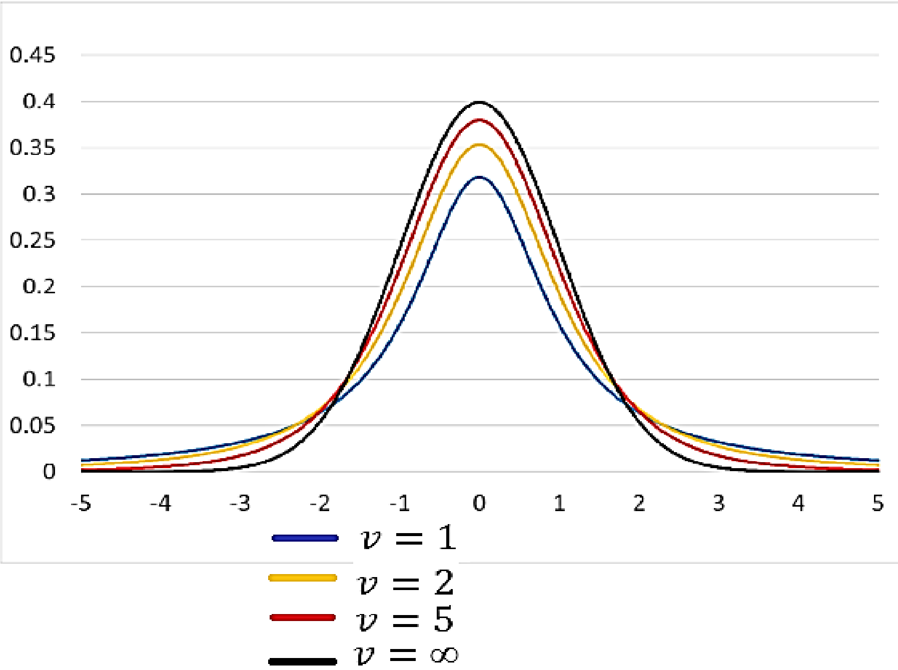
$$X = \frac{Z}{\sqrt{\frac{W}{v}}}$$

تُعطى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ستيودنت بالصيغة التالية:

$$f(x;\ \nu) = \left(\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\left(\sqrt{\nu\,\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right)}\right) * \left(1 + \left(\frac{x^2}{\nu}\right)\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

حيث ν هو عدد درجات الحرية و Γ هي دالة غاما.

الشكل رقم 22: التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية حسب قانون ستيودنت.

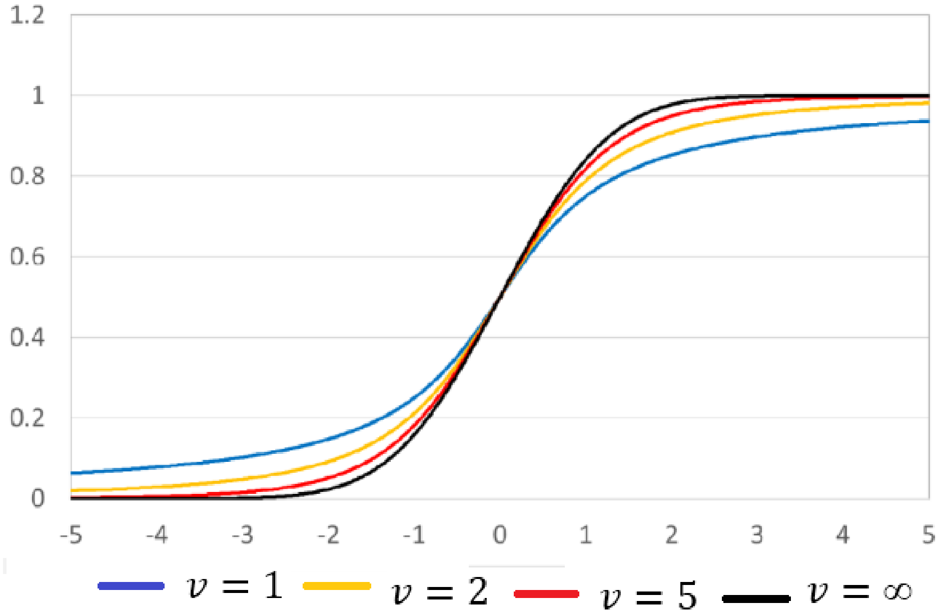


source : (Linus, 2024, p. 163)

دالة التوزيع:

دالة التوزيع التراكمي لتوزيع ستيودنت تُعبر عن الاحتمالية أن تكون القيمة أقل من أو تساوي (x) لا توجد صيغة مغلقة لدالة التوزيع، ولكن يمكن حسابها باستخدام الجداول أو برامج الإحصاء.

الشكل رقم 23: التمثيل البياني لدالة التوزيع حسب قانون ستيودنت.



source : (Linus, 2024, p. 164)

3-8- التوقع الرياضي والتباين والدالة المولدة للعزوم:

أ) التوقع الرياضي:

التوقع الرياضي لتوزيع ستيودنت هو:

إذا كانت درجات الحرية $\nu > 1$ فإن : $E[X] = 0$

إذا كانت $\nu \leq 1$: التوقع غير معرف.

نعلم أن:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

لإثبات أن $E[X] = 0$ في توزيع ستيودنت، نبدأ بدالة الكثافة الاحتمالية:

$$f(x;\ \nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\left(\sqrt{\nu\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right)} * \left(1 + \left(\frac{x^2}{\nu}\right)\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

لاحظ أن هذه الدالة زوجية، أي أن $f(x) = f(-x)$ باستخدام تعريف التوقع الرياضي:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{0} xf(x)dx + \int_{0}^{+\infty} xf(x)dx$$

نضع: $-u = x$

$$E(X) = \int_{0}^{+\infty} (-u)f(-u)(-du) + \int_{0}^{+\infty} xf(x)dx$$

$$E(X) = -\int_{0}^{+\infty}(u)f(u)(du) + \int_{0}^{+\infty}xf(x)dx$$

نتيجة هذا التكامل:

$$E(X) = -E(X) + E(X)$$

ومنه:

$$E(X) = 0$$

ب) <u>التباين والانحراف المعياري:</u>

نعتبر : $\mathbf{2} < v$ فإن التباين يعطى بالعلاقة التالية:

$$\sigma^2 = \frac{v}{v-2}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{v}{v-2}}$$

ويكون إثبات ذلك كالتالي:

نعلم أن:

$$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}(x - \mu)^2 f(x)\, dx$$

مع:

$$\mathrm{f(x;\ \nu)} = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\left(\sqrt{\nu\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right)} * \left(1 + \left(\frac{x^2}{\nu}\right)\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

استخدام خاصية التوزيع التربيعي:

يمكن استخدام خاصية أن متغيرًا يتبع توزيع ستيودنت مع درجات حرية ν يمكن تمثيله كالتالي:

$$X = \frac{Z}{\sqrt{\frac{W}{v}}}$$

حيث: Z يتبع توزيعًا طبيعيًا $N(0,1)$، و w يتبع توزيع كاي-تربيع مع درجات حرية ν

$$E(X^2) = E\left(\frac{Z^2}{\frac{W}{v}}\right) = E(Z^2) * E\left(\frac{1}{\frac{W}{v}}\right)$$

بما أن يتبع توزيعًا طبيعيًا $N(0,1)$ ، فإن:

$$E(Z^2) = 1$$

باستخدام خاصية توزيع كاي-تربيع:

$$E\left(\frac{1}{\frac{W}{v}}\right)=\frac{v}{v-2}$$

ومنه:

$$E(X^2)=1*\frac{v}{v-2}$$

$$E(X^2)=\frac{v}{v-2}$$

ج) الدالة المولدة للعزوم:

تُعطى الآلة المولدة للعزوم لتوزيع ستيودنت بالصيغة:

$$M(t)=\left(1-\left(\frac{2t}{v}\right)\right)^{-\frac{v}{2}} \text{ لـ } t<\left(\frac{v}{2}\right)$$

هذا يساعد في حساب العزوم لجميع الدرجات المطلوبة.

د- كيفية استخدام جدول توزيع ستيودنت

جدول توزيع ستيودنت (أنظر الملحق رقم 03) يُستخدم لتحديد القيم الحرجة المطلوبة لاختبارات الفرضيات أو لبناء فترات الثقة. هنا كيفية استخدامه خطوة بخطوة، بالإضافة إلى مثال لاستخراج القيم الجدولية مع إعطاء مستوى المعنوية ودرجات الحرية.

- تحديد مستوى المعنوية: على سبيل المثال، إذا كنت تستخدم $\alpha=0.05$ أو $\alpha=0.10$
- حديد درجات الحرية (v): حيث v=n-1 مع n هو حجم العينة.
- البحث عن القيمة الحرجة في الجدول:

ابحث في جدول توزيع ستيودنت عن الصف الذي يتوافق مع درجات الحرية. ثم ابحث عن العمود المناسب لمستوى المعنوية (أو $\alpha/2$ إذا كان الاختبار ثنائي الاتجاه).

8-4- أمثلة تطبيقية:

يتم تطبيق توزيع ستيودنت في:

- اختبار الفرضيات:

يُستخدم توزيع ستيودنت بشكل شائع في اختبار الفرضيات، خاصة عندما يكون حجم العينة صغيرًا (عادة أقل من 30). على سبيل المثال، إذا أردنا اختبار ما إذا كان متوسط درجات الطلاب في فصل معين يختلف عن متوسط الدرجات الوطني، يمكننا استخدام اختبار t لستودنت.

- تحليل البيانات:

في التحليل الإحصائي، يمكن استخدام توزيع ستيودنت لتقدير المتوسطات عندما يكون الانحراف المعياري غير معروف. على سبيل المثال، إذا تم جمع بيانات عن ارتفاع الأشخاص في مجتمع صغير، يمكن استخدام التوزيع لتقدير المتوسط والاحتمالات المرتبطة بذلك.

- التقدير الثقة:

يُستخدم توزيع ستيودنت في بناء فترات الثقة للمتوسطات. إذا كان لدينا عينة من البيانات، يمكننا إنشاء فترة ثقة 95% للمتوسط باستخدام القيم الحرجة من توزيع ستيودنت.

- تقييم المخاطر:

في المالية، يُستخدم توزيع ستيودنت لتقييم المخاطر، خاصة عند دراسة العوائد على الاستثمارات التي قد تتبع توزيعات غير طبيعية. يمكن أن يساعد على فهم سلوك العوائد في الأسواق المالية.

- تحليل التجارب العلمية:

في التجارب العلمية، خصوصًا تلك التي تتضمن قياسات صغيرة، يمكن استخدام توزيع ستيودنت لتحليل تأثير العوامل المختلفة على النتائج. على سبيل المثال، في تجربة دوائية، يمكن استخدام التوزيع لتحليل فعالية الدواء مقارنة بالدواء الوهمي.

- دراسة العلاقة بين المتغيرات:

يُستخدم توزيع ستيودنت في التحليل التراجعي الذي يتضمن تقدير المعاملات. يمكن استخدامه لتحديد ما إذا كانت العوامل المستقلة تؤثر بشكل معنوي على المتغير التابع.

8-4-1- المثال الأول:

$$t_{(\mathrm{v}=9)}^{\alpha=5\%} = 1.8331$$

الشكل رقم 23: كيفية البحث عن قيم $t_{(\mathrm{v}=9)}^{\alpha=5\%}$ في جدول توزيع ستيودنت.

t DISTRIBUTION TABLE

Entries provide the solution to $\Pr(t > t_p) = p$ where t has a t distribution with the indicated degrees of freedom.

df	$t_{0.100}$	$t_{0.050}$	$t_{0.025}$	$t_{0.010}$	$t_{0.005}$
1	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567
2	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248
3	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409
4	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041
5	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321
6	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995
8	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	1.3830	$\boxed{1.8331}$	2.2622	2.8214	3.2498
10	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693

المصدر: من إعداد الباحث.

$$\mathrm{t}_{(8)}^{\alpha=95\%} = -\mathrm{t}_{(8)}^{\alpha=1-0.95=0.01} = -2.718$$

الشكل رقم 24: كيفية البحث عن قيم $t_{(8)}^{\alpha=95\%}$ في جدول توزيع ستيودنت.

df	$t_{0.100}$	$t_{0.050}$	$t_{0.025}$	$t_{0.010}$	$t_{0.005}$
1	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567
2	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248
3	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409
4	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041
5	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321
6	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995
8	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693

المصدر: من إعداد الباحث.

$$t_{(5)}^{\alpha=0.990\%} = -t_{(5)}^{\alpha=0.01} = -3.3649$$

الشكل رقم 25: كيفية البحث عن قيم $t_{(5)}^{\alpha=0.990\%}$ في جدول توزيع ستيودنت.

df	$t_{0.100}$	$t_{0.050}$	$t_{0.025}$	$t_{0.010}$	$t_{0.005}$
1	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567
2	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248
3	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409
4	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041
5	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321
6	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995
8	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693

المصدر: من إعداد الباحث.

9- توزيع فيشر (Fisher distribution)

9-1- مفاهيم أساسية

لفهم توزيع فيشر نجري التجربة التالية:

- ✓ نقيس زمن سقوط كرة (من ارتفاع 100 متر) (v_1) مرة باستخدام الجهاز A.
- ✓ ونقيس زمن سقوط كرة (من ارتفاع 100 متر) (v_2) مرة باستخدام الجهاز B.

نتحصل على متغيرين مستقلين $(z_1, z_2, z_3, \dots, z_m)$، و $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ والذين نفترض أن كلاهما يتبعان التوزيع الطبيعي $(X \sim N(\mu_z, \sigma_z))$، $(Y \sim N(\mu_y, \sigma_y))$ على التوالي.

يمكن اعتبار المتغيرين (σ_z^2) و(σ_y^2) كمعاملات لقياس دقة قطع الجهازين، يُعتبر التباين قياسًا للقطع المقابلة للجهاز.

في هذه التجربة يمكن تقدير القيم العددية للمعامل ($\frac{\sigma_z^2}{\sigma_y^2}$) في هذا السياق، من المهم تحديد احتمال توزيع المتغير، حيث المتغير X المعرف بالصيغة التالية: $X=\frac{z_i/v_1}{y_i/v_2}$ يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية v_1 و v_2 وهما درجتي حرية البسط والمقام (Pestman, Wiebe , 2021, p. 86).

يعد توزيع فيشر توزيعًا مستمرًا ويعتمد على نوعين من درجات الحرية: درجات الحرية للبسط ودرجات الحرية للمقام، وهما معلمات التوزيع، يختلف منحنى فيشر باختلاف درجات الحرية للبسط والمقام، تُرمز قيم توزيع فيشر بـ"F" ، الذي يفترض قيمًا موجبة فقط، مثل التوزيع الطبيعي وتوزيع ت ستيودنت، شكل منحنى توزيع "F" يميل إلى اليمين، ويزداد التماثل كلما زادت درجات الحرية (Mann, Prem, 2024, p. 538).

تُكتب درجات الحرية للبسط ودرجات الحرية للمقام عادة كما يلي: $X \sim F^{\alpha}_{(v_1,v_2)}$

الرقم الأول (v_1) يدل على درجة الحرية للبسط (degree of freedom for the numerator $df=v_1$).

الرقم الثاني (v_2) يدل على درجة الحرية للمقام (degree of freedom for the denominator $df=v_2$).

2-9- خصائص توزيع فيشر:

يتميز توزيع فيشر بالخصائص التالية:

- يُستخدم لمقارنة تباينات مجموعتين.
- يعتمد على عدد درجات الحرية في كل من البسط والمقام.
- التوزيع: غير متماثل، ويتغير شكل التوزيع مع تغيير القيم (v_1) و (v_2).
- يُستخدم توزيع فيشر في اختبارات الفرضيات، خصوصًا في تحليل التباين (ANOVA) لتحديد ما إذا كانت هناك فروق ذات دلالة إحصائية بين متوسطات عدة مجموعات.

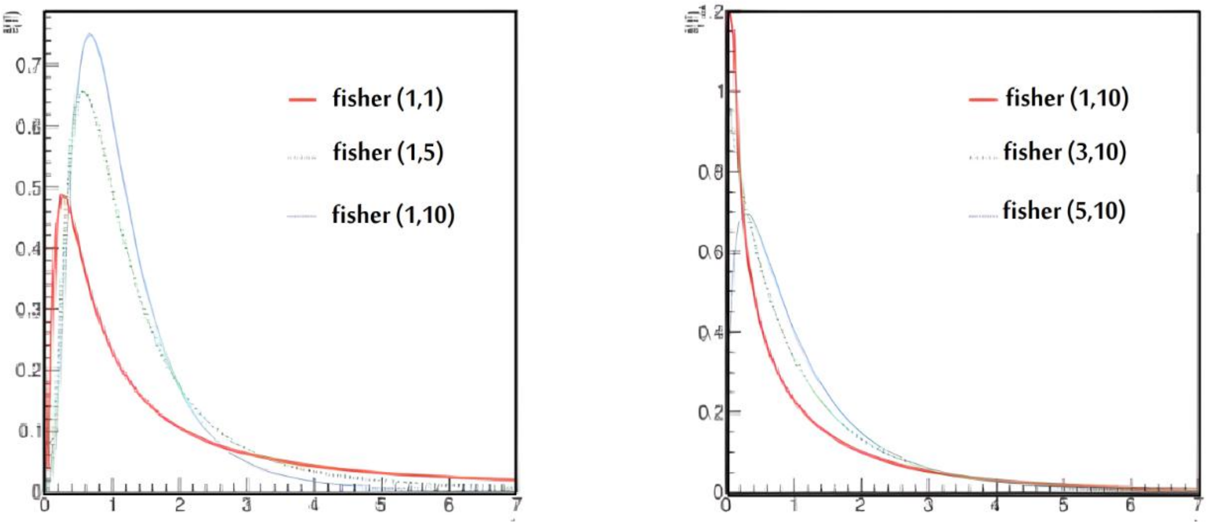
نفترض أن U و V هما متغيرات عشوائية تتبع توزيع χ_n^2 مع (v_1) و (v_2) درجة حرية على التوالي. إذا كانت U و V مستقلة إحصائيًا، فإن الإحصاءة ($\frac{U/(v_1)}{V/(v_2)}$) تتبع توزيع فيشر مع (v_1) درجة حرية في البسط و (v_2) درجة حرية في المقام (Pestman, Wiebe , 2021, p. 86).

$$\frac{U/(v_1)}{V/(v_2)} \sim F^{\alpha}_{(v_1,v_2)}$$

X يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية v_1 و v_2 له دالة كثافة احتمالية من الشكل:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v_2}{2}\right)}(v_1)^{\left(\frac{v_1}{2}\right)}(v_2)^{\left(\frac{v_2}{2}\right)}x^{\left(\frac{v_1}{2}\right)-1}(v_2+v_1x)^{\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)} & \ldots\ldots, x>0\\ 0 & \ldots\ldots x\le 0\end{cases}$$

الشكل رقم 26: التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية حسب قانون فيشر.



