

REPUBLIQUE ALGERIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la recherche scientifique
Université de Relizane
Faculté des Sciences et Technologies
Département de : Electrotechnique et Automatique



Commande des systèmes linéaires



Niveau : licence 3 Automatique

Options : Automatique et Systèmes

Préparé et Enseigné par :

Dr : Adda BELABBAS

Année : 2021-2022

REPUBLIQUE ALGERIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la recherche scientifique
Université de Relizane
Faculté des Sciences et Technologies
Département de : Electrotechnique et Automatique



Commande des systèmes linéaires

Niveau : licence 3 Automatique

Options : Automatique et Systèmes

Préparé et Enseigné par : Dr : Adda BELABBAS

Année : 2021-2022

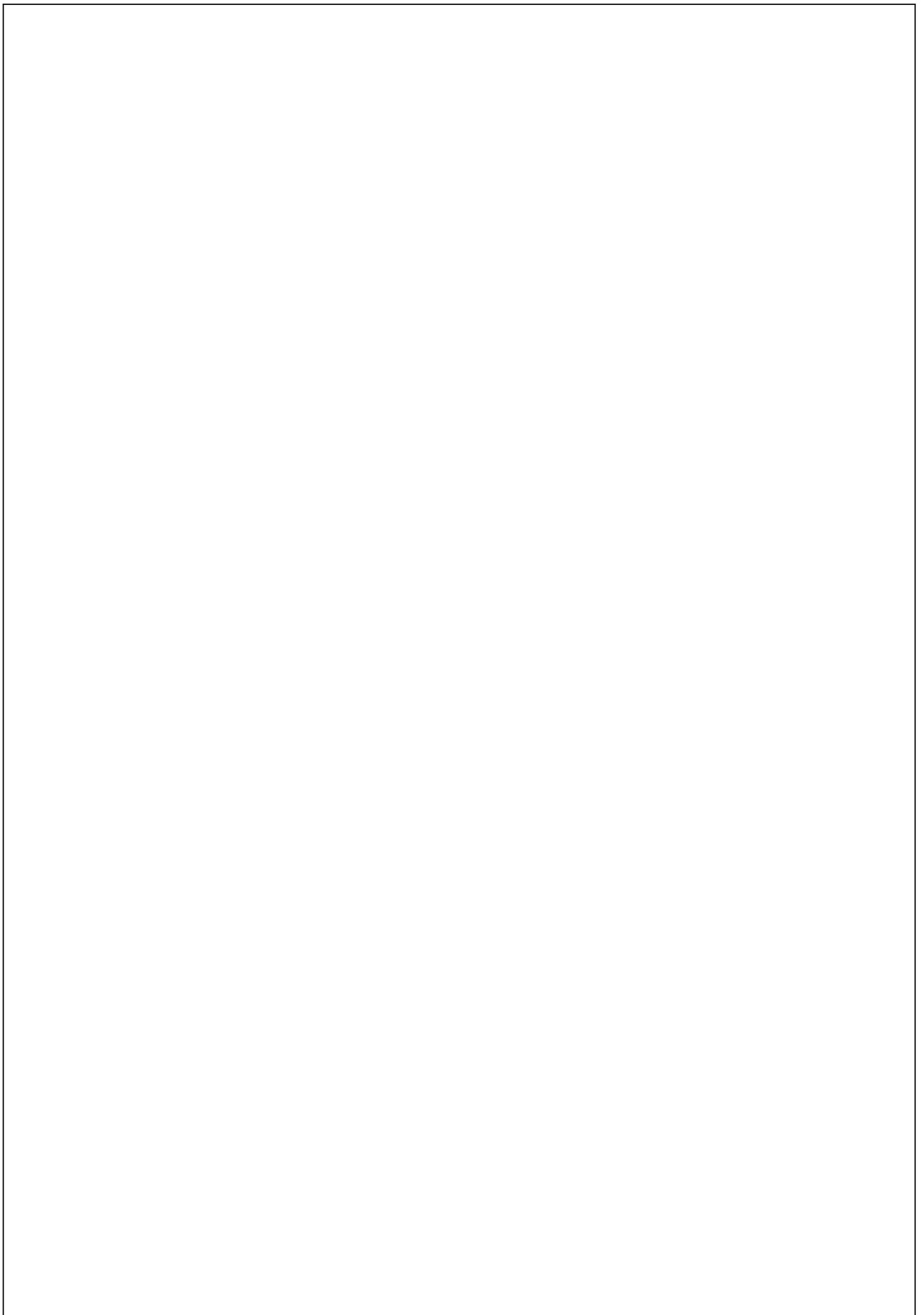
بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Table des matières

Introduction	8
Chapitre 01 stabilité des systèmes en boucle fermée dans le domaine fréquentiel et marge de stabilité	2
1.1. Introduction	2
1.2. Analyse fréquentielle de systèmes dynamiques, réponse harmonique	3
1.2.1. Réponse fréquentielle	3
1.2.2. Lien avec la fonction de transfert	4
1.2.3. La fonction de transfert.....	5
1.2.4. Représentations de la réponse fréquentielle (diagramme de Bode).....	6
1.2.5. Diagrammes de Bode - Intérêt de l'échelle logarithmique	12
1.2.6. Représentation en échelle linéaire	12
1.2.7. Représentation en échelles logarithmiques.....	13
1.2.8. Pulsation de coupure ; bande passante.....	14
1.3. Théorème de stabilité des systèmes en boucle fermée de Nyquist.....	20
1.3.1. Définition.....	20
1.4. Stabilité des systèmes linéaires asservis	23
1.4.1. Critère mathématique de stabilité	23
1.4.2. Critère de nyquist.....	24
1.5. La stabilité dans le domaine fréquentielle	27
1.5.1. Point critique de stabilité	28
1.6. Critère graphique ou de revers dans le plan de Nyquist	29
1.7. Marges de stabilité.....	29
1.8. Marges de stabilité dans Bode	30
1.9. Coefficient de surtension Q (ou facteur de résonance).....	33
1.9.1. Définition.....	33
Chapitre 02 : Calcul des correcteurs dans le domaine fréquentiel.....	36
2.1. Introduction	36
2.1.1. Nécessité de correction dans les systèmes asservis	36
2.1.2. Stabilité :	36
2.1.3. Précision :	36
2.2. Stratégie de correction (ou compensation) des systèmes asservis	37
2.3 Correcteurs de base.....	38
2.4. Principe d'une régulation en boucle fermée.	39
2.5 Correcteur à action proportionnelle (P)	40
2.5.1. Principe.....	40
2.5.2. L'action proportionnelle :	41

2.5.3.	Réglage des marges de stabilité.....	44
2.5.4.	Réglage de la marge de phase.....	45
2.5.5.	Réglage de la marge de de gain.....	45
2.6.	Correcteur à action intégral	47
2.6.1.	Principe.....	47
2.6.2.	Effet.....	48
2.7.	Correcteur à action proportionnel intégral (PI)	50
2.7.1.	Réalisation pratique du PI.....	52
2.7.2.	La Réponse harmonique	53
2.8.	Réglage des paramètres de PI.....	53
2.8.1.	Réglage d'un régulateur PI par l'analyse harmonique.....	53
2.9.	Correcteur à retard de phase	55
2.9.1.	Définition.....	55
2.9.2.	Propriétés	56
2.9.3.	Effets du correcteur	57
2.9.4.	Eléments de réglage du correcteur.....	57
2.9.5.	Circuit électrique	59
2.10.	Correcteur dérivé (D).....	60
2.10.1.	Effets du correcteur	61
2.11.	Correcteur à avance de phase	62
2.11.1.	Definition.....	62
2.11.2.	Synthèse du correcteur.....	63
2.11.3.	Démarche de synthèse du correcteur	63
2.11.4.	Effets généraux du correcteur à avance de phase	63
2.11.5.	Réalisation du correcteur à avance de phase	64
2.12.1.	Méthodes de réglages des paramètres du regulateur PID	67
2.12.2.	Méthodes empiriques de Ziegler&Nichols.....	67
2.12.3.	Méthode de Ziegler&Nichols en boucle ouverte.....	68
2.12.4.	Méthode de Ziegler & Nichols en boucle fermée.....	70
2.12.5.	Méthode empirique : Méthode de la réglabilité.....	72
2.12.6.	Exemple de synthèse sur les méthodes empiriques.	74
2.12.7.	Methods fréquentielles.....	77
2.12.8.	Synthèse par compensation des poles.....	84
Chapitre 1.	Représentation d'état des systèmes.....	88
3.1.	Introduction).....	88
3.1.1.	Définitions	88

3.2. Représentation analogique des modèles d'état	91
3.3. Représentation d'état des systèmes à temps discret	91
3.4. Avantages de la représentation d'état	92
3.5. Conversion de fonction de transfert a espace d'état	92
3.6. Conversion de fonction de transfert a espace d'état	95
3.7. Différentes représentations d'état (modèles)	96
3.8. Représentation d'état des systèmes non linéaires.....	101
3.9. Linéarisation du système non linéaire	102
Chapitre 04. Analyse des systèmes dans l'espace d'état	106
4.1. Résolution des équations d'état et matrice de transition	106
4.2. Stabilité :.....	108
4.2.1. Position du problème et définitions.....	108
4.2.2. Fonction de transfert et stabilité	109
4.3. Notions de commandabilité et d'observabilité (définitions et méthodes de test).....	111
4.3.1. Notion de la commandabilité	112
4.3.2. Notion d'observabilité	113
Chapitre 05. La commande par Le retour d'état	113
5.1.Principe de la commande par retour d'état linéaire	120
5.2. Formulation	120
5.3. Approche pratique pour calculer le gain du retour d'état.....	121
5.4. Soit le système en boucle ouverte représenté par l'équation d'état suivant :	121
Chapitre 6 : Observateur d'état	125
6.1. Principe	125
6.2. Synthèse d'observateur.....	125
6.2.1. Définition.....	125
6.2.2. Observateur identité.....	126
6.4. Observateur d'ordre réduit	129
6.5. Commande par retour d'état avec observateur.....	131
Annexes	135



Introduction

La commande des systèmes linéaires est une discipline destinée à analyser, synthétiser et concevoir des correcteurs (régulateurs ou encore contrôleurs) pour les systèmes linéaires. Ce support de cours en respectant un canevas destiné aux étudiants de License troisième années, a pour but de présenter un exposé sur les principales techniques de synthèse des correcteurs basée sur la modélisation fréquentielle d'un système asservi décrit par une fonction de transfert, ainsi que la synthèse des systèmes basée sur la modélisation temporelle dans l'espace d'état. Il est destiné aux étudiants dans les disciplines de l'automatique, et d'électrotechnique...ect. Ce support de cours présente aussi plusieurs exemples avec des codes (scripts) et simulation en Matlab.

Ce module est une consolidation des connaissances acquises en deuxième année et permet la maîtrise de la représentation des systèmes dynamiques et de leurs propriétés dans l'espace d'état ainsi que l'acquisition des principales méthodes d'analyse et de synthèse des systèmes de commande.

Ce présent support est organisé de deux parties de sorte qu'il assure la totalité du programme comme le suivant :

La première partie est commencée par un premier chapitre qui assure des rappels sur les méthodes permettant de déterminer la stabilité et les marges de la stabilité d'un système linéaire continu dont on connaît soit l'expression analytique de la fonction de transfert, soit une représentation graphique de sa réponse fréquentielle (Bode, Nyquist).

Le deuxième chapitre est consacré essentiellement aux méthodes de synthèse des régulateurs classiques dans le domaine fréquentiel. Au début, un aperçu sur les méthodes de corrections est donné, suivi par une présentation détaillée des structures des différents régulateurs classiques (P, PI, PD, PID, AP, RP) avec leurs modes d'action. A la fin du chapitre sont présentées les méthodes à suivre pour la synthèse des régulateurs classiques.

La deuxième partie est précédée par un chapitre introduisant d'abord la notion de "la représentation d'état". Ensuite l'équation d'état est résolue pour différentes entrées typiques. Enfin, les différentes méthodes de passage entre la RE, la FT et ED sont présentées.

Le deuxième chapitre décrit les notions de l'analyse du système dans l'espace d'état en commençant par la solution de l'équation puis sa commandabilité et d'observabilité et fournit les outils nécessaires à leur étude dans le cas des systèmes linéaires.

Le dernier chapitre a pour but de fournir à la fois les outils et les étapes à suivre pour la synthèse de la commande par retour d'état avec et sans observateur des systèmes linéaires mono-variables.

Semestre :	5
Unité d'enseignement :	UEF 3.1.1
Matière 1 :	Commande des systèmes linéaires
VHS :	45h00 (Cours : 1h30, TD : 1h30)
Crédits :	4
Coefficient :	2

Objectifs de l'enseignement :

Ce module est une consolidation des connaissances acquises en deuxième année et permet la maîtrise de la représentation des systèmes dynamiques et de leurs propriétés dans l'espace d'état ainsi que l'acquisition des principales méthodes d'analyse et de synthèse des systèmes de commande.

Connaissances préalables recommandées :

Mathématiques de base. Systèmes linéaires continus et échantillonnés.

Contenu de la matière :

Partie 1 :

Chapitre 1. Rappels : Stabilité des systèmes en boucle fermée dans le domaine fréquentiel et marges de stabilité.

1. Réponse fréquentielle à partir de fonction de transfert
2. représentations de la réponse fréquentielle (diagramme de Bode)
3. Théorème de stabilité des systèmes en boucle fermée de Nyquist (diagramme de Nyquist)
4. Cas particuliers (critère du revers sur le diagramme polaire marges de stabilité, critère du revers sur le diagramme de Bode, marges de stabilité sur le diagramme de Bode).

Chapitre 2. Calcul des contrôleurs dans le domaine fréquentiel

5. Réponse fréquentielles et propriétés fréquentielles des contrôleurs (P, PI, PID, PD, avance de phase, retard de phase, avance de phase)
6. Spécification dans le domaine fréquentiel (marge de gain et de phase, facteur de résonance, bande passante, leurs interprétations)
7. Calcul des contrôleurs en utilisant le diagramme de Bode, Réglages en utilisant l'abaque de Black-Nichols.

Partie 2 :

Chapitre 1. Représentation d'état des systèmes

1. Introduction
2. Concepts (état, variables d'état, ...)
3. Représentation d'état des systèmes linéaires continus.

4. Représentation d'état des systèmes discrets.
5. Formes canoniques.
6. Représentation d'état des systèmes non linéaires.
7. Linéarisation.

Chapitre 2. Analyse des systèmes dans l'espace d'état

1. Résolution des équations d'état et matrice de transition, Méthodes de calculs de la matrice de Transition, Analyse modale (diagonalisation)
2. Stabilité.
3. Notions de commandabilité et d'observabilité (définitions et méthodes de test).

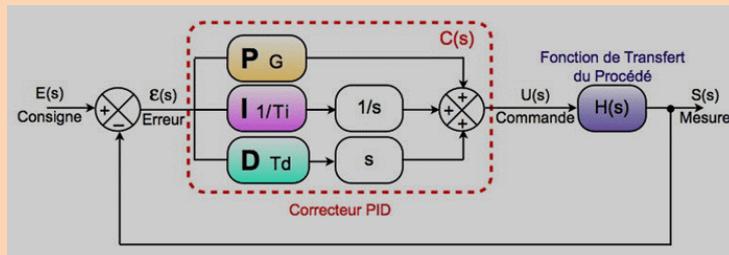
Chapitre 3. Commande par retour d'état

1. Formulation du problème de placement de pôles par retour d'état
2. Méthodes de calculs pour les systèmes mono-variables.
3. Cas de systèmes multi-variables
4. Implémentation.

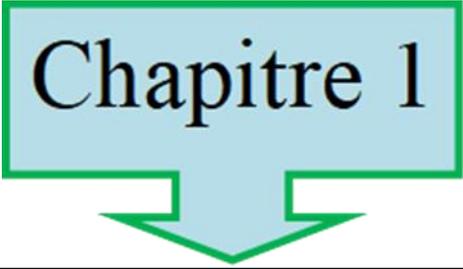
Chapitre 4. Synthèse des observateurs d'état

1. Introduction
2. Observateurs déterministes (Luenberger) et méthodes de calculs.
3. Observateurs réduits.
4. Observateurs stochastiques (filtre de Kalman).

Partie 1



Chapitre 1



Rappels sur :

1. Stabilité des systèmes en boucle fermée dans le domaine fréquentiel
2. Marges de stabilité

Chapitre 01 stabilité des systèmes en boucle fermée dans le domaine fréquentiel et marge de stabilité

Rappels sur :

1. Réponse fréquentielle à partir de fonction de transfert
2. représentations de la réponse fréquentielle (diagramme polaire, diagramme de Bode)
3. Théorème de stabilité des systèmes en boucle fermée de Nyquist (diagramme de Nyquist)
4. Cas particuliers (critère du revers sur le diagramme polaire marges de stabilité, critère du revers sur le diagramme de Bode, marges de stabilité sur le diagramme de Bode)

1.1. Introduction

➤ **QUESTION 01** : Qu'est-ce que la réponse en fréquence ?

➤ **RÉPONSE** : Le nom le dit, qu'il s'agit de la réponse d'un système en régime permanent vis-à-vis un signal d'entrée qui varie à une certaine fréquence.

➤ **QUESTION 02** : Pourquoi est-il intéressant de s'intéresser à la réponse en fréquence ?

➤ **RÉPONSE** : Il existe plusieurs raisons pour lesquelles il est intéressant et important de se soucier de la réponse en fréquence :

- Technique d'analyse très facile à expérimenter en pratique (facile à réaliser, fiable...)
- Nous renseigne énormément aux niveaux des caractéristiques du système (surtout par rapport à la réponse transitoire)
- Permet même, dans certains cas, l'identification de la fonction de transfert d'un système lorsqu'on ne la connaît pas a priori.

Important :

En régime permanent, un système linéaire auquel on applique une entrée de type sinusoïdale génère aussi, à sa sortie, un signal sinusoïdal qui oscille à la même fréquence ω .

À retenir :

L'objectif de l'analyse fréquentielle est d'étudier le comportement et la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale. La réponse permanente d'un système linéaire sollicité par une entrée sinusoïdale $E_0 \sin(\omega t)$ est aussi de la forme sinusoïdale $S_0 \sin(\omega t + \theta)$ de même pulsation que le signal d'entrée mais d'amplitude S_0 différente et déphasée par rapport au signal d'entrée d'un angle θ .

La figure 1.1 représente les deux signaux déphasés l'un par rapport à l'autre et ayant des amplitudes différentes pour une fréquence donnée.

L'analyse fréquentielle consiste à étudier les variations du rapport des amplitudes du signal de sortie et du signal d'entrée, ainsi que le déphasage entre eux en faisant varier la fréquence f . Dans cette analyse, l'amplitude du signal d'entrée est maintenue constante alors que le paramètre variable est la fréquence f ou la pulsation $\omega = 2\pi f$.

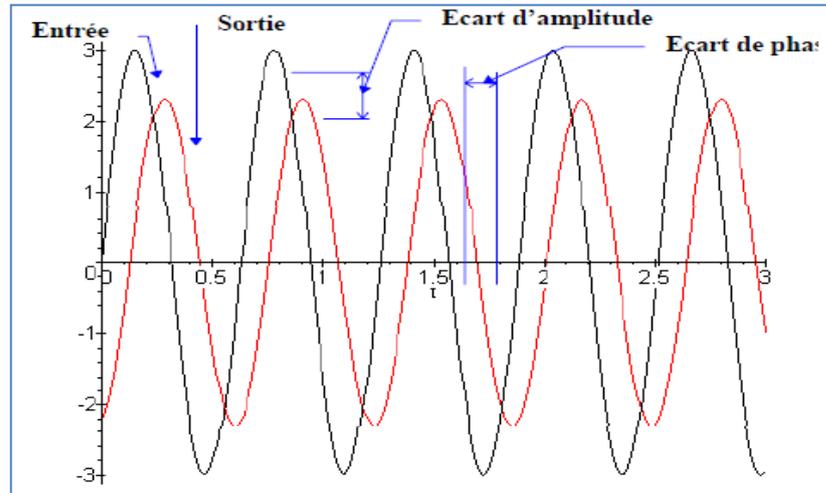


Fig 1.1. réponse à une entrée de type sinusoïdale d'un système linéaire (1)

La réponse fréquentielle peut s'obtenir de deux manières :

Expérimentalement, en excitant le système par un signal sinusoïdal à amplitude constante et à fréquence variable. Pour différentes valeurs de la fréquence, on relève l'amplitude du signal de sortie et on calcule le rapport des amplitudes

$\frac{S_0}{E_0}$ et le déphasage θ entre le signal de sortie et le signal d'entrée.

Théoriquement, en exploitant la connaissance de la fonction de transfert complexe du système.

1.2. Analyse fréquentielle de systèmes dynamiques, réponse harmonique (2)

L'analyse fréquentielle des systèmes dynamiques consiste à étudier le comportement et les propriétés de ceux-ci en régime **permanent** sinusoïdal. Dans le cas des systèmes linéaires stables, l'analyse fréquentielle fournit la réponse harmonique, fonction dépendant de la fréquence et décrivant comment, en régime permanent, le système amplifie et déphase les signaux sinusoïdaux appliqués à son entrée. Le régime permanent sinusoïdal est obtenu lorsque les transitoires ont été amorties, i.e. pour $t \rightarrow \infty$.

1.2.1. Réponse fréquentielle

La réponse fréquentielle (encore appelée harmonique) est la réponse en régime permanent (c'est-à-dire pour $t \rightarrow \infty$) à une entrée sinusoïdale. En effet, si l'on considère que tout signal d'entrée peut être décomposé en une somme (finie ou infinie) de signaux sinusoïdaux de diverses fréquences, il est important de savoir comment un système réagit à des excitations selon la fréquence f (ou la pulsation ! : on rappelle que $\omega = 2\pi f$).

La réponse dépend donc de la pulsation ω aussi parle-t-on de réponse fréquentielle. Elle est particulièrement priseée des automaticiens comme on le verra par la suite. (3)

1.2.2. Lien avec la fonction de transfert

Il faut avant tout savoir que lorsqu'un système de modèle linéaire est excité par une entrée sinusoïdale $u(t) = U_m \sin(\omega t)$, il répond de telle sorte qu'en régime permanent (c'est-à-dire après un certain temps de transition), la sortie est décrite par :

$$y(t) = A(\omega)U_m \sin(\omega t + \theta(\omega)) \quad (1.1)$$

Démonstration (3)

Dans cette partie, on revient sur les assertions du paragraphe précédent. Il y est dit que la réponse d'un système linéaire à une entrée sinusoïdale est, en régime permanent (pour $t \rightarrow \infty$), une sinusoïde. En réalité, ceci n'est vrai que si le système est asymptotiquement stable ce qui sera supposé ici. Il est également affirmé que la fonction de transfert permet de reconstruire cette sortie. En voici les justifications.

Le signal d'entrée est sinusoïdal :

$$u(t) = U_m \sin(\omega t) \quad (2.1)$$

D'après le tableau de la transformée de Laplace est :

$$U(p) = \frac{U_m \omega}{(p^2 + \omega^2)} \quad (3.1)$$

Soit $G(p)$, la fonction de transfert du système que l'on supposera de manière réaliste strictement propre. La transformée de Laplace de la sortie $y(t)$ est :

$$Y(p) = G(p) \frac{U_m \omega}{(p^2 + \omega^2)} \quad (4.1)$$

Comme $G(p)$ est strictement propre, $Y(p)$ est décomposable en éléments simples. Par souci de simplicité, on suppose, dans les calculs, que les pôles du système sont distincts. La décomposition conduit à :

$$Y(p) = \frac{a}{p - j\omega} + \frac{\bar{a}}{p + j\omega} + \sum_{i=1}^n \frac{S_i}{p - p_i} \quad (5.1)$$

Les valeurs p_i correspondent aux n pôles du système et les S_i sont les résidus associés à ces pôles dans cette décomposition.

a et \bar{a} sont les résidus associés à l'entrée sinusoïdale qui génère deux racines imaginaires pures conjuguées $j\omega$ et $-j\omega$ au dénominateur de $Y(p)$.

Si on applique \mathcal{L}^{-1} à $Y(p)$, on obtient :

$$y(t) = a e^{-j\omega t} + \bar{a} e^{j\omega t} + \sum_{i=1}^n S_i e^{-p_i t} \quad (6.1)$$

Comme le système est supposé asymptotiquement stable, la partie réelle de ses pôles est strictement négative et chaque terme $e^{-p_i t}$ tend vers zéro quand t tend vers l'infini. Donc, après un certain temps de régime transitoire, ce sont les deux premiers termes qui vont déterminer la réponse en régime permanent.

Dans le cas des pôles multiples, les expressions sont un peu plus compliquées à écrire et en appliquant \mathcal{L}^{-1} , des termes en $t^q e^{-pt}$ apparaissent mais ils tendent eux aussi vers 0 quand t tend vers l'infini. Il reste donc en régime permanent :

$$y_{\infty}(t) = y(t \rightarrow \infty) = a e^{-j\omega t} + \bar{a} e^{j\omega t} \quad (7.1)$$

Expression dans laquelle il convient de déterminer a et \bar{a} . L'identification des deux expressions de $Y(p)$ précédentes permet, en multipliant ces deux expressions par $(p + j\omega)$ et en posant $p = -j\omega$ de déduire :

$$a = -\frac{U_m}{2j} G(-j\omega) \quad (8.1)$$

Le même raisonnement mais en multipliant par $(p - j\omega)$ et en posant $p = j\omega$ conduit à :

$$\bar{a} = \frac{U_m}{2j} G(-j\omega) \quad (9.1)$$

$G(j\omega)$ est un nombre complexe paramétré par ω . Son module peut être noté $A(\omega)$ et son argument $\theta(\omega)$. $G(p)$ étant une fraction de deux polynômes en p , à coefficients réels, il est facile de voir que $G(-j\omega)$ est de même module $A(\omega)$. En revanche, on a $Arg(G(-j\omega)) = -\theta(\omega)$. On peut donc écrire $G(j\omega)$ et $G(-j\omega)$ ainsi :

$$G(j\omega) = A(\omega)e^{j\theta(\omega)}; G(-j\omega) = A(\omega)e^{-j\theta(\omega)} \quad (10.1)$$

On reprend l'équation de $y_{\infty}(t)$ avec ces valeurs de résidus et il vient :

$$y_{\infty}(t) = y(t \rightarrow \infty) = -\frac{U_m}{2j} G(-j\omega)e^{-j\omega t} + \frac{U_m}{2j} G(-j\omega)e^{j\omega t} \quad (11.1)$$

$$y(t) = A(\omega)U_m \frac{e^{j(\omega t + \theta(\omega))} - e^{-j(\omega t + \theta(\omega))}}{2i} \Leftrightarrow y(t) = A(\omega)U_m \sin(\omega t + \theta(\omega)) \quad (12.1)$$

La fonction de transfert calculée en $p = j\omega$ permet donc de retrouver la réponse harmonique du système. On comprend ici pourquoi poser $p = j\omega$ revient à supposer que l'excitation d'entrée est sinusoïdale.

La réponse est donc sinusoïdale de même fréquence mais déphasée par rapport à l'entrée. L'amplitude de la sortie et son déphasage (couramment appelé phase) dépendent tous deux de ω .

Et donc le gain harmonique $A(\omega)$ vérifie :

$$A(\omega) = |G(j\omega)| \quad (13.1)$$

Et le déphasage est tel que :

$$\omega = Arg(G(j\omega)) \quad (14.1)$$

1.2.3. La fonction de transfert (3)

La fonction de transfert $G(j\omega)$ d'un système quelconque est un nombre complexe. Trois solutions sont utilisées en pratique pour représenter ce nombre complexe graphiquement.

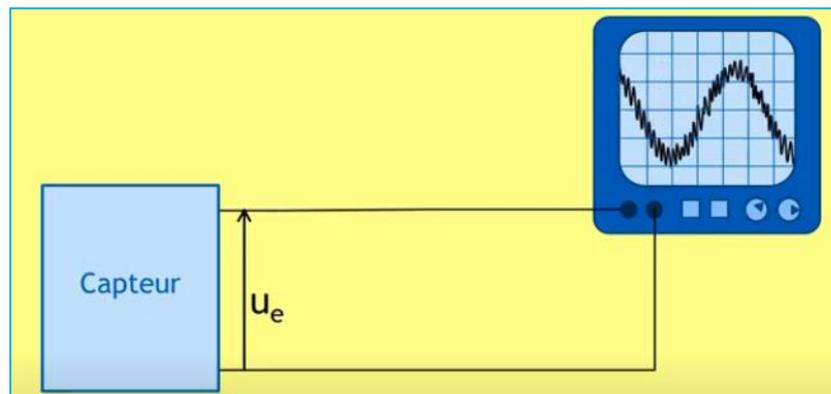
· Partie imaginaire en fonction de la partie réelle avec paramétrage en fréquence : **plan de Nyquist**.

- Module en fonction de la phase avec paramétrage en fréquence : **plan de Black**.
- Module en décibels en fonction de la fréquence et phase en fonction de la fréquence sur une échelle de fréquence logarithmique : **diagrammes de Bode**.

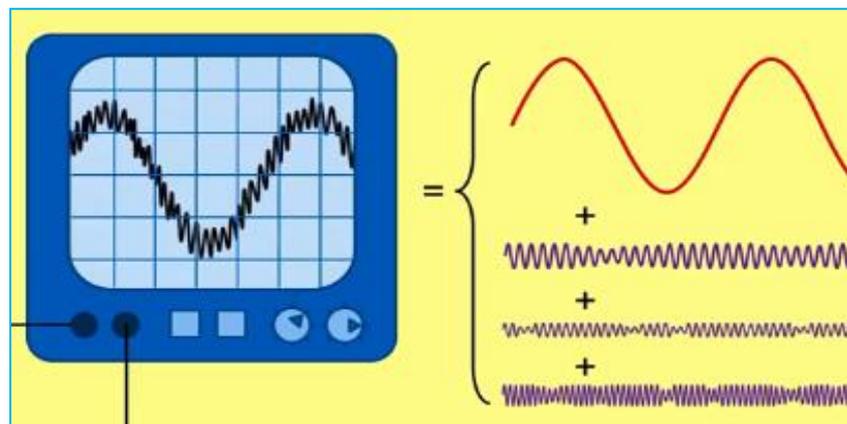
1.2.4. Représentations de la réponse fréquentielle (diagramme de Bode)

Pourquoi le diagramme de bode ?

Prenons l'exemple suivant : un capteur génère une tension sinusoïdale et cette tension malheureusement est bruitée.

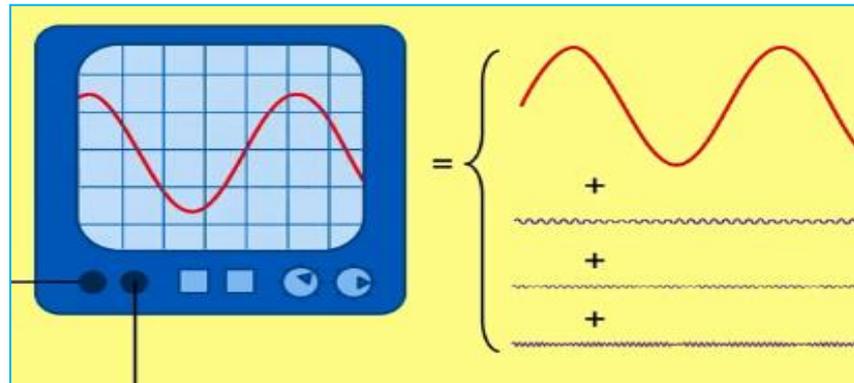


Le signal observé se compose d'un signal à basse fréquence auxquelles se superpose des signaux de plus haute fréquence

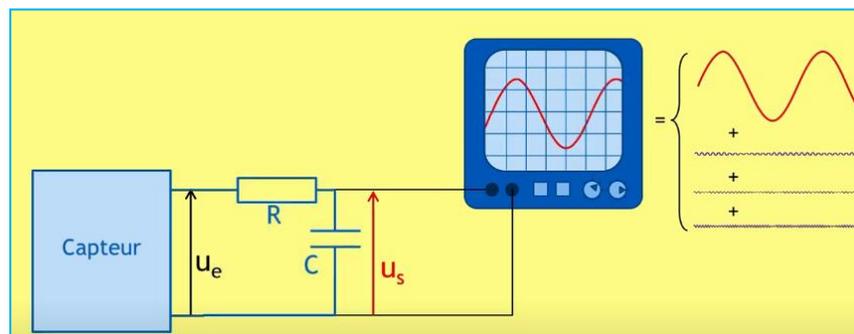


On souhaite supprimer les hautes fréquences qui composent le bruit à l'aide d'un filtre et on cherche à dimensionner le filtre de sorte que le signal de basse fréquence soit conservé et les parasites de hautes fréquences seront atténués.

Chapitre 01 : Stabilité des systèmes en boucle fermée dans le domaine fréquentiel et marges de stabilité

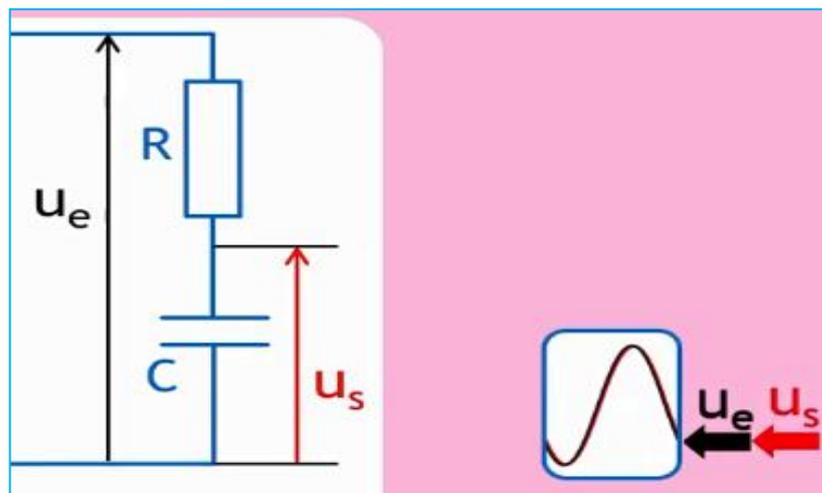


Dans cet exemple on utilise un filtre **RC**



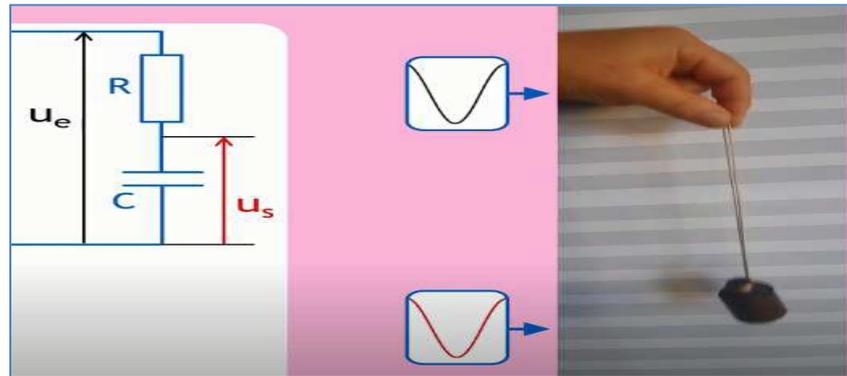
Le diagramme de bode illustre l'effet de ce filtre sur chacune des fréquences où on va voir quelle sont les fréquences qui seront atténuées et pour cela on visualise les tensions d'entrée et de sorties en fonction de leurs fréquences :

Si on sollicite le filtre à basses fréquences les tensions ont la même amplitude et le déphasage entre eux est nul (les deux tensions en phase)

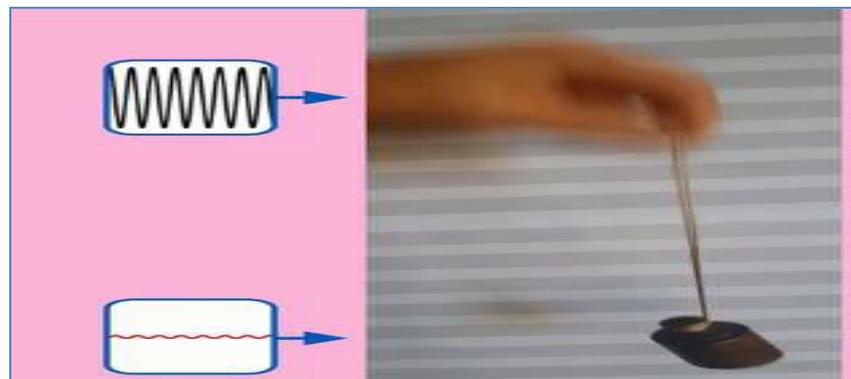


On observe le même phénomène si on déplace un poids suspendu à un élastique à basse fréquence c'est à dire que l'amplitude du mouvement de l'entrée (mouvement de la main) est la même amplitude du mouvement de la sortie (mouvement du poids)

Chapitre 01 : Stabilité des systèmes en boucle fermée dans le domaine fréquentiel et marges de stabilité

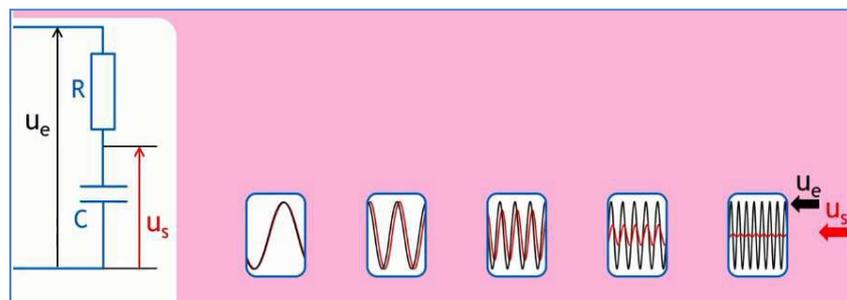


En revanche si on augmente la fréquence de la main on aura une diminution de l'amplitude du mouvement du poids et le même cas pour la phase on remarque que le système présente un déphasage entre les deux mouvements ?



Si on sollicite le filtre a une fréquence plus élevée on constate que l'amplitude du sortie est toujours la même que celle du signal d'entrée en revanche on observe que le signal de sortie est l'égerment en retard par rapport au signal d'entrée

Si on augmente la fréquence on observe clairement qu'il ya une différence entre les amplitudes (l'amplitude de la sortie est atténuée par rapport à l'amplitude de l'entrée) et le retard augmente (voir figure)



Le diagramme de bode représente tous ces cas de sollicitation en même temps sur un graphique dont l'axe des abscisse représente les différentes fréquences graduée en pulsation $= 2\pi f$.

Les diagrammes de bode devront apparaitre en même temps l'atténuation des amplitudes et le déphasage.

Chapitre 01 : Stabilité des systèmes en boucle fermée dans le domaine fréquentiel et marges de stabilité

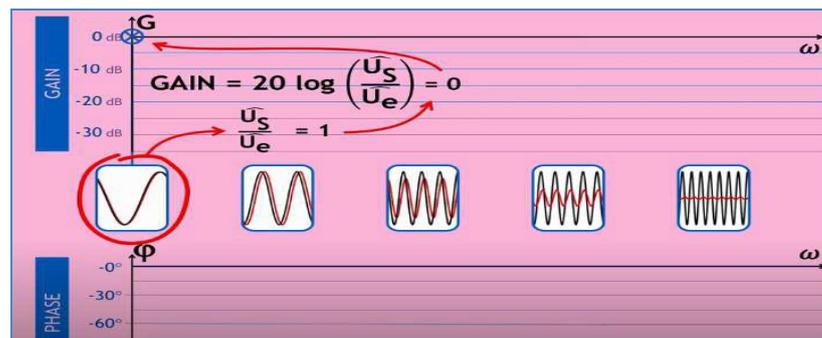
Un tel diagramme présente le rapport entre l'amplitude de la sortie par rapport à l'amplitude de l'entrée est appelé le gain, quand ce dernier est négatif on parle de l'atténuation des amplitudes et quand le gain est positif on parle de l'amplification des amplitudes de la fonction de transfert.

Le deuxième graphique représente le déphasage entre les deux tensions, dans notre cas on représente que la partie négative car on parle d'un filtre passif (atténuation des amplitudes). L'axe des ordonnées est gradué en dB c'est-à-dire $20 \log \left(\frac{\hat{u}_s}{\hat{u}_e} \right)$ pour faire apparaître le scénario de rapport $\frac{\hat{u}_s}{\hat{u}_e}$ dans les basses fréquences car cela ne peut pas apparaître si la représentation est linéaire.

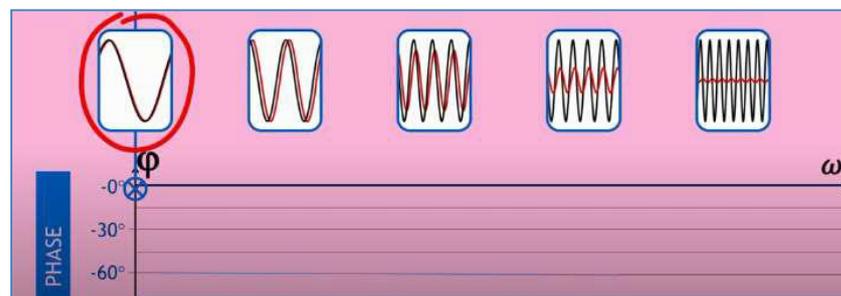
Le deuxième diagramme représente le déphasage entre les deux signaux est appelé le diagramme de phase il est utilisé souvent pour étudier la stabilité de système, dans notre cas on peut représenter que la partie négative de l'échelle des ordonnées car on parle d'un retard de phase

Pour le tracé on suit les différents cas des fréquences :

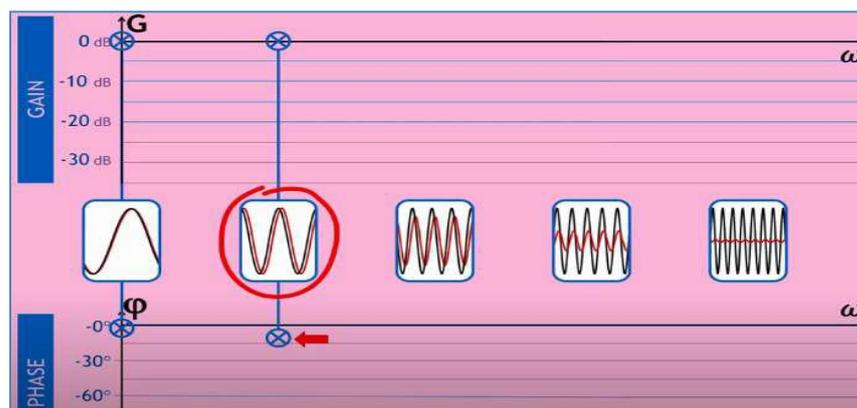
Pour tracer le gain



Pour tracer La phase

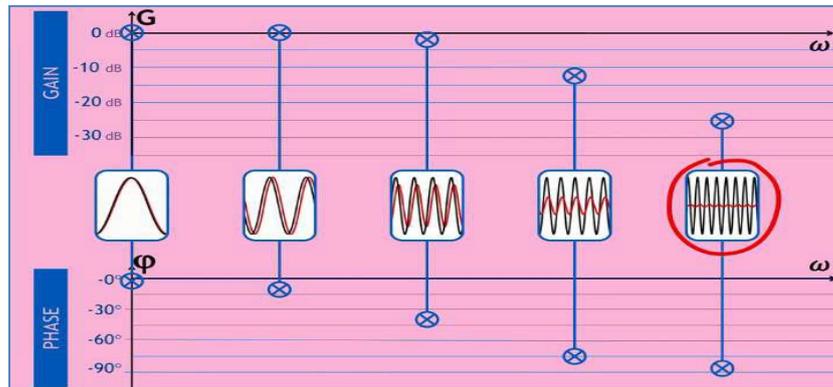


Deuxième cas

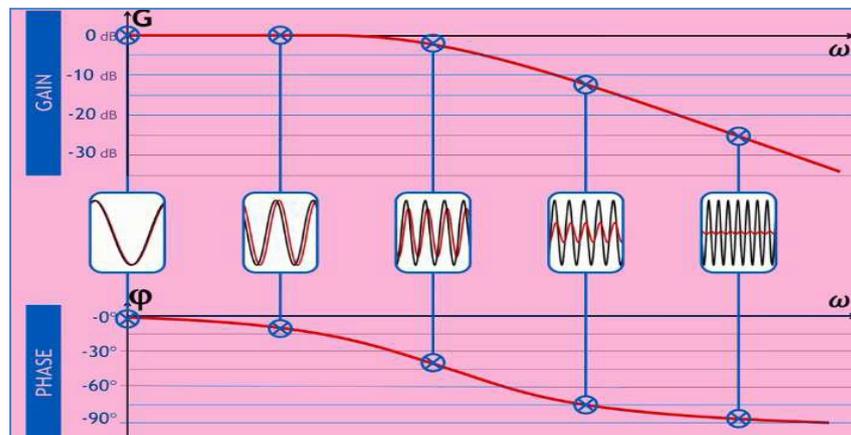


Chapitre 01 : Stabilité des systèmes en boucle fermée dans le domaine fréquentiel et marges de stabilité

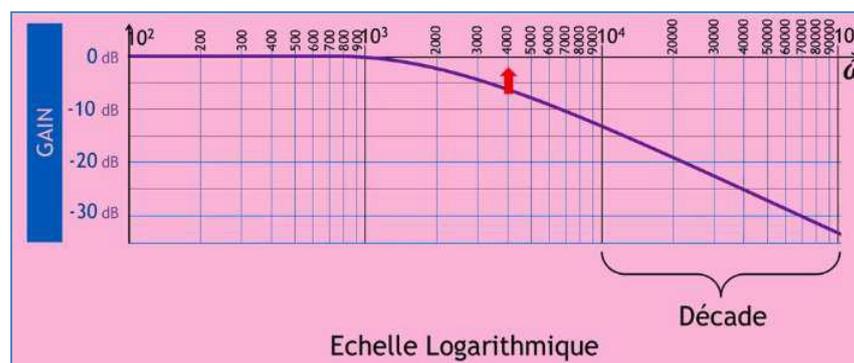
Le reste des cas



L'ensemble des représentations des gains et des déphasages en fonction des pulsations forme les diagrammes de Bode



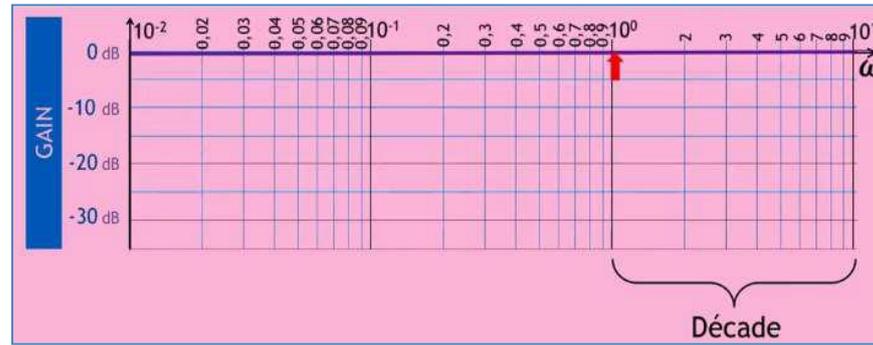
L'échelle pour les pulsations est une échelle logarithmique pour avoir apparaitre l'évolution du rapport des modules des deux signaux dans les basses fréquences



N.B

L'échelle logarithmique ne comporte pas le zéro (0), (voir figure) le déplacement vers la gauche apparait les valeurs proches de zéro mais ne jamais atteindre le zéro

Chapitre 01 : Stabilité des systèmes en boucle fermée dans le domaine fréquentiel et marges de stabilité



Pour tracer ses diagrammes on a besoin de la fonction du transfert du système en régime harmonique (nombre complexes) dans notre cas :

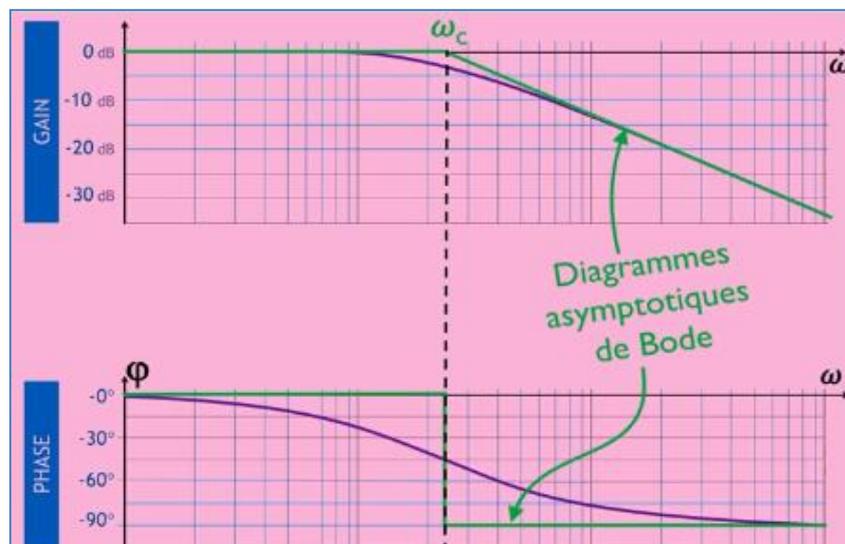
$$H(j\omega) = \frac{U_s}{U_e} = \frac{Z_c}{Z_c + R} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + R} = \frac{1}{1 + jCR\omega} \quad (15.1)$$

Le module :

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (c\omega R)^2}} \quad (16.1)$$

La phase :

$$\varphi = -\text{arctg}(CR\omega) \quad (17.1)$$



Basons sur l'exemple du circuit RC

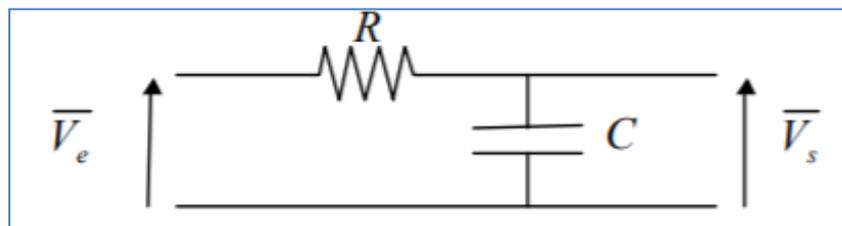


Fig 1.2 . Exemple d'un système linéaire

Pour la suite, on notera T , T_{dB} et θ le module linéaire, le module en décibels et la phase de la fonction de transfert respectivement

Dans le diagramme de **Bode**, l'information est présentée en deux parties comme on a vu précédemment. Une première courbe représente le gain du système en fonction de la pulsation. La seconde montre le déphasage en fonction de cette même pulsation. Pour que ces graphes puissent être construits efficacement, il faut toutefois satisfaire quelques règles :

- La pulsation est graduée en échelle logarithmique.
- L'amplification n'est pas donnée directement mais on porte en ordonnée ce qu'on appelle le gain en décibels soit

$$T(\omega) = 20 \log(|G(j\omega)|) \quad (18.1)$$

L'échelle restant alors linéaire.

- Le déphasage est gradué en degrés ou en radians en utilisant une échelle linéaire

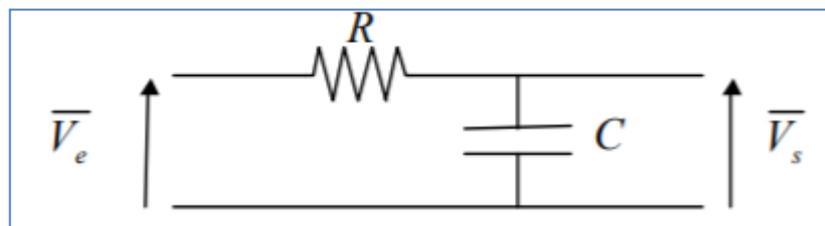
L'avantage d'un tel diagramme est que les courbes suivent des asymptotes. De ce fait, on peut tracer un diagramme asymptotique de Bode qui aide à la construction du diagramme réel.

1.2.5. Diagrammes de Bode - Intérêt de l'échelle logarithmique

Le décibel (dB) est une échelle logarithmique définie à partir des puissances de la façon suivante : $P_{dB} = 10 \text{ Log}_{10} (P)$ où : P est une puissance exprimée en Watts sur une échelle linéaire. Pour les tensions, le facteur devant le Log est 20 du fait que la puissance est proportionnelle au carré de la tension. Le module de la fonction de transfert s'exprime comme le rapport du module de la tension de sortie sur le module de la tension d'entrée du système considéré. En dB, on aura donc : $H_{dB} = 20 \text{ Log} (H) = 20 \text{ Log} \left| \frac{\bar{V}_s}{\bar{V}_e} \right|$ Pour la suite, on utilisera Log pour signifier le logarithme en base 10.

1.2.6. Représentation en échelle linéaire

Prenons l'exemple du circuit RC de la figure



On a

$$\bar{G} = \frac{\bar{V}_s}{\bar{V}_e} = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}} \quad (19.1)$$

Où : $\tau = RC$ et $\omega_0 = \frac{1}{RC}$

Soit pour le module

$$G = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad (20.1)$$

En posant

$$x = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (21.1)$$

On obtient :

$$G = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (22.1)$$

Si l'on représente G sur une échelle de fréquence linéaire, on obtient une courbe ne présentant pas d'asymptote lorsque $x \ll 1$ ou $x \gg 1$. Le tracé de G nécessite donc le calcul d'un grand nombre de points. Ce raisonnement peut être généralisé à toutes les fonctions de transfert se présentant sous une forme polynomiale :

$$\bar{G} = \frac{1+a_0jx+a_1(jx)^2+\dots+a_n(jx)^n}{1+b_0jx+b_1(jx)^2+\dots+b_m(jx)^m} \quad (23.1)$$

Dans tous les cas le tracé en échelle linéaire est long et fastidieux. On verra également qu'il ne permet pas de dégager des informations de façon rapide sur le système (Fréquence de coupure, Bande Passante, ...)

1.2.7. Représentation en échelles logarithmiques

Echelle logarithmique

L'échelle des fréquences est logarithmique. On fait correspondre x à $\text{Log}(x)$. On peut indifféremment utiliser le Log en base 2 (*log népérien*) ou en base 10. Trois points importants sont à retenir lorsque l'on utilise une échelle logarithmique :

- Une multiplication de la fréquence par un facteur constant se traduit par un décalage géométrique constant sur l'axe des fréquences.
- L'échelle ne peut pas démarrer du point 0 (fréquence nulle) du fait que $(0) = -\infty$.
- Une octave et une décade correspondent respectivement à une multiplication par un facteur 2 et 10 de la fréquence.

• Représentation du module (4)

Tracé asymptotique Le module est représenté en dB sur l'échelle logarithmique.

En reprenant l'exemple du circuit RC, on a : $H_{dB} = 20 \log\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) = -20 \log(\sqrt{1+x^2})$.

- Lorsque $x \gg 1$,

On a : $\lim H_{dB} = -20 \log(\sqrt{x^2}) = -20 \log(x)$ qui représente une droite de pente -20dB/décade sur une échelle logarithmique (ou encore -6dB/octave). En effet, pour $x = 1$, on a $H_{dB} = 0$;

- Pour $x = 10$, on a $H_{dB} = -20\text{dB}$, soit une diminution du module de 20dB pour une décade.

• Lorsque $x \ll 1$, on a : $\lim H_{dB} = -20 \log(\sqrt{1}) = 0$; qui représente une droite de pente nulle. En échelle logarithmique, le module en dB présente donc deux asymptotes, pour $x \gg 1$ et $x \ll 1$, soit pour les «hautes » fréquences et les «basses» fréquences (figure 1.3).

C'est évidemment le cas pour toutes les fonctions de transfert se présentant sous une forme polynomiale.

L'intérêt de l'échelle logarithmique est donc énorme pour le tracé et l'analyse du module d'une fonction de transfert.

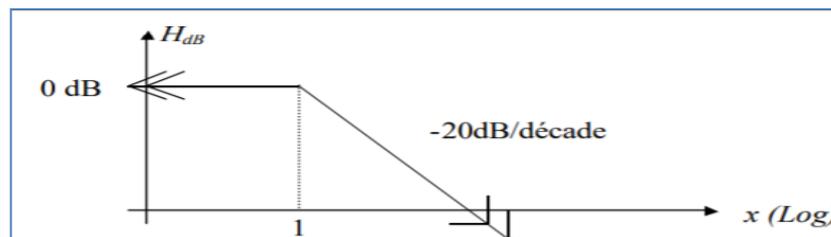


Fig 1 .3. Diagramme de Bode. Tracé asymptotique du module de la fonction de transfert du circuit RC (4)

1.2.8. Pulsation de coupure ; bande passante

► Pulsation de coupure :

C'est la pulsation pour laquelle le gain a diminué de $3dB$ par rapport à sa valeur maximum ou par rapport au gain statique suivant la nature du système (passe bas, passe haut, passe bande). De la même façon on peut définir la pulsation de coupure à $6dB$. Une diminution de $3dB$ se traduit par une diminution dans un rapport de $\frac{\sqrt{2}}{2}$: $|H(j\omega_c)| = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}} \cong 0.707 H_{max}$; une diminution de $6dB$ se traduit par une diminution dans un rapport de $1/2$: $|H(j\omega_c)| = \frac{H_{max}}{2} = 0.5 H_{max}$

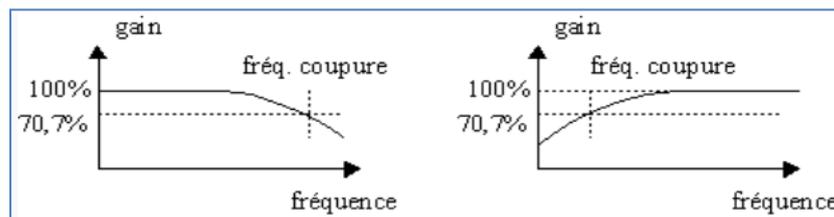


Fig 1 .4. Pulsation de coupure (4)

► Bande passante :

Un système en général transmet inégalement les diverses fréquences. On peut alors définir la **bande passante** comme étant l'intervalle de fréquences pour lequel le gain ne diminue pas de plus de $3dB$ (par exemple) par rapport à sa valeur maximale. Les fréquences extrêmes constituent des fréquences de coupure (basse ω_{c1} , et haute ω_{c2}) .

D'autre terme c'est le domaine des fréquences comprises :

- entre les fréquences de coupures $BP = \Delta f = f_{CHF} - f_{CBF}$ (filtre passe-bande),

Chapitre 01 : Stabilité des systèmes en boucle fermée dans le domaine fréquentiel et marges de stabilité

- Ou entre : **0 Hz et f_c** (passe-bas),
- Ou entre : **f_c et ∞** (passe haut).

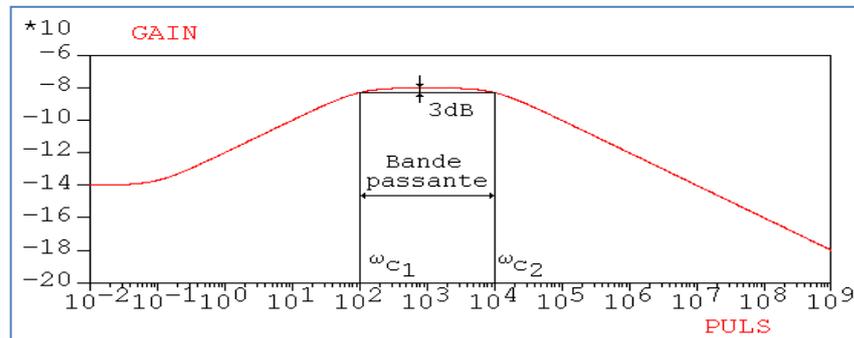


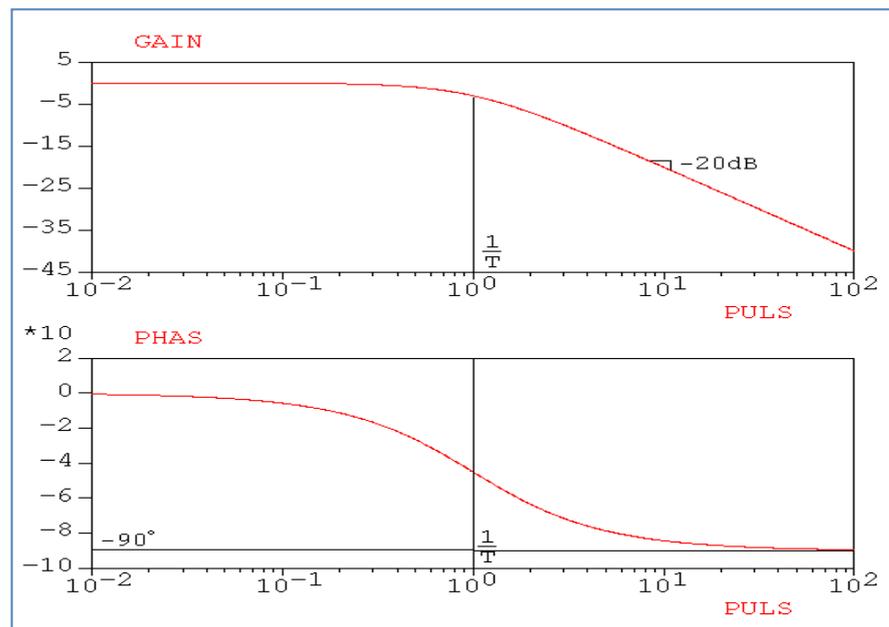
Fig 1 .5 .Exemples du premier et du deuxième ordre pour le diagramme de Bode

Pour un système du premier ordre :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1+j\omega\tau} \quad (24.1)$$

$$\text{amplitude} \Rightarrow |H(j\omega)| = \frac{|K|}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \quad (25.1)$$

$$\text{phase} \Rightarrow \angle H(j\omega) = -\arctan(\omega\tau) \quad (26.1)$$



Exemples

Systèmes d'ordre 1

$$H(s) = \frac{1}{\tau s + 1}, \quad \tau \text{ réel positif,}$$

Les diagrammes de Bode exacts correspondant à $H(s)$ sont représentés sur la figure ci dessous.