المصدر: (Gelé, 2020, p. 64).

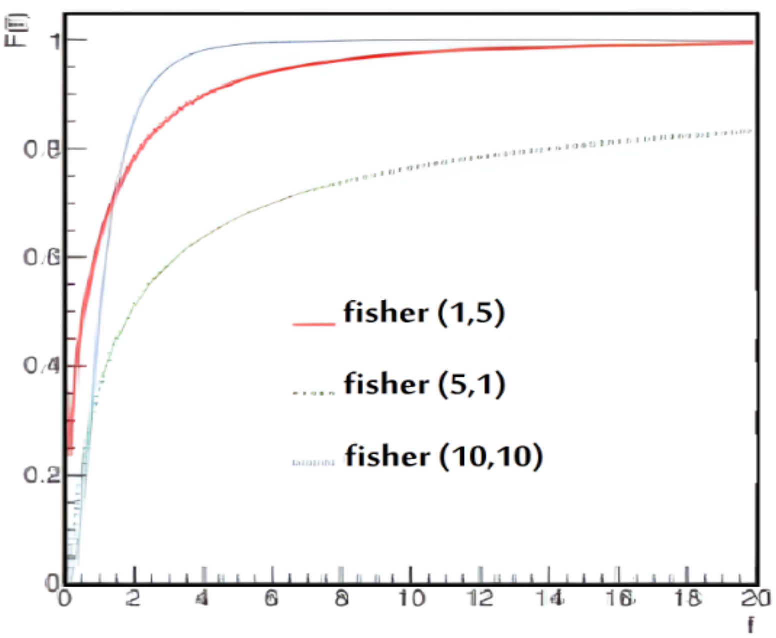
دالة التوزيع التراكمية:

لحساب مستويات الأهمية للاختبارات الفرضية أو فترات الثقة، غالبًا ما تحتاج إلى تقييم التوزيع التراكمي :(Gelé, 2020, p. 64)

$$F(x) = \int_{0}^{+\infty} f(x)\, dx = \alpha$$

(α) هو مستوى المعنوية الذي يحدده الباحث في اختبار فرضيات دراسته، هذه المعادلة تُستخدم لتحديد القيمة الحرجة لتوزيع فيشرمن خلال التكامل، والذي قد يتم تنفيذه باستخدام أدوات رياضية أو برمجيات إحصائية، كما يمكن استخدام جدول القيم الحرجة لفيشر (أنظر الملاحق رقم 04، 05، 06).

الشكل رقم 27: التمثيل البياني لدالة التوزيع حسب قانون فيشر.



المصدر: (Gelé, 2020, p. 64).

9-4- خطوات استخراج القيم الجدولية لتوزيع فيشر:

- ✓ تحديد مستويات المعنوية α، عادةً ما يكون 0.05 أو 0.01.
- ✓ تحديد درجات الحرية (v_1) و (v_2).
- ✓ استخدام جدول توزيع فيشر للعثور على القيمة الجدولية (F-critical) بناءً على (v_1) و (v_2).
- ✓ البحث في الصف المناسب لدرجات الحرية الأولى v_1 العمود المناسب لدرجات الحرية الثانية (v_2).

يمكننا مثلا استخراج القيمة الجدولية التالية:

$$F_{(3,8)}^{\alpha=5\%} = 4.07$$

الشكل رقم 28: كيفية استخراج القيم الجدولية حسب قانون فيشر.

v_2 \ v_1	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	30	∞
1	161	200	216	225	230	234	239	242	246	248	250	254
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,85	8,79	8,70	8,66	8,62	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,96	5,86	5,80	5,75	5,63
5	6,61	5,79	[illegible]	[illegible]	[illegible]	4,95	4,82	4,74	4,62	4,56	4,50	4,36
6	5,99	5,14	[illegible]	[illegible]	[illegible]	4,28	4,15	4,06	3,94	3,87	3,81	3,67
7	5,59	4,74	4,35	[illegible]	3,97	3,87	3,73	3,64	3,51	3,44	3,38	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,35	3,22	3,15	3,08	2,93

$F_{(3,8)}^{\alpha=5\%} = 4.07$

المصدر: من إعداد الباحث.

9-5- التوقع الرياضي والتباين والدالة المولدة للعزوم:

أ) **التوقع الرياضي:**

التوقع الرياضي: $\boxed{E(X) = \mu = \frac{v_1}{v_2 - 2}}$ .... شرط $v_2 > 2$

لاثبات ذلك يمكن اتباع الخطوات التالية:

نعلم أن:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v_2}{2}\right)} (v_1)^{\left(\frac{v_1}{2}\right)} (v_2)^{\left(\frac{v_2}{2}\right)} x^{\left(\frac{v_1}{2}\right)-1} (v_2 + v_1 x)^{\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)}$$

$$E(X) = \int_{0}^{+\infty} x \left[\frac{\Gamma\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v_2}{2}\right)} (v_1)^{\left(\frac{v_1}{2}\right)} (v_2)^{\left(\frac{v_2}{2}\right)} x^{\left(\frac{v_1}{2}\right)-1} (v_2 + v_1 x)^{\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)}\right] dx$$

يمكن تبسيط العلاقة على الشكل التالي:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(v_1/v_2)^{v_1/2} x^{(v_1-2)/2}}{B(\frac{v_1}{2},\frac{v_2}{2})(1+\left(\frac{v_1}{v_2}\right)x)^{\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)}}dx$$

$$E(X) = \int_0^{+\infty} dx$$

$$E(X) = \left[\frac{\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{v_1}{2}}}{B\left(\frac{v_1}{2},\frac{v_2}{2}\right)}\right]\int_0^{+\infty}\left[\frac{x^{\frac{v_1-2}{2}}}{\left(1+\left(\frac{v_1}{v_2}\right)x\right)^{\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)}}\right]dx$$

التكامل هو شكل معروف، ويمكن حسابه باستخدام دالة البيتا:

$$\int_0^{+\infty}\left[\frac{\omega^{a-1}}{(1+\omega)^{\mathrm{b}}}\right]d\omega = B(a,b-a)$$

ومنه وبعد بعد إتمام العمليات الرياضية، نجد أن:

$$\mathrm{E(X)} = \mu = \frac{v_1}{v_2-2}$$

ب) <u>التباين والانحراف المعياري:</u>

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{2{v_2}^2(v_1+v_2-2)}{v_1(v_2-2)^2(v_2-4)}}$$

نعلم أن القيمة المتوقعة:

$$E(X) = \frac{v_2}{(v_2-\ 2)}\left(\text{لـ}\ v_2 >\ 2\right)$$

والتباين يعطى بالعلاقة التالية:

$$\sigma^2 =\ E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

حساب $E(X^2)$

$$E(X^2) = \frac{\left(v_2^2(v_1+\ v_2-\ 2)\right)}{\left(v_1(v_2-\ 2)(v_2-\ 4)\right)}$$

حساب : $\left(E(X)\right)^2$

$$\left(\mathrm{E(X)}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{v}_2}{(\mathrm{v}_2-\ 2)}\right)^2 = \frac{\mathrm{v}_2^2}{(\mathrm{v}_2-\ 2)^2}$$

التباين:

$$\sigma^2 =\ E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

من خلال توحيد المقامات نجد:

$$\sigma^2 = \frac{(v_2^2[(v_1 + v_2 - 2)(v_2 - 2) - (v_2 - 4)])}{\left(v_1(v_2 - 2)^2(v_2 - 4)\right)}$$

يمكن تبسيط البسط:

$$\sigma^2 = \frac{\left(2\, v_2^2(v_1 + v_2 - 2)\right)}{\left(v_1(v_2 - 2)^2(v_2 - 4)\right)} \dots\dots\dots\dots\dots v_2 > 4$$

ج) <u>الدالة المولدة للعزوم:</u>

$$M(t) = E(e^{tX})$$

حيث X هو المتغير العشوائي الذي يتبع توزيع فيشر.

العزم الأول (المتوسط):

$$E(X) = \frac{v_2}{(v_2 - 2)} \dots (v_2 > 2)$$

العزم الثاني:

$$E(X^2) = \frac{\left(v_2^2(v_1 + v_2 - 2)\right)}{\left(v_1(v_2 - 2)(v_2 - 4)\right)} \dots (v_2 > 4)$$

<u>9-6- أمثلة تطبيقية:</u>

9-6-1- المثال الأول:

استخرج القيم التالية:

$F_{(v_1=5,v_2=4)}^{\alpha=5\%}$ ، $F_{(10,7)}^{\alpha=5\%}$ ،$F_{(15,8)}^{\alpha=1\%}$ $F_{(v_1=5,v_2=4)}^{\alpha=1\%}$

الحل:

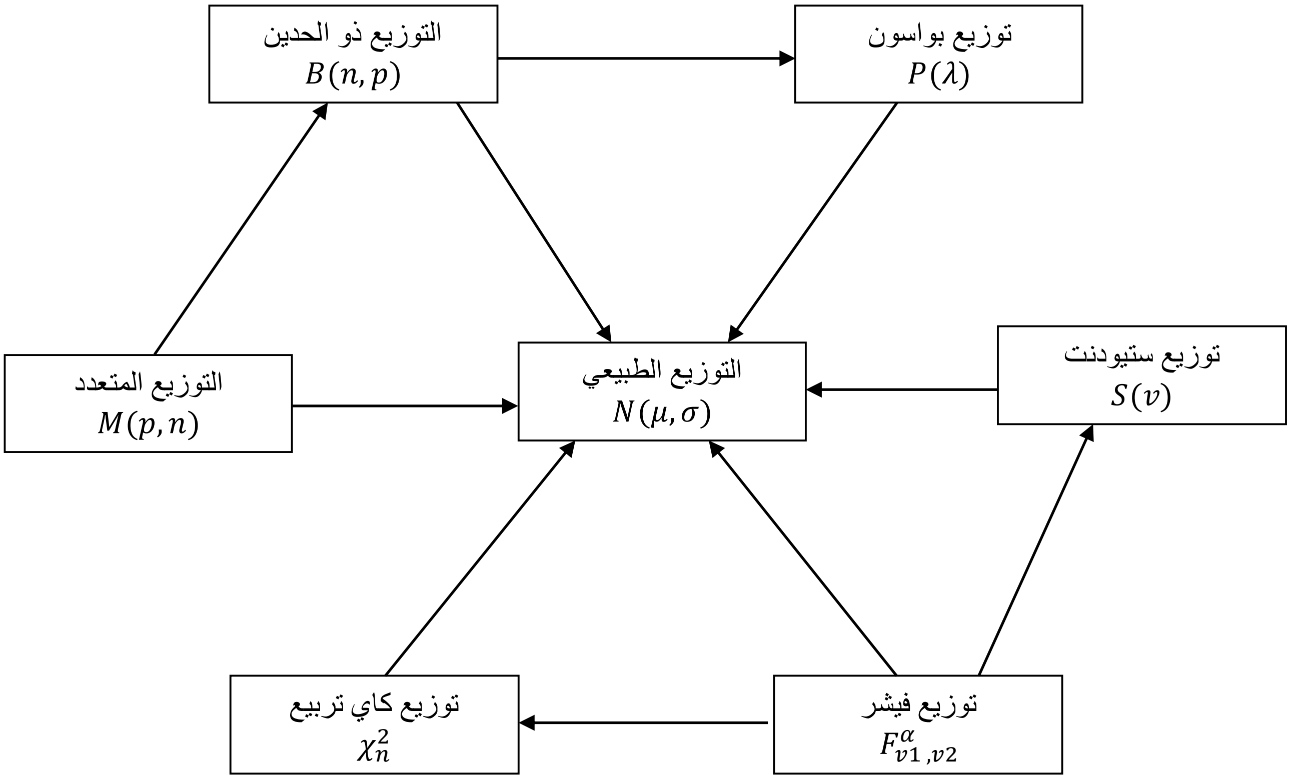
$F_{(v_1=5,v_2=4)}^{\alpha=5\%} = 6,26$ ، $F_{(10,7)}^{\alpha=5\%} = 3,64$ ،$F_{(15,8)}^{\alpha=1\%} = 5.54$

$F_{(v_1=5,v_2=4)}^{\alpha=1\%} = 5.99$

الفصل الثالث: تقارب بعض التوزيعات الاحتمالية

يمكن تقريب بعض التوزيعات الاحتمالية الشهيرة كما هو مبين في الشكل رقم 28.

الشكل رقم 29: شكل يمثل أهم علاقات التقارب بين التوزيعات الاحتمالية الشهيرة.



المصدر: (Gelé, 2020).

من الشكل رقم 28 نجد أن تقارب التوزيعات الاحتمالية تكون وفق شروط معينة من الواجب توافرها، ونذكرها كما يلي:

- تقارب التوزيع ذو الحدين (Binomial Distribution) بالتوزيع الطبيعي
- تقريب توزيع بواسون (Poisson Distribution) باستخدام التوزيع الطبيعي
- تقريب توزيع ذو الحدين (Binomial Distribution) باستخدام توزيع بواسون
- تقارب توزيع كاي تربيع (Chi-Squared Distribution) بالتوزيع الطبيعي
- تقارب توزيع فيشر (FISHER Distribution) بتوزيع كاي تربيع
- تقارب توزيع ستيودنت (student Distribution) بالتوزيع الطبيعي
- تقارب توزيع فيشر (FISHER Distribution) بتوزيع ستيودنت
- تقارب توزيع فيشر (FISHER Distribution) بالتوزيع الطبيعي
- تقارب توزيع المتعدد الحدود (Multinomial Distribution) بالتوزيع الثنائي
- تقارب توزيع المتعدد الحدود (Multinomial Distribution) بالتوزيع الطبيعي

1- تقارب التوزيع ذو الحدين بالتوزيع الطبيعي

إذا كان X متغير عشوائي يمثل عدد مرات نجاح الحدث عند إجراء تجربة بيرنولي لمرات متعددة تساوي n مرة، فانه يأخذ القيم X={0,1,2,3,…,n} باحتمال قدره $P(X = x)$ يحسب كالتالي (Sochi, 2023, p. 89):

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} C_n^x p^x (1-p)^{n-x} & x = 0,1,2,\dots,n \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

$$P(X = x) = \frac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

حيث: $C_n^x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$

- (n) هو عدد مرات تكرار التجربة؛
- P(X = x): احتمال أن يكون المتغير العشوائي (X) يأخذ القيمة (x)؛
- (p): احتمال النجاح.

تقارب التوزيع ذو الحدين بالتوزيع الطبيعي هو عملية تقدير الاحتمالات المرتبطة بتوزيع ذو الحدين، عندما $n \to +\infty$ فإن توزيع المتغير العشوائي:

$$Z = \frac{x - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

هذا النظرية أثبتها أولاً الرياضي الفرنسي أ. ديموفري (1733). يتيح لنا استخدام هذه النظرية، عندما يكون n كبيرًا، تقليل مجموعات الاحتمالات المرتبطة بتوزيع ذو الحدين من خلال تكاملات مناسبة للتوزيع الطبيعي القياسي. بشكل أكثر دقة، تنص النظرية على أنه عندما يكون n كبيرًا، فإن المتغير العشوائي X يتبع تقريبًا التوزيع الطبيعي $N(np, np(1-p))$. يتحسن التقريب كلما زاد n وهو "جيد جدًا" للقيم التي لا تقترب كثيرًا من الصفر أو الواحد. (Gupta, Bhisham & Guttman, 2014, p. 169)علاوة على ذلك، يكون التقريب أفضل عندما يكون:

$$\begin{cases} np > 5 \\ (1-p) > 5 \end{cases}$$

لإيضاح تقارب توزيع ذو الحدين إلى منحنى التوزيع الطبيعي، سنستخدم مثالًا عن رمي نرد سداسي. لنفترض أننا نرمي نردًا ونعتبر الحصول على رقم معين (مثل الرقم 6) كنجاح.

- توزيع ذو الحدين مع n=10 عدد مرات الحصول على الرقم 6:

عدد مرات رمي النرد n=10

احتمال الحصول على الرقم 6 (نجاح): $p = \frac{1}{6}$

توزيع الاحتمالات:

$X_i = 0,1,2,\dots,10$ (عدد مرات الحصول على 6)

الاحتمالات:

$$P(X = x) = \frac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

الجدول رقم 10: قيم الاحتمالات حسب قانون توزيع ذو الحدين (حالة n=10).

Xi	0	1	2	3	4	5
P(X=x)	0.1615	0.2677	0.2274	0.1029	0.0368	0.0093
Xi	6	7	8	9	10	
P(X=x)	0.0016	0.0002	0.00002	0.000002	0.0000002	

المصدر: من إعداد الباحث استنادا إلى معطيات المثال.

- توزيع ذو الحدين مع n=20 عدد مرات الحصول على الرقم 6:

عدد مرات رمي النرد n=20

احتمال الحصول على الرقم 6 (نجاح): $p = \frac{1}{6}$

توزيع الاحتمالات:

$X_i = 0,1,2,\dots,20$ (عدد مرات الحصول على 6)

الاحتمالات:

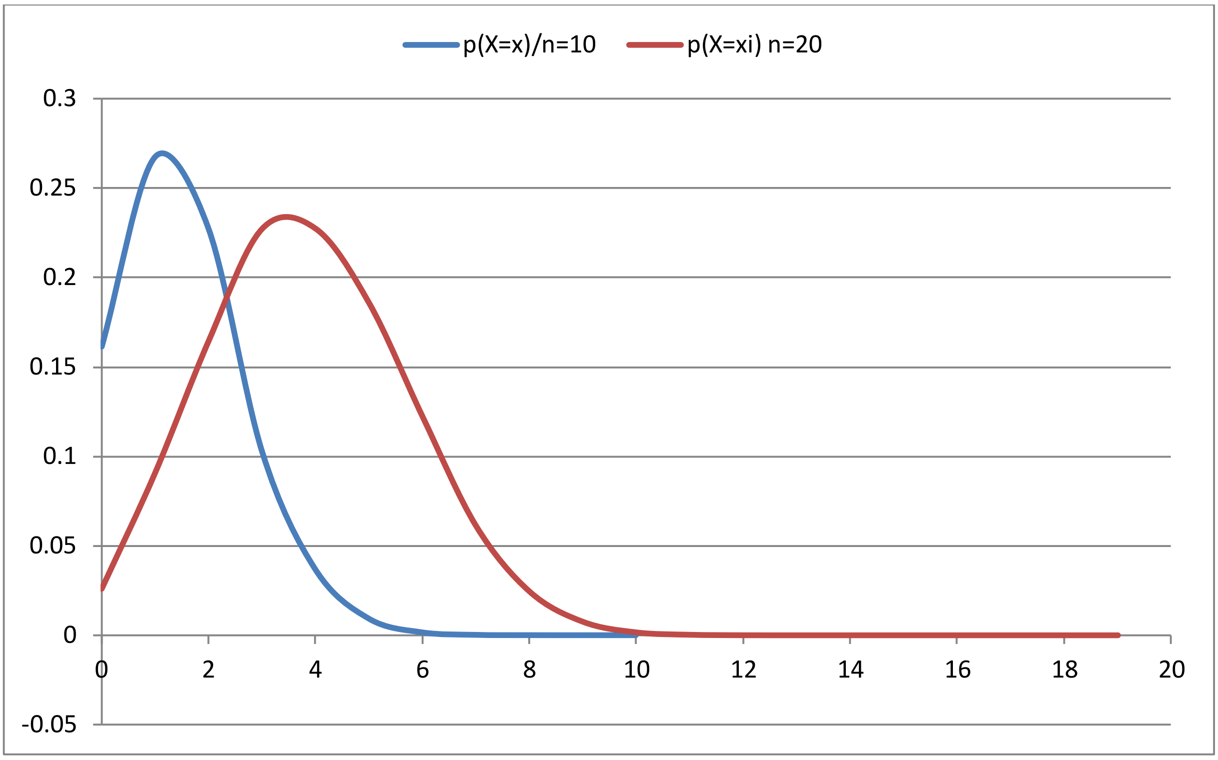
$$P(X = x) = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}$$

الجدول رقم 11: قيم الاحتمالات حسب قانون توزيع ذو الحدين (حالة n=20).