Les diagrammes de Bode de droite sont des approximations courantes utilisées dans ce cours :

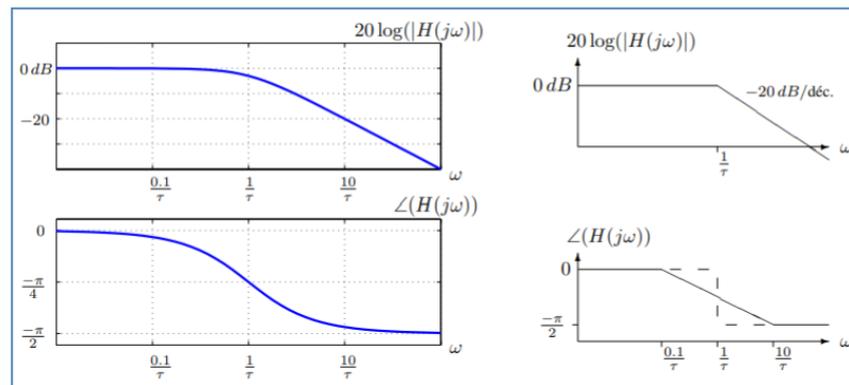
Chapitre 01 : Stabilité des systèmes en boucle fermée dans le domaine fréquentiel et marges de stabilité

$$20 \log_{10}(|H(j\omega)|) \begin{cases} = 0 \text{ dB} & \text{pour } \omega \leq 1/\tau \\ \text{décroît de } -20 \text{ dB/déc.} & \text{pour } \omega > 1/\tau \end{cases}$$

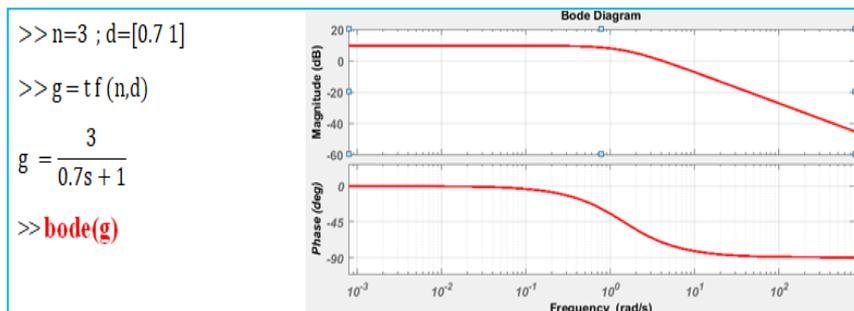
$$\angle H(j\omega) \begin{cases} = 0 & \text{pour } \omega \leq \frac{1}{10\tau} \\ = -\frac{\pi}{2} & \text{pour } \omega \geq \frac{10}{\tau} \\ \text{décroît de } -\frac{\pi}{4} \left(\frac{\text{rad}}{\text{déc}}\right) & \text{pour } \frac{1}{10\tau} < \omega < \frac{10}{\tau} \end{cases} \quad (\text{version précise})$$

Ou :

$$\angle H(j\omega) \begin{cases} = 0 & \text{pour } \omega \leq \frac{1}{\tau} \\ = -\frac{\pi}{2} & \text{pour } \omega > \frac{1}{\tau} \end{cases} \quad (\text{version simplifiée})$$



Exemple sous MATLAB



Pour un système du deuxième ordre :

$$H(j\omega) = \frac{K\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\omega_n\zeta(j\omega) + \omega_n^2}$$

$$\text{amplitude} \Rightarrow |H(j\omega)| = \frac{|K|}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$\text{phase} \Rightarrow \angle H(j\omega) = -\arctan\left(\frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right)$$

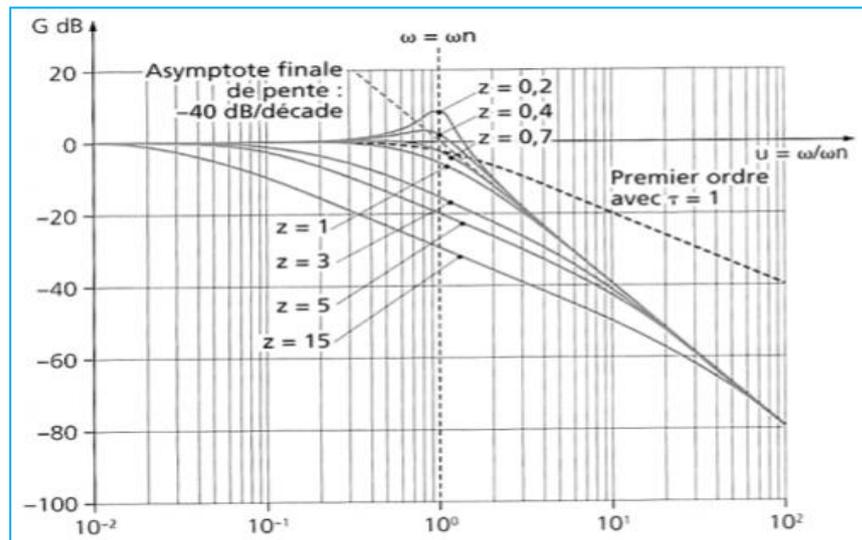
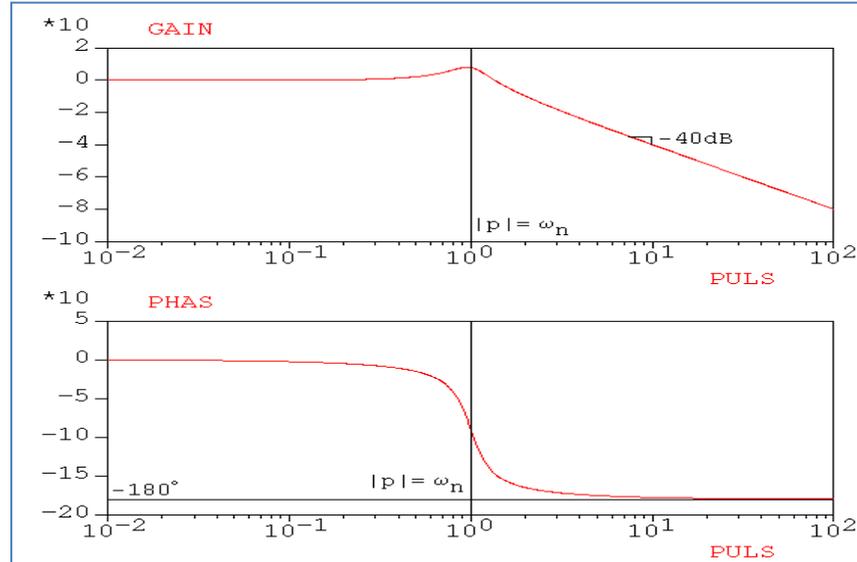


Fig 1 .6. diagramme de gain pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement

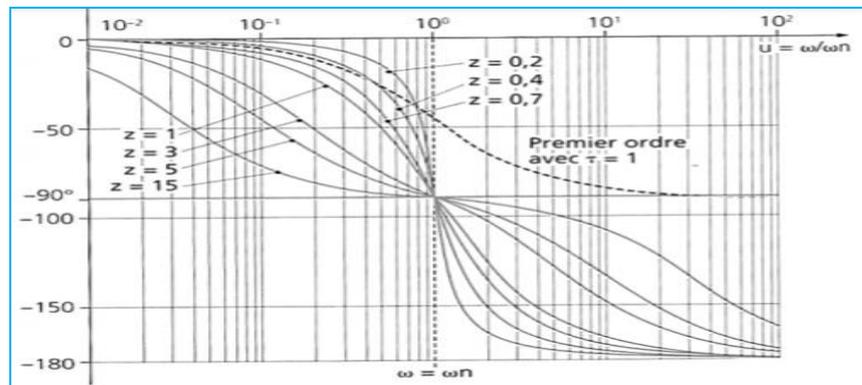


Fig 1 .7. diagramme de phase pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement

Exemple sous MATLAB

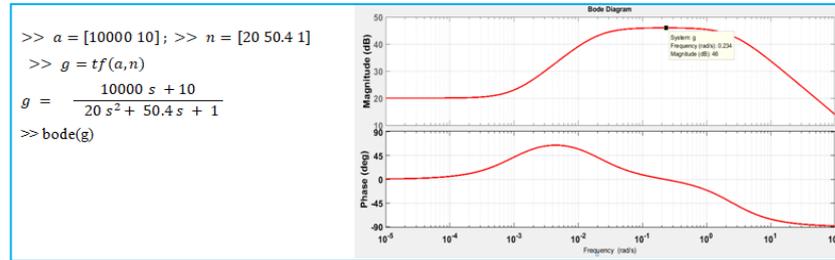


Fig 1 .8. Allure des diagrammes de Bode pour différentes valeurs du facteur d'amortissement

Exercice

Tracer les diagrammes de Bode de la fonction de transfert

Suivante :

$$H(p) = \frac{10.(1 + 5.p)}{p.(1 + p)}$$

$$GdB(\omega) = 20.\log |H(j.\omega)| = 20.\log \left(\left| \frac{10.(1 + 5.j\omega)}{j\omega.(1 + j\omega)} \right| \right)$$

$$= 20.\log(|10|) + 20.\log(|1 + 5.j.\omega|) + 20.\log \left| \frac{1}{j.\omega} \right| + 20.\log \left(\frac{1}{1 + j.\omega} \right)$$

$$= 20 + 20.\log \sqrt{1 + 25.\omega^2} - 20.\log(\omega) - 20.\log \sqrt{1 + \omega^2}$$

$$\varphi(\omega) = \arg (H(j.\omega)) = \arg \left(\frac{10.(1 + 5.j.\omega)}{j.\omega.(1 + j.\omega)} \right)$$

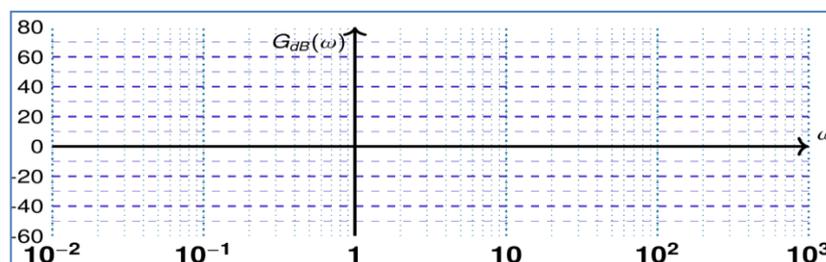
$$= \arg(10) + \arg(1 + 5.j.\omega) + \arg \left(\frac{1}{j.\omega} \right) + \arg \left(\frac{1}{1 + j.\omega} \right)$$

$$= 0 + \arctan (5.\omega) - \arctan \left(\frac{\omega}{0} \right) - \arctan (\omega)$$

$$= 0 + \arctan (5.\omega) - \arctan (\infty) - \arctan (\omega)$$

$$= \arctan (5.\omega) - \frac{\pi}{2} - \arctan (\omega)$$

Le tracé



Chapitre 01 : Stabilité des systèmes en boucle fermée dans le domaine fréquentiel et marges de stabilité

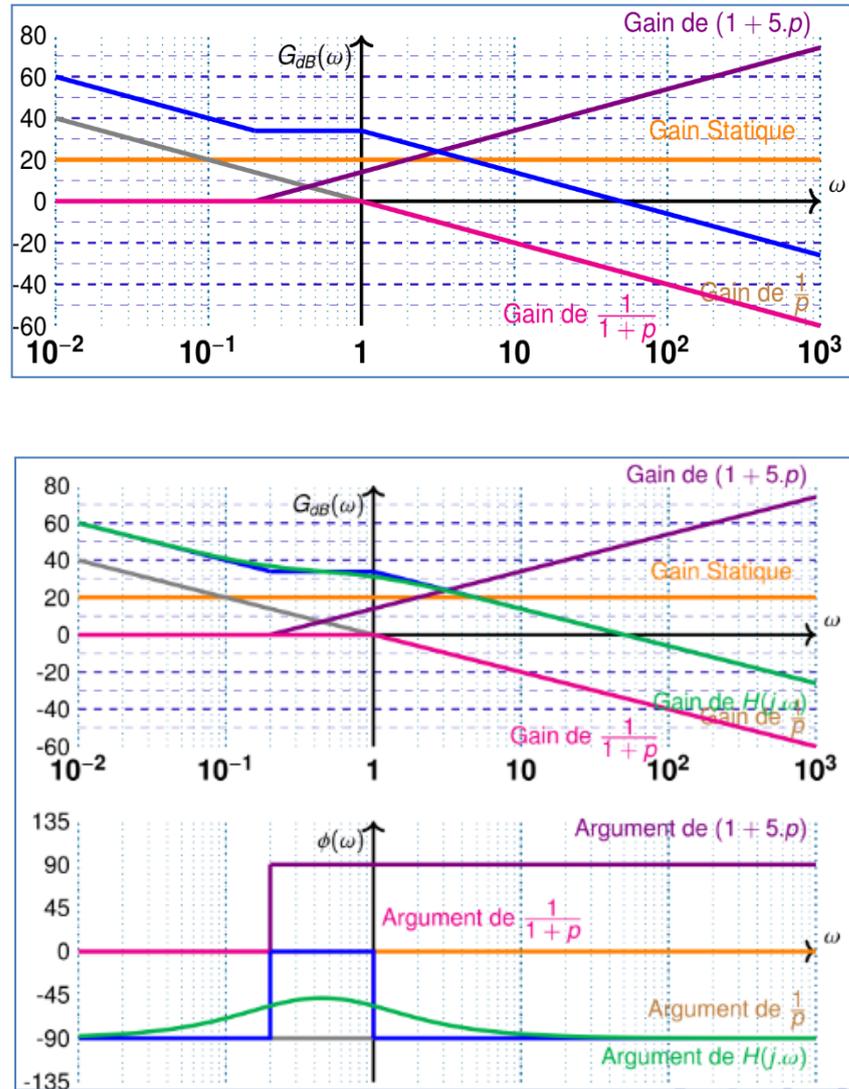
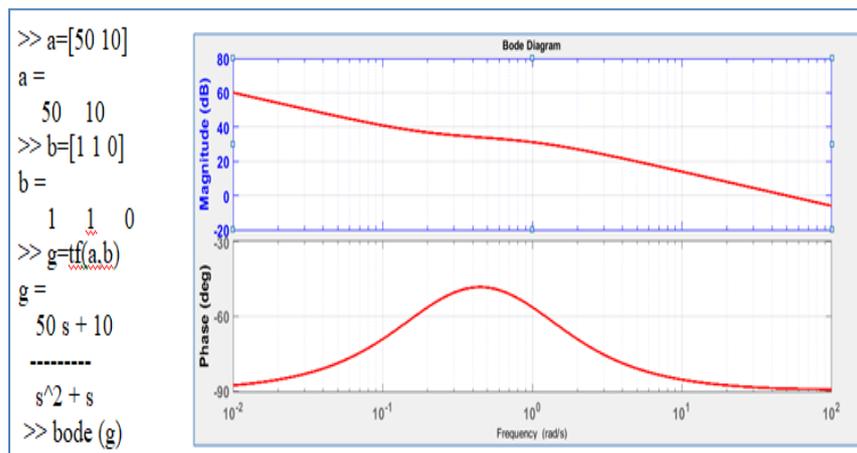


Fig 1 .9 Diagramme de bode (gain et phase)

Par matlab



1.3. Théorème de stabilité des systèmes en boucle fermée de Nyquist

1.3.1. Diagramme de Nyquist (5)

Le diagramme de Bode constitue un moyen très efficace et facile d'accès pour représenter graphiquement le comportement fréquentiel d'un système. Toutefois, il est nécessaire de toujours effectuer deux graphes : gain et déphasage.

Le diagramme de Nyquist permet d'obtenir une représentation graphique de ce comportement sur un graphe unique. Plus délicat à tracer, il revêt néanmoins un intérêt primordial en automatique, comme nous le verrons à l'étude la stabilité des systèmes asservis.

1.3.2. Définition

Le diagramme de Nyquist, ou lieu de Nyquist d'un système est le lieu, en coordonnées polaires, des points M de coordonnées $G(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ lorsque ω varie de 0 à $+\infty$ voir figure.

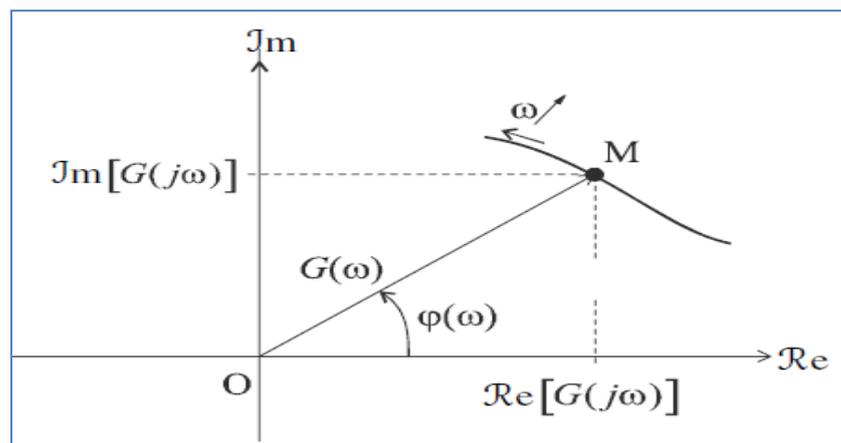


Fig 1.10. Définition schématique du diagramme de Nyquist. (5)

C'est aussi le lieu, dans le plan complexe, des points d'affixe $G(j\omega)$, donc de coordonnées $Re [G(j\omega)]$, $Im[G(j\omega)]$ dans ce plan. Il est d'usage d'orienter le graphe dans le sens des ω croissants et parfois, de graduer la courbe en ω . (5)

Le diagramme de Nyquist permet principalement de recueillir de l'information sur la stabilité d'un système (6)

Les points importants du diagramme sont :

- $\omega = 0$
- $\omega = \infty$
- ou la courbe croise l'axe imaginaire, $\varphi = \pm 90^\circ$
- ou la courbe croise l'axe réel, $\varphi = \pm 180^\circ$

Exemple

Soit le système décrit par la fonction de transfert en boucle ouverte

$$G(s) = \frac{k}{(-1 + s)(2 + s)(5 + s)} ; k > 0$$

Tracer le diagramme de diagramme de nyquist :

1. On remplace p par $j\omega$:

La FTBO devient :

$$G(j\omega) = \frac{k}{(-1 + j\omega)(2 + j\omega)(5 + j\omega)} ; k > 0$$

$$G(j\omega) = \frac{k(-1 - j\omega)(2 - j\omega)(5 - j\omega)}{(1 + \omega^2)(4 + \omega^2)(25 + \omega^2)} ; k > 0$$

$$(-1 - j\omega)(2 - j\omega)(5 - j\omega) = -6\omega^2 - 10 + j(-3\omega + \omega^3)$$

$$G(j\omega) = \frac{k(-6\omega^2 - 10)}{(1 + \omega^2)(4 + \omega^2)(25 + \omega^2)} + j \frac{k(-3\omega + \omega^3)}{(1 + \omega^2)(4 + \omega^2)(25 + \omega^2)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Re}(j\omega) = \frac{k(-6\omega^2 - 10)}{(1 + \omega^2)(4 + \omega^2)(25 + \omega^2)} \\ \text{Im}(j\omega) = \frac{k(-3\omega + \omega^3)}{(1 + \omega^2)(4 + \omega^2)(25 + \omega^2)} \\ \varphi(j\omega) = \text{arctg} \left(\frac{3\omega - \omega^3}{6\omega^2 + 10} \right) \end{cases}$$

2. On va étudier l'intersection avec les deux axes réel et imaginaire

- Avec Re

La partie imaginaire doit être nulle

$$\text{Im}(j\omega) = 0 \Rightarrow -k(3\omega - \omega^3) = 0$$

$$\omega = \pm\sqrt{3}$$

$$\text{Re}(j\omega)|_{\omega=\pm\sqrt{3}} = -\frac{1}{28}k$$

- Avec Img

$$\text{Re}(j\omega) = 0 \Rightarrow -k(10 + 6\omega^2) \neq 0 \forall \omega \in \mathbb{R}$$

Et par conséquent la courbe ne passe pas par l'axe imaginaire

Chapitre 01 : Stabilité des systèmes en boucle fermée dans le domaine fréquentiel et marges de stabilité

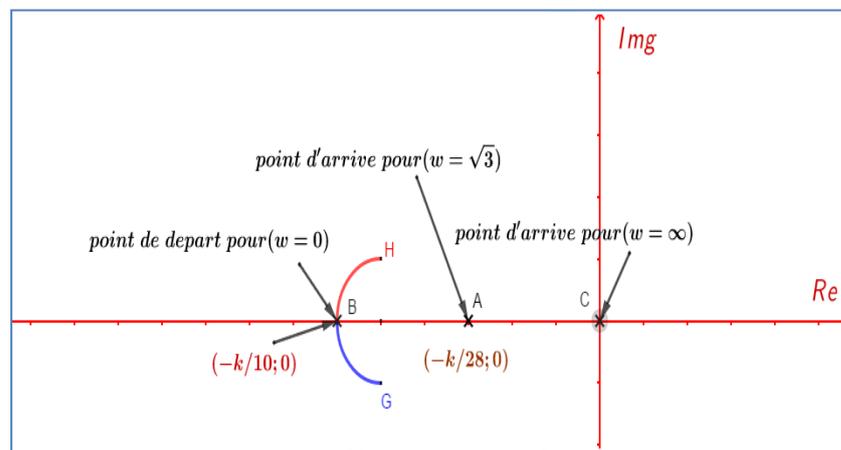
Pour tracer la courbe on suppose que le premier point (point de départ) à $\omega = 0$ et le point final (point) d'arrive à $\omega \rightarrow +\infty$

- Pour les hautes fréquences $\omega \rightarrow +\infty$

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(j\omega)|_{\omega \rightarrow +\infty} = 0 \\ \operatorname{Im}g(j\omega)|_{\omega \rightarrow +\infty} = 0 \\ \varphi(j\omega)|_{\omega \rightarrow +\infty} = 90^\circ \end{cases}$$

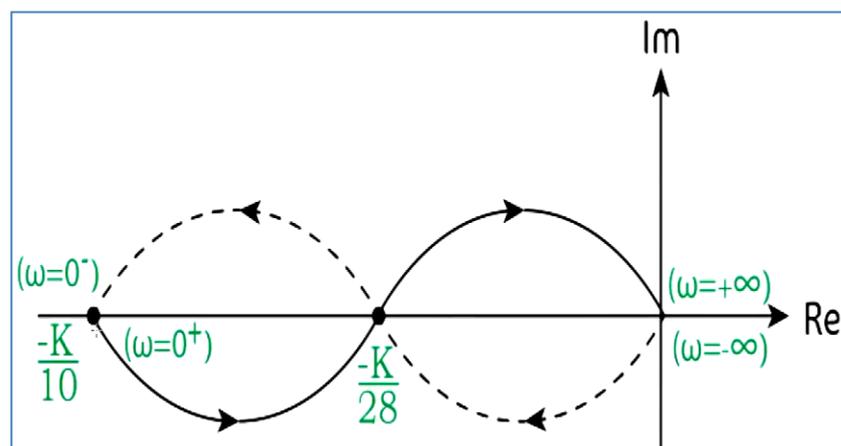
- Pour les basses fréquences $\omega \rightarrow 0^+$

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(j\omega)|_{\omega \rightarrow 0^+} = -\frac{k}{10} \\ \operatorname{Im}g(j\omega)|_{\omega \rightarrow 0^+} = 0 \\ \varphi(j\omega)|_{\omega \rightarrow 0^+} = -180^\circ \end{cases}$$

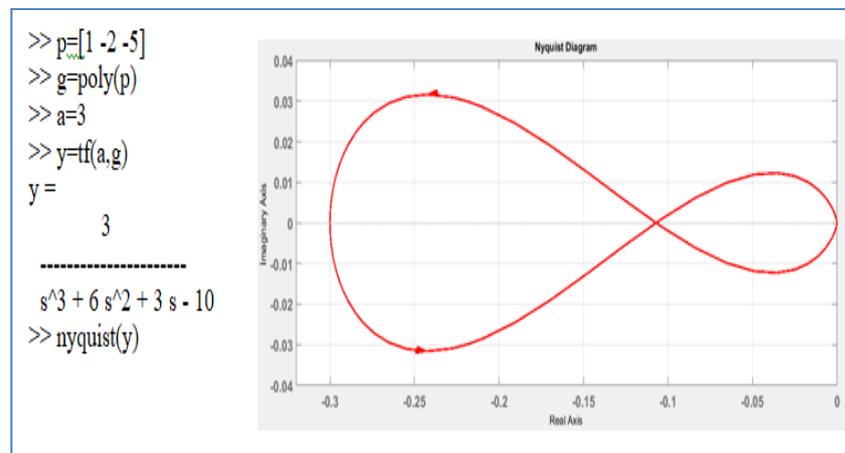


Il reste a préciser la direction de la courbe soit vers **H** ou vers **G**

On constate clairement que pour $\omega < \sqrt{3}$ les parties imaginaires des complexes sont s en revanche pour $\omega > \sqrt{3}$ les parties imaginaire des nombres complexes sont positives alors on peut résulter que le départ sera de **B** vers **G** passant par **A** et on termine à **C** et par symétrie on ferme le contour de nyquist vpir figure :



Résultat par matlab



1.4. Stabilité des systèmes linéaires asservis

1.4.1. Critère mathématique de stabilité (5)

➤ Énoncé du critère de stabilité

Un système bouclé est stable si et seulement si sa sortie, autrement dit la grandeur physique réelle à réguler reste bornée lorsque l'on injecte un signal borné à son entrée. Dans la pratique, on exige que le signal de sortie converge effectivement vers une valeur finie. D'une manière plus générale, aucun signal dans la boucle de régulation, ne doit osciller ou tendre vers l'infini.

La condition mathématique de stabilité s'énonce ainsi :

Un système asservi est stable si et seulement si sa fonction de transfert en boucle fermée ne possède aucun pôle à partie réelle positive

➤ Inconvénients du critère mathématique

Le critère mathématique énoncé précédemment possède l'avantage d'être inconditionnel et universel. Toutefois, il possède un certain nombre d'inconvénients.

– Il nécessite non seulement la connaissance de la fonction de transfert mais il suppose également que l'on soit capable de calculer ses pôles. Cette tâche peut être aisée pour des systèmes d'ordres peu élevés, mais elle devient très vite ardue pour des systèmes d'ordres élevés ou qui possèdent de nombreux paramètres.

– La fonction de transfert n'est qu'un modèle qui peut parfois, pour des raisons de simplifications nécessaires, être éloigné de la réalité physique de l'objet qu'il décrit. Le critère mathématique diagnostique la stabilité ou l'instabilité d'un système correspondant au modèle choisi et l'on ne peut jamais être sûr que le système réel, quant à lui, est stable ou pas.

– Pour finir, les lois qui régissent les systèmes physiques peuvent évoluer dans le temps : des pièces peuvent s'user ou des éléments peuvent être sensibles à des variations des conditions de l'environnement extérieur. Un système stable aujourd'hui peut très bien devenir instable par la suite.

Il résulte de ces considérations, d'une part que le critère mathématique est la plupart du temps difficile à utiliser dans la pratique et d'autre part, qu'il possède un caractère trop « binaire ».

Dans les pages qui suivent, nous nous intéresserons à des critères plus faciles à mettre en oeuvre et surtout à ceux qui introduisent une notion de marge de stabilité, autrement dit qui permettent de quantifier la stabilité comme une performance en faisant apparaître la notion de système plus ou moins stable. Plus un système sera stable, plus il aura des chances de le rester et les imprécisions de modélisation seront bien évidemment moins dangereuses.

1.4.2. Critère de nyquist (5)

Comme on a vu précédemment Le critère de Nyquist est un critère graphique de stabilité en boucle fermée obtenu à partir du lieu de Nyquist du système en boucle ouverte. Il est une conséquence du théorème de Cauchy appliqué à la fonction de transfert d'un système asservi.

a) Théorème de Cauchy

Soit une fonction complexe d'une variable complexe $F(p)$ possédant n pôles et m zéros. On considère, dans le plan complexe, un contour fermé Γ de telle sorte que tous les pôles et tous les zéros de la fonction $F(p)$ se trouvent à l'intérieur de ce contour voir figure

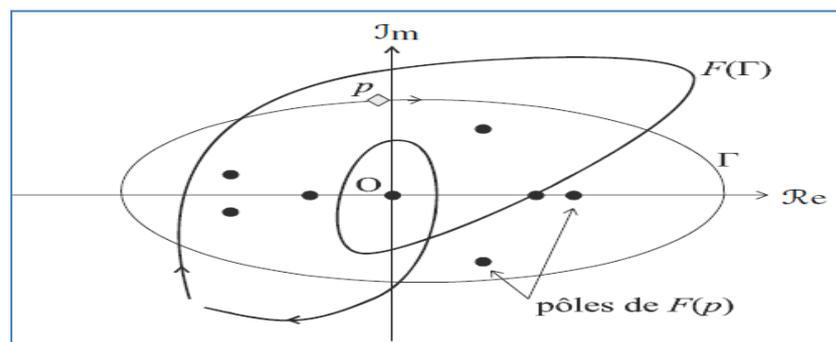


Fig 1 .11 . Illustration du théorème de Cauchy

Lorsque p se déplace le long du contour Γ , son image par F se déplace le long d'une courbe que nous pouvons appeler $F(\Gamma)$.

Le nombre de tours effectué par $F(\Gamma)$. autour de l'origine est égal à $(m - n)$. La différence $(m - n)$.est comptée positivement si le sens de rotation de p le long de Γ coïncide avec le sens de rotation de $F(\Gamma)$ autour de O et négativement dans le cas contraire.

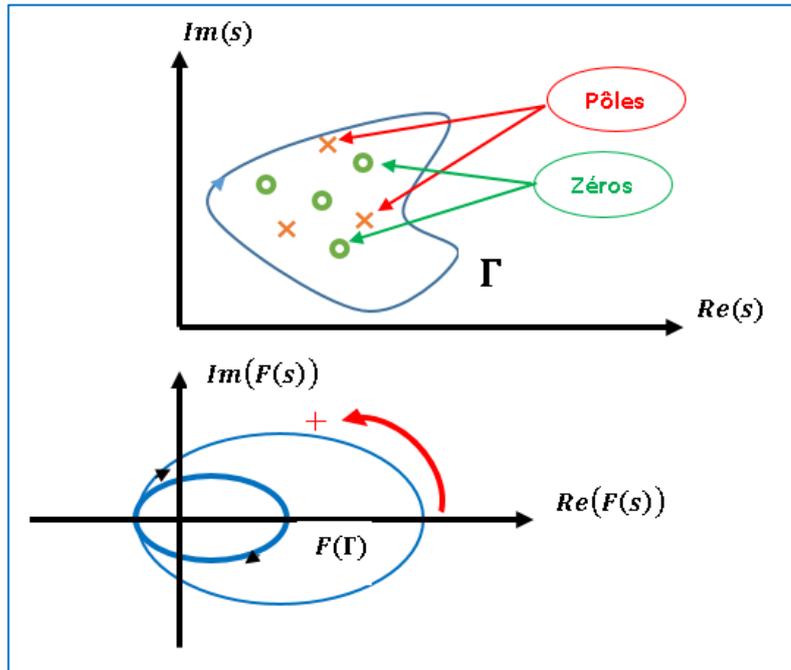


Fig 1 .12. Illustration du théorème de Cauchy

b) Application du théorème de Cauchy à l'étude de la stabilité

Considérons le système quelconque représenté sur la figure suivante.

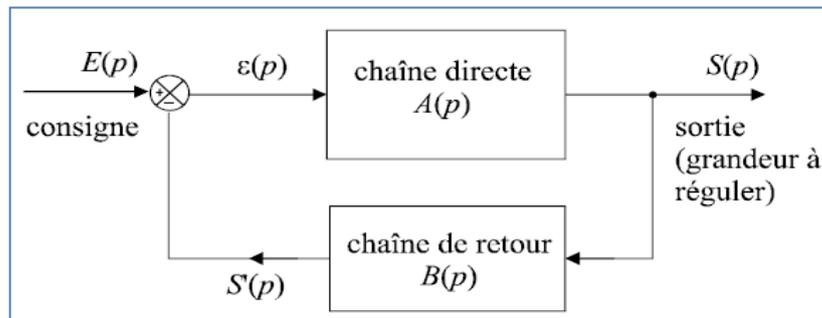


Fig 1.13. Schéma général d'une boucle de régulation.

Ce système est stable en boucle fermée si et seulement si sa fonction de transfert en boucle fermée

$$H(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)} \quad (27.1)$$

ne possède aucun pôle à partie réelle positive. Autrement dit, l'étude la stabilité du système revient à étudier les solutions de l'équation :

$$1 + A(p)B(p) = 0 \quad (28.1)$$

Ou encore :

$$1 + G(p) = 0 \quad (29.1)$$

$G(p)$ est la fonction de transfert en boucle ouverte du système. Cela signifie qu'il est possible d'appréhender l'étude la stabilité d'un système en boucle fermée à partir de sa fonction de transfert en boucle ouverte. Le mathématicien Nyquist a eu l'idée de proposer un critère de stabilité basé sur l'application du théorème de Cauchy à la fonction $F(p) = G(p) + 1$.

Rappelons que le système est stable si et seulement si aucun pôle de $H(p)$ n'est à partie réelle positive. Les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée étant les zéros de cette fonction $F(p)$, cela signifie que le système est stable si et seulement si aucun zéro de $F(p)$ ne se trouve à l'intérieur du contour de Nyquist. Il faut donc, pour que le système soit stable, que l'on ait : $m = 0$, m étant le nombre de zéros de $F(p)$, donc le nombre de pôles de $H(p)$.

Remarquons par ailleurs, que les pôles de $G(p)$ sont aussi ceux de $F(p)$; en effet, une fraction rationnelle à laquelle on ajoute 1 donne, après réduction au même dénominateur, une nouvelle fraction rationnelle de même dénominateur. Par conséquent, le nombre n de pôles de $F(p)$ se trouvant à l'intérieur du contour de Nyquist est égal au nombre de pôles instables (*à partie réelle positive*) de $G(p)$.

Si on trace l'image par $F = 1 + G$ du contour de Nyquist, on pourra donc diagnostiquer la stabilité du système en boucle fermée si le nombre de tours effectués par $F(\Gamma)$ autour de l'origine est égal à $-n$ où n est le nombre de pôles de $G(p)$ à partie réelle positive. Cette conclusion nous conduit à un premier énoncé du critère de Nyquist :

Un système est stable en boucle fermée si l'image du contour de Nyquist par la fonction

$F(p) = G(p) + 1$ fait autour de l'origine, dans le sens horaire, un nombre de tours égal à $-n$ où n est le nombre de pôles à partie réelle positive de la fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$. L'image du contour de Nyquist, par ailleurs, ne doit pas passer par l'origine.

Récapitulatif

Critère géométrique de Nyquist

On définit :

- P : nombre de pôles instables de $HBO(s)$
- N : nombre de tours que fait autour du point critique -1 le diagramme complet de Nyquist, c-a-d lieu de $HBO(j\omega)$ parcouru dans le sens des ω croissant de $-\infty$ à $+\infty$, compté avec le signe $+$ si ce parcours se fait dans le sens trigonométrique et compté avec le signe $-$ dans le cas contraire.

Énoncé du critère

Un système continu en boucle fermée à retour unitaire (HBF) est asymptotiquement stable à la condition nécessaire et suffisante que son diagramme de Nyquist en boucle ouverte (HBO) parcouru

quand ω croît de $-\infty$ à $+\infty$, entoure le point critique $(-1; 0)$ dans le sens trigonométrique un nombre N de fois égal au nombre P de pôles instables de la fonction de transfert en boucle ouverte. Condition nécessaire suffisante pour la stabilité asymptotique :

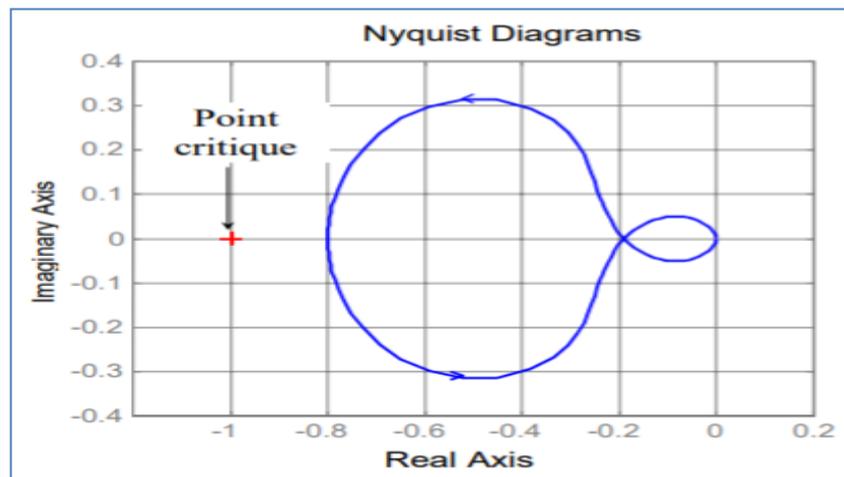
$$N = P .$$

Exemple

Soit un système en BF de transmittance en boucle ouverte

$$H_{BO}(s) = \frac{20}{(s - 1)(s^2 + 5s + 25)}$$

$H_{BO}(s)$ a un pôle instable $\lambda = 1 \Rightarrow P = 1$. Le système est donc instable en boucle fermée. Le système sera stable en boucle fermée si le diagramme de Nyquist entoure une fois le point -1 dans le sens trigonométrique. Or le nombre de tours autour de -1 est nul, $N = 0$. Le système est donc instable en boucle fermée.



1.5. La stabilité dans le domaine fréquentielle (7)

Condition de stabilité. Considérons un procédé en boucle fermée à retour unitaire de fonction de transfert régénante $H(s)$ et perturbatrice $L(s)$.

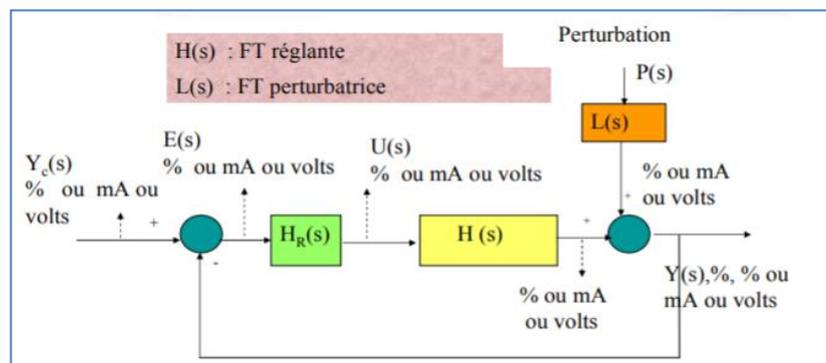


Fig 1 .14. Schéma général d'une boucle de régulation avec shama bloc

Avec :

$$Y(s) = FTBF(s) \times Y(s) + LBF(s) \times P(s) \quad (30.1)$$

Et

$$FTBF(s) = \frac{FTBO(s)}{1+FTBO(s)} ; LBF(s) = \frac{L(s)}{1+FTBO(s)} \text{ et } FTBO(s) = H_R(s) \times H(s) \quad (31.1)$$

On constate que les deux fonctions de transfert $FTBF(s)$ et $LBF(s)$ ont les mêmes dénominateurs et par conséquent les mêmes pôles.

un système ou procédé quelconque conduit à la définition suivante : Un système dynamique linéaire continu et invariant est stable si et seulement si les pôles de sa fonction de transfert sont à parties réelles strictement négatives. Or les pôles d'un procédé en BF sont les zéros de l'équation caractéristique $1 + FTBO(s) = 0$. Donc la définition de la stabilité d'un système asservi ou en BF s'énonce :

Un procédé en BF à retour unitaire est stable si son équation caractéristique $1 + FTBO(s) = 0$ ne possède que des zéros à partie réelle négative (7)

1.5.1. Point critique de stabilité (-1,0)

Lorsque un procédé asservi (en BF) entre en oscillations (signal de sortie sinusoïdal) pour une variation d'entrée bornée ou même nulle, le procédé est à la limite de stabilité (l'un des pôles ou deux pôles conjugués imaginaires purs $s = \pm j\omega_c$ deviennent pôles de sa $FTBF$ ou zéros de son équation caractéristique $1 + FTBF(s) = 0$. A noter que l'axe imaginaire est la frontière entre le plan gauche des pôles à parties réelle négative et le plan droit des pôles à parties réelle positive). Dans ce cas ω_c , est la pulsation d'oscillation. La résolution de l'équation caractéristique permet d'obtenir les conditions limites de stabilité (gain critique de boucle K_c) :

$$1 + FTBO(s = j\omega_c) = 0 \Rightarrow |FTBO(j\omega_c)| = 1 \text{ et } Arg(FTBO(j\omega_c)) = -\pi \quad (32.1)$$

Dans le plan de Nyquist, le point singulier de module **1** et d'argument **$-\pi$** est appelé point critique de stabilité.

Exemple

$$FTBO(s = j\omega_c) = \frac{K_R}{(1 + Tj\omega_c)^3}$$

Soit ;

$$|FTBO(j\omega_c)| = \left| \frac{K_R}{(1 + Tj\omega_c)^3} \right| = 1 \Rightarrow \frac{K_R}{\sqrt{1 + (T\omega_c)^2}^3} = 1$$

Et ;

$$\arg(FTBO(j\omega_c)) = -3\arctan(\omega_c T) = -\pi \Rightarrow \omega_c T = \sqrt{3}$$

Donc ;

$$\frac{K_R}{8} = 1(\text{condition limite de stabilité})$$

C'est-à-dire pour avoir la stabilité du système il faut que le gain prenne la valeur : $K_R = 8$

1.6. Critère graphique ou de revers dans le plan de Nyquist : (7)

Le dénominateur ou le polynôme caractéristique de la $FTBF$ s'obtient en écrivant :

$1 + FTBO(s) = 0$ ou $FTBO(s) = -1$. Le point -1 est appelé point critique. Le critère du revers énonce que le système est stable en boucle fermée si :

- la $FTBO(s)$ n'a pas de pôle à partie réelle strictement positive ;
- en parcourant le lieu de Nyquist de la $FTBO$, dans le sens des ω croissants, on laisse le point critique $(-1,0)$ sur la gauche .

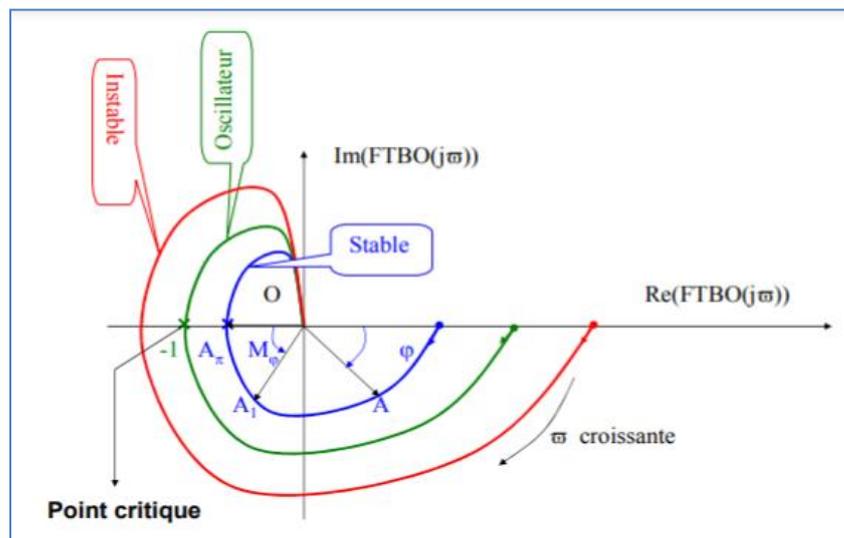


Fig 1 .15 Critère graphique ou de revers

1.7. Marges de stabilité (8)

En pratique : la fonction de transfert est une approximation de la réalité, or, la limite théorique de la stabilité se fait par rapport au point critique $(-1, j0)$ dans le plan de Nyquist , donc on prend des marges de sécurité :

- **Marge de gain** : indique l'augmentation de gain du transfert de boucle ouverte qui amènerait la boucle fermée en limite de stabilité
- **Marge de phase** : indique le retard de phase du transfert de boucle ouverte (H_{BO}) qui amènerait la boucle fermée (H_{BF}) en limite de stabilité

Chapitre 01 : Stabilité des systèmes en boucle fermée dans le domaine fréquentiel et marges de stabilité

- **Marge de module** : indique la distance absolue minimale du transfert de boucle ouverte au point -1 .
- **Marge de retard** : indique le retard que peut subir le transfert de boucle ouverte qui amènerait la boucle fermée en limite de stabilité.

Ces grandeurs sont définies de la manière suivante : (9)

○ La marge de phase $M\varphi$ d'un système est mathématiquement la différence entre la phase de FTBO (ω_{c0}) c'est-à-dire $\varphi(\omega_{c0})$, et -180 : $M\varphi = \varphi(\omega_{c0}) + 180^\circ$

La marge de phase permet de préserver la stabilité en dépit de la présence de retards parasites – par exemple dus à la transmission des signaux – dont on n'a pas tenu compte au moment de l'étude de la stabilité.

○ La marge de gain Mg a pour expression : $Mg = \frac{1}{|FTBO(\omega_\pi)|}$

Elle permet de préserver la stabilité en dépit des fluctuations de gain, qui affectent, en particulier, les amplificateurs de la chaîne de puissance.

Pour qu'un système soit stable, il faudrait que : **Mg ou $(\Delta G) > 0$ et $M\varphi$ ou $(\Delta\varphi) > 0$**

Ces marges sont illustrées sur le lieu de Nyquist comme le suivant :

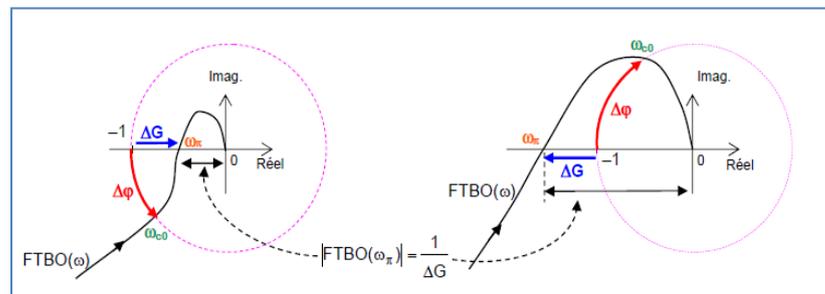
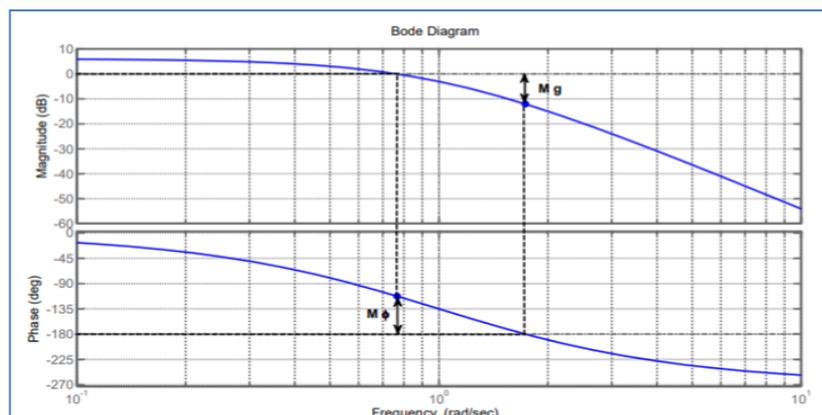


Fig 1 .16; Illustration des marges de gain et de phase sur le lieu de Nyquist(a) cas d'un système stable - b) cas d'un système instable

1.8. Marges de stabilité dans Bode (8)



Chapitre 01 : Stabilité des systèmes en boucle fermée dans le domaine fréquentiel et marges de stabilité

- Marge de **gain** : $Mg_{dB} = -[|HBO(j\omega_\pi)|]_{dB} \Leftrightarrow Mg = \frac{1}{|HBO(j\omega_\pi)|} = -20\log(|HBO(j\omega_\pi)|)$
- Marge de **phase** : $M\varphi = \arg[HBO(j\omega_1)] + \pi \rightarrow M\varphi(deg) = 180^\circ + \arg[HBO(j\omega_1)]$
 ω_1 étant la fréquence pour laquelle le gain est unitaire (**0dB**) $\rightarrow |HBO(j\omega_1)| = 1$.
- les systèmes du 1^{er} et 2nd ordre dont les pôles sont à partie réelle négative ont une marge de gain infinie car la phase n'atteint jamais 180° . En pratique, on choisit des réglages tels que

$$Mg \approx 6 \rightarrow 20dB \text{ et } M\varphi \approx 45^\circ \rightarrow 60^\circ$$

- Marge de **retard**: $Mretard = \frac{M\varphi}{\omega_1}$

Remarques :

- Un système qui a une marge de gain **ou** une marge de phase positive est un système stable.
- Un système qui a une marge de gain **ou** une marge de phase négative est un système instable.
- Un système qui a une marge de gain **ou** une marge de phase nulle est un système à la limite de stabilité.
- La marge de gain est positive si la courbe de gain est en-dessous de l'axe 0 dB pour la pulsation critique ω_{co} qui correspond à l'intersection de la courbe de phase avec l'axe -180° .
- La marge de phase est positive si la courbe de phase est au-dessus de l'axe -180° pour la pulsation ω correspondant à l'intersection de la courbe de gain avec l'axe 0 dB

Exemple

On donne la fonction de transfert d'un système en boucle ouverte :

$$G(p) = \frac{100}{(p+1)(p+10)}$$

Déterminer ;a marge de phase

Réponse

$$M\varphi(deg) = 180^\circ + \arg[HBO(j\omega_{co})]$$

$$G(p) = \frac{100}{(1+j\omega)(10+j\omega)}$$

Il faut d'abord calculer ω_{co} tel que :

$$20\log(|G(j\omega_{co})|) = 0 \Rightarrow |G(p)| = \left| \frac{100}{(1+j\omega_{co})(10+j\omega_{co})} \right| = 1$$

Chapitre 01 : Stabilité des systèmes en boucle fermée dans le domaine fréquentiel et marges de stabilité

$$\frac{100}{\sqrt{1 + \omega_{co}^2} \sqrt{100 + \omega_{co}^2}} \Rightarrow (1 + \omega_{co}^2)(100 + \omega_{co}^2) = 100^2$$

$$\omega_{co}^4 + 101\omega_{co}^2 - 9900 = 0$$

Seule la solution positive a un sens pour notre système asservi et après tout calcul fait on trouve que : $\omega_{co} = 7.8 \text{ rad}$

Donc ;

$$M\varphi(\text{deg}) = 180^\circ + \text{arctg}[HBO(j7.8)]$$

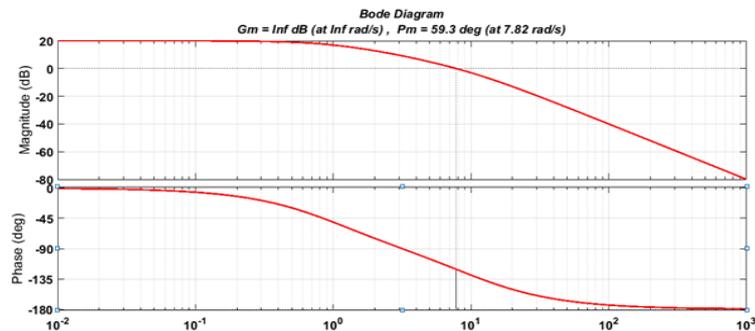
$$\text{arctg}[HBO(j7.8)] = -\text{tang}^{-1}(\omega_{co}) - \text{tang}^{-1}\left(\frac{\omega_{co}}{10}\right)$$

$$\text{arctg}[HBO(j7.8)] = -\text{tang}^{-1}(7.8) - \text{tang}^{-1}\left(\frac{7.8}{10}\right)$$

$$M\varphi(\text{deg}) = 180^\circ - \text{tang}^{-1}(7.8) - \text{tang}^{-1}\left(\frac{7.8}{10}\right) \Rightarrow M\varphi \approx 59^\circ$$

Solution par matlab

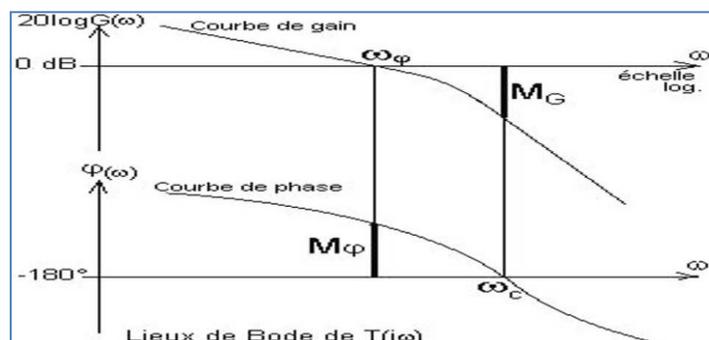
```
>> p=[-1 -10]
>> r=poly(p)
>> g=tf(a,r)
g =
    100
  s^2 + 11s + 10
>> margin(g)
Bode Diagram
```



Gm = Inf dB (at Inf rad/s), Pm = 59.3 deg (at 7.82 rad/s)

Exemple

On donne ci-dessous le diagramme de Bode d'un système asservi, placé dans une chaîne de régulation en boucle fermée avec un correcteur Proportionnel $C(p) = K$, le diagramme de Bode correspond à une valeur de $K=1$. on demande : Déterminer la marge de phase ($M\varphi$) et la marge de gain (M_G).



Réponse

D'après le diagramme de bode on a pour : $\varphi = -180^\circ$ le gain est $G = -12 \text{ dB}$

Alors :

$$Mg = 0 - (-12) = 12 \text{ dB}$$

Pour :

$$G = 0 \text{ dB} \Rightarrow \varphi = -95^\circ$$

Alors :

$$M\varphi = 180 + (-95) = 85^\circ$$

Exemple

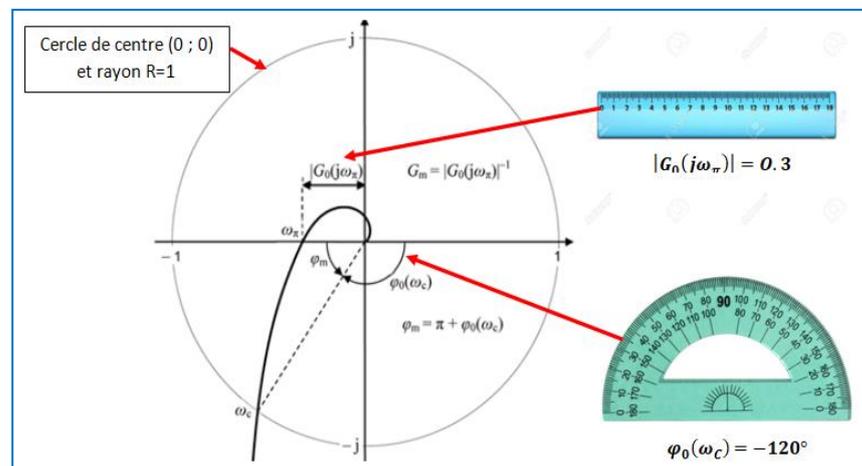


Fig 1 .17, Méthde de calcul les marge de stabilite

Si :

$$|G_0(j\omega_\pi)| = 0.3 \Rightarrow Mg = -20 \log |G_0(j\omega_\pi)| = -20 \times (-0.52) = 10.44 \text{ dB}$$

$$\varphi_m = \pi + \varphi_0(\omega_c) = 180 + (-120) = 60^\circ$$

1.9. Coefficient de surtension Q (ou facteur de résonance)

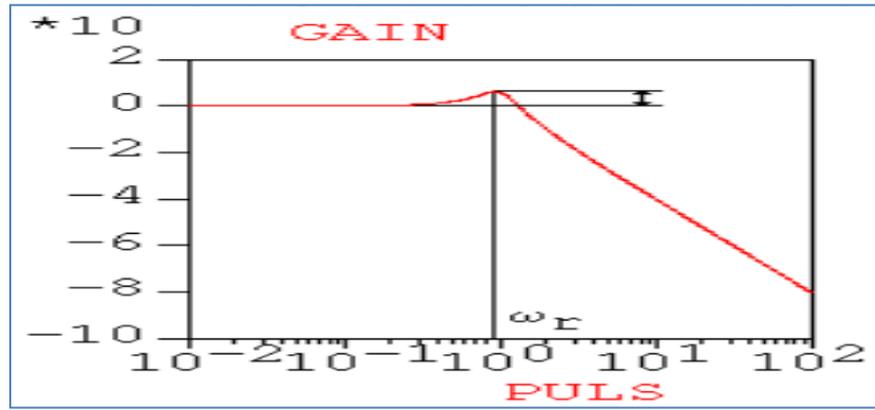
1.9.1. Definition

On appelle coefficient de surtension ou facteur de résonance le rapport entre la valeur maximum du module de la réponse harmonique et le gain statique, exprimés en décimal.

$$Q = \frac{|H(j\omega_r)|}{|H(0)|} \tag{33.1}$$

Où ω_r est la pulsation de résonance pour laquelle $|H(j\omega_r)|$ passe par sa valeur maximale

Chapitre 01 : Stabilité des systèmes en boucle fermée dans le domaine fréquentiel et marges de stabilité



Chapitre 2



1. Réponse fréquentielles et propriétés fréquentielles des contrôleurs (P, PI, PID, PD, avance de phase, retard de phase, avance de phase)
2. Spécification dans le domaine fréquentiel (marge de gain et de phase, facteur de résonance, bande passante, leurs interprétations)
3. Calcul des contrôleurs en utilisant le diagramme de Bode, Réglages en utilisant l'abaque de Black-Nichols

Chapitre 02 : Calcul des correcteurs dans le domaine fréquentiel

2.1. Introduction

2.1.1. Nécessité de correction dans les systèmes asservis

Nous avons vu, dans les chapitres précédents relatifs à l'analyse des systèmes asservis, que, pour satisfaire aux spécifications de stabilité, on est amené à formuler des conditions sur la FTBO :

2.1.2. Stabilité :

Le degré de stabilité est défini par :

la marge de gain : la stabilité est d'autant meilleure que :

- le gain de la FTBO est plus faible,
- donc que la bande passante en BO est plus faible.

la marge de phase : la stabilité est d'autant meilleure que :

- le déphasage de la FTBO est plus faible.

2.1.3. Précision :

Son étude se décompose en deux parties :

Précision statique : l'annulation de l'erreur en régime permanent nécessite la présence, dans la FTBO, d'une ou plusieurs intégrations selon l'entrée canonique imposée.

Précision dynamique : elle est d'autant meilleure que le gain de la FTBO est plus élevé, c'est-à-dire que la bande passante est plus large.