Xi	0	1	2	3	4	5
P(X=x)	0.026	0.0909	0.1645	0.2271	0.2271	0.026
Xi	6	7	8	9	10	11
P(X=x)	0.122	0.061	0.0244	0.0075	0.0016	0.0003
Xi	12	13	14	15	16	17
P(X=x)	0.00003	0.000002	0.0000001	0.000000002	0.00000	0.00000
Xi	18	19	20			
P(X=x)	0.00000	0.00000	0.00000			

المصدر: من إعداد الباحث استنادا إلى معطيات المثال.

الشكل رقم 30: تمثيل تقارب دالة الكثافة في قانون ذو الحدين بدالة الكثافة للتوزيع الطبيعي.



المصدر: من إعداد الباحث استنادا إلى الجدول 10 والجدول 11.

يظهر من مقارنة المنحنيين في حالة n=10 وحالة n=20 أن زيادة قيمة n تؤدي إلى الحصول على منحنٍ ذا شكل جرسي ومتماثل حول التوقع E(X)، يمكن رسم منحنيات التوزيع ذو الحدين لكل من n=40 و n=30 مع منحنى التوزيع الطبيعي المقدر لرؤية كيف تقترب التوزيعات من شكل المنحنى الطبيعي مع زيادة عدد التجارب.

- حساب الوسط الحسابي، التباين والانحراف المعياري (حالة n=10):

الوسط الحسابي: $(\mu) = np = 10 \times \frac{1}{6} = 1.67$

التباين: $(\sigma^2) = np(1-p) = 10 \times \frac{1}{6} \times \left(1-\frac{1}{6}\right) = 1.39$

الانحراف المعياري: $(\sigma) = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1.39} = 1.18$

- حساب الوسط الحسابي، التباين والانحراف المعياري (حالة n=20):

الوسط الحسابي: $(\mu) = np = 20 \times \frac{1}{6} = 3.33$

التباين: $(\sigma^2) = np(1-p) = 20 \times \frac{1}{6} \times \left(1-\frac{1}{6}\right) = 2.78$

الانحراف المعياري: $(\sigma) = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1.39} = 1.67$

1-1- أمثلة تطبيقية:

1-1-1-المثال الأول

ليكن (X) متغيرًا عشوائيًا يتبع توزيع ثنائي الحدين مع الدالة الاحتمالية التالية:

$$f(x) = P(X=x) = \begin{cases} C_{16}^{x}(1/2)^{x}(1/2)^{16-x} & x = 0,1,2,\dots,16 \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

- المطلوب: أحسب: $P(6 \leq x \leq 10)$ بطريقتين عن طريق تقريب التوزيع الثنائي بالتوزيع الطبيعي.

الخصائص الأساسية:

عدد المحاولات: n=16

احتمال النجاح في كل محاولة: $p = \frac{1}{2}$

حساب المتوسط والانحراف المعياري:

الوسط الحسابي: $(\mu) = np = 16 \times \frac{1}{2} = 8$

التباين: $(\sigma^2) = np(1-p) = 16 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 4$

التقريب باستخدام التوزيع الطبيعي:

عندما نستخدم التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ثنائي الحدين، يمكننا استخدام القيم المحسوبة أعلاه:

$$x \backsim N(np, np(1-p))$$

$$x \backsim N(8,2)$$

$$f(x) = P(6 \leq x \leq 10) = \sum_{x=6}^{10} C_{16}^{x}(1/2)^{x}(1/2)^{16-x} = 0.7898$$

$$Z = \frac{x - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

$$P(6 \leq x \leq 10) = P\left(\frac{x-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq z \leq \frac{x-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

$$P(6 \leq x \leq 10) = P\left(\frac{6-8}{4} \leq z \leq \frac{10-8}{4}\right) = P(-1.25 \leq z \leq 1.25)$$

$$= P(z \leq 1.25) - P(z \leq -1.25)$$
$$= P(z \leq 1.25) - (1 - P(z \leq 1.25))$$
$$= \emptyset(1.25) - (1 - \emptyset(1.25))$$
$$= 0.8944 - (1 - 0.8944)$$
$$P(6 \leq x \leq 10) = 0.7888$$

2-1-1-المثال الثاني

ليكن (X) متغيرًا عشوائيًا يتبع توزيع ثنائي الحدين مع الدالة الاحتمالية التالية:

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} C_{25}^{x}(1/4)^{x}(3/4)^{25-x} & x = 0,1,2,\ldots,25 \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

- المطلوب: أحسب: $P(2 \leq x \leq 8)$ بطريقتين عن طريق تقريب التوزيع الثنائي بالتوزيع الطبيعي.

الخصائص الأساسية:

عدد المحاولات: n=25

احتمال النجاح في كل محاولة: $p = \frac{1}{4}$

حساب المتوسط والانحراف المعياري:

الوسط الحسابي: $(\mu) = np = 25 \times \frac{1}{4} = 6.25$

التباين: $(\sigma^2) = np(1-p) = 25 \times \frac{1}{4} \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) = 18.75$

التقريب باستخدام التوزيع الطبيعي:

عندما نستخدم التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ثنائي الحدين، يمكننا استخدام القيم المحسوبة أعلاه:

$$x \sim N(np, np(1-p))$$

$$x \sim N(6.25, 4.33)$$

$$f(x) = P(2 \leq x \leq 8) = \sum_{x=2}^{8} C_{25}^{x} (1/4)^x (3/4)^{25-x}$$

$$Z = \frac{x - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

$$P(2 \leq x \leq 8) = P\left(\frac{x - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq z \leq \frac{x - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

$$P(6 \leq x \leq 10) = P\left(\frac{2 - 6.25}{4.33} \leq z \leq \frac{8 - 6.25}{4.33}\right) = P(-0.98 \leq z \leq 0.40)$$

$$= P(z \leq 0.40) - P(z \leq -0.98)$$
$$= P(z \leq 0.40) - (1 - P(z \leq 0.98))$$
$$= \emptyset(0.40) - (1 - \emptyset(0.98))$$
$$= 0.6554 - (1 - 0.8365)$$
$$P(2 \leq x \leq 8) = 0.4919$$

2- تقريب توزيع بواسون باستخدام التوزيع الطبيعي

إذا كان X متغيرًا عشوائيًا يتبع توزيع بواسون بمتوسط وتباين : λ

$$P(a \leq x \leq b) = P\left(\frac{(a - 0.5) - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \leq z \leq \frac{(a + 0.5) - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

حيث a و b هما عددان صحيحان غير سالبين، وZ هو متغير عشوائي طبيعي قياسي، و∓ 0.5 هو معامل تصحيح الاستمرارية (Gupta, Bhisham & Guttman, 2014, p. 171).

يستخدم معامل تصحيح الاستمرارية ± 0.5 لتحسين دقة التقريب عند الانتقال من التوزيع المنفصل (بواسون) إلى التوزيع المستمر (طبيعي).

2-1-مثال تطبيقي:

افترض أن عدد المكالمات الواردة إلى مركز خدمة العملاء في الساعة يتبع توزيع بواسون بمتوسط $\lambda = 10$ ، نريد حساب احتمال أن يتلقى المركز بين 8 و 12 مكالمة (شاملة) في ساعة واحدة.

حسب قانون بواسون:

$$P(8 \leq X \leq 12) = \sum_{x=8}^{12} \frac{e^{-\lambda}.\lambda^X}{X!}$$

$e = 2.718$

متوسط عدد المكالمات الواردة إلى مركز خدمة العملاء في الساعة $\lambda = 10$

قانون التوزيع الاحتمالي $P(X = x_i) = \frac{e^{-10}.10^X}{X!}$

$$P(X = 8) = \frac{e^{-10}.10^8}{8!} = 0.1120$$

$$P(X = 9) = \frac{e^{-10}.10^9}{9!} = 0.1240$$

$$P(X = 10) = \frac{e^{-10}.10^{10}}{10!} = 0.1240$$

$$P(X = 11) = \frac{e^{-10}.10^{11}}{11!} = 0.1136$$

$$P(X = 12) = \frac{e^{-10}.10^{12}}{12!} = 0.0947$$

$$P(8 \leq X \leq 12) = \sum_{ء=8}^{12} \frac{e^{-\lambda}.\lambda^X}{X!}$$

$$= 0.1120 + 0.1240 + 0.1240 + 0.1136 + 0.0947$$

$$P(8 \leq X \leq 12) = 0.5683$$

التقريب باستخدام التوزيع الطبيعي:

عندما نستخدم التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ثنائي الحدين، يمكننا استخدام القيم المحسوبة أعلاه:

$$x \sim N(\lambda, \sqrt{\lambda})$$

$$x \sim N(10, \sqrt{10})$$

$$Z = \frac{x - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$$

$$P(8 \leq x \leq 12) = P\left(\frac{(a - 0.5) - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \leq z \leq \frac{(a + 0.5) - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

$$P(8 \leq x \leq 12) = P\left(\frac{8 - 0.5 - 10}{3.1623} \leq z \leq \frac{12 + 0.5 - 10}{3.1623}\right)$$

$$= P(-0.79 \leq z \leq 0.79)$$

$$= P(z \leq 0.79) - P(z \leq -0.79)$$

$$= P(z \leq 0.79) - (1 - P(z \leq 0.79))$$

$$= \emptyset(0.79) - (1 - \emptyset(0.79))$$

$$= 0.7852 - (1 - 0.7852)$$
$$P(8 \leq x \leq 12) = 0.5704$$

استنتاجات:

عندما نجد أن نتائج حساب الاحتمالات باستخدام توزيع بواسون وتوزيع طبيعي متساويتان، يمكننا استنتاج عدة نقاط:

- صحة التقريب: التقريب بين توزيعين (بواسون وطبيعي) يكون دقيقًا بشكل خاص عندما يكون المتوسط λ كبيرًا. في هذا المثال، استخدمنا $\lambda =10$ ، وهو يعتبر كافيًا للحصول على تقارب جيد.
- استخدام التوزيع الطبيعي: يمكن استخدام التوزيع الطبيعي كأداة حسابية بديلة لتوزيع بواسون عندما تكون قيمة λ كبيرة، مما يسهل الحسابات، خاصةً في التطبيقات العملية.
- الاستنتاجات الإحصائية: هذا يشير إلى أن توزيع بواسون يقترب من التوزيع الطبيعي تحت شروط معينة، وهذا يعزز مفهوم أن التوزيعات المختلفة قد تكون متشابهة في سلوكها تحت ظروف معينة.
- التأكيد على أهمية المعاملات: استخدام معامل تصحيح الاستمرارية (0.5±) في التحويل من بواسون إلى طبيعي يعزز دقة النتائج، مما يعني أن هذه المعاملات لها تأثير كبير على النتائج عند التعامل مع توزيعات منفصلة.
- التطابق بين النتائج يدل على فعالية التقريب واستخدام التوزيع الطبيعي في المواقف المناسبة، مما يسهل التحليل الإحصائي ويعزز فهم الظواهر العشوائية.

3- تقريب توزيع ذو الحدين باستخدام توزيع بواسون

هو تقنية شائعة تُستخدم عندما تكون عدد التجارب في توزيع ذو الحدين كبيرًا، ونجاح التجربة (probability of success) صغيرًا.

لنفترض أن لدينا توزيع ذو حدين X حيث: (n) عدد التجارب (معدل كبير) و (p) احتمال النجاح في كل تجربة (معدل صغير).

يمكن تقارب بواسون عندما يكون n كبيرًا وp صغيرًا، يمكننا استخدام توزيع بواسون كالتالي:

4- تقارب توزيع كاي تربيع (Chi-Squared Distribution) بالتوزيع الطبيعي

عندما تكون درجات الحرية n كبيرة، يمكن استخدام التقريب التالي:

يمكن اعتبار توزيع كاي تربيع كجمع لمربعات k متغيرات طبيعية مستقلة، مما يعني أنه يمكن تقريبه بالتوزيع الطبيعي:

$$\chi_n^2 \backsim N(n, 2n)$$

5- تقارب توزيع فيشر (FISHER Distribution) بتوزيع كاي تربيع

عندما تكون درجات الحرية $n = v_1$ و v_2 كبيرة وكلما زادت قيمتها، يمكن الربط بين توزيع فيشر وتوزيع كاي تربيع:

$$F = \frac{\chi_{v1}^2 / v_1}{\chi_{v2}^2 / v_2}$$

6- تقارب توزيع ستيودنت (student Distribution) بالتوزيع الطبيعي

عندما تزداد درجة الحرية v، يتقارب توزيع ستيودنت إلى توزيع طبيعي. هذا التقارب يحدث لأن شكل توزيع ستيودنت يصبح أقرب إلى شكل التوزيع الطبيعي كلما زادت درجة الحرية.

$$T \rightsquigarrow N(0,1)$$

7- تقارب توزيع فيشر (FISHER Distribution) بتوزيع ستيودنت

عندما تكون درجات الحرية v_1 و v_2 صغيرة، يمكن أن يتقارب توزيع فيشر إلى توزيع ستيودنت. بشكل خاص، يمكننا الربط بين التوزيعين كما يلي:

إذا كانت $v_1 = 1$ و v_2 تزداد فإن توزيع فيشر سيتقارب إلى توزيع ستيودنت.

8- تقارب توزيع فيشر (FISHER Distribution) بالتوزيع الطبيعي

عندما تكون درجات الحرية v_1 و v_2 يمكن أن يتقارب توزيع فيشر إلى التوزيع الطبيعي، كما يلي:

$$x \rightsquigarrow N(\frac{v_1}{v_2 - 2}, \sqrt{\frac{2{v_2}^2(v_1 + v_2 - 2)}{v_1(v_2 - 2)^2(v_2 - 4)}})$$

9- تقارب توزيع المتعدد الحدود(Multinomial Distribution) بالتوزيع الثنائي

إذا كان لديك n تجارب مستقلة، وكل تجربة يمكن أن تؤدي إلى أحد k من النتائج (أو الفئات)، حيث كل فئة لها احتمال معين، فإن توزيع المتعدد الحدود يُعبر عنه كالتالي:

دالة الكثافة:

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_k = x_k) = \frac{n!}{x_{1!} x_{2!} \dots x_{k!}} * p_1^{x_1} * p_2^{x_2} * \dots * p_k^{x_k}$$

حيث:

$x_1, x_2, \dots, x_k$ هي الأعداد الحقيقية التي تحقق الشرط. $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$

أما الخصائص فهي كالتالي:

القيمة المتوقعة:

$(E(X_i) = n * p_i$ لكل (i)

التباين:

$$Var(X_i) = n * p_i * (1 - p_i)$$

$$Cov(X_i, X_j) = -n * p_i * p_j \quad \text{حيث} \ (i \neq j)$$

عندما يكون عدد الفئات k = 2، فإن توزيع المتعدد الحدود يتقارب إلى توزيع ثنائي.

إذا كان لدينا n تجارب، وكل تجربة يمكن أن تؤدي إلى نتيجتين فقط، فإن توزيع المتعدد الحدود يصبح:

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = \frac{n!}{x_{1!} x_{2!}} * p_1^{x_1} * p_2^{x_2}$$

حيث:

x_1 هو عدد النجاحات.

x_2 هو عدد الإخفاقات.

p_1 هو احتمال النجاح.

$p_2 = 1 - p_1$ هو احتمال الفشل.

عندما يكون لدينا فئتين فقط، يمكننا كتابة توزيع المتعدد الحدود كالتالي:

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = \frac{n!}{x_{1!}x_{2!}} * p_1^{x_1} * (1 - p_1)^{x_2}$$

هذا يتقارب إلى توزيع ثنائي كما يلي:

$$P(X = k) = \frac{n!}{k!\ (n-k)!} * p^k * (1 - p)^{n-k}$$

حيث:

k هو عدد النجاحات.

p هو احتمال النجاح.

10- تقارب توزيع المتعدد الحدود(Multinomial Distribution) بالتوزيع الطبيعي

عندما n يكون كبيرًا، يمكن تقريب توزيع المتعدد الحدود بالتوزيع الطبيعي:

إذا كان n كبيرًا، فإن المتغيرات Xi تتبع تقريبًا توزيعًا طبيعيًا:

$$x \backsim N(np_i, np_i(1 - p_i))$$

الفصل الرابع: المتغيرات العشوائية الثنائية (Bivariate Random Variables)

1- تعريف المتغير العشوائي الثنائي

المتغيرات العشوائية الثنائية أو المزدوجة (Bivariate Random Variables) تُشير إلى مجموعة من المتغيرات العشوائية التي يتم دراستها معًا لتحديد العلاقة أو الارتباط بينها.

المتغير العشوائي الثنائي (Bivariate Random Variables) هو نوع من المتغيرات العشوائية التي تتعامل مع حالتين أو أكثر في نفس الوقت، حيث يتم دراسة العلاقة بين متغيرين عشوائيين. يُستخدم هذا النوع من المتغيرات في الإحصاء ونظرية الاحتمالات لفهم كيفية تفاعل متغيرين مع بعضهما البعض.