Pour simplifier à l'extrême, on peut retenir, en résumé que la précision et la stabilité sont quantifiées, dans le diagramme de Bode de la FTBO, de la manière suivante :

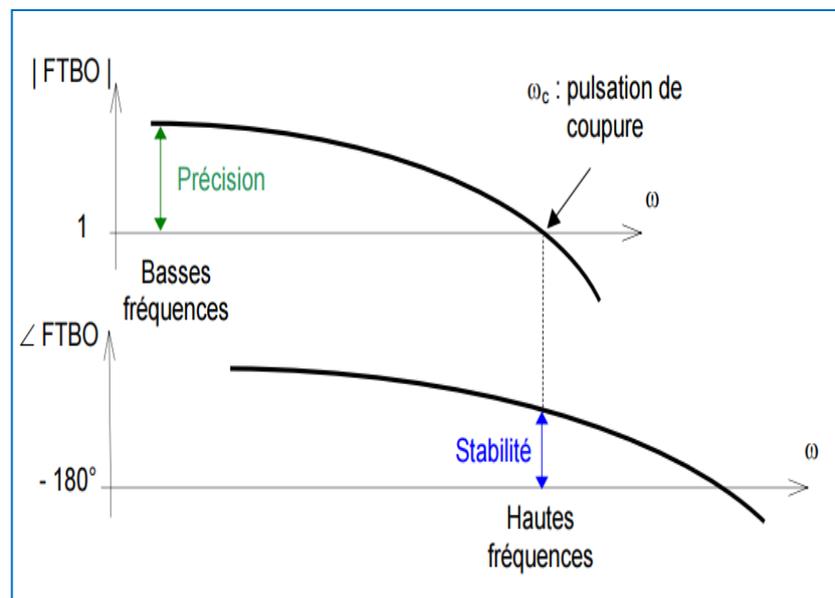


Fig 2.1 . Quantification de la stabilité et de la précision sur le diagramme de Bode

Il devient clair que :

- pour améliorer la précision, il faut pouvoir augmenter le gain de la FTBO
- la stabilité diminue si ce même gain devient trop élevé.

Il semble donc difficile d'obtenir un système, à la fois, précis (grand gain) et stable (faible gain). Ce premier dilemme stabilité précision impose donc l'emploi de systèmes compensateurs, correcteurs, ou encore régulateurs dont le rôle sera de relever le gain dans une certaine zone de fréquence et de la diminuer ailleurs.

Le correcteur ou régulateur va permettre de satisfaire les contraintes suivantes :

- Trouver un compromis entre la stabilité et la précision,
- Si besoin, rendre stable en boucle fermée un système qui serait instable en boucle ouverte,
- Si besoin, et c'est en général le cas, introduire un intégrateur dans la boucle pour obtenir une erreur statique nulle ($\varepsilon = 0$).

Mais, il existe d'autres incompatibilités qui nécessitent également l'emploi de correcteurs : Un bon asservissement doit être insensible aux perturbations et, en même temps, il doit répondre rapidement aux variations des diverses grandeurs d'entrée. Ces deux conditions sont incompatibles puisque :

- la réponse rapide nécessite une large bande passante,

A RETENIR

Le rôle des correcteurs, qui peuvent être électriques, mécaniques, ou hydrauliques, est donc de déformer le diagramme asymptotique ou la courbe de Nyquist pour leur donner des marges de gain et de phase capables d'assurer la stabilité tout en conservant aux basses fréquences un gain suffisamment grand pour que la précision soit bonne. De tels "filtres" pourront également supprimer l'influence de certaines perturbations sans limiter la bande passante globale.

tandis que l'insensibilité aux perturbations exige une bande étroite.

2.2. Stratégie de correction (ou compensation) des systèmes asservis

Les outils d'analyse étudiés dans section précédente conduisent tous: La synthèse de systèmes asservis corrigés ou compensés, et par conséquent, la synthèse de correcteurs (ou Compensateurs). En partant de spécifications sur le comportement final d'un système commandé, l'établissement d'un système de correction exige le suivi des 3 étapes suivantes :

1. Déterminer ce que devrait réaliser le système et la manière d'y aboutir (spécifications du cahier des charges)
2. Déterminer la configuration du correcteur en relation avec la manière avec laquelle il est connecté au système corrigé.

3. Déterminer les valeurs des paramètres du correcteur de manière à atteindre les objectifs.

La synthèse des systèmes de correction linéaire peut être réalisée soit dans le domaine temporel, soit dans celui fréquentiel. Par exemple, la précision statique est toujours spécifiée pour une entrée échelon, rampe ou accélération, et la démarche classique suivie pour répondre aux contraintes imposées se fait dans le domaine temporel. D'autres spécifications, telles que le dépassement, le temps de montée, et le temps d'établissement sont toutes définies pour une entrée échelon unitaire, et sont, par conséquent, utilisées spécifiquement dans le domaine temporel.

A RETENIR

La stabilité relative est également mesurée en termes de marge de phase, marge de gain et résonance. Celles-ci sont des spécifications du domaine typiquement fréquentiel et sont prises en charge par les outils tels que le diagramme de Bode, les lieux de Nyquist et / ou de Black–Nichols.

Pour mener à bien la conception du correcteur dans le domaine temporel ou fréquentiel, il est pratique de garder à l'esprit que la synthèse dans le domaine temporel se fait généralement avec l'aide du plan-p de Laplace et du lieu d'Evans. La synthèse dans le domaine fréquentiel est basée sur la manipulation du gain et de la phase de la fonction de transfert de la boucle jusqu'à atteindre les spécifications voulues. Les spécifications des domaines temporel et fréquentiel sont étroitement liées entre elles. Le temps de montée et la bande passante sont inversement proportionnels. La marge de phase, la marge de gain, la résonance, et l'amortissement sont inversement proportionnels.

2.3. Correcteurs de base

Les correcteurs industriels les plus utilisés peuvent être classés, selon leurs actions de correction, de la manière suivante :

- Correcteur à action proportionnelle (P)
- Correcteur à action intégrale (I)
- Correcteur à actions proportionnelle et intégrale (PI)
- Correcteur à action dérivée (D)
- Correcteur à actions proportionnelle et dérivée (PD)
- Correcteur à actions proportionnelle, intégrale et dérivée (PID)

Pour déterminer le type de correcteur à utiliser et la valeur des paramètres à adopter, on peut utiliser plusieurs méthodes :

- soit considérer les réponses temporelles et analyser les performances statiques et dynamiques du système avant et après compensation.
- Soit, à partir de la courbe de Nyquist du système compensé et par comparaison avec celle que l'on doit obtenir, en déduire la structure et les paramètres du compensateur,
- soit procéder de la même manière, mais avec le diagramme asymptotique de Bode,
- soit utiliser le lieu d'Evans, le correcteur introduisant de nouveaux pôles et racines.

Dans la majorité des exemples utilisés jusque-là, le correcteur a été un simple amplificateur avec un gain constant K . Ce type d'action de commande est connu sous le nom de correction proportionnelle, puisque le signal de commande $u(t)$ à la sortie du correcteur est simplement proportionnel au signal à son entrée $\varepsilon(t)$.

Il est également possible d'utiliser la dérivée ou l'intégrale du signal d'entrée $\varepsilon(t)$, en addition avec l'action proportionnelle. Par conséquent, nous pouvons considérer, plus généralement, le correcteur comme étant un ensemble de composants tels que des comparateurs (additionneurs ou soustracteurs), des amplificateurs, des atténuateurs, des dérivateurs et des intégrateurs. La tâche du concepteur est alors de déterminer lesquels de ces composants sera utilisé, dans quelles proportions, et la manière avec laquelle ils sont connectés.

2.4. Principe d'une régulation en boucle fermée. (10)

Principe dans la régulation, l'action correctrice s'effectue après que les effets des grandeurs perturbatrices aient produit un écart entre la mesure et la consigne $\varepsilon(t)$. Cet écart peut être également provoqué par un changement de consigne. Dans les deux cas, le rôle de la boucle fermée est d'annuler l'écart.

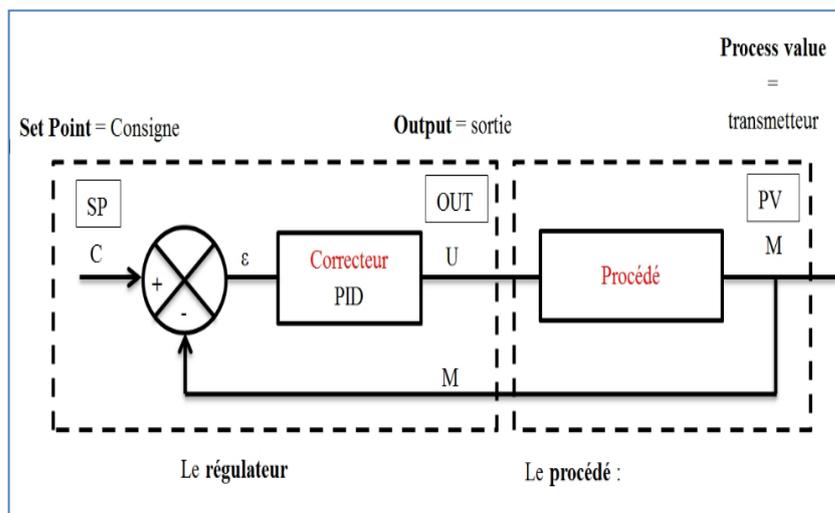


Fig 2.2 . Principe dans la régulation

A RETENIR

Correcteurs qui modifient le gain

" Correcteur proportionnel (P) " Correcteur intégral (I) " Correcteurs proportionnel-intégral (PI), à retard de phase !

Correcteurs qui modifient la marge de phase

" Correcteur proportionnel dérivé (PD) " Correcteur à avance de phase !
Correcteur réalisant les deux actions " Correcteur proportionnel-intégral-dérivateur (PID)

2.5. Correcteur à action proportionnelle (P)

2.5.1. Principe

La relation entre la sortie $u(t)$ et le signal d'erreur $\varepsilon(t)$ est :

$$u(t) = K_p \cdot \varepsilon(t) \tag{1.2}$$

C'est-à-dire :

$$\frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K_p \tag{2.2}$$

Avec K_p appelé "gain proportionnel"

Quelques soient le mécanisme et la source d'énergie utilisés, le correcteur proportionnel est essentiellement un amplificateur à gain variable. Son schéma fonctionnel est celui de la fi suivante.

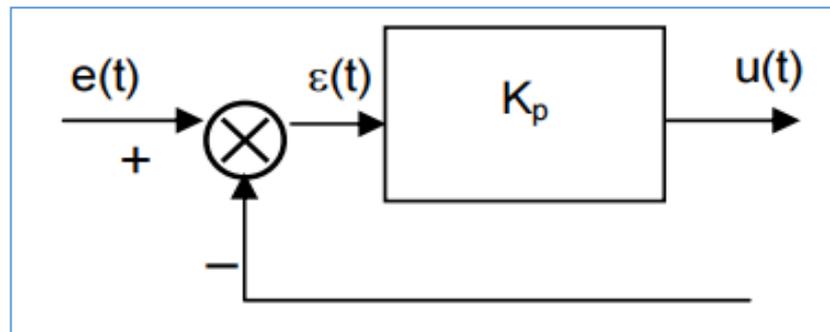


Fig 2.3 . Correcteur proportionnelle

La figure suivante donne la réponse indicielle du correcteur P.

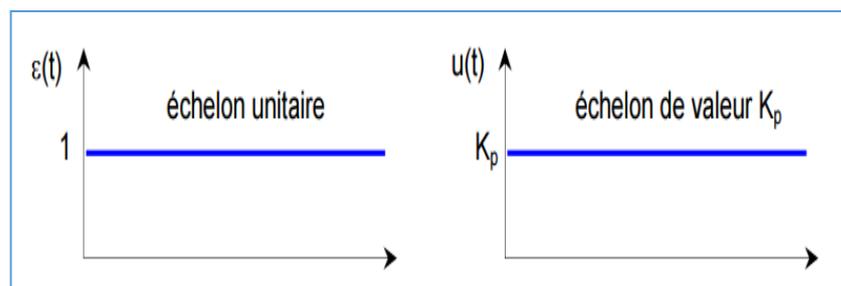


Fig 2.4. La réponse indicielle Correcteur proportionnelle

La figure suivante donne le diagramme de Bode du correcteur P.

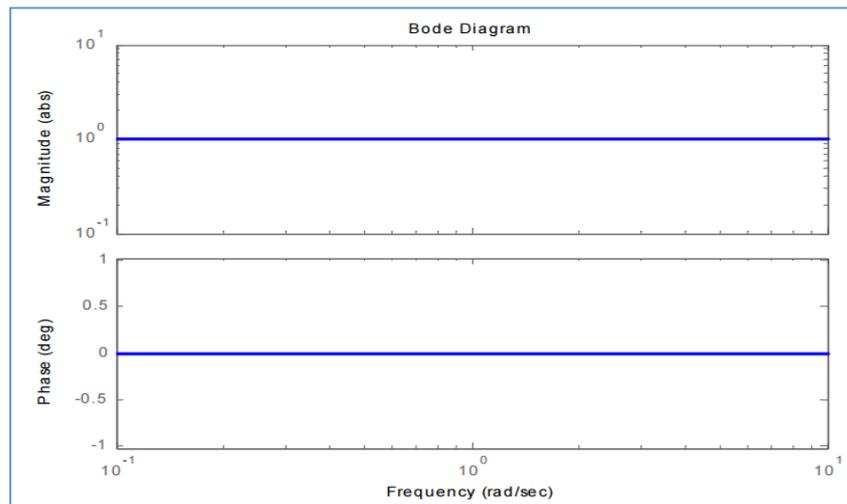


Fig 2.5. le diagramme de Bode du correcteur P

Effet

L'action proportionnelle P crée un signal de commande $u(t)$ proportionnel au signal d'erreur $\varepsilon(t)$. Elle agit donc principalement sur le gain du système asservi et permet d'améliorer notablement la précision.

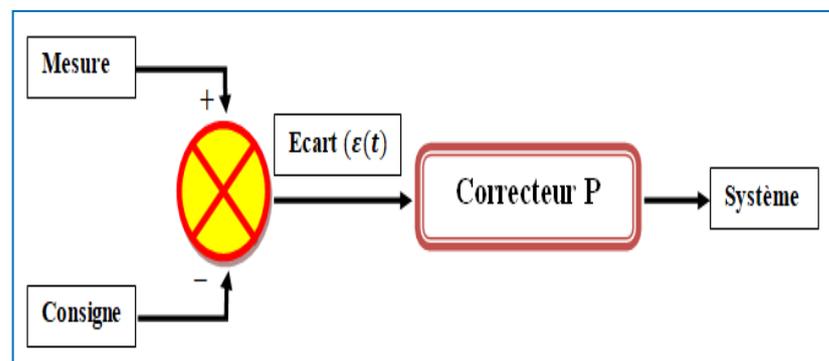


Fig 2.6. Effet du correcteur p

2.5.2. L'action proportionnelle :

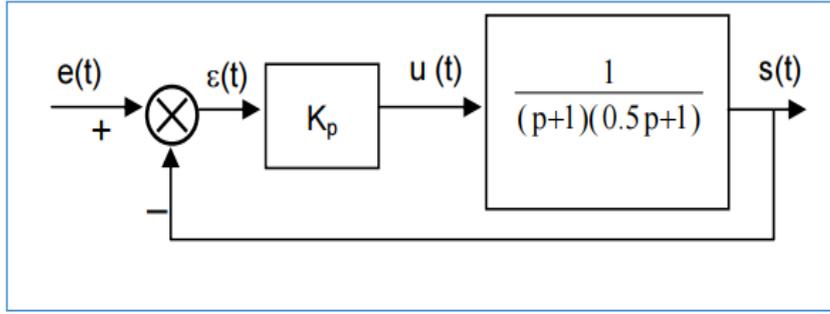
- entraîne une augmentation du gain, d'où une diminution de l'erreur statique
- (amélioration de la précision), mais
- augmente la bande passante du système, ce qui améliore la rapidité du système et,
- augmente l'instabilité du système.

Le correcteur proportionnel P n'est généralement pas utilisé seul. On verra que tout correcteur possède au moins l'action proportionnelle.

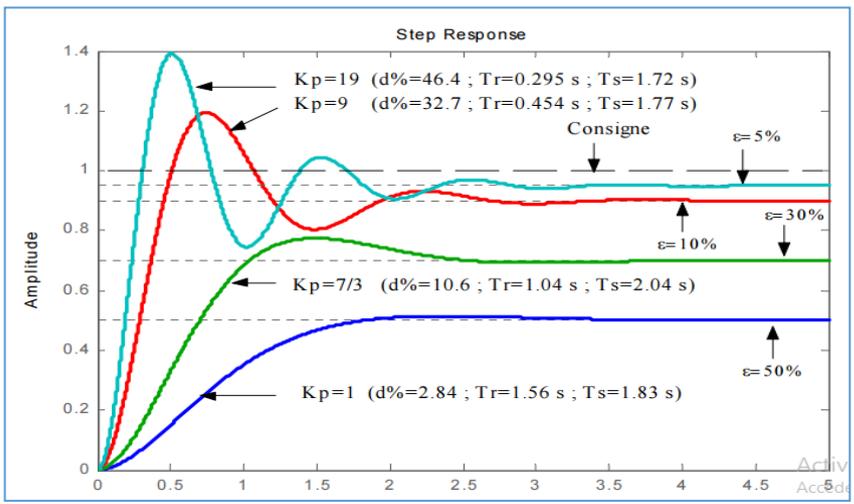
Exemple

La figure suivante montre le schéma fonctionnel d'un exemple de correction Proportionnelle $\varepsilon(t)$

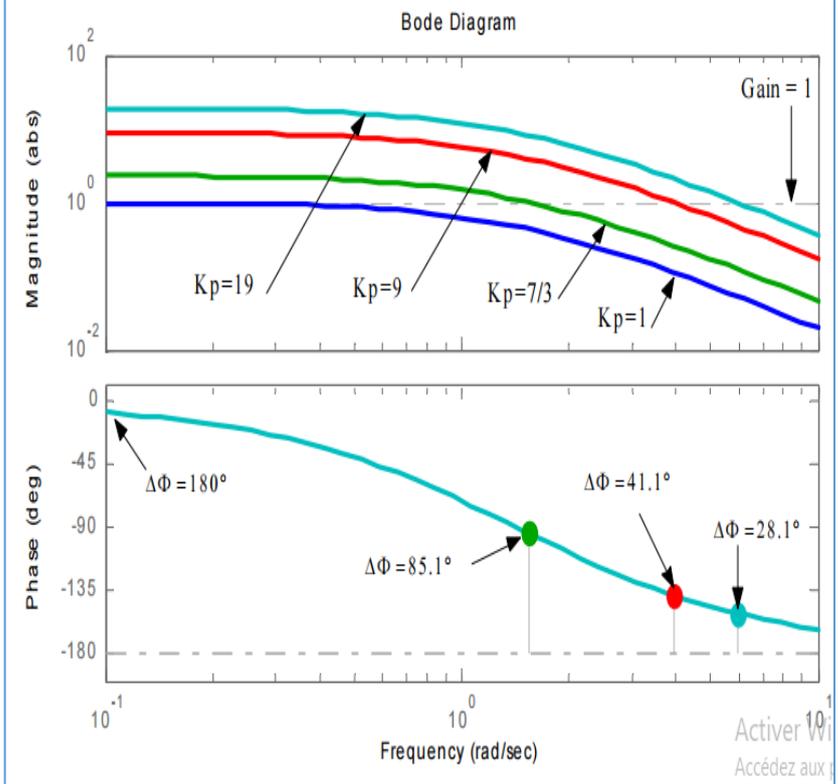
Chapitre 02 : Calcul des contrôleurs dans le domaine fréquentiel



Les réponses indicielles $s(t)$ de la FTBF du système corrigé sont reportées sur la figure suivante :

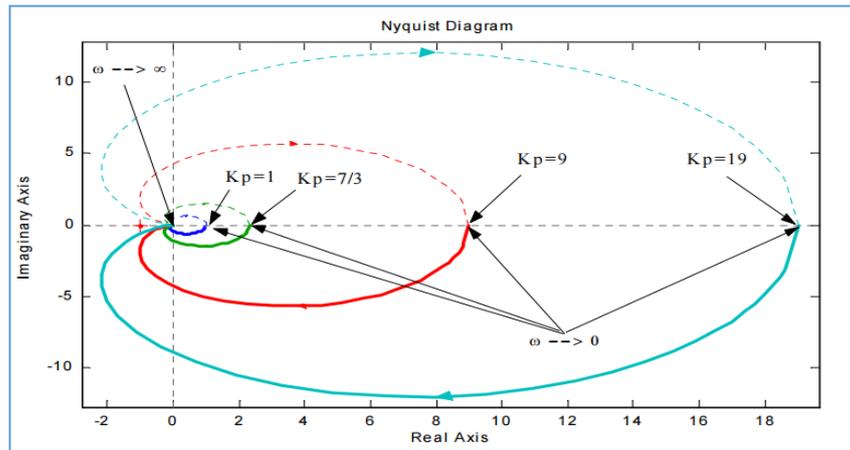


Les diagrammes de Bode et de Nyquist de la FTBO du système corrigé sont montrés, respectivement, sur les figures suivantes :



Chapitre 02 : Calcul des contrôleurs dans le domaine fréquentiel

Lieux de Nyquist de la *FTBO*, pour différentes valeurs de Kp



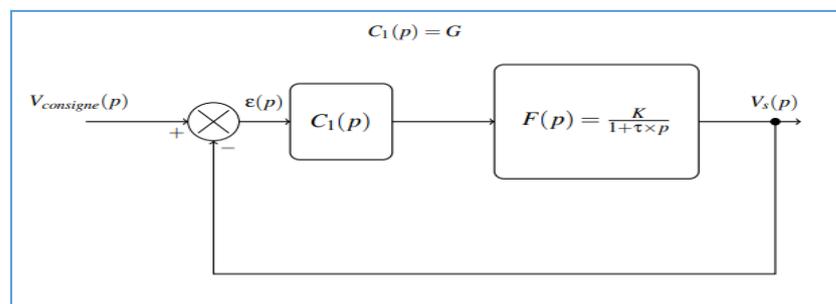
A RETENIR

On constate que l'augmentation de Kp , entraîne :

- une amélioration de l'erreur statique,
- une décroissance du temps de montée,
- une faible amélioration du temps d'établissement,
- mais également une diminution de la marge de phase et une augmentation du dépassement (augmentation de l'instabilité du système).

Exercice d'application

On s'intéresse dans cet exercice au système $F(p)$, placé dans une boucle à retour unitaire, représenté à la figure suivante



La fonction de transfert du correcteur est notée $C_1(p) = G$:

1. donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée de cet asservissement
2. Mettre la *FTBF* sous la forme suivante :

$$FTBF(p) = \frac{K_{BF}}{1 + \tau_{BF} \times p}$$

3. Application numérique : La constante de temps du système est de $1/2 h$, le gain statique est de 1,5. On souhaite accélérer le temps de réponse du système. Le cahier des charges nous impose une constante de temps en boucle fermée de 15 min.

(a) Déterminer la valeur de G permettant de répondre au cahier des charges.

Réponse

$$FTBF(p) = \frac{c_1 \times F(p)}{1 + c_1 \times F(p)p}$$

$$FTBF(p) = \frac{G \times \frac{K}{1 + \tau \times p}}{1 + G \times \frac{K}{1 + \tau \times p}}$$

$$FTBF(p) = \frac{GK}{1 + \tau \times p + G \times K}$$

$$FTBF(p) = \frac{GK}{1 + \tau \times p + G \times K}$$

$$FTBF(p) = \frac{\frac{GK}{1 + GK}}{1 + \frac{\tau}{1 + GK} \times p}$$

Donc :

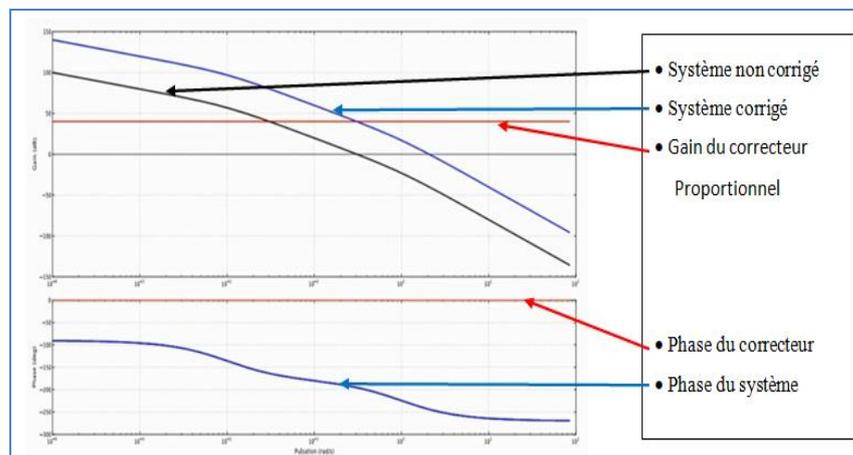
$$\begin{cases} \text{Gain statique en boucle fermée : } K_{BF} = \frac{GK}{1 + GK} \\ \text{Constante de temps en boucle fermée : } \tau_{BF} = \frac{\tau}{1 + GK} \end{cases}$$

Suite au cahier de charge

$$\tau_{BF} = \frac{\tau}{1 + GK} = \frac{1}{4} h$$

$$K_{BF} = \frac{GK}{1 + GK} = \frac{2}{3}$$

2.5.3. Réglage des marges de stabilité



On constate que le gain est déplacé vers le haut car le gain du correcteur est supérieur à 1 et il sera déplacé vers le bas dans le cas contraire.

L'objectif est de modifier les marges de stabilité avec comme remarque la phase ne se change pas ?

2.5.4. Réglage de la marge de phase (11)

On doit calculer le coefficient β tel que :

$$\beta = M_{\phi \text{ souhaitée}} - 180^\circ \text{ et } K_p = 10^{-\frac{a}{20}}$$

La figure suivante illustre la méthode de trouver K_p

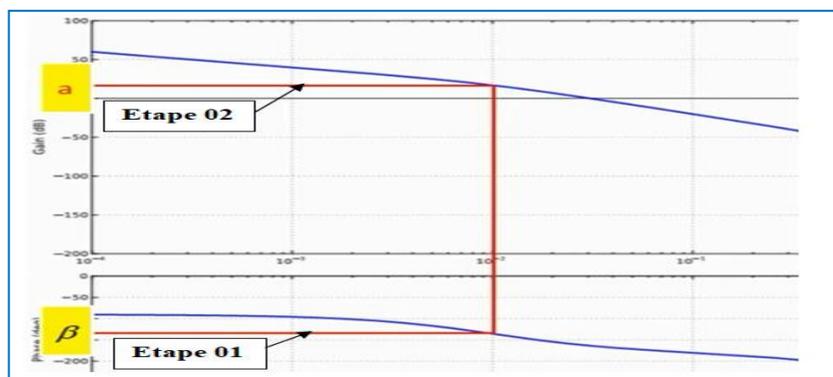


Fig 2.7. Réglage de la marge de phase

2.5.5. Réglage de la marge de de gain (11)

On doit calculer le coefficient b tel que :

$$b = M_{g \text{ souhaitée}} - M_{g \text{ actuelle}} \text{ et } K_p = 10^{-\frac{b}{20}}$$

La figure suivante illustre la méthode de trouver K_p

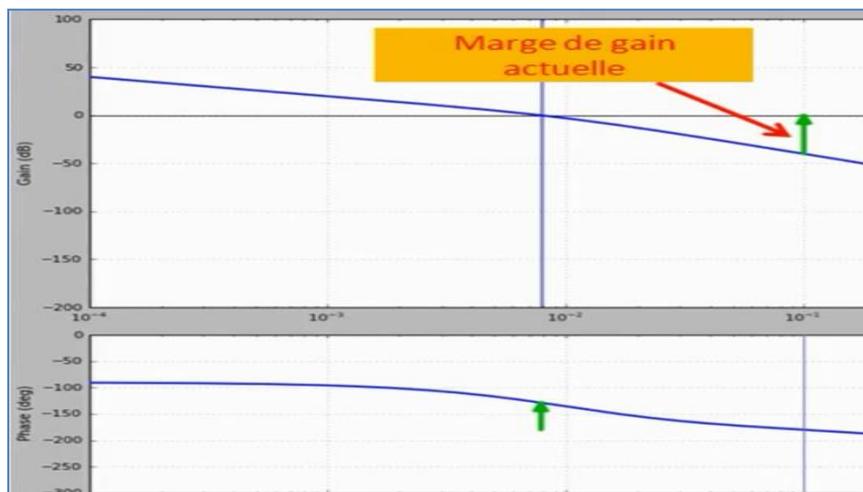


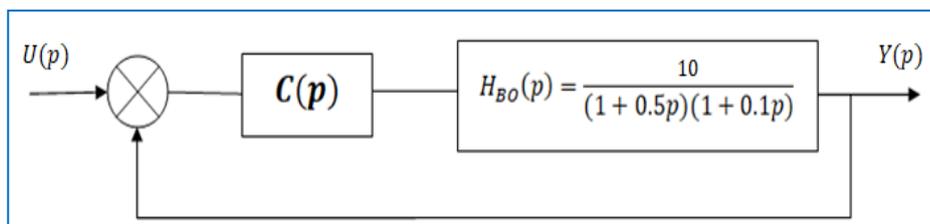
Fig 2.8. Réglage de la marge de gain

Exemple (12)

Soit le système décrit par la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p)$ telle que ;

$$H_{BO}(p) = \frac{10}{(1 + 0.5p)(1 + 0.1p)}$$

Le système corrigé et représenté par la figure suivante :



Trouver $C(p) = K_p$ de telle sorte que la marge de phase soit de $M_p = 45^\circ$

Réponse

On pose :

G_{dBC} le gain corrigé et G_{dBNC} le gain non corrigé

Avec :

$$G_{dBC} = G_{dBNC} + 20 \log K_p$$

$$G_{dBC} = 20 \log |H_{BO}(j\omega)| + 20 \log K_p$$

On a aussi :

$$M_\varphi = 180 + \varphi(\omega_{0dN})$$

Avec :

$$G(\omega_{0dN}) = 0$$

On cherche ; ω_2 avec :

$$\varphi(\omega_2) = 45 - 180 = -135$$

$$-135 = -\text{arc tg}(0.5\omega_2) - \text{arc tg}(0.1\omega_2)$$

Sachant que :

$$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tg}(a) + \text{tg}(b)}{1 - \text{tg}(a)\text{tg}(b)} \Rightarrow \text{tg}(135^\circ) = \frac{0.5\omega_2 + 0.1\omega_2}{1 - 0.5\omega_2 \times 0.1\omega_2} \Rightarrow \omega_2 = 2.1 \text{ rd/s}$$

Alors on a :

$$20 \log |H_{BO}(j\omega_2)| + 20 \log K_p = 0$$

$$20 \log K_p = -20 \log \left| \frac{10}{(1 + 0.5p)(1 + 0.1p)} \right| \Rightarrow K_p = 0.468$$

2.6. Correcteur à action intégral (I)

La fonction de transfert d'un correcteur intégral pur est :

$$C(p) = \frac{K_I}{p} \tag{3.2}$$

2.6.1. Principe

La relation entre la sortie $u(t)$ et le signal d'erreur $\varepsilon(t)$ est :

$$u(t) = k_i \int_0^t \varepsilon(t) dt \tag{4.2}$$

Alors dans le domaine de Laplace on a :

$$U(P) = \frac{K_I}{p} E(p) \tag{5.2}$$

Donc la fonction du transfert du correcteur intégral est donne par :

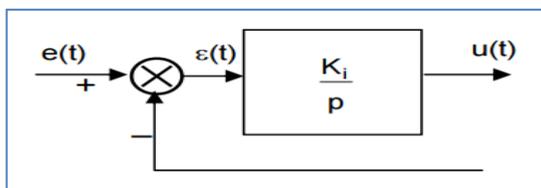
$$C_i(p) = \frac{K_I}{p} = \frac{1}{T_i p} \tag{6.2}$$

Avec :

K_I est appele gain integral

T_i est appele constante du temps d'integration

Son schéma fonctionnel est celui de la figure suivante :



Correction I.

La réponse indicielle du correcteur Intégrale.

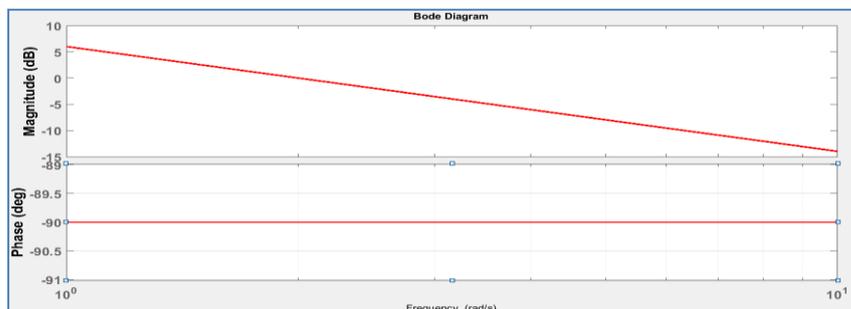


Fig 2.9. Diagramme de Bode du correcteur pou $K > 0$

Chapitre 02 : Calcul des contrôleurs dans le domaine fréquentiel

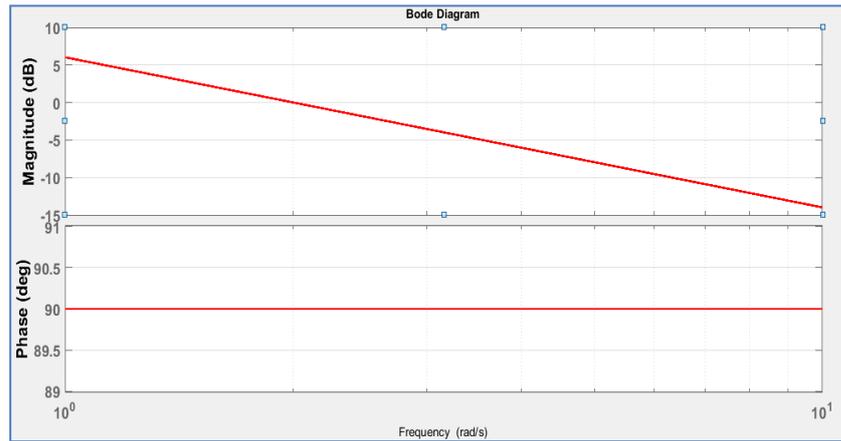


Fig 2.10. Diagramme de Bode du correcteur pour $K < 0$

2.6.2. Effet

L'intérêt principal de ce correcteur est d'ajouter dans la chaîne de commande une intégration. Nous savons que la présence d'une intégration dans la FTBO augmente la classe du système et réduit ou annule, selon le type d'entrée, l'erreur statique du système.

A RETENIR

L'action intégrale pure :

- améliore la précision en réduisant ou annulant l'erreur statique, mais
- introduit un déphasage de -90° qui risque de déstabiliser le système (diminution de la marge de phase).

Le correcteur à action exclusivement Intégrale n'est pratiquement jamais utilisé, en raison de sa lenteur et de son effet déstabilisant. Il est, en général, associé au correcteur Proportionnel.

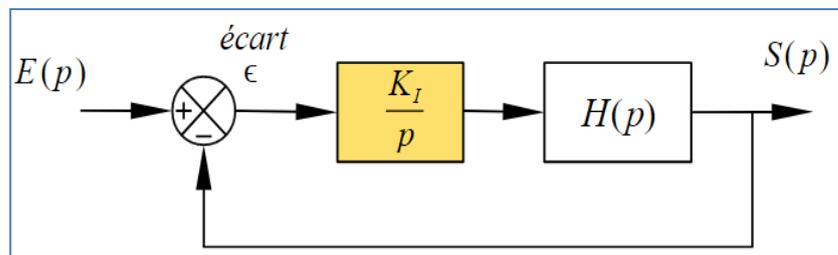
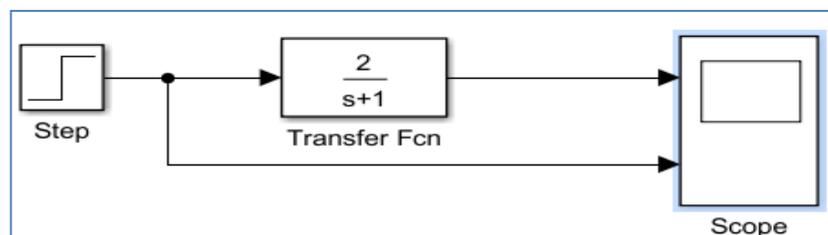


Fig 2.11. La fonction de transfert d'un correcteur intégral pur

Exemple

Nous prenons le cas simple d'un système du premier ordre



Chapitre 02 : Calcul des contrôleurs dans le domaine fréquentiel

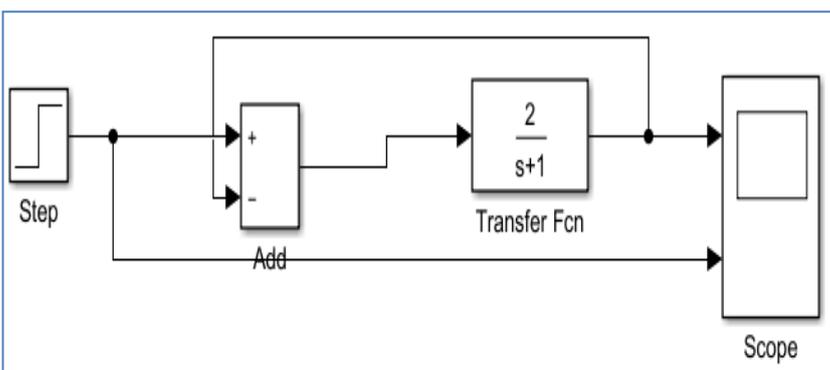
La réponse indicielle est représentée par la figure suivante



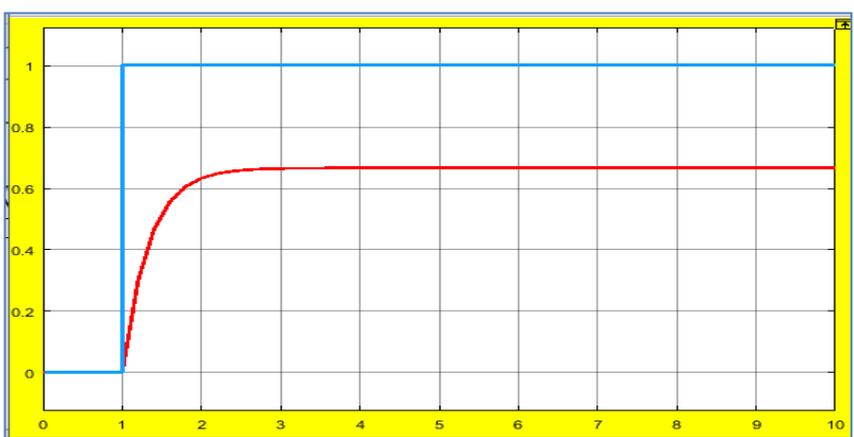
Résultats

- Stabilité
- Manque de précision

Bouclage du système par retour unitaire



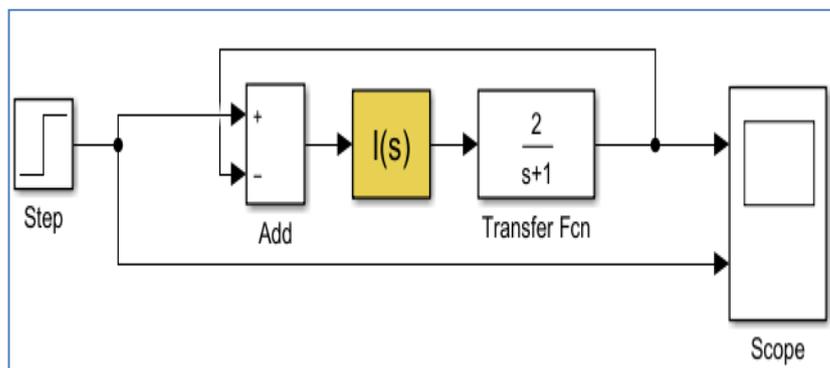
La réponse indicielle est représentée par la figure suivante



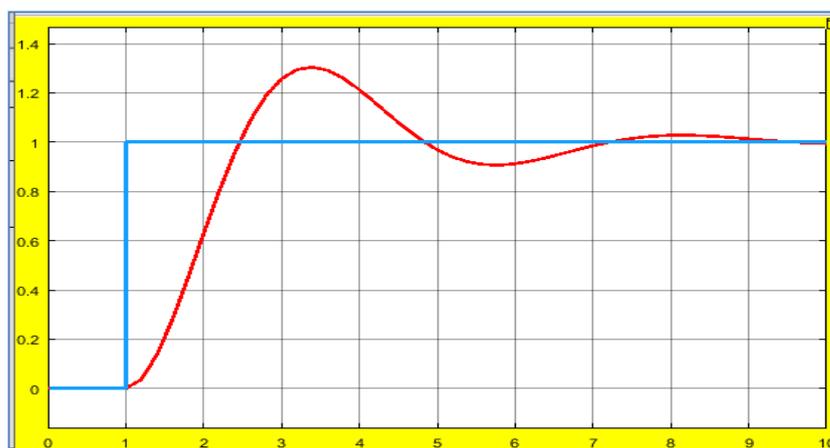
Résultats

- Stabilité
- Manque de précision

- Application d'un correcteur intégral



La réponse indicielle est représentée par la figure suivante



Résultats

- Manque de stabilité
- Bonne de précision

2.7. Correcteur à action proportionnel intégral (PI)

La fonction de transfert d'un correcteur proportionnel intégral est :

$$C(p) = K_p + \frac{K_i}{p} \tag{7.2}$$

Que l'on peu mettre sous forme canonique :

$$C(p) = \frac{K_p p + K_i}{p} = K_p \left(\frac{1 + \tau_i p}{\tau_i p} \right) \tag{8.2}$$

avec : $\tau_i = \frac{K_p}{K_i}$

Chapitre 02 : Calcul des contrôleurs dans le domaine fréquentiel

Avec

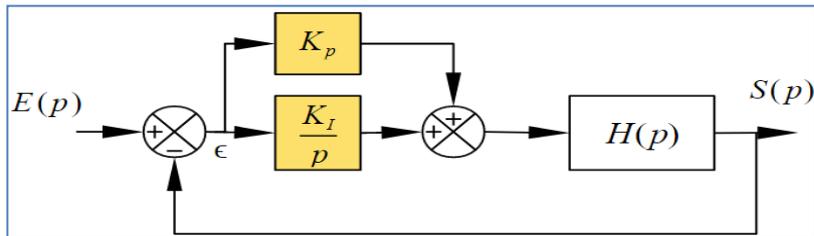


Fig 2.12 .la représentation du PI

C'est le cumul des effets des correcteurs proportionnel et intégral.

Le diagramme de Bode du correcteur PI est de la forme suivante :

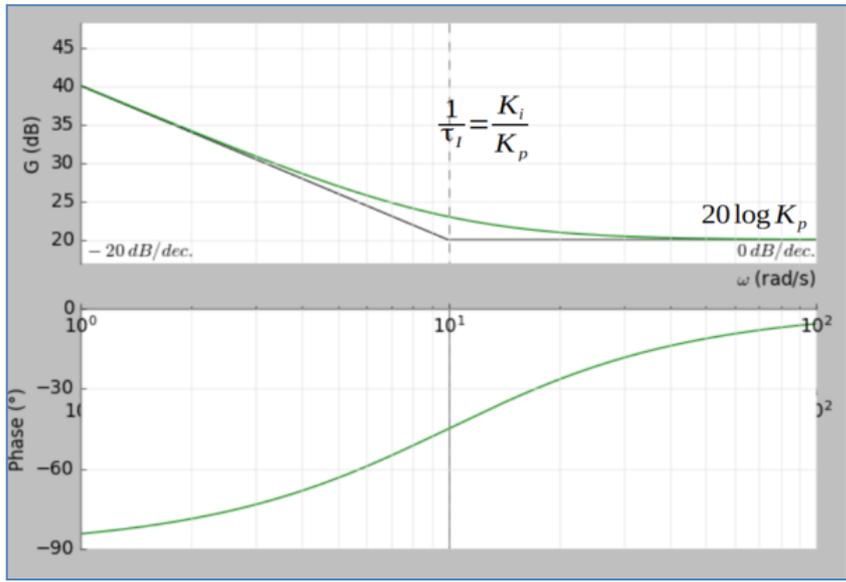
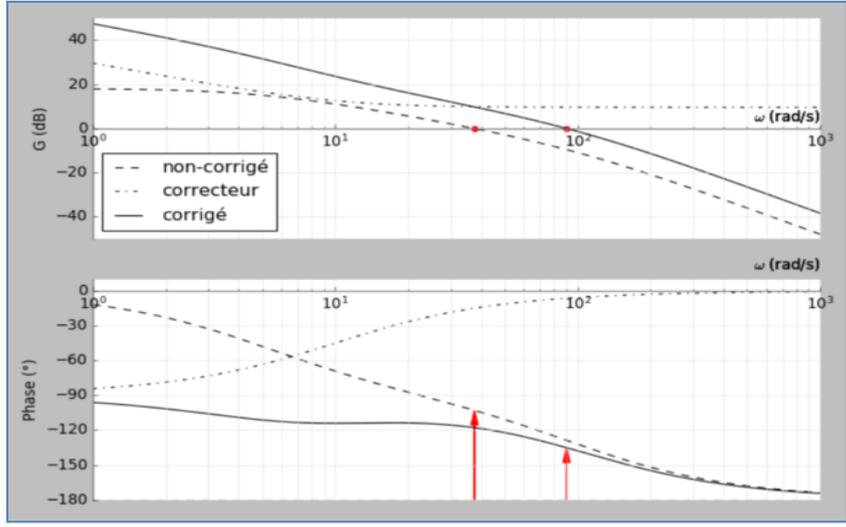


Fig 2.13 . Le diagramme de Bode du correcteur PI

Il ne diminue plus la phase pour : $\omega \gg \frac{K_i}{K_p}$ ce qui **préserve la marge de phase** (si) $\omega_c \gg \frac{K_i}{K_p}$

Exemple de correction :



Par ailleurs, un correcteur **Proportionnel Intégral** :

- permet d'**annuler l'écart statique** dans le cas d'une entrée échelon de la consigne si celui-ci n'était pas déjà assuré (*FTBO* de classe ≥ 1) ;
- permet de **rejeter une perturbation** du type échelon lorsque l'intégrateur est placé en amont (avant) la perturbation, si celle-ci n'était pas déjà assurée.

Remarque :

Sur le plan technologique, ce type de correcteur est sensé avoir un **gain infini lorsque la pulsation tend vers zéro** (à l'arrêt) ce qui pose problème dans la réalité car on ne peut atteindre ni même approcher une puissance infinie. On utilise alors un correcteur à retard de phase qui règle ce problème à basse fréquences.

2.7.1. Réalisation pratique du PI (13)

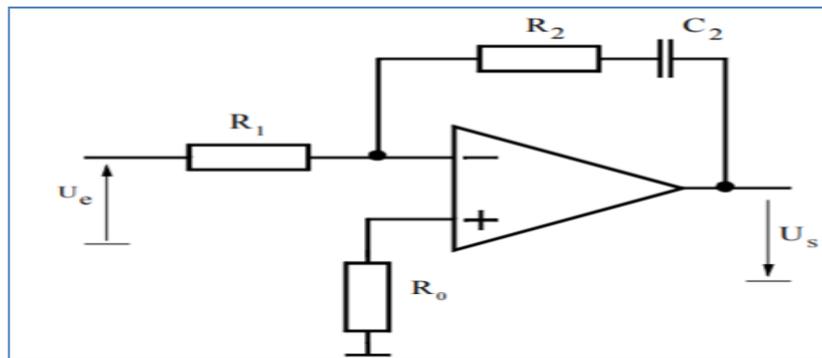


Fig 2.14 . La représentation électronique du correcteur PI

Il possède un circuit de contre-réaction formé d'un condensateur C_2 mis en série avec la résistance R_2 On peut écrire la relation générale au nœud (-) de l'amplificateur

$$U_e \left(\frac{1}{R_1} \right) = U_s \left(\frac{1+pR_2C_2}{pC_2} \right) \tag{9.2}$$

Et finalement la fonction de transfert :

$$G_R(p) = \frac{U_s}{U_e} = \frac{R_2}{R_1} \times \left(\frac{1+pR_2C_2}{pR_2C_2} \right) \tag{10.2}$$

Avec :

$$K_p = \frac{R_2}{R_1} \quad ; \quad \tau_i = R_2C_2$$

2.7.2. La Réponse harmonique

La réponse harmonique du régulateur PI est représentée à la Figure suivante. Les diverses courbes permettent de définir l'influence de chaque composant sur les résultats.

- Une variation de R_1 provoque une translation verticale du module (une augmentation de R_1 entraîne une translation vers le bas de la courbe).
- Une variation de R_2 provoque une translation oblique ($20dB/décade$) du module (une augmentation de R_2 entraîne une translation dans le sens décroissant des pulsations et croissant du module).
- Une variation de C_2 provoque une translation horizontale du module (une augmentation de C_2 entraîne une translation vers la gauche).

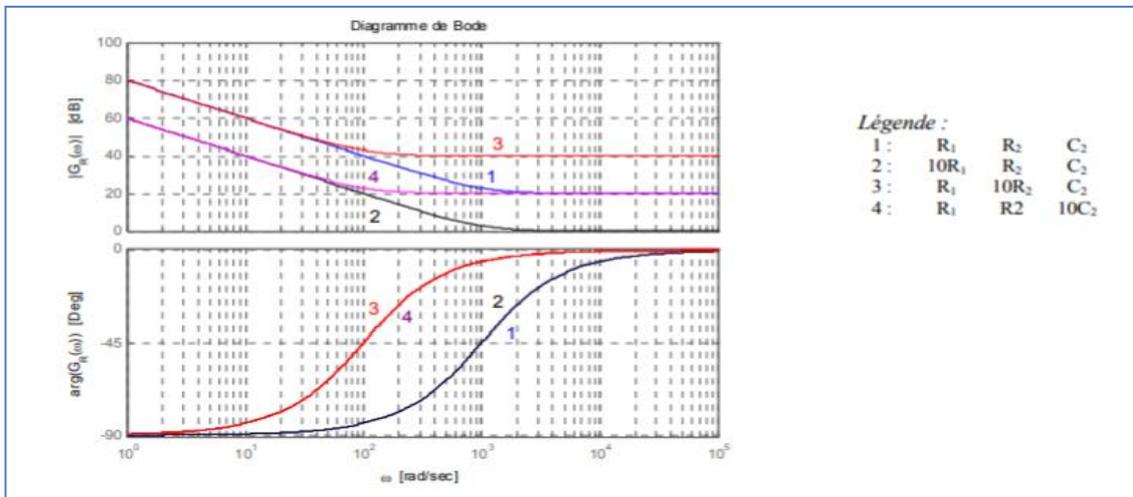


Fig 2.15 Réponse harmonique du régulateur PI : $R_1=10k, R_2=100k, C_2=10nF$

2.8. Réglage des paramètres de PI

2.8.1. Réglage d'un régulateur PI par l'analyse harmonique

Réglage PI avec comme cahier de charge ; une marge de phase visée

1. Mettre le régulateur P avec $K=1$ et repérer A, l'amplitude à la pulsation pour laquelle la phase vaut $-180^\circ + \text{marge de phase visée} + 5^\circ$ (perte de marge a cause de l'intégrateur)
2. Choisir K de façon a faire remonter le diagramme d'amplitude d'une valeur de A et à avoir $M_\varphi + 5^\circ$ comme marge de phase .

$$A = 20 \log(K) \Rightarrow K = 10^{\frac{A}{20}}$$

3. Choisir T_i de façon a perdre 5° de marge de phase

$$T_i = \frac{\tan(85^\circ)}{\omega_9 dB}$$

Chapitre 02 : Calcul des contrôleurs dans le domaine fréquentiel

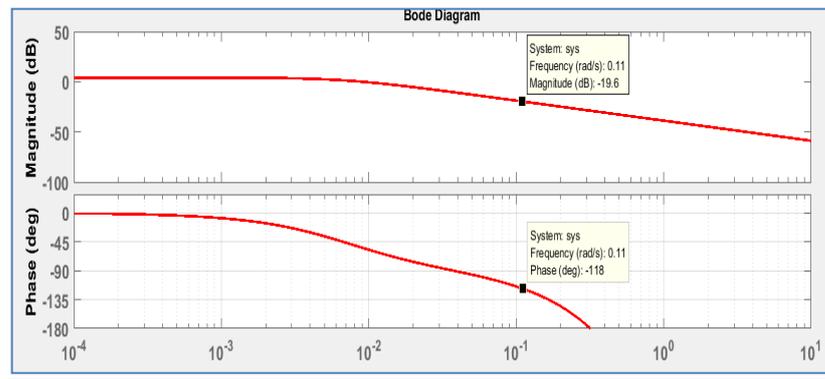
Démonstration :

$$C(p) = \frac{1 + T_i p}{T_i p} \rightarrow C(j\omega) = \frac{1 + T_i \cdot j\omega}{T_i \cdot j\omega}$$

$$\varphi(j\omega) = \varphi\left(\frac{1 + T_i \cdot j\omega}{T_i \cdot j\omega}\right) = \varphi(1 + T_i \cdot j\omega) - \varphi(T_i \cdot j\omega) = \text{atag}\left(\frac{T_i \cdot \omega}{1}\right) - 90^\circ = -5^\circ$$

Résultat

$$\exp(-5 * s) * \frac{1.617}{140.5 s + 1}$$



Etape 02

K=1.6175;

T=140.5;

Kp=9.64

Ti=103.1

C=tf([Kp*Ti Kp],[T 0]) % (fonction de transfert du correcteur PI)

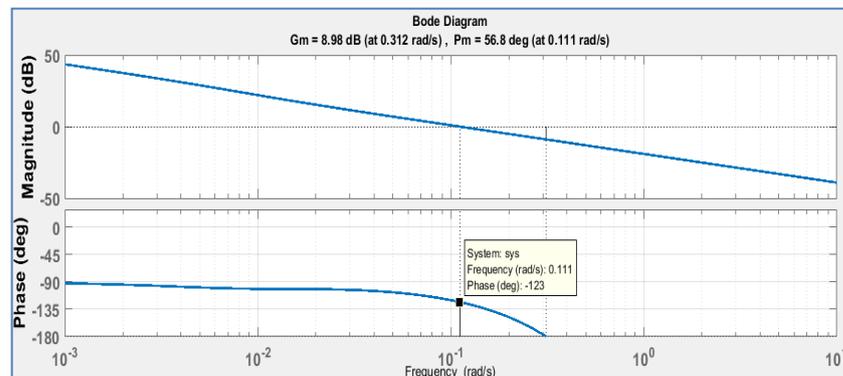
sys =C*tf(K,[T 1]);

set(sys,'InputDelay',5)

sys

margin(sys)

Résultat

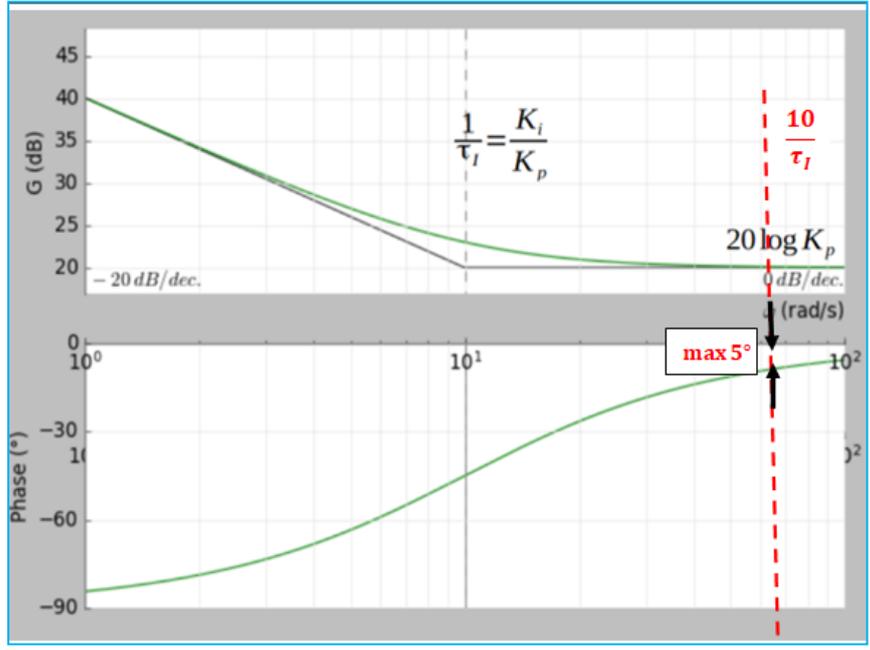


Remarque

Pour on ajoute les 5° ?

Réponse

Sachant que le diagramme de bode du correcteur PI est le suivant ;



On remarque que pour une decade à droite de la pulsation de cassure ($\omega = \frac{10}{T_i}$) sur la courbe de la phase ,il ya une degradation de 5° de phase ce qui provoque une perte sur la marge phase du système

2.9. Correcteur à retard de phase (5)

2.9.1. Définition

Le correcteur à retard de phase est un correcteur qui, comme son nom ne l’indique pas, permet d’augmenter le gain uniquement aux basses fréquences. Il sera donc utilisé pour améliorer la précision d’un système asservi.

Sa fonction de transfert est ;

$$C(p) = \frac{a(1 + Tp)}{1 + aTp} \text{ avec } a > 1 \tag{11.2}$$

Pour mieux comprendre l’action de ce correcteur, traçons son diagramme de Bode. Il y a deux pulsations de coupure : $1/T$ et $1/aT$,

Telles que :

$$\frac{1}{aT} < \frac{1}{T}$$

On a :

$$C(\omega) = \frac{a\sqrt{1 + T^2\omega^2}}{\sqrt{1 + a^2T^2\omega^2}} \tag{12.2}$$

Et :

$$\varphi(\omega) = \arctan T\omega - \arctan aT\omega$$

Lorsque $\omega \rightarrow 0$, on a : $C(\omega) \rightarrow a$

Cet équivalent de pente nulle est valable de 0 jusqu’à la première pulsation de coupure qui a pour expression: $1/aT$. La pente du diagramme de Bode asymptotique se décrémente alors d’une unité et ce

nouvel équivalent est valable jusqu'à la seconde pulsation de coupure ($1/T$) à partir de laquelle nous retrouvons une pente nulle (figure suivante).

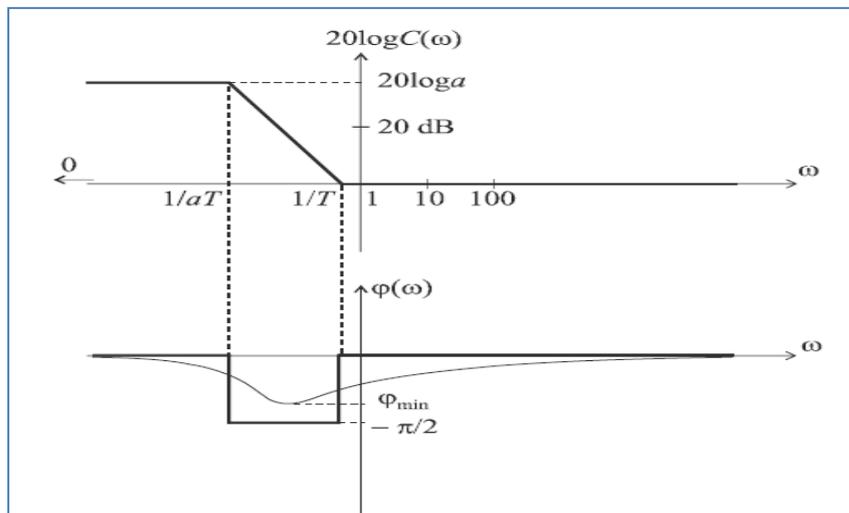


Fig 2.16. Diagramme de Bode d'un correcteur à retard de phase.

Lorsque $\omega \rightarrow +\infty$, on a : $20\log C(\omega) \rightarrow 0 \text{ dB}$

L'examen du diagramme de Bode nous permet de prévoir l'action de ce correcteur. Lorsque celui-ci sera placé en cascade avec le système à corriger, dans la chaîne directe, les deux diagrammes de Bode s'additionneront. Le gain statique est donc bien augmenté de $20 \log a$, ce qui améliore la précision.

En réglant le paramètre T sur une valeur suffisamment faible, cette correction n'a d'influence qu'aux basses fréquences ;

Le gain aux hautes fréquences n'est pratiquement pas affecté. Le déphasage négatif supplémentaire introduit par le correcteur se situe également aux basses fréquences. Il n'a donc pas d'influence sur la marge de stabilité, étant donné que les pulsations de coupure à 0 dB sont, en général, situées dans des plages de fréquences plus élevées.

En tout état de cause, pour régler le correcteur à retard de phase, on choisira la valeur de a qui permet d'obtenir le gain statique résultant voulu et on choisira ensuite T de sorte que $1/T \ll \omega_{c0}$.