يتميز المتغير العشوائي الثنائي بالخصائص التالية (Elliott, n.d.):

- النتائج الزوجية: يتم تمثيل المتغيرات العشوائية الثنائية بواسطة أزواج من النتائج (x, y)، حيث يمثل كل من x و y متغيرين عشوائيين مختلفين.
- التوزيع المشترك: يتم وصف العلاقة بين المتغيرين من خلال توزيع احتمالي مشترك، والذي يحدد احتمالات حدوث كل زوج من النتائج .
- التطبيقات: تُستخدم المتغيرات العشوائية الثنائية في العديد من المجالات، مثل تحليل البيانات، حيث يمكن أن تساعد في فهم العلاقات بين المتغيرات، مثل العلاقة بين الدخل والتعليم أو بين العوامل البيئية والأمراض.
- يمكن ان تكون المتغيرات العشوائية الثنائية متصلة (مستمرة) أو متغيرات متقطعة (منفصلة).

2- المتغيرات العشوائية الثنائية المتقطعة

2-1- التوزيع المشترك

نفترض أن X و Y متغيران عشوائيان معرفان على فضاء العينة S حيث:

$$S_x = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$$

و $$S_y = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

إذا كان (X, Y) متغيراً عشوائياً ثنائياً فإن $f(x, y)$ يكون اقترانا احتماليا (توزيعا مشتركا) إذا تحقق ما يلي (معتوق، 2015، صفحة 50):

$$f(x, y) \geq 0$$

$$\sum_x \sum_y f(x, y) = 1$$

الجدول رقم 12: جدول الاقتران الاحتمالي.

Y \ X	y_1	y_2	y_3	…	y_m	المجموع
x_1	$f(x_1, y_1)$	$f(x_1, y_2)$	$f(x_1, y_3)$	…	$f(x_1, y_m)$	$w(x_1)$
x_2	$f(x_2, y_1)$	$f(x_2, y_2)$	$f(x_2, y_3)$	…	$f(x_2, y_m)$	$w(x_2)$
x_3	$f(x_3, y_1)$	$f(x_3, y_2)$	$f(x_3, y_3)$	…	$f(x_3, y_m)$	$w(x_3)$
…	…	…	…	…	…	…
x_n	$f(x_n, y_1)$	$f(x_n, y_2)$	$f(x_n, y_3)$	…	$f(x_n, y_m)$	$w(x_n)$
المجموع	$g(y_1)$	$g(y_2)$	$g(y_3)$	…	$g(y_m)$	1

المصدر: من إعداد الباحث استنادا إلى (معتوق، 2015، صفحة 50).

عندما نتعامل مع المتغيرات العشوائية المتقطعة، نستخدم دوال الكتلة الاحتمالية (PMFs) بدلاً من دوال الكثافة. الكثافة الهامشية في هذه الحالة تعبر عن توزيع الاحتمالات لمتغير عشوائي واحد، بغض النظر عن المتغيرات الأخرى.

الكثافة الشرطية للمتغير x تعطى بالعلاقة التالية:

$$V\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(x, y)}{g(\ y_j)}$$

الكثافة الشرطية للمتغيرy تعطى بالعلاقة التالية:

$$V\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{f(x, y)}{w(\ x_i)}$$

2-1- المثال الأول:

الجدول رقم 13: مثال عن التوزيع المشترك.

Y / X	0	1	2	3	4	5	المجموع
0	1/30	1/60	1/60	1/30	1/60	1/30	**1/10**
1	1/20	1/30	1/60	1/20	1/60	1/60	**1/10**
2	1/30	1/20	1/30	1/30	1/60	1/30	**1/10**
3	1/60	1/30	1/20	1/30	1/20	1/60	**1/10**
4	1/60	1/60	1/30	1/20	1/30	1/60	**1/10**
5	1/30	1/60	1/30	1/60	1/60	1/30	**1/10**
المجموع	**1/10**	**1/10**	**1/10**	**1/10**	**1/10**	**1/10**	**10/10**

المصدر: من إعداد الباحث.

2-2- مثال 2:

لنفترض لدينا المتغيرين العشوائيين

X و Y معرفين كما يلي:

ليكن المتغير العشوائي X يمثل حالة الشخص:

إذا كان الشخص يمتلك سيارة: X=1

إذا كان الشخص لا يمتلك سيارة: X=0

وليكن المتغير العشوائي

Y يمثل الحالة الصحية:

إذا كان الشخص مصابًا بالسمنة:Y=1

إذا كان الشخص غير مصاب بالسمنة: Y=0

الجدول رقم 14: قوانين التوزيع الاحتمالي المشترك.

Y / X	0 (غير مصاب)	1 (مصاب)	مجموع
0 (لا سيارة)	0.2	0.1	0.3
1 (يمتلك سيارة)	0.4	0.3	0.7
مجموع	0.6	0.4	1

المصدر: من إعداد الباحث.

المجموع في كل صف وعمود يجب أن يساوي 1، مما يدل على أن التوزيع مشترك صحيح.
يمكن استخدام هذا الجدول لتحليل العلاقة بين ملكية السيارة والحالة الصحية.

3- المتغيرات العشوائية الثنائية المتصلة

ليكن (x, y) متغير عشـــوائي ذو بعدين الذي نفترض أن جميع قيمه في مجموعة جزئية غير معدودة من الفضـاء الاقليدي، فإن مثل هذا المتغير يسـمىمتغير عشـوائي مسـتمر ذو بعدين، ومجموع القيم التي يأخذها تسمى مدى الفضاء ويرمز لها بالرمز $R_{X,Y}$. (جبار، 2010، صفحة 197)

دالة التوزيع المشـتركة (ثنائية المتغيرات) تعطي احتمالية أن يأخذ (x, y) قيمًا في المنطقة المحددة (A) وهي تُعطى بالعلاقة:

$$P(a < X < b, c < Y < d) = \int_a^b \int_c^d f_{x,y}(x, y)dx\, dy$$

إن دالة الاحتمال المشترك تكون دائمًا غير سلبية، والتكامل المزدوج يعطي قيمة 1. أي:

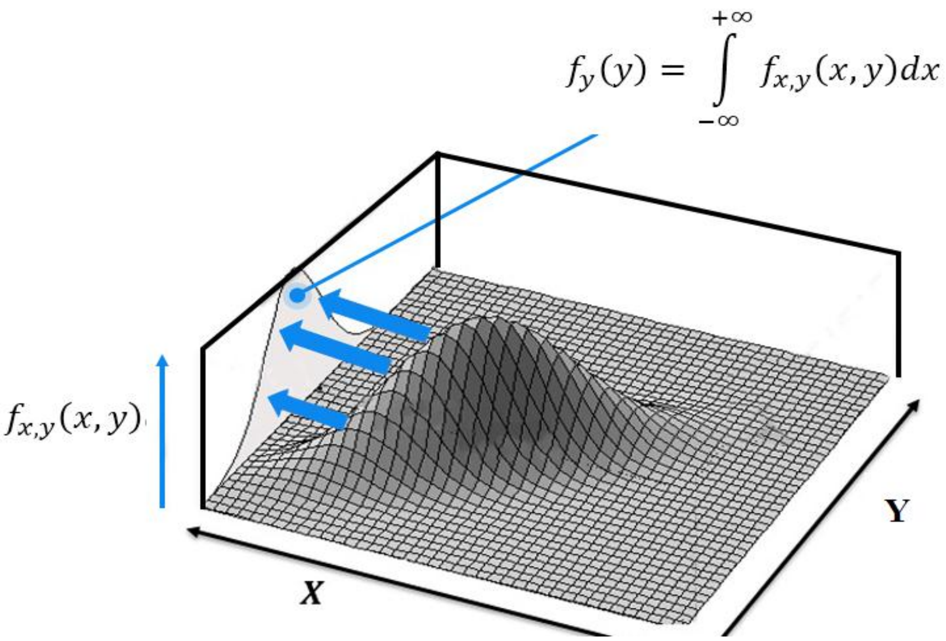
$$f_{x,y}(x, y) \geq 0$$

$$\int_a^b \int_c^d f_{x,y}(x, y)dx\, dy = 1$$

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{x,y}(x, y)dx$$

يمكن تمثيل دالة التوزيع التراكمي للمتغيرات العشوائية الثنائية المتقطعة كما هو مبين في الشكل.

الشكل رقم 31: دالة الكثافة الاحتمالية للمتغيرات العشوائية الثنائية المتصلة.



المصدر: (AnalystPrep, 2019).

مثال:

لتكن الدالة التالية:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(6-x-y), & 0<x<2\ ,<2y<4\\ 0, & otherwise.\end{cases}$$

المطلوب: إثبات أن $f(x,y)$ هي دالة كثاف احتمال مشتركة.

الحل:

لإثبات أن $f(x,y)$ هي دالة كثاف احتمال مشتركة يجب أن نثبت أن:

$$f_{x,y}(x,y)\geq 0$$

$$\int_a^b\int_c^d f_{x,y}(x,y)dx\,dy=1$$

$$\int_0^2\int_2^4\frac{1}{8}(6-x-y)dx\,dy=\int_0^2\left[\frac{6y}{8}-\frac{xy}{8}-\frac{y^2}{16}\right]_2^4 dx$$

$$=\int_0^2\left[\frac{3}{4}-\frac{x}{4}\right]dx=1 \text{ محققة}$$

الشرطين $f_{x,y}(x,y)\geq 0$ و$\int_a^b\int_c^d f_{x,y}(x,y)dx\,dy=1$ محققين (جبار، 2010، صفحة 198).

4- دوال المتغيرات العشوائية الثنائية

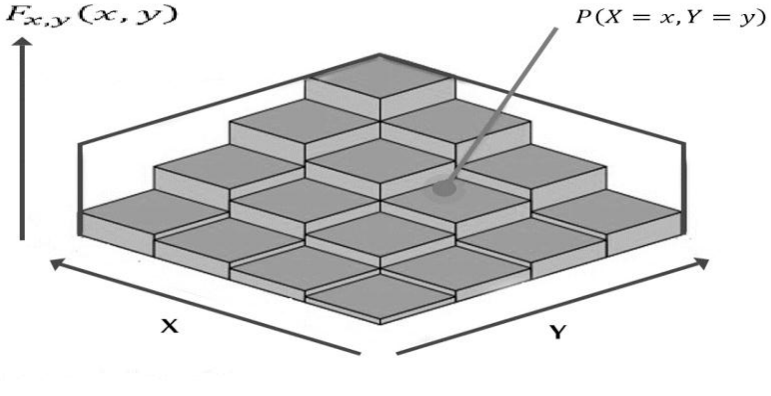
4-1- دالة التوزيع التراكمي للمتغيرات العشوائية الثنائية المتقطعة:

تقوم دالة التوزيع التراكمي لمتغير عشــوائي ثنائي متقطع بإرجاع الاحتمال الكلي بأن يكون كل مكون أقل من أو يساوي قيمة معينة. تُعطى بالعلاقة:

$$F_{x,y}(x,y)=P(X<x,Y<y)=\sum_{t1\in IR\ (X)t1\leq x}\sum_{t2\in IR\ (Y)t2\leq y}f_{(x,y)}(t_1,t_2)$$

في هذه المعادلة، يحتوي t_1 على القيم التي يمكن أن يأخذها X طالما أن $x\leq t1$ ، ويحتوي t_2 على القيم التي يمكن أن يأخذها Y طالما أن $t2\leq y$.

الشكل رقم 32: دالة التوزيع التراكمي للمتغيرات العشوائية الثنائية المتقطعة



المصدر: (AnalystPrep, 2019).

يمكن تمثيل دالة التوزيع التراكمي للمتغيرات العشوائية الثنائية المتقطعة كما هو مبين في الشكل 32.

مثال:

لتكن دالة التوزيع الاحتمالية المشتركة لـX و Y هي:

$$f(x,y)=\begin{cases}\binom{3}{y}\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}, & x=1,2,3,\dots\infty\ ,y=1,2,3.\\ 0, & otherwise.\end{cases}$$

المطلوب: إيجاد دالة لتوزيع التجميعية الثنائية.

الحل:

لإيجاد دالة لتوزيع التجميعية الثنائية نستخدم العلاقة:

$$F_{x,y}(x,y)=P(X<x,Y<y)=\sum_{t1\in IR\ (X)t1\leq x}\sum_{t2\in IR\ (Y)t2\leq y}f_{(x,y)}(t_1,t_2)$$

حيث أن دالة التوزيع الاحتمالية المشتركة المعطاة هي:

$$f(x,y)=\begin{cases}\binom{3}{y}\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}, & x=1,2,3,\dots\infty\ ,y=1,2,3.\\ 0, & otherwise.\end{cases}$$

تحديد حدود الجمع:

X يأخذ القيم من 1 إلى $t1$

y يأخذ القيم من 1 إلى $t2$

بما أن $x>1$ و $y>1$ فإن:

$$F_{x,y}(x,y)=\sum_{t1=1}\sum_{t2=1}f_{(x,y)}(t_1,t_2)=\sum_{t1=1}\sum_{t2=1}3t_2\ (\frac{1}{4})^{t1+1}$$

مثال على الحساب:

لنفرض أننا بصدد حساب $F_{x,y}(2,2)$

$$F_{x,y}(2,2)=\sum_{t1=1}^{2}\sum_{t2=1}^{2}3t_2\ (\frac{1}{4})^{t1+1}$$

عندما: t1=1 و t2=1

$$f_{x,y}(1,1)=3t_2(\frac{1}{4})^{t1+1}=3*1\left(\frac{1}{4}\right)^{1+1}=\frac{3}{16}$$

عندما: t1=1 و t2=2

$$f_{x,y}(1,2)=3t_2(\frac{1}{4})^{t1+1}=3*2\left(\frac{1}{4}\right)^{1+1}=\frac{6}{16}$$

عندما: t1=2 و t2=1

$$f_{x,y}(2,1)=3t_2(\frac{1}{4})^{t1+1}=3*1\left(\frac{1}{4}\right)^{2+1}=\frac{3}{64}$$

عندما: t1=2 و t2=2

$$f_{x,y}(2,2) = 3t_2(\frac{1}{4})^{t1+1} = 3 * 2\left(\frac{1}{4}\right)^{2+1} = \frac{3}{32}$$

ثم نقوم بحساب مجموع المجاميع:

$$F_{x,y}(x,y) = \sum_{t1=1} \sum_{t2=1} f_{(x,y)}(t_1,t_2) = \frac{3}{16} + \frac{6}{16} + \frac{3}{64} + \frac{3}{32} = \frac{45}{64}$$

2-4- دالة التوزيع التراكمي المشتركة للمتغيرات العشوائية الثنائية المتصلة Joint commutative distribution function:

تعطى دالة التوزيع التراكمي لمتغير عشوائي ثنائي متصل بالعلاقة: (Miller & Childers, 2012, p. 181)

$$F_{x,y}(x,y) = P(X < x, Y < y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{(x,y)}(t_1,t_2)\, dt_1 dt_2$$

وما تجدر الإشارة اليه أن:

$$F_{x,y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{x,y}(x,y)$$

تمارين مقترحة:

التمرين الأول:

إذا كان (X) متغير عشوائي يتبع توزيع ذو الحدين، في تجربة تكررت 8 مرات، وp هو احتمال النجاح.

من أجل $X \backsim Bin(8\,,0.125)$ و $X \backsim Bin(8\,,0.50)$ ثم من أجل: $X \backsim Bin(8\,,0.95)$

- احسب الاحتمالات
- الاحتمالية في الحالات الثلاثة.

التمرين الثاني

مجموعة رياضيين بصدد رمي الجلة، إذا كان احتمال نجاح الرياضي في تحقيق رمية تفوق 10 أمتار هو 65%، وتم اختيار 4 رياضيين عشوائيا.

المطلوب:

- تكوين جدول التوزيع ذو الحدين.
- حساب الوسط الحسابي، التباين والانحراف المعياري.
- إيجاد احتمالات التالية:
- (أ) نجاح رياضيين اثنتين (02)
- (ب) فشل رياضي واحد
- (ج) نجاح رياضيين على الأقل في اجتياز 10 أمتار.

التمرين الثالث

يحاول مجموعة من العسكريين التنافس على درجة التحمل في وضعية تمارين الضغط (les pompes)، إذا كان احتمال صمود العسكري أكثر من 100 ضغط هو 80%، تم اختيار 8 عسكريين عشوائيا.

- أحسب أهم مقاييس النزعة المركزية والتشتت.
- أوجد الاحتمالات التالية:
- صمود 3 عسكريين لأكثر من 100 ضغطة.
- عدم صمود 4 عسكريين.
- صمود عسكريين على الأقل.

التمرين الرابع:

إذا كان متوسط عدد الأيام التي تتوقف فيها البطولة الوطنية لكرة القدم بسبب سوء الأحوال الجوية، هو 4 أيام خلال الشتاء من كل سنة.

فما هو احتمال أن تتوقف فيها البطولة الوطنية لكرة القدم بسبب سوء الأحوال الجوية، لمدة 5 أيام من السنة المقبلة؟

أحسب احتمال أن تتوقف البطولة الوطنية لكرة القدم لمدة أقل من يومين (02).

التمرين الخامس:

لعبة ورق تحتوي على 11 ورقة تحمل رمز مربع (♦) و7 أوراق تحمل رمز قلب (♥) و و9 أوراق تحمل رمز ترافل (♣)و3 أوراق تحمل رمز pick (♠). يتنافس لاعبان على الفوز في هذه اللعبة.

1/ نطلب من اللاعب 1 سحب ورقة مع إعادة ونعيد السحب حتى تظهر ورقة تحمل رمز قلب (♥) لأول مرة يكون فائزا.

- أدرس المتغير العشوائي X المعبر عن عدد مرات تكرار التجربة مع اللاعب 1.
- ما احتمال أن يفوز اللاعب 1 بعد تكرار التجربة 5 مرات حتى تظهر ورقة تحمل رمز قلب (♥) ؟

2/ نطلب من اللاعب 2 سحب ورقة مع إعادة ونعيد السحب حتى تظهر ورقة تحمل رمز ترافل (♣)لأول مرة يكون فائزا.

- أدرس المتغير العشوائي المعبر عن عدد مرات تكرار التجربة مع اللاعب 2 وليكن Y.
- ما احتمال أن يفوز اللاعب 2 بعد تكرار التجربة5 مرات حتى تظهر ورقة تحمل رمز ترافل (♣)لأول مرة؟

3/ نطلب من اللاعب 3 سحب ورقة مع إعادة ونعيد السحب حتى تظهر ورقة تحمل رمز ترافل رمز pick (♠)لأول مرة يكون فائزا.

- أدرس المتغير العشوائي المعبر عن عدد مرات تكرار التجربة مع اللاعب 3 وليكن W.
- ما احتمال أن يفوز اللاعب 3 بعد تكرار التجربة 10 مرات حتى تظهر ورقة تحمل رمز رمز pick (♠) لأول مرة؟

4/ أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري في كل الحالات السابقة.

التمرين السادس:

كيس يحتوي على 10 قطع ذهبية و4 قطع فضية.

1/ يسحب شخص في كل مرة قطعة مع إعادتها ويعيد السحب حتى تظهر قطعة ذهبية لأول مرة.

- أدرس المتغير العشوائي X المعبر عن عدد مرات تكرار التجربة.
- ما احتمال أن يسحب الشخص بعد تكرار التجربة 3 مرات حتى تظهر قطعة ذهبية لأول مرة؟

2/ نطلب من شخص اخر (ثاني) السحب بنفس الطريقة.

- ما احتمال أن يسحب الشخص الثاني قطعة ذهبية في المحاولة الثانية؟

3/ أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري.

التمرين السابع:

تسعى وكالة سياحة وأسفار للتبرع بـ260 عمرة، يتم تسجيل اسم الراغب في المشاركة في سحب القرعة للفوز بالعمرة عند الحضور لصلاة الفجر بمسجد الأمير عبد القادر، وهذا خلال طيلة شهر رمضان. تم وضع أسماء المترشحين في قصاصات وطيها بإحكام ووضعها في صندوق. إذا علمت أن الحاج الحبيب لديه 27 قصاصة، والعدد الإجمالي للقصاصات هو: 2025 قصاصة.

- ما احتمال أن يسحب الساحب قصاصة باسم الحاج الحبيب بعد 260 محاولة على الأكثر؟

التمرين الثامن:

في صندوق يحتوي على 20 كرة، منها 7 كرات حمراء و13 كرة زرقاء. إذا قمنا بسحب 5 كرات عشوائيًا من الصندوق دون إرجاع:

- ما هو احتمال سحب 3 كرات حمراء و2 كرة زرقاء؟
- احسب المتوسط (المتوقع) لعدد الكرات الحمراء المسحوبة.
- ما هو التباين لعدد الكرات الحمراء المسحوبة؟

التمرين التاسع:

في شركة تعمل في مجال التكنولوجيا، يوجد 30 موظفًا، منهم 10 مهندسين و20 موظفًا في مجالات أخرى. إذا قررت الإدارة اختيار 6 موظفين عشوائيًا للانضمام إلى مشروع خاص:

- ما هو احتمال اختيار 4 مهندسين و2 موظف من المجالات الأخرى؟
- احسب المتوسط (المتوقع) لعدد المهندسين المختارين.
- ما هو التباين لعدد المهندسين المختارين؟

التمرين 10

في مصنع لإنتاج الأجهزة الإلكترونية، يوجد 100 جهاز، منها 30 جهازًا معيبًا و70 جهازًا سليمًا. قررت الإدارة إجراء فحص عشوائي لـ 12 جهازًا من خط الإنتاج.

المطلوب:

- احتمال اختيار 4 أجهزة معيبة و8 أجهزة سليمة:

- احتمال اختيار 2 جهاز معيب و10 أجهزة سليمة:
- المتوسط (المتوقع) لعدد الأجهزة المعطوبة المختارة:
- التباين لعدد الأجهزة المعطوبة المختارة:

تمرين 11:

في دراسة حول أوزان الطلاب في جامعة معينة، تم جمع البيانات ووجد أن أوزان الطلاب تتبع توزيعًا طبيعيًا بمتوسط $\mu=70$ كغ وانحراف معياري $\sigma=10$كغ.

المطلوب:

- احتمال أن يكون وزن طالب عشوائي أقل من 65 كغ:
- استخدم جدول التوزيع الطبيعي أو دالة التوزيع التراكمي (CDF) لحساب هذا الاحتمال.
- احتمال أن يكون وزن طالب عشوائي بين 65 كغ و80 كغ:
- احسب هذا الاحتمال باستخدام نفس الطريقة.
- احتمال اختيار طالب يكون وزنه أكبر من 85 كغ:
- احسب هذا الاحتمال باستخدام جدول التوزيع الطبيعي أو دالة التوزيع التراكمي.
- ما هو الوزن الذي يمثل النسبة المئوية 90 من الطلاب (أي 90% من الطلاب أوزانهم أقل من هذا الوزن)؟
- استخدم الجدول لإيجاد الوزن المقابل للنسبة المئوية المطلوبة.

تمرين 12:

في دراسة حول زمن استجابة العملاء في مركز خدمة العملاء، وجد أن الأوقات تتبع توزيعًا طبيعيًا بمتوسط $\mu=12$ ثانية وانحراف معياري $\sigma=3$ ثواني.

المطلوب:

- احتمال أن يستغرق زمن استجابة عميل عشوائي أقل من 10 ثواني:
- احسب هذا الاحتمال باستخدام جدول التوزيع الطبيعي أو دالة التوزيع التراكمي.(CDF)
- احتمال أن يستغرق زمن استجابة عميل عشوائي بين 10 ثواني و15 ثانية:
- احسب هذا الاحتمال باستخدام نفس الطريقة.
- احتمال اختيار عميل يستغرق زمن استجابة أكبر من 15 ثانية:

- احسب هذا الاحتمال باستخدام جدول التوزيع الطبيعي أو دالة التوزيع التراكمي.
- ما هو الزمن الذي يمثل النسبة المئوية 75 من العملاء (أي 75% من العملاء أوقات استجابتهم أقل من هذا الزمن)؟
- استخدم الجدول لإيجاد الزمن المقابل للنسبة المئوية المطلوبة.
- إذا كان هناك 100 عميل، كم عدد العملاء الذين يُتوقع أن يستغرقوا زمن استجابة أقل من 9 ثواني؟
- احسب العدد المتوقع باستخدام الاحتمالات التي حصلت عليها.

التمرين 13:
في دراسة حول درجات امتحان الرياضيات لطلاب الصف الثالث الثانوي، وُجد أن الدرجات تتبع توزيعًا طبيعيًا بمتوسط $\mu=75$ وانحراف معياري $\sigma=10$.
المطلوب:

- احتمال أن يحصل طالب عشوائي على درجة أقل من 70:
- احسب هذا الاحتمال باستخدام جدول التوزيع الطبيعي أو دالة التوزيع التراكمي.(CDF)
- احتمال أن يحصل طالب عشوائي على درجة بين 70 و80:
- احسب هذا الاحتمال باستخدام نفس الطريقة.
- احتمال اختيار طالب يحصل على درجة أعلى من 85:
- احسب هذا الاحتمال باستخدام جدول التوزيع الطبيعي أو دالة التوزيع التراكمي.
- ما هي الدرجة التي تمثل النسبة المئوية 90 من الطلاب (أي 90% من الطلاب حصلوا على درجات أقل من هذه الدرجة)؟
- استخدم الجدول لإيجاد الدرجة المقابلة للنسبة المئوية المطلوبة.
- إذا كان هناك 200 طالب، كم عدد الطلاب المتوقع أن يحصلوا على درجات أعلى من 90؟
- احسب العدد المتوقع باستخدام الاحتمالات التي حصلت عليها.

تمرين 14
لنفترض أن هناك مصنعًا ينتج زجاجات مياه، ووقت التعبئة لكل زجاجة يتبع توزيعًا منتظمًا بين 5 و15 ثانية.

المطلوب:

- احتمال أن يستغرق وقت التعبئة لزجاجة واحدة أقل من 8 ثوانٍ:
- احسب هذا الاحتمال باستخدام صيغة التوزيع المنتظم.

- احتمال أن يستغرق وقت التعبئة بين 6 و12 ثانية:
- احسب هذا الاحتمال بنفس الطريقة.
- ما هو المتوسط (المتوقع) لوقت التعبئة؟
- استخدم صيغة المتوسط للتوزيع المنتظم.
- ما هو التباين لوقت التعبئة؟
- احسب التباين باستخدام صيغة التباين للتوزيع المنتظم.
- إذا كان المصنع ينتج 1000 زجاجة، كم عدد الزجاجات المتوقع أن تستغرق وقت تعبئة يزيد عن 14 ثانية؟
- احسب العدد المتوقع باستخدام الاحتمالات التي حصلت عليها.

تمرين 15

لنفترض أن زمن وصول الطلبات إلى مطعم يتبع توزيعًا منتظمًا بين 2 و10 دقائق.

المطلوب:

- احتمال أن تصل طلبية في أقل من 4 دقائق:
- احسب هذا الاحتمال باستخدام صيغة التوزيع المنتظم.
- احتمال أن تصل طلبية بين 5 و8 دقائق:
- احسب هذا الاحتمال بنفس الطريقة.
- ما هو المتوسط (المتوقع) لزمن وصول الطلبات؟
- استخدم صيغة المتوسط للتوزيع المنتظم.
- ما هو التباين لزمن وصول الطلبات؟
- احسب التباين باستخدام صيغة التباين للتوزيع المنتظم.
- إذا كان المطعم يستقبل 200 طلب، كم عدد الطلبات المتوقع أن تصل في أكثر من 9 دقائق؟
- احسب العدد المتوقع باستخدام الاحتمالات التي حصلت عليها.

تمرين 15

لنفترض أن مدة تشغيل آلة في مصنع تتبع توزيعًا منتظمًا بين 30 و60 دقيقة.

المطلوب:

- احتمال أن تعمل الآلة لمدة أقل من 40 دقيقة:

- احسب هذا الاحتمال باستخدام صيغة التوزيع المنتظم.
- احتمال أن تعمل الآلة بين 35 و50 دقيقة:
- احسب هذا الاحتمال بنفس الطريقة.
- ما هو المتوسط (المتوقع) لمدة تشغيل الآلة؟
- استخدم صيغة المتوسط للتوزيع المنتظم.
- ما هو التباين لمدة تشغيل الآلة؟
- احسب التباين باستخدام صيغة التباين للتوزيع المنتظم.
- إذا كانت الآلة تعمل 500 مرة، كم عدد المرات المتوقع أن تعمل لمدة تزيد عن 55 دقيقة؟
- احسب العدد المتوقع باستخدام الاحتمالات التي حصلت عليها.

تمرين 16

لنفترض أن لديك مجموعة من البيانات التي تم جمعها لقياس تباين ارتفاعات مجموعة من الطلاب في مدرسة. تم استخدام اختبار كاي تربيع لاختبار فرضية أن التباين الملاحظ يختلف عن التباين المتوقع.

- افترض أن لديك 15 طالبًا، وأن التباين الملاحظ لارتفاعاتهم هو 25 سم^2.
- احسب القيمة الحرجة لتوزيع كاي تربيع عند مستوى دلالة $\alpha=0.05$ لدرجة حرية $df=n-1=14$.
- إذا كانت الفرضية الصفرية تنص على أن التباين المتوقع هو 20 سم^2، هل يمكن رفض الفرضية الصفرية بناءً على القيم الملاحظة؟
- استخدم القيمة الحرجة التي حسبتها في الخطوة السابقة.
- احسب إحصائية كاي تربيع باستخدام المعادلة:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

- ما هو احتمال الحصول على إحصائية كاي تربيع أكبر من القيمة المحسوبة؟
- استخدم جدول توزيع كاي تربيع أو دالة التوزيع التراكمي (CDF) للعثور على هذا الاحتمال.
- ماذا تعني النتائج بالنسبة للفرضية الصفرية؟ هل تدعم الفرضية أن التباين يختلف عن المتوقع؟

تمرين 17:

في دراسة حول زمن خدمة العملاء في مركز خدمة، وُجد أن زمن الخدمة يتبع توزيع غاما بمتوسط $\mu=10$ دقائق وانحراف معياري $\sigma=3$ دقائق.

المطلوب:

- احسب قيم المعاملات α وβ لتوزيع غاما:
- استخدم العلاقة بين المتوسط والانحراف المعياري :

$$\mu=\alpha\cdot\beta$$
$$\sigma^2=\alpha\cdot\beta^2$$

- احسب احتمال أن يستغرق زمن خدمة عميل واحد أقل من 8 دقائق:
- استخدم دالة الكثافة الاحتمالية (PDF) لتوزيع غاما.
- احسب احتمال أن يستغرق زمن خدمة عميل واحد بين 7 و12 دقيقة:
- احسب هذا الاحتمال باستخدام دالة التوزيع التراكمي.(CDF)
- إذا كان هناك 5 عملاء، احسب احتمال أن يستغرق زمن خدمتهم الكلي أكثر من 60 دقيقة:
- استخدم خاصية جمع المتغيرات العشوائية ذات التوزيع الغامائي.
- ناقش كيف يمكن استخدام توزيع غاما في تحسين كفاءة خدمة العملاء في المركز.

تمرين 18:

لنفترض أن مدة الانتظار في طابور أحد البنوك تتبع توزيع غاما، حيث يكون متوسط مدة الانتظار $\mu=15$ دقيقة وانحراف معياري $\sigma=4$ دقائق.

- احسب قيم المعاملات α وβ لتوزيع غاما:
- استخدم العلاقة بين المتوسط والانحراف المعياري :

$$\mu=\alpha\cdot\beta$$
$$\sigma^2=\alpha\cdot\beta^2$$

- احسب احتمال أن ينتظر عميل واحد أقل من 12 دقيقة:
- استخدم دالة التوزيع التراكمي (CDF) لتوزيع غاما.
- احسب احتمال أن ينتظر عميل واحد بين 10 و20 دقيقة:
- احسب هذا الاحتمال باستخدام دالة التوزيع التراكمي.
- إذا كان هناك 4 عملاء، احسب احتمال أن يستغرق زمن انتظارهم الكلي أكثر من 70 دقيقة:
- استخدم خاصية جمع المتغيرات العشوائية ذات التوزيع الغامائي.
- ناقش كيفية استخدام نتائج هذا التوزيع في تحسين تجربة العملاء في البنك.

تمرين 19

لنفترض أن نسبة النجاح في اختبار معين تتبع توزيع بيتا، حيث تتراوح القيم بين 0 و1. لديك بيانات من 50 اختبارًا، حيث تم تحقيق 30 نجاحًا.

المطلوب:

- احسب قيم المعاملتين α و β لتوزيع بيتا:
- احسب دالة الكثافة الاحتمالية (PDF) لتوزيع بيتا عند $x=0.6$
- احسب احتمال أن تكون نسبة النجاح أقل من 0.5:
- استخدم دالة التوزيع التراكمي (CDF) لتوزيع بيتا.
- احسب احتمال أن تكون نسبة النجاح بين 0.4 و0.8:
- استخدم دالة التوزيع التراكمي.
- ناقش كيف يمكن استخدام توزيع بيتا في تقييم وتحسين أداء الاختبارات المستقبلية.

تمرين 20

لنفترض أنك تجري دراسة حول نسبة الرضا لدى العملاء عن خدمة معينة. لديك 100 استبيان، حيث أبلغ 70 عميلًا عن رضاهم.

المطلوب:

احسب قيم المعاملتين α و β لتوزيع بيتا.

- احسب دالة الكثافة الاحتمالية (PDF) لتوزيع بيتا عند $x=0.75$
- احسب احتمال أن تكون نسبة الرضا أقل من 0.6:
- استخدم دالة التوزيع التراكمي (CDF) لتوزيع بيتا.
- احسب احتمال أن تكون نسبة الرضا بين 0.65 و0.85:
- استخدم دالة التوزيع التراكمي.
- ناقش كيف يمكن استخدام نتائج هذا التوزيع في تحسين جودة الخدمة المقدمة للعملاء.

تمرين 21:

- ما هي الخصائص الأساسية للتوزيع الطبيعي؟
- إذا كانت درجات اختبار الطلاب تتبع توزيعاً طبيعياً بمتوسط 75 وانحراف معياري 10، احسب احتمال أن يحصل طالب عشوائي على درجة بين 70 و80.
- كيف يتم تعريف التوزيع المنتظم وما هي خصائصه؟
- إذا كان لديك متغير عشوائي X يتبع توزيعاً منتظماً بين 0 و10، ما هو احتمال أن يكون Xأقل من 5؟
- ما هو معنى "معدل الوصول" في التوزيع الأسي؟
- إذا كان معدل الوصول لمكالمات الهاتف هو 2 مكالمة في الساعة، احسب احتمال أن تنتظر أكثر من 30 دقيقة لمكالمة.
- ما هي العلاقة بين توزيع غاما والتوزيع الأسي؟

- إذا كان لديك متغير عشوائي يتبع توزيع غاما بمعامل الشكل 3 ومعدل 2، احسب القيمة المتوقعة والانحراف المعياري.
- متى يتم استخدام توزيع بيتا في الإحصاءات؟
- اذا كان لديك توزيع بيتا بمعاملين $\alpha = 2$ و $\beta = 5$، احسب القيمة المتوقعة.
- ما هي التطبيقات العملية لتوزيع كاي مربع في الإحصاء؟
- إذا كانت لديك عينة من 10 ملاحظات، احسب القيمة الحرجة لتوزيع كاي مربع عند مستوى دلالة 0.05.
- كيف يختلف توزيع ستيودنت عن التوزيع الطبيعي؟
- اذا كانت لديك عينة من 15 ملاحظة، احسب قيمة t الحرجة عند مستوى دلالة 0.01.
- ما هو استخدام توزيع فيشر في تحليل التباين؟
- إذا كنت تقارن بين مجموعتين باستخدام تحليل التباين (ANOVA) ووجدت قيمة F تساوي 4.5 مع درجات حرية 3 و10، احسب مستوى الدلالة.

تمرين 22:

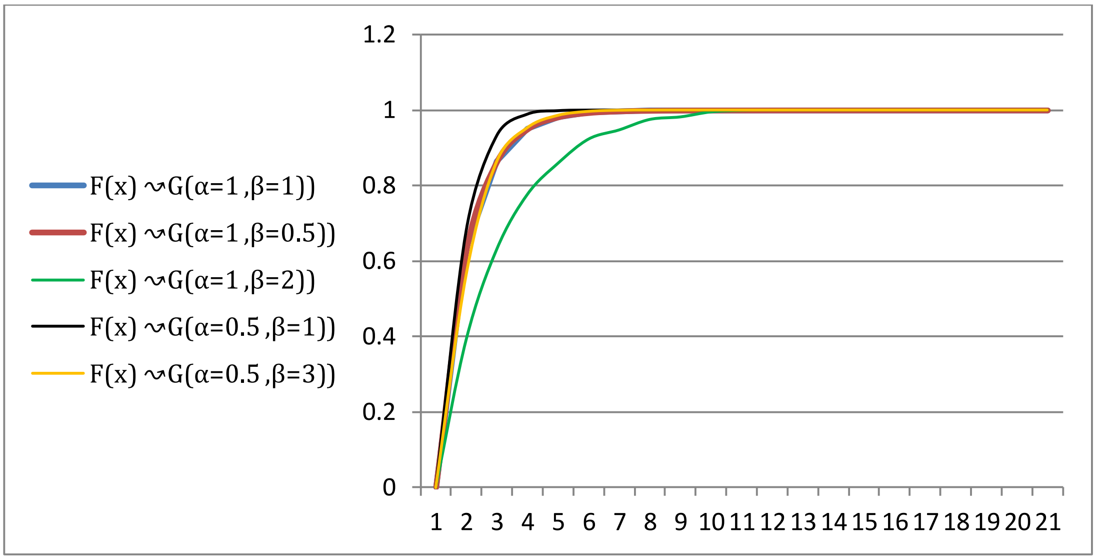
افترض أن الوقت بين المكالمات الواردة إلى مركز خدمة العملاء يتبع توزيعاً أسيًا بمتوسط 5 دقائق.