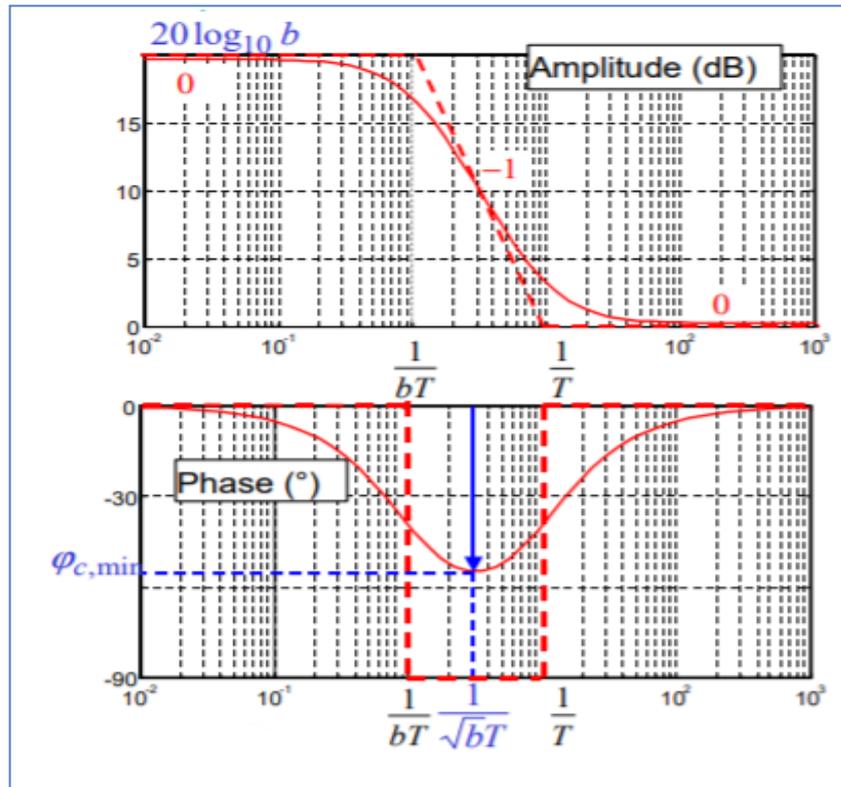
2.9.2. Propriétés

- Introduction d'un déphasage négatif d'où le nom de correcteur à retard de phase
- Déphasage minimum

$$\varphi_{c:min} = \arcsin \frac{1-a}{1+a} \text{ rad} \quad \text{avec } \varphi_{c:min} < 0 \quad (13.2)$$

- Pulsation correspondante

$$\omega_{c,min} = \frac{1}{T\sqrt{a}} \tag{14.2}$$



2.9.3. Effets du correcteur

- Augmentation du gain en basses fréquences de $20 \log_{10} b \Rightarrow$ effet intégral \Rightarrow diminution de l'erreur statique en BF (système de classe 0 en BO)
- Diminution de la bande passante à 0 dB $\omega_{c0} \Rightarrow$ système moins rapide en BF (augmentation de t_m ou de $t_r, 5\%$)

2.9.4. Eléments de réglage du correcteur

- Introduire dans le correcteur un gain K'_c qu'on calcule pour avoir la marge de phase désirée
- Calculer $K_c = b$ pour obtenir la précision imposée
- Choisir la constante de temps T telle que $(\frac{1}{T} \ll \omega_{c0})$ pour ne pas modifier la marge de phase et les performances dynamiques

Exemple (14)

Considérons un système de fonction de transfert $G(p)$ placé dans une boucle à retour unitaire, avec :

$$G(p) = \frac{K}{\left(1 + \frac{p}{10}\right)^3}$$

Chapitre 02 : Calcul des contrôleurs dans le domaine fréquentiel

Le paramètre K , gain statique du système en boucle ouverte est positif et réglable. On souhaite que ce système présente en boucle fermée une erreur de position $\varepsilon_p = 5\%$, tout en ayant une marge de phase $M_\varphi = 45^\circ$.

On commence par régler K pour satisfaire à la condition sur la marge de phase :

Comme :

$$G(j\omega) = \frac{K}{\left(1 + \frac{j\omega}{10}\right)^3}$$

On a :

$$M_\varphi = \pi - 3 \arctan \frac{\omega_{c0}}{10} = \frac{\pi}{4} \text{ soit : } \omega_{c0} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

On a donc :

$$G(\omega_{c0}) = \frac{K}{\sqrt{1 + \frac{\omega_{c0}^2}{100}}} = 1$$

d'où :

$$K = \sqrt{2}^3 = 2,8 \Rightarrow 20 \log K = 8,9 \text{ dB}$$

Calculons à présent l'erreur de position obtenue en boucle fermée dans ces conditions :

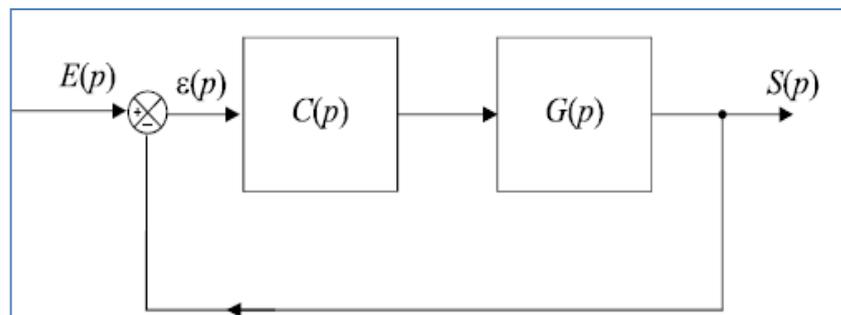
Soit :

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} (1 - H(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(1 - \frac{K}{K + \left(1 + \frac{p}{10}\right)^3} \right) = \frac{1}{K + 1} = 0.26 = 26\%$$

La précision constatée ne satisfait pas au cahier des charges. Pour obtenir une erreur de position de 5 %, il est nécessaire de disposer d'un gain statique K' tel que :

$$\varepsilon_p = \frac{1}{K' + 1} = 0.05 \Rightarrow K' = 19 \Rightarrow 20 \log K' = 25.6 \text{ dB}$$

Introduisons un correcteur à retard de phase dans la chaîne directe.



On a :

$$C(p) = \frac{a(1 + Tp)}{1 + aTp} \text{ avec } a > 1 \tag{14.2}$$

La nouvelle fonction de transfert en boucle ouverte est :

$$Gc(p) = C(p)G(p) = \frac{a(1 + Tp)}{1 + aTp} \times \frac{2.8}{\left(1 + \frac{p}{10}\right)^3}$$

Le nouveau gain statique est : $K' = 2,8a$.

Par conséquent, il est nécessaire de régler le paramètre a de sorte que :

$$a = \frac{19}{2,8} = 6,8 \Rightarrow 20 \log a = 16,7 \text{ dB}$$

Il suffit, pour finir, de choisir T de manière à ce que $1/T$ soit très inférieur à la pulsation de coupure à 0 dB. Nous pouvons prendre, par exemple, $T = 10 \text{ s}$.

On a finalement :

$$C(p) = \frac{6,8(1 + 10p)}{1 + 68p}$$

La figure suivante présente les diagrammes de Bode comparés du système initial et du système corrigé. Rappelons que les diagrammes de Bode de $G(p)$ et de $C(p)$ s'additionnent pour former celui du système corrigé $Gc(p)$.

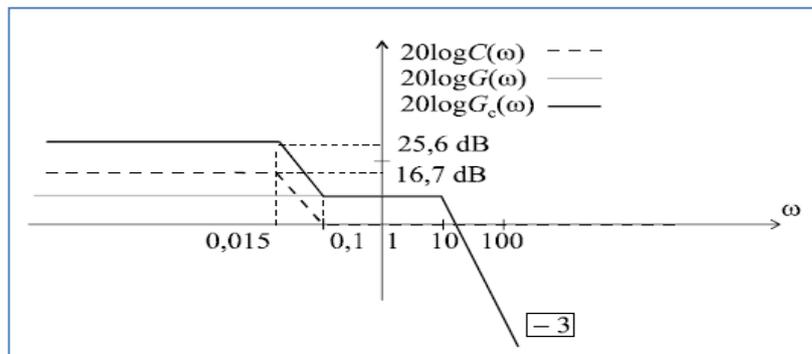


Fig 2.17, Diagramme de Bode corrigé aux basses fréquences. (14)

2.9.5. Circuit électrique : (15)

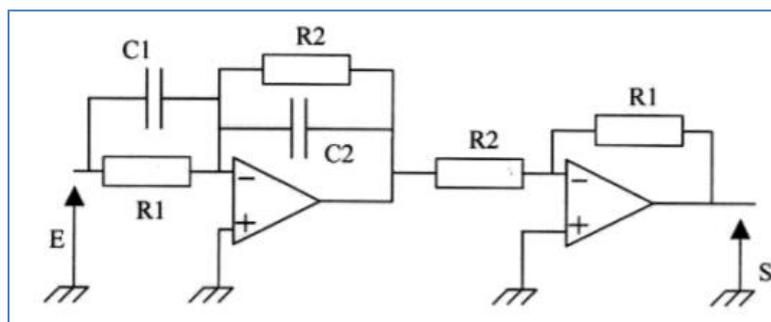


Fig 2.18, circuit électrique du correcteur

$$C(p) = \frac{1+R_1C_1p}{1+R_2C_2p} \quad \text{avec } R_2C_2 > R_1C_1 \quad (15.2)$$

2.10. Correcteur dérivé (D)

Pour un dérivateur pur, la loi de commande est de la forme :

$$u(t) = T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad (16.2)$$

la FT est donc :

$$C(s) = T_d p \quad (17.2)$$

T_d : Appelée constante de temps de dérivation.

qui a pour mission d'ajouter un zéro nul à la fonction de transfert en boucle ouverte. Intuitivement, nous pouvons imaginer que son action est l'inverse de celle de l'intégrateur. Vérifions cela sur un diagramme de Bode.

La figure suivante représente le diagramme de bode du correcteur dérivé

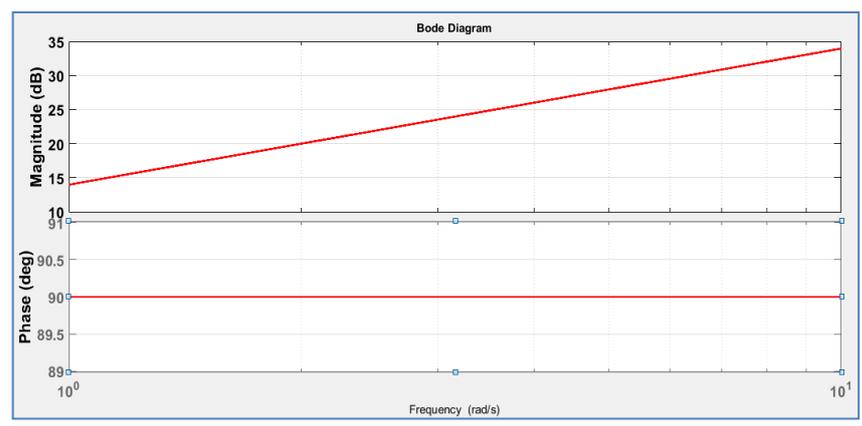


Fig 2.19, le diagramme de bode du correcteur dérivé

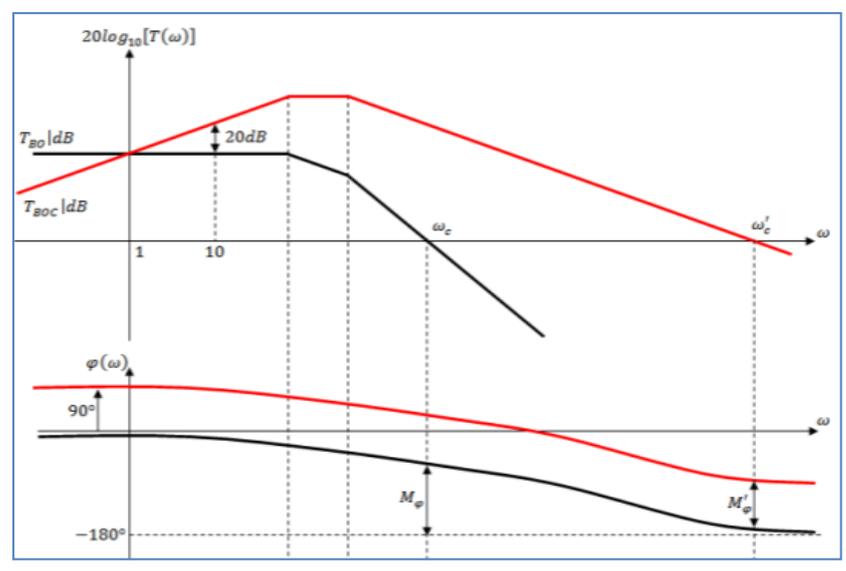


Fig 2.20, Effet du correcteur dérivé

Considérons à nouveau un système quelconque de fonction de transfert en boucle ouverte (T_{BO}). Les graphes représentent respectivement :

$$T_{BO}|_{dB} = 20\log|T_{BO}(\omega)| \quad (18.2)$$

$$\varphi_{BO}(\omega) = \arctg(T_{BO}(j\omega)) \quad (19.2)$$

Les graphes correspondant à la fonction de transfert corrigée se déduisent facilement des graphes initiaux

$$T_{BOC}|_{dB} = 20\log|T_{BOC}(\omega)| = 20\log|\omega T_{BO}(\omega)| = 20\log|T_{BO}(\omega)| + 20\log(\omega) \quad (20.2)$$

$$\varphi_{BOC}(\omega) = \arctg(T_{BOC}(j\omega)) = \arctg(j\omega T_{BO}(j\omega)) = \varphi_{BO}(\omega) + \frac{\pi}{2} \quad (21.2)$$

On passe donc de la courbe de gain initiale $T_{BO}|_{dB}$ à la courbe corrigée $T_{BOC}|_{dB}$ en ajoutant à chaque segment l'équivalent d'un segment de pente (1), autrement dit en incrémentant chaque pente initiale d'une unité. En remarquant par ailleurs, qu'à la pulsation $\omega = 10 \text{ rd/s}$, le gain a augmenté de 20 dB , il nous est possible de tracer immédiatement le graphe correspondant à $T_{BOC}|_{dB}$. Le diagramme de phase, quant à lui, est translaté de $\frac{\pi}{2}$ vers le haut.

On remarque que la pulsation de coupure à 0 dB augmente. on peut en déduire que le temps de montée diminue. Le dérivateur aura donc tendance à accélérer le système en boucle fermée.

L'augmentation de influe également sur la marge de phase mais cette influence dépend de l'ordre du système. En effet, la remontée de phase de $+\frac{\pi}{2}$ peut avoir deux effets différents :

- si le système possède un ordre élevé, le déphasage peut tendre vers des valeurs négatives très importantes ; la remontée de phase peut alors être sans effet sur l'amélioration de la marge de phase, voire la dégrader et même rendre le système instable.
- Si au contraire l'ordre du système est faible, la remontée de phase peut se traduire par une nouvelle courbe $\varphi_{BOC}(\omega)$ qui tend vers une valeur située largement au dessus de $-\pi$.

2.10.1. Effets du correcteur

- En statique elle peut diminuer la précision du système
- en dynamique elle augmente la rapidité et renforce la stabilité du système

2.11. Correcteur à avance de phase (5)

2.11.1. Definition

Le correcteur à avance de phase est un correcteur qui, comme son nom l'indique, permet d'augmenter la marge de phase d'un système. Il s'agit de compenser un trop faible déphasage autour de la pulsation de coupure à 0 dB.

La fonction de transfert d'un tel correcteur est donnée par :

$$C(p) = \frac{1 + aTp}{1 + Tp} \tag{22.2}$$

Avec : $a > 1$

Pour mieux comprendre l'action de ce correcteur, traçons son diagramme de Bode. Il y a deux pulsations de coupure : $1/T$ et $1/aT$, avec :

$$1/aT < 1/T$$

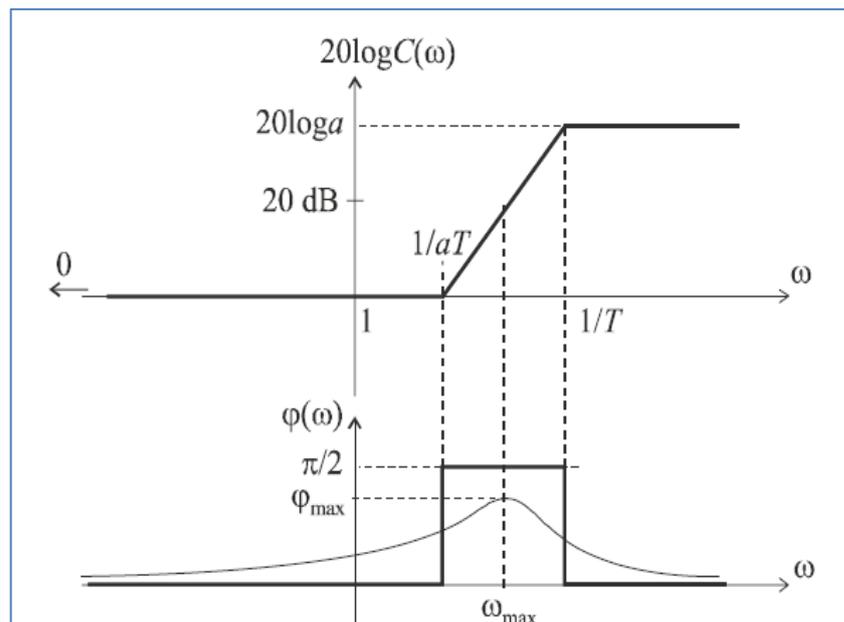


Fig 2.21, Diagramme de Bode d'un correcteur à avance de phase.

On a :

$$C(\omega) = \frac{\sqrt{1 + a^2 T^2 \omega^2}}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}} \tag{23.2}$$

Et:

$$\varphi(\omega) = \arctan aT\omega - \arctan T\omega$$

Lorsque $\omega \rightarrow 0$; on a :

$$C(\omega) \rightarrow 1$$

Cet équivalent de pente nulle est valable de 0 jusqu'à la première pulsation de coupure qui a pour expression : $1/aT$. La pente du diagramme de Bode asymptotique s'incrémente alors d'une unité et ce nouvel équivalent est valable jusqu'à la seconde pulsation de coupure ($1/T$) à partir de laquelle nous retrouvons une pente nulle (figure précédente).

Lorsque $\omega \rightarrow +\infty$, on a : $20 \log C(\omega) \rightarrow 20 \log a$

L'intérêt de ce correcteur est visible sur son diagramme de phase : à la pulsation $\omega_{max} = \frac{1}{T\sqrt{a}}$, le déphasage présente un maximum que nous pouvons facilement calculer :

$$\varphi_{max} = \arcsin \left(\frac{a-1}{a+1} \right) \quad (24.2)$$

Le principe de l'action correctrice consiste à faire coïncider ω_{max} avec la pulsation de coupure à 0 dB c0 du système à corriger et à régler φ_{max} , que l'on appelle la remontée de phase, de manière à obtenir la marge de phase voulue.

2.11.2. Synthèse du correcteur

On suppose que l'on a modélisé le processus : on dispose donc d'une expression de son gain complexe. On suppose également que le cahier des charges spécifie le comportement statique (ou en basse fréquence) souhaité et la marge de phase souhaitée.

2.11.3. Démarche de synthèse du correcteur

1. Ajuster le gain du processus afin que les exigences du cahier des charges concernant les basses fréquences soient respectées.
2. Tracer le diagramme de Bode en boucle ouverte du processus ainsi ajusté ; en déduire la quantité de phase qu'il faut ajouter pour obéir au cahier des charges ; en déduire φ_{max} , donc a .
3. En déduire la valeur de T telle que ω_{max} soit égale à la pulsation ω_{c0} pour laquelle le gain en boucle ouverte du système corrigé vaut 1.
4. Tracer le diagramme de Bode en boucle ouverte du système corrigé afin de s'assurer que le cahier des charges est bien respecté.

Cette démarche doit être bien comprise et connue par cœur.

2.11.4. Effets généraux du correcteur à avance de phase

- Augmentation de la bande passante.
- Augmentation de la marge de phase.

2.11.5. Réalisation du correcteur à avance de phase

Un exemple de réalisation est présenté sur la Figure suivante :

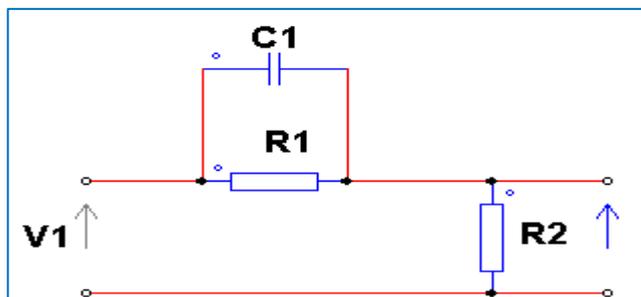


Fig 2.22, Réalisation du correcteur à avance de phase

Carte électronique du correcteur à avance de phase :

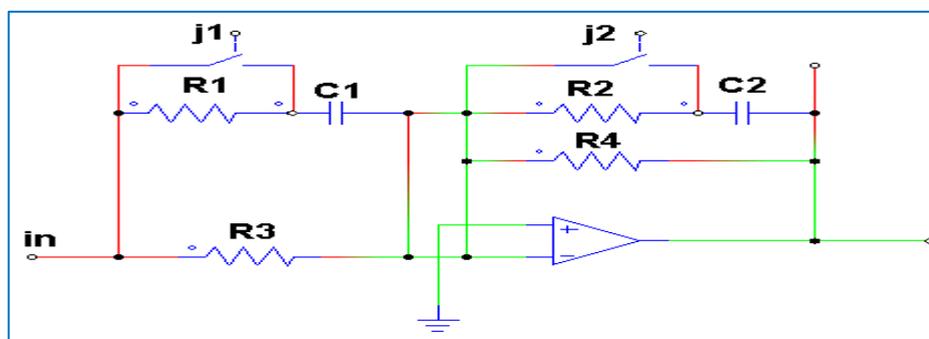


Fig 2.23, carte électronique du correcteur à avance de phase

Avec :

$$K = \frac{-R_4}{R_3} \quad T = R_4 C_2 \quad a = \frac{R_3 C_1}{R_4 C_2}$$

Exemple

Considérons un système de fonction de transfert $G(p)$ placé dans une boucle à retour unitaire, avec :

$$G(p) = \frac{100}{(p + 1)^2}$$

On souhaite corriger ce système de manière à ce que sa marge de phase soit égale à 45°. Calculons sa marge de phase avant correction.

On a :

$$G(\omega) = \frac{100}{1 + \omega_{c0}^2} = 1$$

D'où :

$$\omega_{c0} = \sqrt{99} = 9,95 \text{ rad/s}$$

Par conséquent :

$$\Delta\varphi = \pi - 2 \arctan \omega_{c0} = 0,2 \text{ rad} = 11^\circ$$

Chapitre 02 : Calcul des contrôleurs dans le domaine fréquentiel

La marge de phase est insuffisante. Pour la corriger, nous devons procéder à une remontée de phase de 34° à la pulsation ω_{c0} . On introduit donc un correcteur à avance de phase que l'on règle de manière à ce que:

$$\frac{1}{T\sqrt{a}} = \omega_{c0} = 9,95 \frac{rad}{s} \quad \text{et} : \quad \varphi_{max} = 34^\circ = \arcsin \frac{a-1}{a+1}$$

On a donc :

$$\arcsin \frac{a-1}{a+1} = 34^\circ \Rightarrow a = \frac{1 + \sin 34^\circ}{1 - \sin 34^\circ} = 3,54$$

Ou encore : $20 \log a = 11 \text{ dB}$

puis : $\frac{1}{T\sqrt{a}} = \omega_{c0} \Rightarrow T = \frac{1}{9,95\sqrt{3,54}} = 0,053 \text{ s}$

soit : $\frac{1}{T} = 18,9 \text{ rad/s}$ et $\frac{1}{aT} = 5,3 \text{ rad/s}$

Finalement :

$$C(p) = \frac{1 + 0,19p}{1 + 0,053p}$$

La nouvelle fonction de transfert en boucle ouverte est :

$$Gc(p) = C(p) \times G(p) = \frac{1 + 0,19p}{1 + 0,053p} \cdot \frac{100}{(p + 1)^2}$$

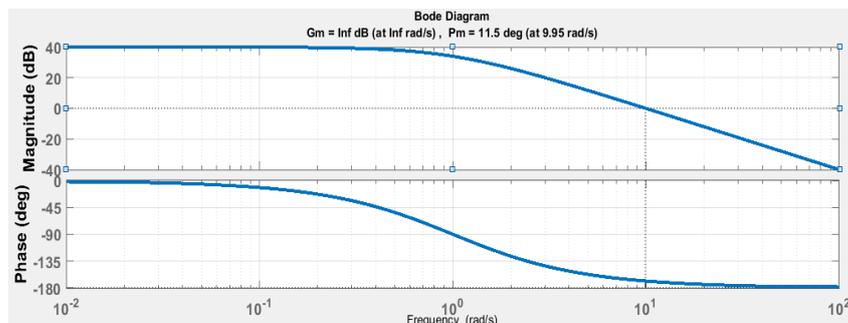


Fig .2.24. Diagramme de Bode du système non corrigé.

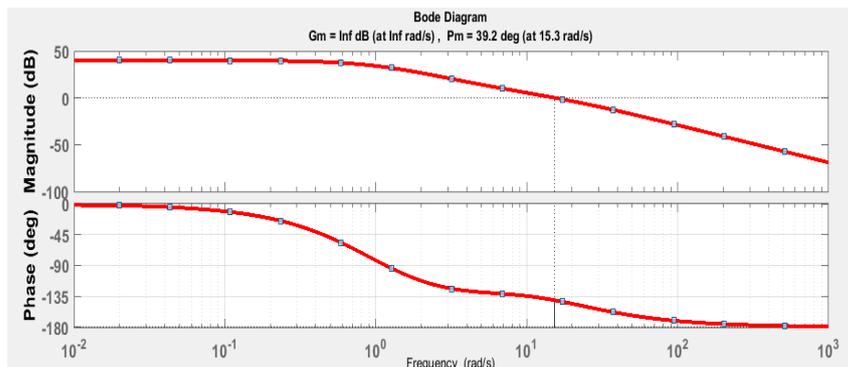


Fig .2.25. Diagramme de Bode du système corrigé.

La figure précédente présente les diagrammes de Bode comparés du système initial et du système corrigé. Rappelons que les diagrammes de Bode de $G(p)$ et de $C(p)$ s'additionnent pour former celui du système corrigé $Gc(p)$. Dans la cas du correcteur à avance de phase, l'action correctrice est parfaitement visible sur le diagramme de phase.

Remarque

Le correcteur à avance de phase a une influence sur le diagramme de gain du système. Cette influence est visible sur la figure precedent autour de la pulsation de coupure à 0 dB : la pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé est légèrement plus grande que celle du système non corrigé. Par conséquent, la remontée de phase maximale que l'on a calculée ne se produit plus véritablement à ω_{c0} On a alors le choix de négliger cette augmentation ou encore de l'anticiper en majorant la remontée de hase calculée de quelques degrés, par exemple 5° .

La réponse indicielle du système précédent en boucle fermée avec retour unitaire est représentée par les figures suivantes :

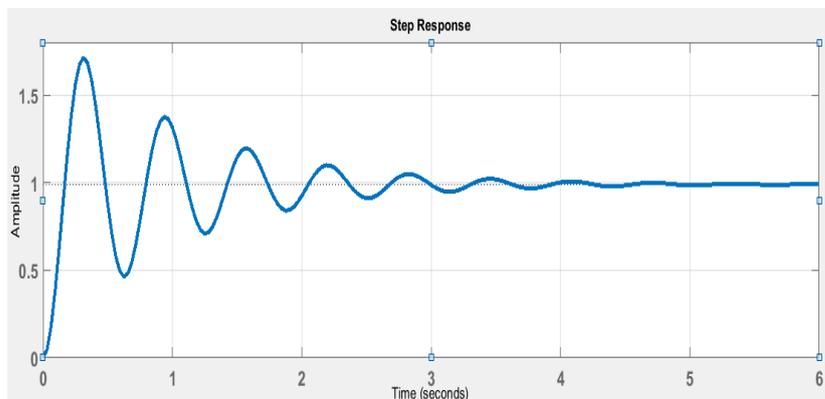


Fig.2.26 . réponse indicielle du système non corrige

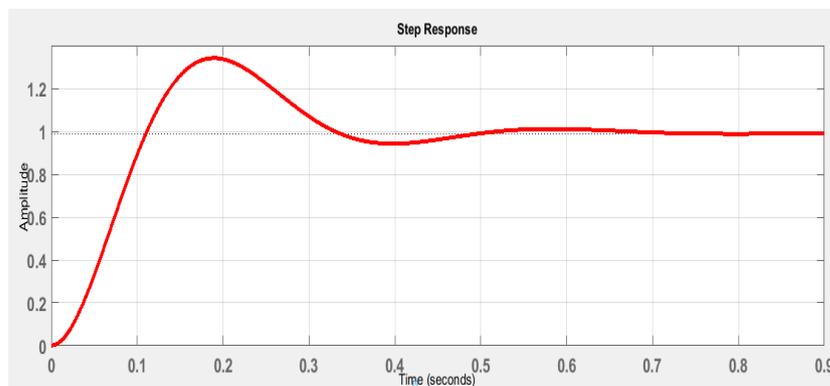


Fig.2.27 . ; réponse indicielle du système corrige

2.12. Correcteur proportionnel intégral dérive (PID) (16)

2.12.1. Méthodes de réglages des paramètres du régulateur PID

Par un choix des actions et de leurs paramètres, il est possible d'obtenir un comportement désiré en boucle fermée, traduisant les performances souhaitées et formulées dans un cahier des charges.

De manière qualitative, les critères à satisfaire sont les suivants :

- Les effets de perturbations doivent être minimisés ou encore mieux, ils doivent être effacés complètement et ce, le plus rapidement possible.

- Les changements de consigne doivent être suivis rapidement et avec une bonne précision.

De manière quantitative, il s'agit de proposer les actions (PID) du régulateur et de fixer les valeurs à donner aux paramètres (Kp, Ti, Td) répondant le mieux possible aux spécifications d'un cahier des charges.

Le problème de la détermination des régulateurs est connu par la synthèse des systèmes bouclés. Les méthodes de synthèse sont très nombreuses et une classification rigoureuse n'est pas une tâche facile. Néanmoins, on distingue dans le cadre de ce cours les deux types de méthodes :

- ❖ Les méthodes dites empiriques ne nécessitant pas une connaissance parfaite du modèle du procédé à commander. Les paramètres du régulateur seront calculés à partir des observations expérimentales sur le procédé (Relevé de la réponse indicielle par exemple). L'intérêt majeur de ces méthodes réside dans leur simplicité. Elles sont largement utilisées dans le domaine industriel et elles sont dans la plus part des cas suffisants mais ne permettent pas un réglage fin.