- احسب معدل الوصول.(λ)
- ما هو احتمال أن تنتظر أكثر من 10 دقائق لمكالمة واردة؟
- ما هو احتمال أن تنتظر أقل من 3 دقائق لمكالمة واردة؟

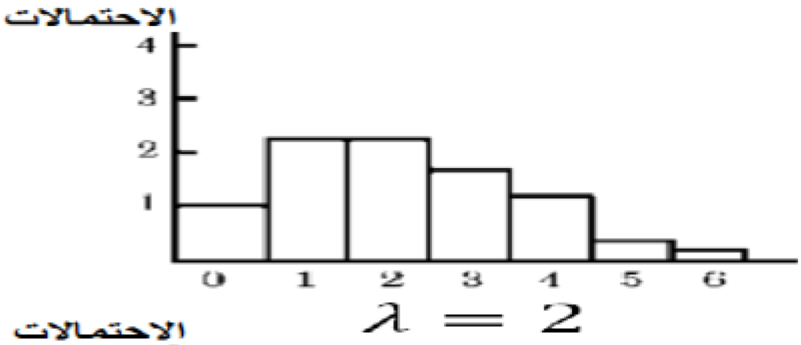
تمرين 23:

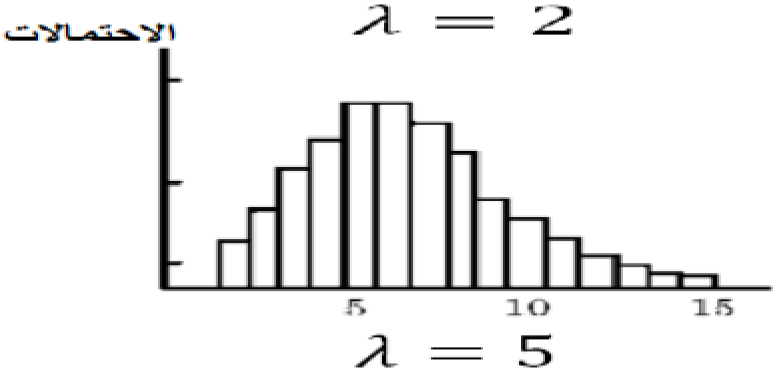
بين نوع التوزيعات الاحتمالية من خلال الاشكال البيانية التالية:

الشكل (A)

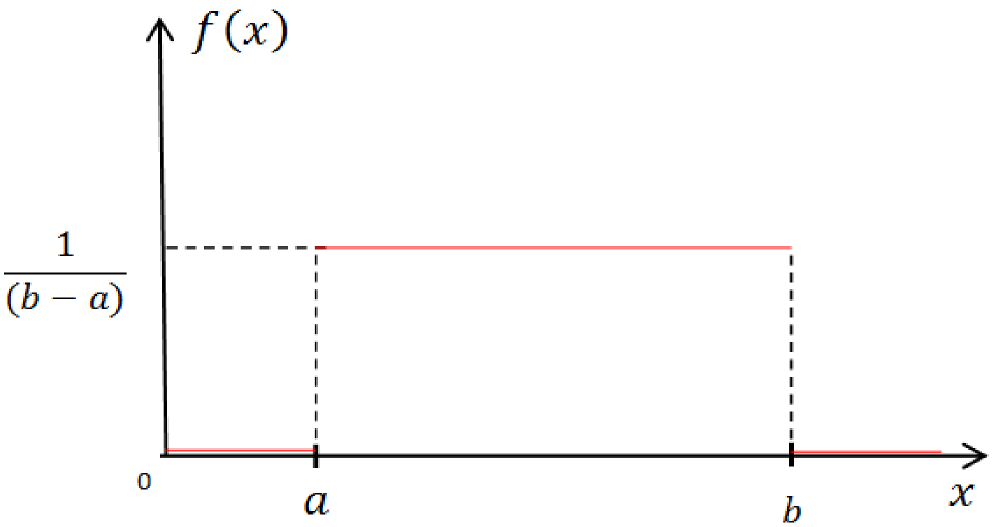


الشكل (B)

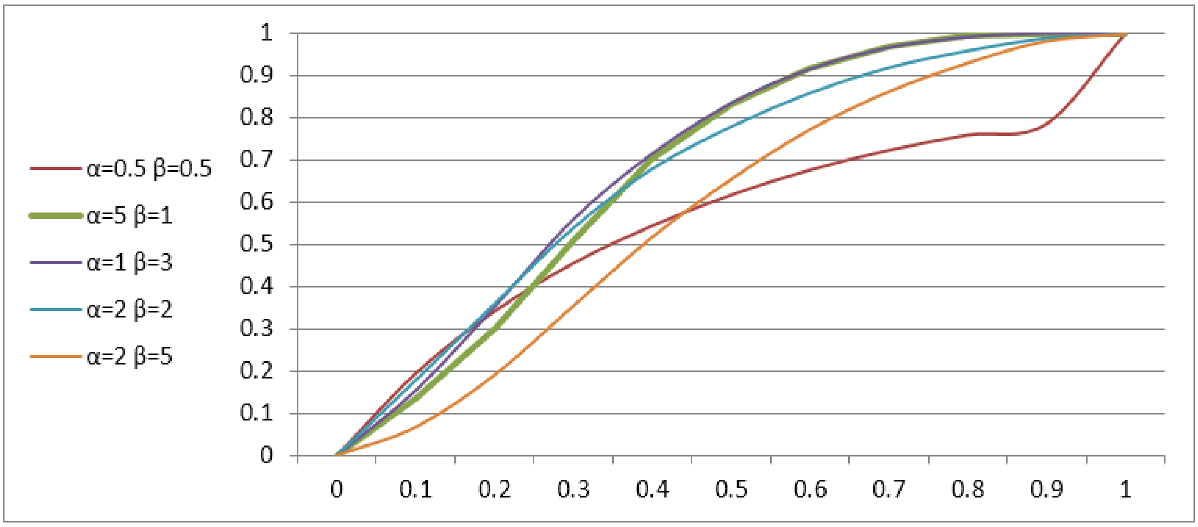




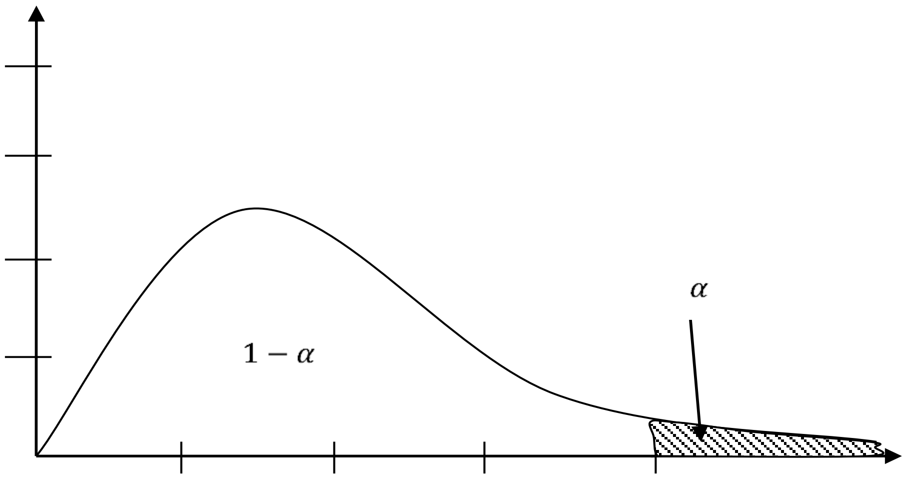
الشكل (C)



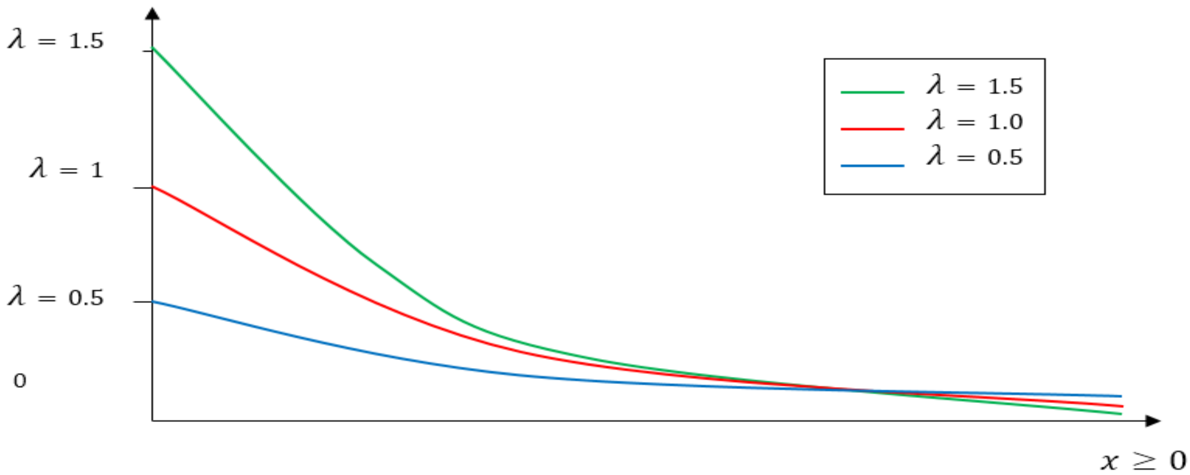
الشكل (D)



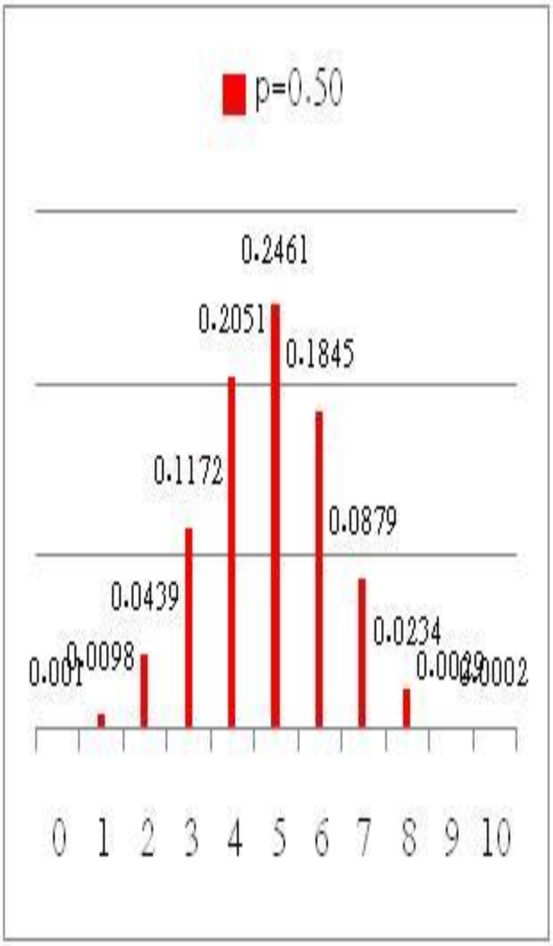
الشكل (E)



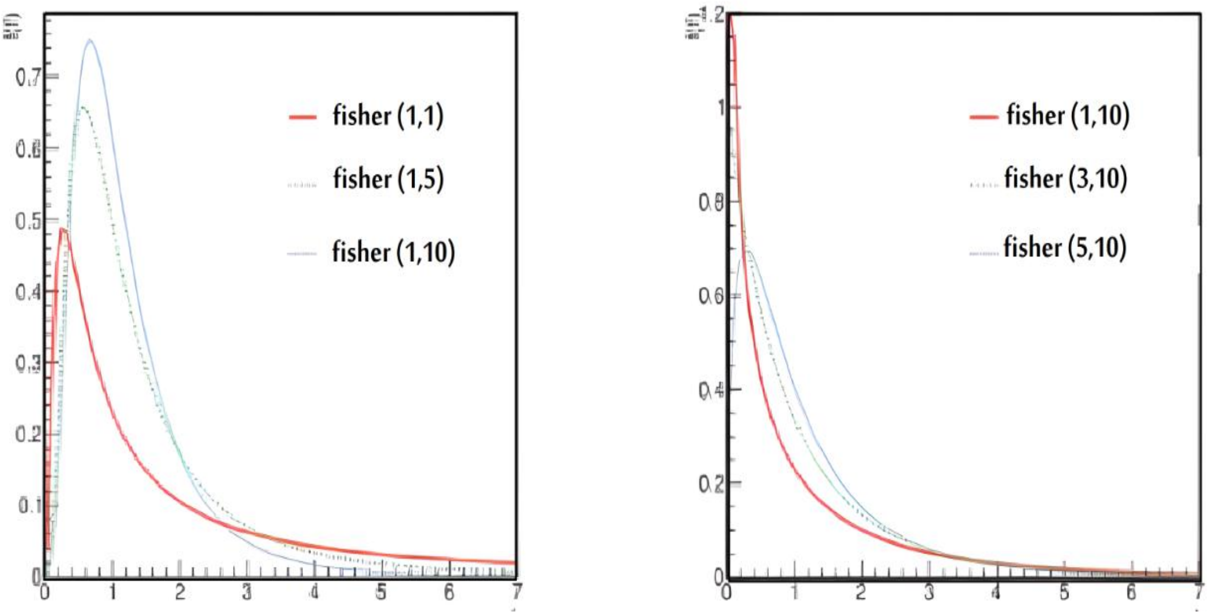
الشكل (F)



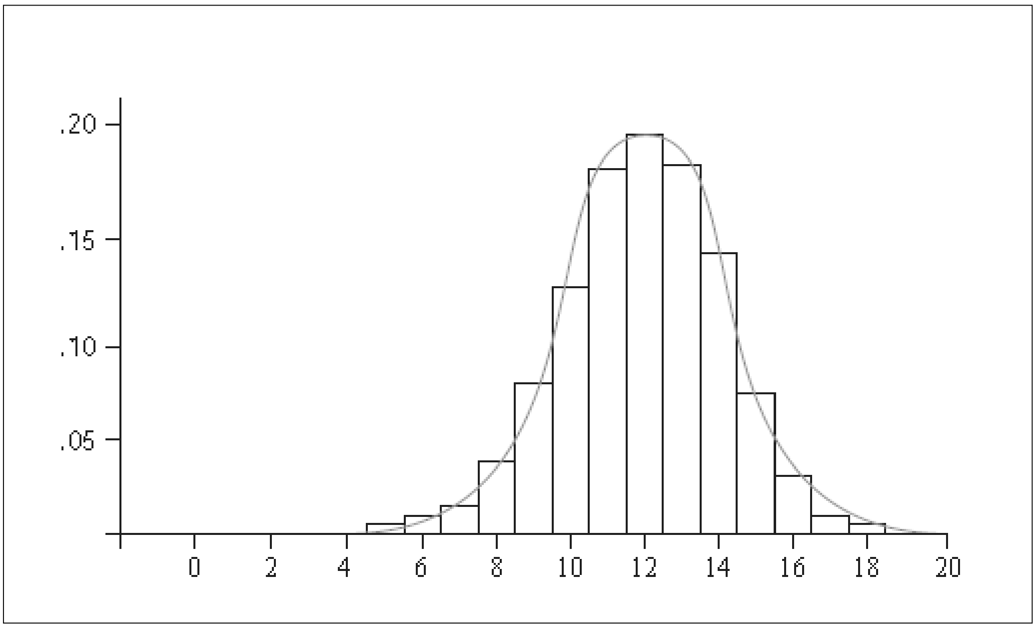
الشكل (G)



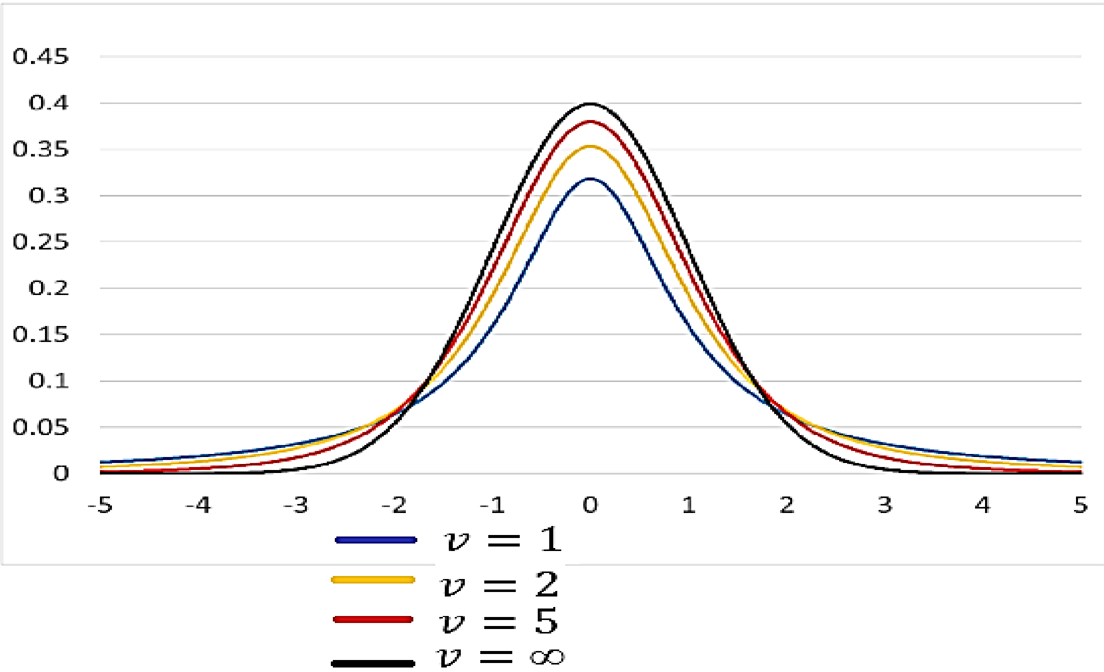
الشكل (H)



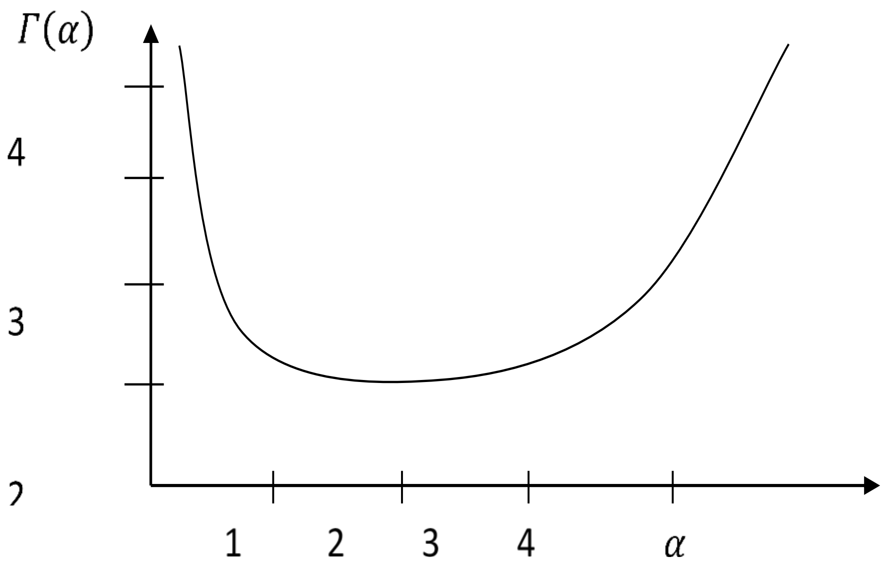
الشكل (I)



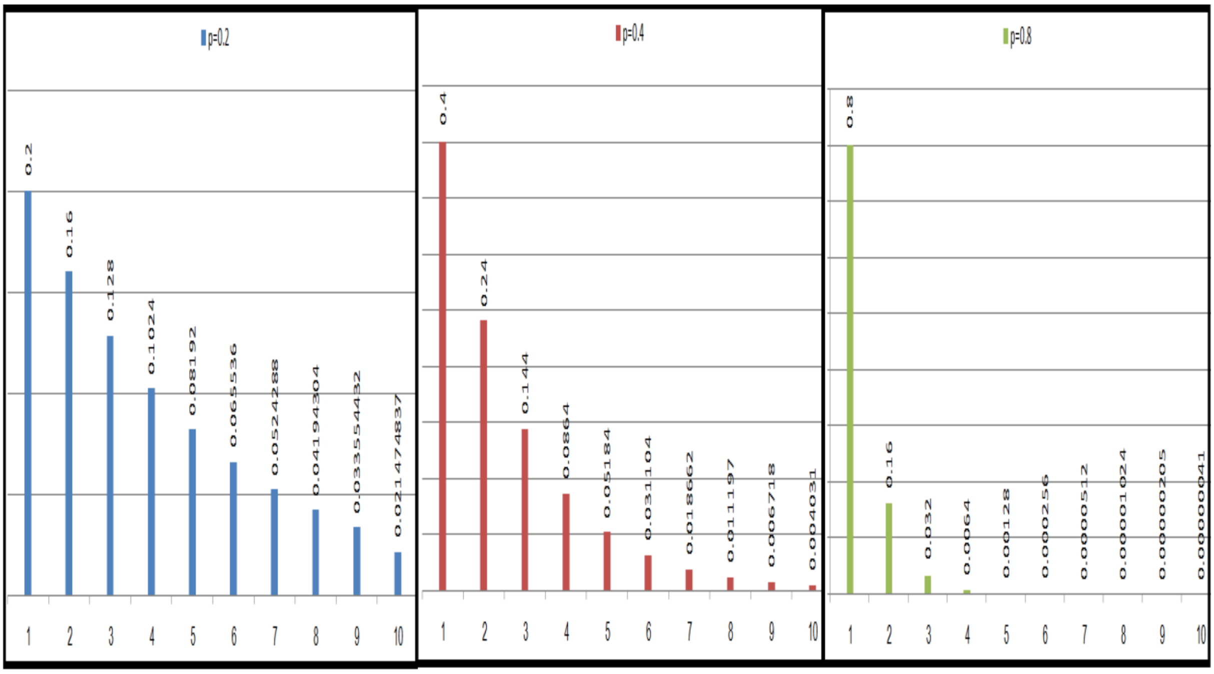
الشكل (J)



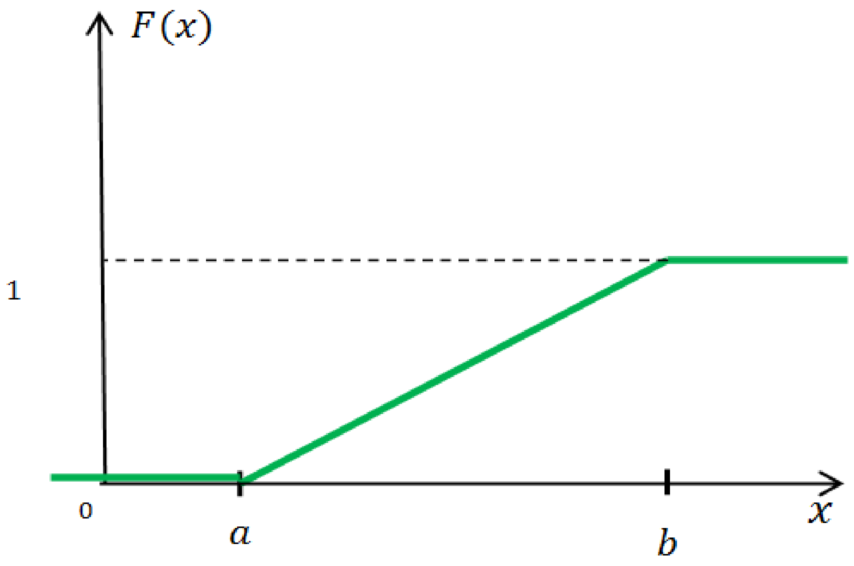
الشكل (K)



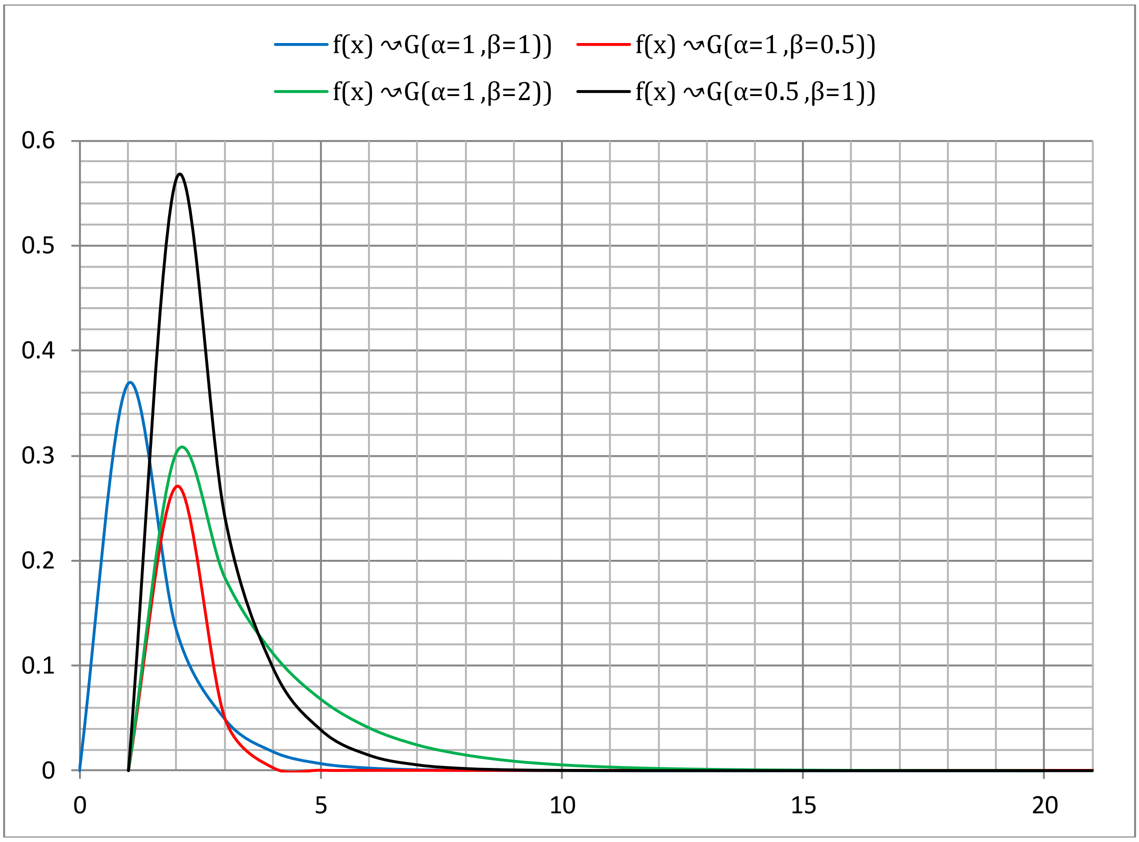
الشكل (L)



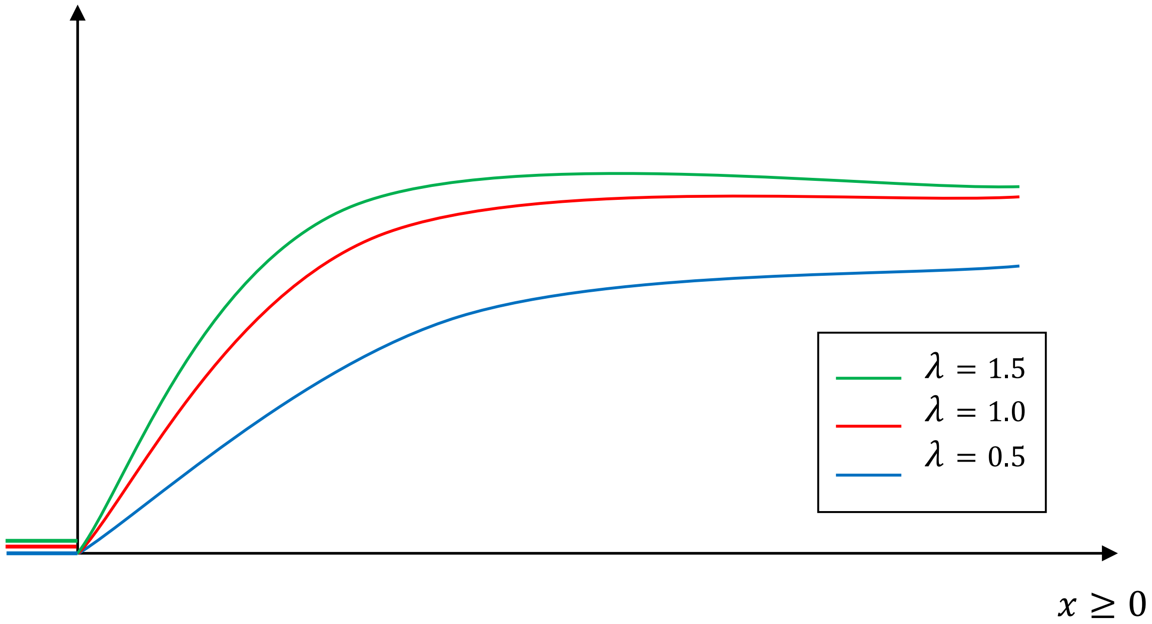
الشكل (M)



الشكل (N)



الشكل (O)



قائمة المراجع:

Bibliographie

AnalystPrep. (2019). *Multivariate Random Variables*. Retrieved from analystprep.com: https://analystprep.com/study-notes/frm/part-1/quantitative-analysis/multivariate-random-variables/

Black, K. (2024). *Business Statistics: For Contemporary Decision Making*. United Kingdom: John Wiley & Sons, Limited.

Dodson, C. T., & Arwini, K. (2008). *Information Geometry*. Verlag Berlin and Heidelberg: Springer Nature.

Elliott, G. (n.d.). *understanding statistics*. Retrieved from econweb.ucsd.edu: https://econweb.ucsd.edu/~gelliott/Chapter4.html

Gelé, D. (2020). *Méthodes statistiques pour l'analyse des données en physique des particules - Analyse de données statistique et méthodes probabilistes*. Royaume-Uni: EDITION MARKETING.

Goldie, S. (2012). *Statistics*. London, UK: Hodder Education.

Gupta, B. N. (2023). *Business Statistics*. Agra, India: SBPD Publications.

Gupta, Bhisham, C., & Guttman, I. (2014). *Statistics and Probability with Applications for Engineers and Scientists*. Germany: Wiley.

Linus, Y. (2024). *Statistics for economists*. USA: Hackensack.

Mann, Prem, S. (2024). *Introductory Statistics, International Adaptation*. United Kingdom: John Wiley & Sons, Limited.

Miller, S., & Childers, D. (2012). *Probability and Random Processes: With Applications to Signal Processing and Communications*. . Pays-Bas: Elsevier Science.

Nicholson, J. (2018). *Complete Probability & Statistics 1 for Cambridge International AS & A Level* (2nd ed.). Oxford: Oxford University Press.

Pestman, Wiebe , R. (2021). *Mathematical Statistics: An Introduction*. Germany: De Gruyter.

Sochi, T. (2023). *Introduction to the Probability Theory*. United State of America: Kindle Direct Publishing.

Tanveer, Q. (2023). *Probability & Statistics*. Blue Rose Publishers.

امحمد معتوق. (2015). *الاحصاء الرياضي والنماذج الاحصائية: سلسلة دروس مع تمارين مختارة*. بن عكنون، الجزائر: ديوان المطبوعات الجامعية.

جلال مصطفى الصياد. (2008). *نظرية الاحتمالات.* جدة، المملكة العربية السعودية: دار الحافظ للنشر والتوزيع.

عبد مضحي جبار. (2010). *مقدمة في نظرية الاحتمالات.* عمان، الأردن: دار المسيرة للنشر والتوزيع.

علي أحمد السقاف. (2020). *الإحصاء الوصفي والاستدلالي.* برلين، ألمانيا: المركز الديمقراطي العربي.

مبارك اسبر ديب. (2009). *مبادئ في الاحتمالات والإحصاء.* سوريا: مديرية الكتب والمطبوعات بجامعة تشرين.

محمد بداوي. (2018). الإحصاء والاحتمالات 1. *مطبوعة بيداغوجية.* الأغواط، المدرسة العليا للأساتذة، الجزائر.

محمد بيداوي، و محمد دوة. (2016). *الإحصاء المطبق في العلوم الاجتماعية.* عمان، الأردن: دار اليازوري العلمية.

مفتاح عثمان امطير. (2020). *حساب الاحتمالات.* عمان: مركز الكتاب الأكاديمي.

نبيل جمعة صالح النجار. (2015). *الإحصاء التحليلي مع تطبيقات برمجية .SPSS* عمان، الأردن: دار ومكتبة الحامد.

الملحق رقم 01: جدول التوزيع الطبيعي.

STANDARD NORMAL DISTRIBUTION TABLE

Entries represent $\Pr(Z \leq z)$. The value of z to the first decimal is given in the left column. The second decimal is given in the top row.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

الملحق رقم 02: جدول توزيع كاي تربيع.

تمثل القيمة 20.278 قيمة المتغير العشوائي χ_n^2 التي تعطي احتمال متراكم قدره 0.995 للمجال $[0 - 20.278]$، أو هي قيمة المتغير العشوائي χ_n^2 التي تعطي احتمال متراكم قدره 0.005 للمجال $[(+\infty) - 20.278]$.

وهذا يعني أن:

$$P(X = x) = \int_0^{\chi_n^2} f(x^2)dx^2 = 1 - \alpha$$

$$P(X = x) = \int_{\chi_n^2}^{+\infty} f(x^2)dx^2 = \alpha$$

لإيجاد قيم χ_n^2 عند درجة حرية 7 ومستوى معنوية $\alpha = 0.005$ نبحث عنها في الجدول، وهي نقطة التقاء السطر 7 مع العمود $\chi_{0.005}^2$، نجدها تساوي 20.278.

n	α										
	0.995	0.990	0.975	0.950	0.900	0.500	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.45	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.01	0.02	0.05	0.10	0.21	1.39	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.07	0.11	0.22	0.35	0.58	2.37	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.21	0.30	0.48	0.71	1.06	3.36	7.78	9.94	11.14	13.28	14.86
5	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	4.35	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.68	0.87	1.24	1.64	2.20	5.35	10.65	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	6.35	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	7.34	13.36	15.51	17.53	20.09	21.96
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	8.34	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	9.34	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	10.34	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	11.34	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	12.34	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	13.34	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.27	7.26	8.55	14.34	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	15.34	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	16.34	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.87	17.34	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.81	10.12	11.65	18.34	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	19.34	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	20.34	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	21.34	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	22.34	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	23.34	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	24.34	34.28	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	25.34	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	26.34	36.74	40.11	43.19	46.96	49.65
28	12.46	13.57	15.31	16.93	18.94	27.34	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	28.34	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	29.34	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	39.34	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	49.33	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	59.33	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	69.33	85.53	90.53	95.02	100.42	104.22
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	79.33	96.58	101.88	106.63	112.33	116.32
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	89.33	107.57	113.14	118.14	124.12	128.30
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	99.33	118.50	124.34	129.56	135.81	140.17

الملحق رقم 03: جدول توزيع ستيودنت.

t Table

one-tail	0.50	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
df											
1	0.000	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	318.31	636.62
2	0.000	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.599
3	0.000	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924
4	0.000	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	0.000	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	0.000	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	0.000	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	0.000	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	0.000	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	0.000	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	0.000	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	0.000	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	0.000	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	0.000	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	0.000	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	0.000	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	0.000	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	0.000	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	0.000	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	0.000	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	0.000	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	0.000	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	0.000	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24	0.000	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	0.000	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	0.000	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	0.000	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	0.000	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	0.000	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	0.000	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	0.000	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
60	0.000	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
80	0.000	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195	3.416
100	0.000	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174	3.390
1000	0.000	0.675	0.842	1.037	1.282	1.646	1.962	2.330	2.581	3.098	3.300
z	0.000	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291
	0%	50%	60%	70%	80%	90%	95%	98%	99%	99.8%	99.9%
	Confidence Level										

الملحق رقم 04: جدول توزيع فيشر (α=1%)

Critical Values of the F-Distribution: $\alpha = 0.01$

Denom. d.f.	Numerator Degrees of Freedom 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4052.181	4999.500	5403.352	5624.583	5763.650	5858.986	5928.356	5981.070	6022.473	6055.847
2	98.503	99.000	99.166	99.249	99.299	99.333	99.356	99.374	99.388	99.399
3	34.116	30.817	29.457	28.710	28.237	27.911	27.672	27.489	27.345	27.229
4	21.198	18.000	16.694	15.977	15.522	15.207	14.976	14.799	14.659	14.546
5	16.258	13.274	12.060	11.392	10.967	10.672	10.456	10.289	10.158	10.051
6	13.745	10.925	9.780	9.148	8.746	8.466	8.260	8.102	7.976	7.874
7	12.246	9.547	8.451	7.847	7.460	7.191	6.993	6.840	6.719	6.620
8	11.259	8.649	7.591	7.006	6.632	6.371	6.178	6.029	5.911	5.814
9	10.561	8.022	6.992	6.422	6.057	5.802	5.613	5.467	5.351	5.257
10	10.044	7.559	6.552	5.994	5.636	5.386	5.200	5.057	4.942	4.849
11	9.646	7.206	6.217	5.668	5.316	5.069	4.886	4.744	4.632	4.539
12	9.330	6.927	5.953	5.412	5.064	4.821	4.640	4.499	4.388	4.296
13	9.074	6.701	5.739	5.205	4.862	4.620	4.441	4.302	4.191	4.100
14	8.862	6.515	5.564	5.035	4.695	4.456	4.278	4.140	4.030	3.939
15	8.683	6.359	5.417	4.893	4.556	4.318	4.142	4.004	3.895	3.805
16	8.531	6.226	5.292	4.773	4.437	4.202	4.026	3.890	3.780	3.691
17	8.400	6.112	5.185	4.669	4.336	4.102	3.927	3.791	3.682	3.593
18	8.285	6.013	5.092	4.579	4.248	4.015	3.841	3.705	3.597	3.508
19	8.185	5.926	5.010	4.500	4.171	3.939	3.765	3.631	3.523	3.434
20	8.096	5.849	4.938	4.431	4.103	3.871	3.699	3.564	3.457	3.368
21	8.017	5.780	4.874	4.369	4.042	3.812	3.640	3.506	3.398	3.310
22	7.945	5.719	4.817	4.313	3.988	3.758	3.587	3.453	3.346	3.258
23	7.881	5.664	4.765	4.264	3.939	3.710	3.539	3.406	3.299	3.211
24	7.823	5.614	4.718	4.218	3.895	3.667	3.496	3.363	3.256	3.168
25	7.770	5.568	4.675	4.177	3.855	3.627	3.457	3.324	3.217	3.129
26	7.721	5.526	4.637	4.140	3.818	3.591	3.421	3.288	3.182	3.094
27	7.677	5.488	4.601	4.106	3.785	3.558	3.388	3.256	3.149	3.062
28	7.636	5.453	4.568	4.074	3.754	3.528	3.358	3.226	3.120	3.032
29	7.598	5.420	4.538	4.045	3.725	3.499	3.330	3.198	3.092	3.005
30	7.562	5.390	4.510	4.018	3.699	3.473	3.304	3.173	3.067	2.979
31	7.530	5.362	4.484	3.993	3.675	3.449	3.281	3.149	3.043	2.955
32	7.499	5.336	4.459	3.969	3.652	3.427	3.258	3.127	3.021	2.934
33	7.471	5.312	4.437	3.948	3.630	3.406	3.238	3.106	3.000	2.913
34	7.444	5.289	4.416	3.927	3.611	3.386	3.218	3.087	2.981	2.894
35	7.419	5.268	4.396	3.908	3.592	3.368	3.200	3.069	2.963	2.876
36	7.396	5.248	4.377	3.890	3.574	3.351	3.183	3.052	2.946	2.859
37	7.373	5.229	4.360	3.873	3.558	3.334	3.167	3.036	2.930	2.843
38	7.353	5.211	4.343	3.858	3.542	3.319	3.152	3.021	2.915	2.828
39	7.333	5.194	4.327	3.843	3.528	3.305	3.137	3.006	2.901	2.814
40	7.314	5.179	4.313	3.828	3.514	3.291	3.124	2.993	2.888	2.801
41	7.296	5.163	4.299	3.815	3.501	3.278	3.111	2.980	2.875	2.788
42	7.280	5.149	4.285	3.802	3.488	3.266	3.099	2.968	2.863	2.776
43	7.264	5.136	4.273	3.790	3.476	3.254	3.087	2.957	2.851	2.764
44	7.248	5.123	4.261	3.778	3.465	3.243	3.076	2.946	2.840	2.754
45	7.234	5.110	4.249	3.767	3.454	3.232	3.066	2.935	2.830	2.743
46	7.220	5.099	4.238	3.757	3.444	3.222	3.056	2.925	2.820	2.733
47	7.207	5.087	4.228	3.747	3.434	3.213	3.046	2.916	2.811	2.724
48	7.194	5.077	4.218	3.737	3.425	3.204	3.037	2.907	2.802	2.715
49	7.182	5.066	4.208	3.728	3.416	3.195	3.028	2.898	2.793	2.706
50	7.171	5.057	4.199	3.720	3.408	3.186	3.020	2.890	2.785	2.698
60	7.077	4.977	4.126	3.649	3.339	3.119	2.953	2.823	2.718	2.632
70	7.011	4.922	4.074	3.600	3.291	3.071	2.906	2.777	2.672	2.585
80	6.963	4.881	4.036	3.563	3.255	3.036	2.871	2.742	2.637	2.551
90	6.925	4.849	4.007	3.535	3.228	3.009	2.845	2.715	2.611	2.524
100	6.895	4.824	3.984	3.513	3.206	2.988	2.823	2.694	2.590	2.503
120	6.851	4.787	3.949	3.480	3.174	2.956	2.792	2.663	2.559	2.472
140	6.819	4.760	3.925	3.456	3.151	2.933	2.769	2.641	2.536	2.450
180	6.778	4.725	3.892	3.425	3.120	2.904	2.740	2.611	2.507	2.421
200	6.763	4.713	3.881	3.414	3.110	2.893	2.730	2.601	2.497	2.411
∞	6.635	4.605	3.782	3.319	3.017	2.802	2.639	2.511	2.407	2.321

الملحق رقم 05: جدول توزيع فيشر (α=5%)

Critical Values of the F-Distribution: $\alpha = 0.05$

Denom.	Numerator Degrees of Freedom									
d.f.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161.448	199.500	215.707	224.583	230.162	233.986	236.768	238.883	240.543	241.882
2	18.513	19.000	19.164	19.247	19.296	19.330	19.353	19.371	19.385	19.396
3	10.128	9.552	9.277	9.117	9.013	8.941	8.887	8.845	8.812	8.786
4	7.709	6.944	6.591	6.388	6.256	6.163	6.094	6.041	5.999	5.964
5	6.608	5.786	5.409	5.192	5.050	4.950	4.876	4.818	4.772	4.735
6	5.987	5.143	4.757	4.534	4.387	4.284	4.207	4.147	4.099	4.060
7	5.591	4.737	4.347	4.120	3.972	3.866	3.787	3.726	3.677	3.637
8	5.318	4.459	4.066	3.838	3.687	3.581	3.500	3.438	3.388	3.347
9	5.117	4.256	3.863	3.633	3.482	3.374	3.293	3.230	3.179	3.137
10	4.965	4.103	3.708	3.478	3.326	3.217	3.135	3.072	3.020	2.978
11	4.844	3.982	3.587	3.357	3.204	3.095	3.012	2.948	2.896	2.854
12	4.747	3.885	3.490	3.259	3.106	2.996	2.913	2.849	2.796	2.753
13	4.667	3.806	3.411	3.179	3.025	2.915	2.832	2.767	2.714	2.671
14	4.600	3.739	3.344	3.112	2.958	2.848	2.764	2.699	2.646	2.602
15	4.543	3.682	3.287	3.056	2.901	2.790	2.707	2.641	2.588	2.544
16	4.494	3.634	3.239	3.007	2.852	2.741	2.657	2.591	2.538	2.494
17	4.451	3.592	3.197	2.965	2.810	2.699	2.614	2.548	2.494	2.450
18	4.414	3.555	3.160	2.928	2.773	2.661	2.577	2.510	2.456	2.412
19	4.381	3.522	3.127	2.895	2.740	2.628	2.544	2.477	2.423	2.378
20	4.351	3.493	3.098	2.866	2.711	2.599	2.514	2.447	2.393	2.348
21	4.325	3.467	3.072	2.840	2.685	2.573	2.488	2.420	2.366	2.321
22	4.301	3.443	3.049	2.817	2.661	2.549	2.464	2.397	2.342	2.297
23	4.279	3.422	3.028	2.796	2.640	2.528	2.442	2.375	2.320	2.275
24	4.260	3.403	3.009	2.776	2.621	2.508	2.423	2.355	2.300	2.255
25	4.242	3.385	2.991	2.759	2.603	2.490	2.405	2.337	2.282	2.236
26	4.225	3.369	2.975	2.743	2.587	2.474	2.388	2.321	2.265	2.220
27	4.210	3.354	2.960	2.728	2.572	2.459	2.373	2.305	2.250	2.204
28	4.196	3.340	2.947	2.714	2.558	2.445	2.359	2.291	2.236	2.190
29	4.183	3.328	2.934	2.701	2.545	2.432	2.346	2.278	2.223	2.177
30	4.171	3.316	2.922	2.690	2.534	2.421	2.334	2.266	2.211	2.165
31	4.160	3.305	2.911	2.679	2.523	2.409	2.323	2.255	2.199	2.153
32	4.149	3.295	2.901	2.668	2.512	2.399	2.313	2.244	2.189	2.142
33	4.139	3.285	2.892	2.659	2.503	2.389	2.303	2.235	2.179	2.133
34	4.130	3.276	2.883	2.650	2.494	2.380	2.294	2.225	2.170	2.123
35	4.121	3.267	2.874	2.641	2.485	2.372	2.285	2.217	2.161	2.114
36	4.113	3.259	2.866	2.634	2.477	2.364	2.277	2.209	2.153	2.106
37	4.105	3.252	2.859	2.626	2.470	2.356	2.270	2.201	2.145	2.098
38	4.098	3.245	2.852	2.619	2.463	2.349	2.262	2.194	2.138	2.091
39	4.091	3.238	2.845	2.612	2.456	2.342	2.255	2.187	2.131	2.084
40	4.085	3.232	2.839	2.606	2.449	2.336	2.249	2.180	2.124	2.077
41	4.079	3.226	2.833	2.600	2.443	2.330	2.243	2.174	2.118	2.071
42	4.073	3.220	2.827	2.594	2.438	2.324	2.237	2.168	2.112	2.065
43	4.067	3.214	2.822	2.589	2.432	2.318	2.232	2.163	2.106	2.059
44	4.062	3.209	2.816	2.584	2.427	2.313	2.226	2.157	2.101	2.054
45	4.057	3.204	2.812	2.579	2.422	2.308	2.221	2.152	2.096	2.049
46	4.052	3.200	2.807	2.574	2.417	2.304	2.216	2.147	2.091	2.044
47	4.047	3.195	2.802	2.570	2.413	2.299	2.212	2.143	2.086	2.039
48	4.043	3.191	2.798	2.565	2.409	2.295	2.207	2.138	2.082	2.035
49	4.038	3.187	2.794	2.561	2.404	2.290	2.203	2.134	2.077	2.030
50	4.034	3.183	2.790	2.557	2.400	2.286	2.199	2.130	2.073	2.026
60	4.001	3.150	2.758	2.525	2.368	2.254	2.167	2.097	2.040	1.993
70	3.978	3.128	2.736	2.503	2.346	2.231	2.143	2.074	2.017	1.969
80	3.960	3.111	2.719	2.486	2.329	2.214	2.126	2.056	1.999	1.951
90	3.947	3.098	2.706	2.473	2.316	2.201	2.113	2.043	1.986	1.938
100	3.936	3.087	2.696	2.463	2.305	2.191	2.103	2.032	1.975	1.927
120	3.920	3.072	2.680	2.447	2.290	2.175	2.087	2.016	1.959	1.910
140	3.909	3.061	2.669	2.436	2.279	2.164	2.076	2.005	1.947	1.899
180	3.894	3.046	2.655	2.422	2.264	2.149	2.061	1.990	1.932	1.884
200	3.888	3.041	2.650	2.417	2.259	2.144	2.056	1.985	1.927	1.878
∞	3.841	2.996	2.605	2.372	2.214	2.099	2.010	1.938	1.880	1.831

الملحق رقم 06: جدول توزيع فيشر (α=10%)

Critical Values of the F-Distribution: $\alpha = 0.01$

Denom. d.f.	Numerator Degrees of Freedom 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4052.181	4999.500	5403.352	5624.583	5763.650	5858.986	5928.356	5981.070	6022.473	6055.847
2	98.503	99.000	99.166	99.249	99.299	99.333	99.356	99.374	99.388	99.399
3	34.116	30.817	29.457	28.710	28.237	27.911	27.672	27.489	27.345	27.229
4	21.198	18.000	16.694	15.977	15.522	15.207	14.976	14.799	14.659	14.546
5	16.258	13.274	12.060	11.392	10.967	10.672	10.456	10.289	10.158	10.051
6	13.745	10.925	9.780	9.148	8.746	8.466	8.260	8.102	7.976	7.874
7	12.246	9.547	8.451	7.847	7.460	7.191	6.993	6.840	6.719	6.620
8	11.259	8.649	7.591	7.006	6.632	6.371	6.178	6.029	5.911	5.814
9	10.561	8.022	6.992	6.422	6.057	5.802	5.613	5.467	5.351	5.257
10	10.044	7.559	6.552	5.994	5.636	5.386	5.200	5.057	4.942	4.849
11	9.646	7.206	6.217	5.668	5.316	5.069	4.886	4.744	4.632	4.539
12	9.330	6.927	5.953	5.412	5.064	4.821	4.640	4.499	4.388	4.296
13	9.074	6.701	5.739	5.205	4.862	4.620	4.441	4.302	4.191	4.100
14	8.862	6.515	5.564	5.035	4.695	4.456	4.278	4.140	4.030	3.939
15	8.683	6.359	5.417	4.893	4.556	4.318	4.142	4.004	3.895	3.805
16	8.531	6.226	5.292	4.773	4.437	4.202	4.026	3.890	3.780	3.691
17	8.400	6.112	5.185	4.669	4.336	4.102	3.927	3.791	3.682	3.593
18	8.285	6.013	5.092	4.579	4.248	4.015	3.841	3.705	3.597	3.508
19	8.185	5.926	5.010	4.500	4.171	3.939	3.765	3.631	3.523	3.434
20	8.096	5.849	4.938	4.431	4.103	3.871	3.699	3.564	3.457	3.368
21	8.017	5.780	4.874	4.369	4.042	3.812	3.640	3.506	3.398	3.310
22	7.945	5.719	4.817	4.313	3.988	3.758	3.587	3.453	3.346	3.258
23	7.881	5.664	4.765	4.264	3.939	3.710	3.539	3.406	3.299	3.211
24	7.823	5.614	4.718	4.218	3.895	3.667	3.496	3.363	3.256	3.168
25	7.770	5.568	4.675	4.177	3.855	3.627	3.457	3.324	3.217	3.129
26	7.721	5.526	4.637	4.140	3.818	3.591	3.421	3.288	3.182	3.094
27	7.677	5.488	4.601	4.106	3.785	3.558	3.388	3.256	3.149	3.062
28	7.636	5.453	4.568	4.074	3.754	3.528	3.358	3.226	3.120	3.032
29	7.598	5.420	4.538	4.045	3.725	3.499	3.330	3.198	3.092	3.005
30	7.562	5.390	4.510	4.018	3.699	3.473	3.304	3.173	3.067	2.979
31	7.530	5.362	4.484	3.993	3.675	3.449	3.281	3.149	3.043	2.955
32	7.499	5.336	4.459	3.969	3.652	3.427	3.258	3.127	3.021	2.934
33	7.471	5.312	4.437	3.948	3.630	3.406	3.238	3.106	3.000	2.913
34	7.444	5.289	4.416	3.927	3.611	3.386	3.218	3.087	2.981	2.894
35	7.419	5.268	4.396	3.908	3.592	3.368	3.200	3.069	2.963	2.876
36	7.396	5.248	4.377	3.890	3.574	3.351	3.183	3.052	2.946	2.859
37	7.373	5.229	4.360	3.873	3.558	3.334	3.167	3.036	2.930	2.843
38	7.353	5.211	4.343	3.858	3.542	3.319	3.152	3.021	2.915	2.828
39	7.333	5.194	4.327	3.843	3.528	3.305	3.137	3.006	2.901	2.814
40	7.314	5.179	4.313	3.828	3.514	3.291	3.124	2.993	2.888	2.801
41	7.296	5.163	4.299	3.815	3.501	3.278	3.111	2.980	2.875	2.788
42	7.280	5.149	4.285	3.802	3.488	3.266	3.099	2.968	2.863	2.776
43	7.264	5.136	4.273	3.790	3.476	3.254	3.087	2.957	2.851	2.764
44	7.248	5.123	4.261	3.778	3.465	3.243	3.076	2.946	2.840	2.754
45	7.234	5.110	4.249	3.767	3.454	3.232	3.066	2.935	2.830	2.743
46	7.220	5.099	4.238	3.757	3.444	3.222	3.056	2.925	2.820	2.733
47	7.207	5.087	4.228	3.747	3.434	3.213	3.046	2.916	2.811	2.724
48	7.194	5.077	4.218	3.737	3.425	3.204	3.037	2.907	2.802	2.715
49	7.182	5.066	4.208	3.728	3.416	3.195	3.028	2.898	2.793	2.706
50	7.171	5.057	4.199	3.720	3.408	3.186	3.020	2.890	2.785	2.698
60	7.077	4.977	4.126	3.649	3.339	3.119	2.953	2.823	2.718	2.632
70	7.011	4.922	4.074	3.600	3.291	3.071	2.906	2.777	2.672	2.585
80	6.963	4.881	4.036	3.563	3.255	3.036	2.871	2.742	2.637	2.551
90	6.925	4.849	4.007	3.535	3.228	3.009	2.845	2.715	2.611	2.524
100	6.895	4.824	3.984	3.513	3.206	2.988	2.823	2.694	2.590	2.503
120	6.851	4.787	3.949	3.480	3.174	2.956	2.792	2.663	2.559	2.472
140	6.819	4.760	3.925	3.456	3.151	2.933	2.769	2.641	2.536	2.450
180	6.778	4.725	3.892	3.425	3.120	2.904	2.740	2.611	2.507	2.421
200	6.763	4.713	3.881	3.414	3.110	2.893	2.730	2.601	2.497	2.411
∞	6.635	4.605	3.782	3.319	3.017	2.802	2.639	2.511	2.407	2.321

AUTHOR' SHORT BIOGRAPHY

Photo

Dr. Mezouaghi Djilali, PhD in Commercial Sciences with a specialization in Finance and International Trade from the University of Mostaganem (Algeria).
Lecturer "B" in the Department of Economic Sciences, Business, and Management Sciences.
University of Relizane (Algeria).

E-mail: djilali.mezouaghi@univ-relizane.dz
ORCID iD: https://orcid.org/0009-0003-5827-4338
Google Scholar ; https://scholar.google.com/citations?user=EBOKXhQAAAAJ&hl=fr
ResearchGate; **https://www.researchgate.net/profile/mzwaghy-jylaly?ev=hdr_xprf**