- ❖ Les méthodes basées sur la connaissance du modèle du système sous forme de fonction de transfert par exemple. Les actions du régulateur seront calculées de façon à obtenir la fonction de transfert souhaitée en boucle ouverte ou en boucle fermée.

2.12.2. Méthodes empiriques de Ziegler&Nichols.

Ziegler et Nichols ont proposé deux approches expérimentales destinées à fixer rapidement les paramètres des régulateurs P, PI et PID. La première nécessite l'enregistrement de la réponse indicielle du système à régler, alors que la deuxième exige d'amener le système en boucle fermée à sa limite de stabilité.

2.12.3. Méthode de Ziegler&Nichols en boucle ouverte.

a- Mode opératoire

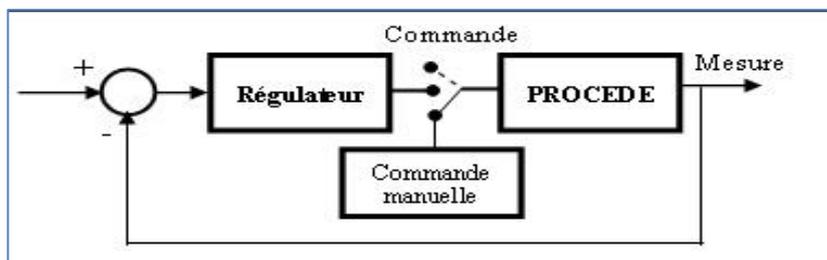


Fig2.28 .Méthode opératoire pour le réglage des correcteur

- Le régulateur est en mode automatique et la boucle est dans état stabilisé. La sortie du régulateur indique une commande u_0 et la sortie du procédé indique une valeur y_0 .
- On affiche la valeur u_0 sur le module de la commande manuelle.
- On met le régulateur en mode manuel c'est-à-dire qu'il est déconnecté de la boucle.
- On envoie une variation constante du signal de commande sur l'entrée procédé et on enregistre sur une table traçante la variation du signal de mesure à la sortie du procédé.

Il s'agit donc de l'enregistrement de la réponse indicielle du procédé seul.

b- Exploitation de la réponse indicielle

Sur l'enregistrement de la réponse indicielle, on trace le mieux possible la tangente au point d'inflexion Q de la courbe. On mesure ensuite le temps Tu correspondant au point d'intersection entre l'axe des abscisses et la tangente ainsi que le temps Ta « temps de montée de la tangente ».

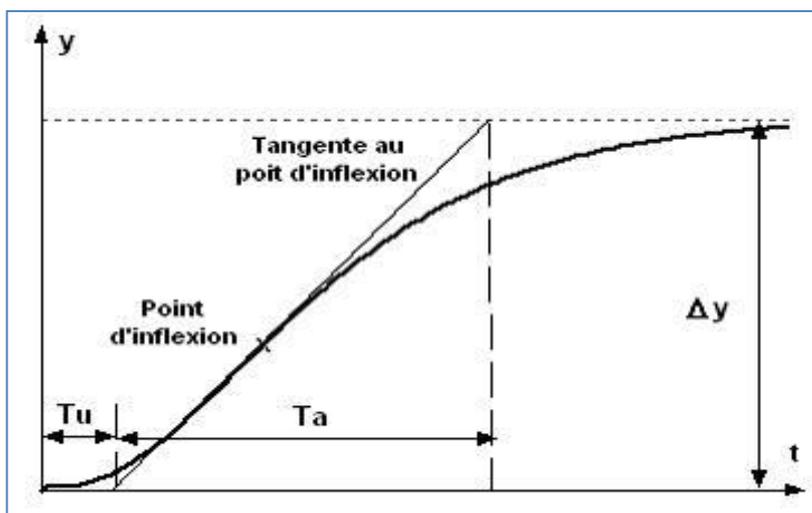


Fig2.28 Méthode de strejec pour le réglage du correcteur.

c- Réglage du régulateur PID

Ziegler & Nichols proposent de calculer les paramètres du régulateur P, PI ou PID à l'aide des recommandations suivantes:

Réglage des paramètres			
Régulateur	K_p	T_i	T_d
P : $R(p) = K_p$		*	*
PI : $R(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_{ip}}\right)$	$\frac{T_a}{T_u} \frac{0.9}{K}$	$3.33 T_u$	*
PID : $R(p) = K_p \left(1 + T_d p + \frac{1}{T_{ip}}\right)$	$\frac{T_a}{T_u} \frac{1.2}{K}$	$2.0 T_u$	$0.5 T_u$

Une illustration de cette démarche est donnée ci-dessous pour la réponse indicielle d'un procédé à un échelon unité.

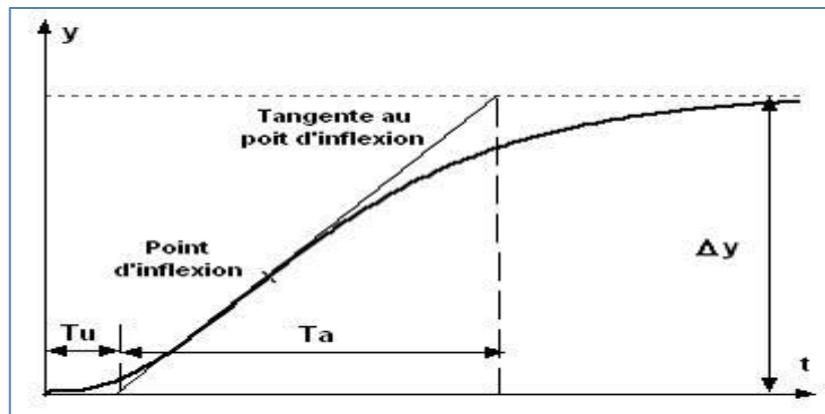


Fig2.29 Méthode de Ziegler-nichols pour le réglage du correcteur

On relève les paramètres suivants :

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{0.5}{1} = 0.5 \quad ; \quad T_u = 0.8 \quad ; \quad T_a = 3.7$$

Le tableau de réglage proposé par Ziegler & Nichols est:

Action	K_p	T_i	T_d
P	9.25	*	*
PI	8.33	2.66	*
PID	11	1.6	0.4

Les réponses indicielles en boucle fermée sont données par les figures suivantes avec une consigne égale à 1.

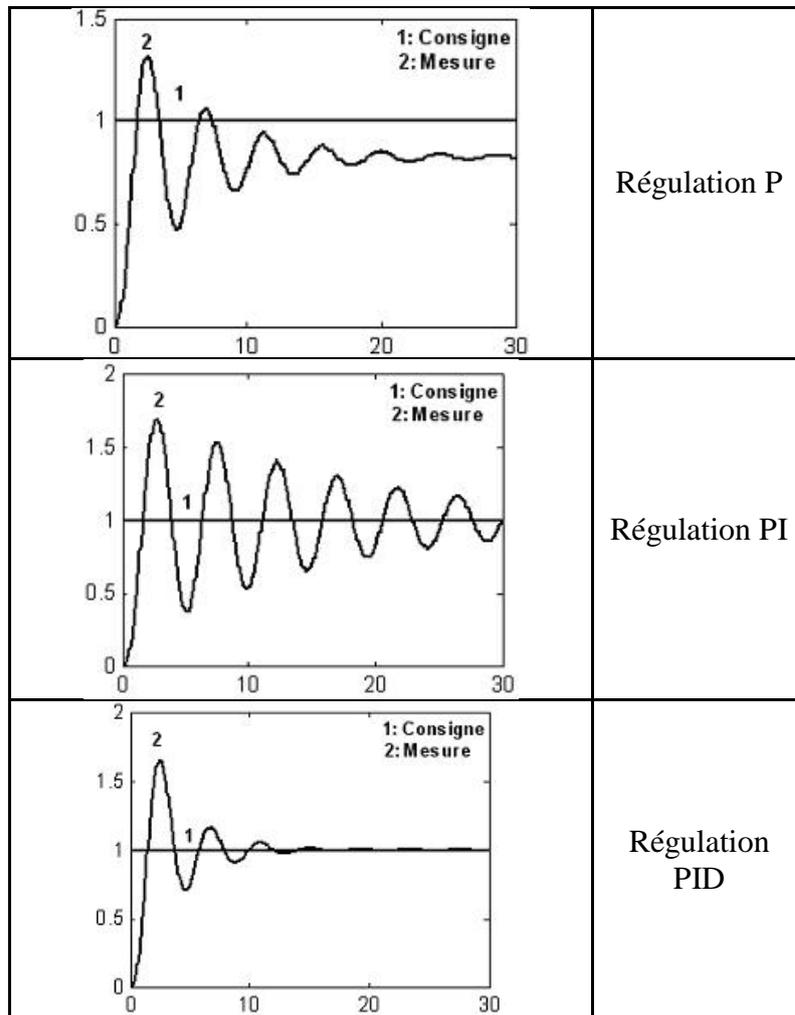


Fig2.30 Les réponses indicielles en boucle fermée

Généralement les gains proportionnels (K_p) proposés par Ziegler & Nichols sont trop élevés et conduisent à un dépassement supérieur à 20%. Il ne faut pas craindre de réduire ces gains d'un facteur 2 pour obtenir une réponse satisfaisante.

2.12.4. Méthode de Ziegler & Nichols en boucle fermée.

a- Mode opératoire

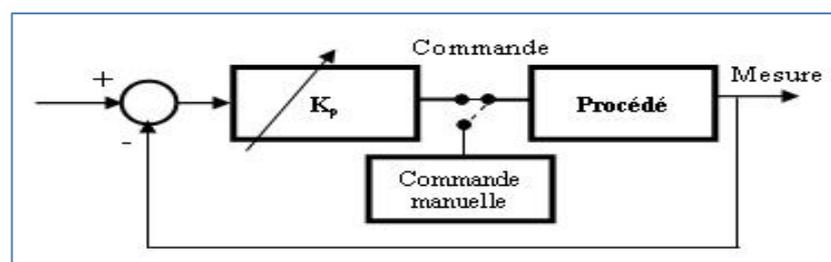


Fig.2.31 La Méthode de Ziegler-nicols en boucle fermée

- Le régulateur est en mode automatique avec une faible valeur de K_p . Les actions I et D sont inhibées en mettant $T_i = T_{imax}$ et $T_d = 0$.
- On augmente progressivement le gain K_p du correcteur proportionnel agissant seul jusqu'à l'obtention de la juste oscillation de la boucle (**pompage**).

b- Exploitation du résultat de pompage de la boucle

On relève le gain limite (K_{pc}) conduisant au pompage de la boucle et la période des oscillations T_c correspondant à ce fonctionnement à partir de n'importe quel point d'observation (sortie du régulateur, sortie du procédé..).

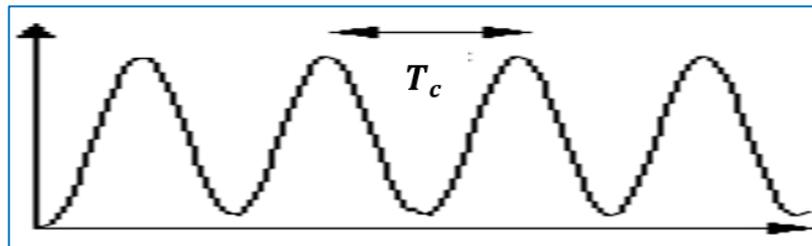


Fig.2.32. Pompage de la boucle et la période des oscillations

c- Réglage du régulateur PID

Ziegler & Nichols proposent de calculer les paramètres du régulateur choisi à l'aide des recommandations suivantes :

Réglage des paramètres			
Régulateur	K_p	T_i	T_d
$P : R(p) = K_p$	$0.5 K_{pc}$	*	*
$PI : R(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_{ip}}\right)$	$0.45 K_{pc}$	$0.83 T_c$	*
$PID : R(p) = K_p \left(1 + T_d p + \frac{1}{T_{ip}}\right)$	$0.6 K_{pc}$	$0.5 T_c$	$0.125 T_c$

Pour illustrer cette démarche, on considère le même système considéré plus haut et pour lequel on a les résultats du pompage suivants : $K_{pc} = 16$ et $T_c = 3.63$ (l'unité du temps n'est pas précisée ici)

Le tableau de réglage proposé par Ziegler & Nichols est :

Action	K_p	T_i	T_d
P	8	*	*
PI	7.2	3	*
PID	9.6	1.82	0.45

On note au passage que les deux méthodes de Ziegler & Nichols conduisent à des valeurs très proches pour les paramètres du régulateur et par conséquent les performances seront similaires.

En effet, les réponses indicielles en boucle fermée sont données par les figures suivantes avec une consigne égale à 1.

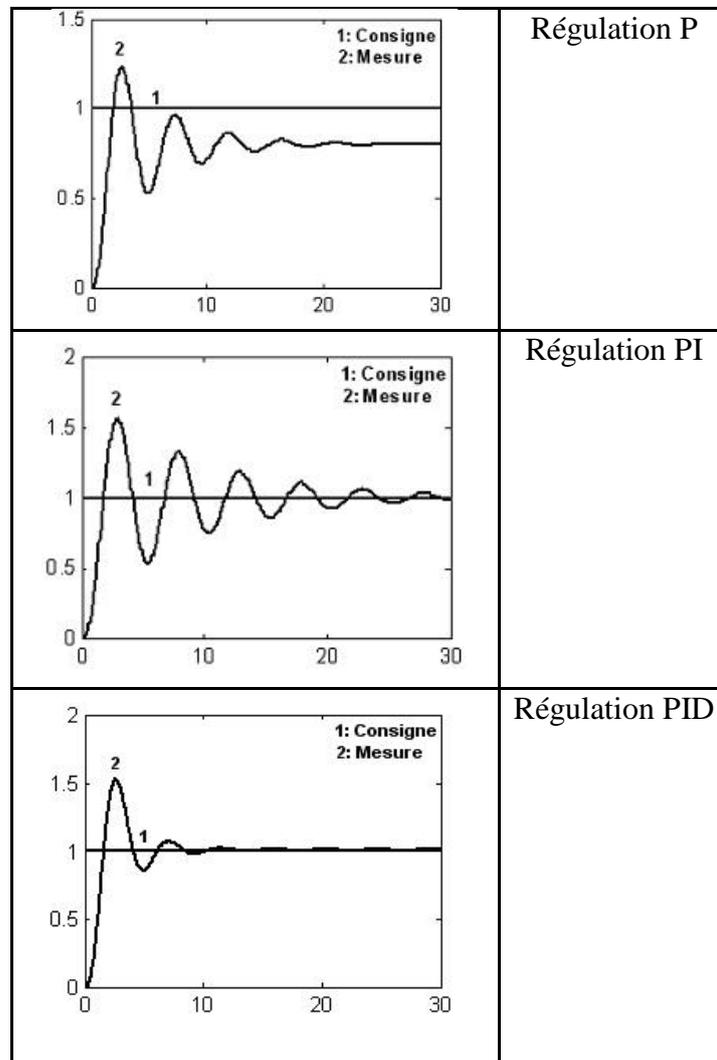


Fig.2.33. les réponses indicielles en boucle fermée

Les valeurs proposées par Ziegler & Nichols ont été testées dans de très nombreuses situations. Elles conduisent également à un temps de montée relativement court assorti d'un dépassement élevé.

2.12.5. Méthode empirique : Méthode de la réglabilité.

Les méthodes précédentes peuvent conduire à des réponses en boucle fermée très oscillante, ce qui est particulièrement gênant lors des changements de consigne.

La présente méthode dite de réglabilité constitue une version adoucie des réglages précédents. Elle est basée sur la réponse indicielle du système (en boucle ouverte : pas de régulateur).

Chapitre 02 : Calcul des contrôleurs dans le domaine fréquentiel

Le mode opératoire et l'exploitation de la réponse indicielle sont ceux de la première méthode de Ziegler & Nichols.

Les paramètres du régulateur sont déterminés en fonction du « coefficient de réglabilité » défini par le rapport :

$$r = \frac{Tu}{Ta} \tag{25.2}$$

Il s'agit du même rapport qui intervient dans la première méthode de Ziegler & Nichols basée sur la réponse indicielle. Il traduit l'importance du retard Tu par rapport à la constante de temps Ta .

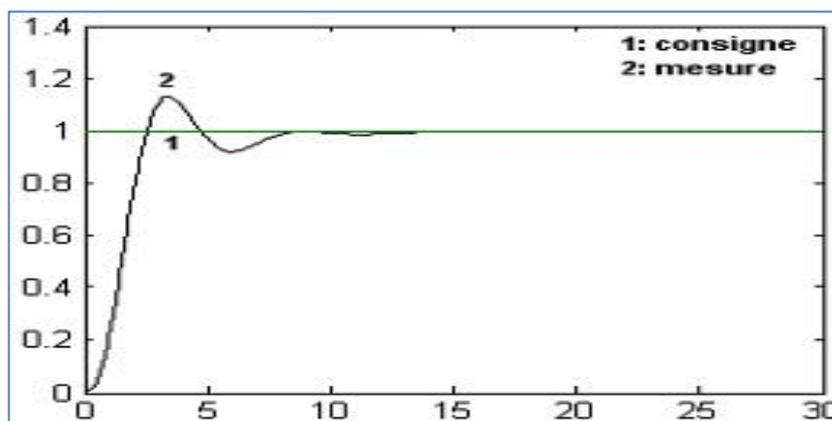
Le tableau suivant fournit des relations empiriques pour calculer les coefficients du régulateur et déterminer son type selon le rapport r :

r	K _p	T _i	T _d
0.05 à 0.1	$\frac{5}{K}$	Ta	0
0.1 à 0.2	$\frac{0,5}{Kr}$	Ta	0
0.2 à 0.5	$\frac{0,5(1 + 0.5r)}{Kr}$	$Ta(1 + 0.5r)$	$Ta\left(\frac{0.5r}{1 + 0.5r}\right)$
Au delà	PID non recommandé		

Remarque :

Dans les propositions ci-dessus K représente le gain statique du procédé.

Une illustration de cette méthode est donnée pour l'exemple du système dont la réponse indicielle donnée par la figure suivante :



et pour lequel on a : $K = 0.5$; $r = \frac{0.8}{3.7} = 0.216$. On prendra alors un régulateur PID dont les paramètres sont :

r	K _p	T _i	T _d
0.216	5.13	4	0.36

On note que la réponse est plus douce en comparaison avec les autres réglages.

2.12.6. Exemple de synthèse sur les méthodes empiriques.

La figure suivante représente le schéma simplifié d'un échangeur thermique de chaleur. (*Un échangeur de chaleur est un appareil technique dans lequel l'échange de chaleur a lieu entre deux milieux qui ont des températures différentes voir figure*)



Fig.2.34.Échangeur thermique (17)

Le but de l'installation est la régulation de la température T_c du fluide à la sortie de l'échangeur.

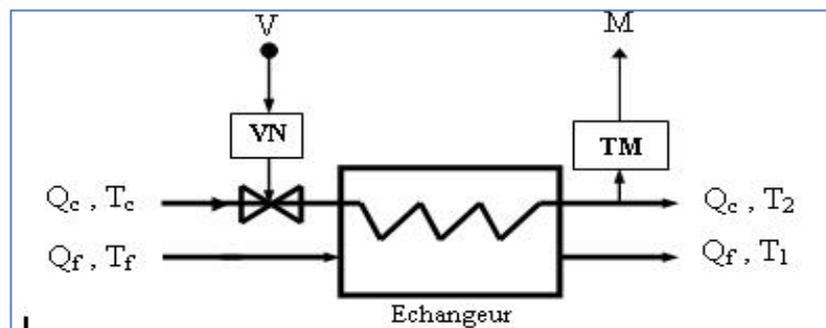


Fig.2.35.Schema synoptique de l'echangeur

On note:

- Q_c : débit du fluide chaud de température T_c , c'est la grandeur de réglage. IL est ajusté par un ensemble servomoteur-vanne en agissant sur la tension V .
- Q_f : débit du fluide froid de température T_f .
- T_2 : température à la sortie de l'échangeur, grandeur à régler.
- M : grandeur mesurée par le capteur-transmetteur de mesure TM .
- VN : servomoteur-vanne.

Le schéma fonctionnel de l'installation en boucle fermée est représenté par la figure ci-dessous où :

H_1, H_2, H_3 représentent les fonctions de transfert perturbatrices (entre les entrées secondaires et la grandeur régulée) et G représente la fonction de transfert réglante (entre l'entrée réglante et la grandeur régulée).

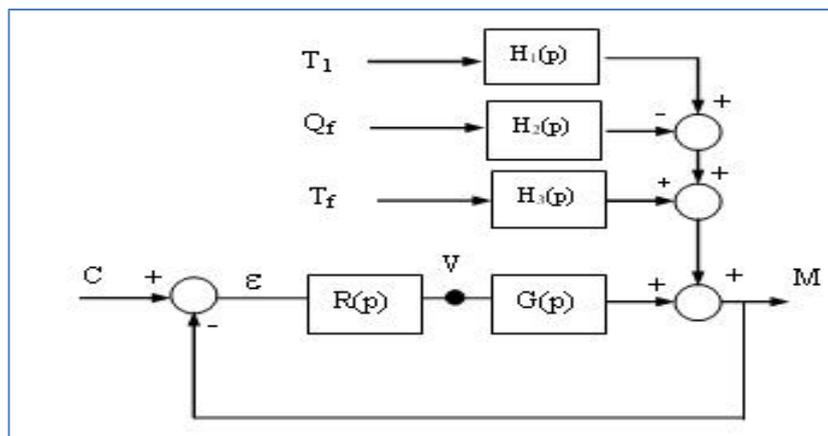


Fig.2.36 Schéma fonctionnel du système réglé

$R(p)$ est un régulateur PID :

$$R(p) = K_p \left(1 + T_d p + \frac{1}{T_i p} \right) \quad (26.2)$$

Les résultats des essais en boucle ouverte (réponse indicielle) et en boucle fermée (pompage) sont présentés ci-dessous :

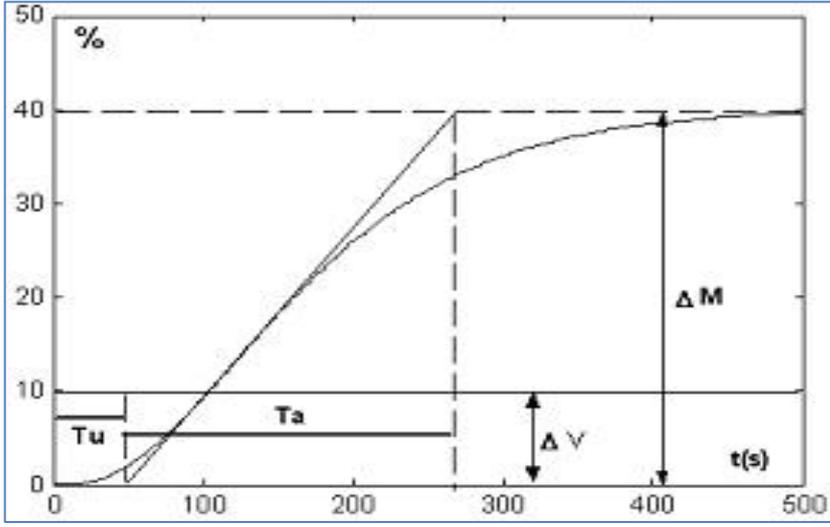
a- Les essais

- **Essai en boucle ouverte**

Le régulateur est en mode manuelle. On provoque une variation $\Delta v = 10\%$ sur l'entrée de commande. La réponse du procédé est enregistrée sur un enregistreur comme la montre la figure ci-dessous.

A partir de la réponse indicielle, on relève les paramètres suivants :

Chapitre 02 : Calcul des contrôleurs dans le domaine fréquentiel



$$K = \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{40\%}{10\%} = 4 \quad ; \quad T_u = 48s \quad ; \quad T_a = 220s \quad ; \quad \text{coefficient de réglabilité} : r = \frac{48}{220} = 0.218$$

• Essai en boucle fermée (pompage)

Le régulateur est en mode automatique et $R(p) = K_p$. La juste oscillation est obtenue avec les paramètres:

- Gain limite $K_{pc} = 2$
- $T_c = 217 s$

b- Réglage des paramètres du régulateur

Les paramètres du régulateur PID sont donnés selon les différentes méthodes par le tableau suivant :

Méthode	K_p	T_i	T_d
Ziegler&Nichlos (boucle ouverte)	1.38	96	24
Ziegler&Nichlos (pompage)	1.2	108	27
Méthode de réglabilité	0.64	244	22

c- Comparaison des performances

Le tableau suivant résume les performances obtenues en boucle fermée par analyse de la réponse indicielle à une consigne de 10% :

Méthode	Dépassement indiciel	Temps de réponse à 5%	Erreur statique
Ziegler&Nichlos (boucle ouverte)	65 %	650 s	0
Ziegler&Nichlos (pompage)	53 %	465 s	0

Méthode de réglabilité	12.5 %	422 s	0
------------------------	--------	-------	---

La réponse indicielle en boucle fermée est fournie par la figure ci-dessous avec les paramètres du régulateur donnés par la méthode de réglabilité.

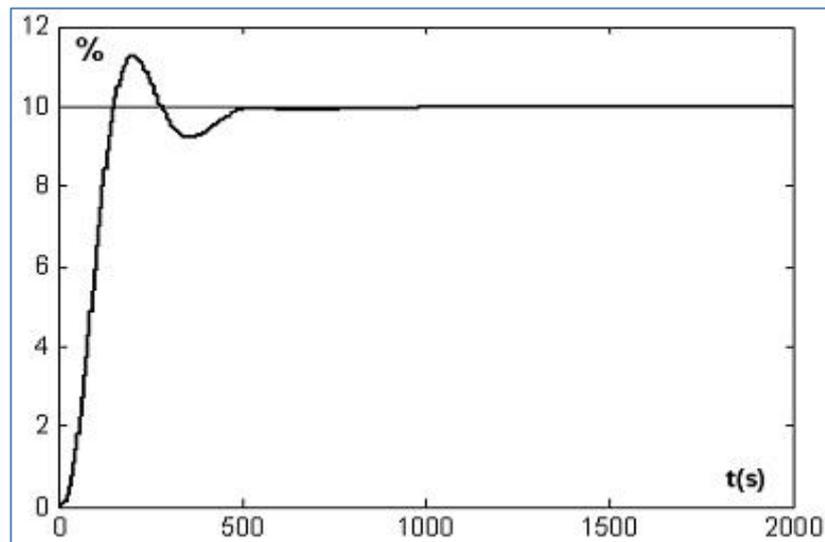


Fig.2.37. Système corrigé par la méthode de réglabilité*

Analyse des performances

Comme il est prévisible, les méthodes de Ziegler & Nichols fournissent des dépassements importants assortis d'un temps de réponse qui restent comparables au temps de réponse fournis par les autres méthodes. La méthode de réglabilité a donné les meilleures performances transitoires.

2.12.7. Méthodes fréquentielles (16)

Cette méthode est envisagée lorsque le cahier des charges contient des spécifications relatives à des considérations fréquentielles : bande passante, coefficient de qualité, marge de stabilité (marge de gain ou marge de phase)..., avec éventuellement des spécifications sur la précision et les caractéristiques de la réponse transitoire.

Cette méthode fut parmi les méthodes les plus anciennes basées sur la connaissance du lieu de transfert du procédé qui peut être obtenu soit expérimentalement soit par la connaissance de sa fonction de transfert .

L'insertion du régulateur dans la chaîne de commande permet de modéliser le lieu de transfert en boucle ouverte $T(p) = R(p)G(p)$ conférant au système en boucle fermée un fonctionnement tel qu'il est précisé dans le cahier des charges.

On rappelle brièvement les performances attendues dans le domaine fréquentiel :

Chapitre 02 : Calcul des contrôleurs dans le domaine fréquentiel

- Un gain très grand voire infini en basses fréquences de $T(p)$, ce qui assure une bonne précision en régime permanent.
 - Le lieu de transfert en boucle ouverte doit passer le plus loin possible du point critique, ce qui assure des bonnes marges de stabilité .
 - La bande passante doit être la plus large possible de manière à obtenir une bonne rapidité.
- Il n'existe pas en toute rigueur une démarche systématique à suivre pour calculer les paramètres du régulateur et souvent la synthèse est guidée par le bon sens du concepteur.

On peut utiliser indifféremment l'une des représentations graphiques pour représenter les lieux de transfert : **Bode, Black ou Nyquist**. En pratique, les deux premières représentations sont plus commodes d'utilisation que la représentation dans le plan de Nyquist.

Pour illustrer la méthode fréquentielle pour la synthèse des régulateurs, on considère les deux exemples suivants de difficulté croissante:

Exemple

Il s'agit de réaliser un asservissement de vitesse d'un moteur à courant continu et à excitation indépendante.

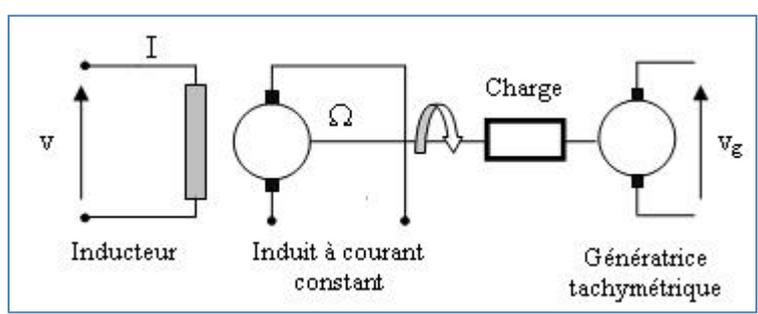


Fig.2.38.Asservissement de vitesse du MCC

Ω Désigne la vitesse de rotation du moteur mesurée par une génératrice tachymétrique délivrant une tension V_g et V représente la tension de commande de l'inducteur.

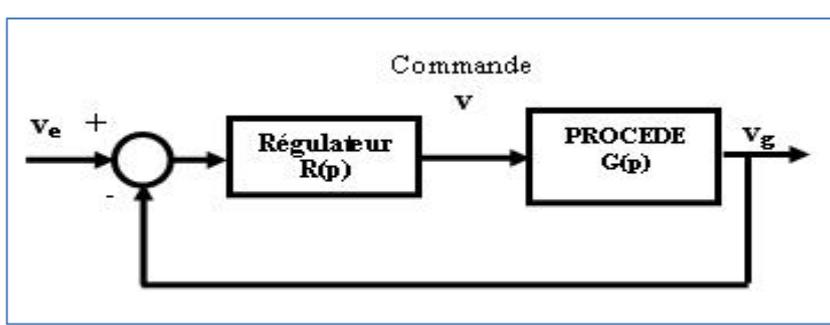


Fig.2.39.Système corrigé

L'objectif est d'asservir la vitesse Ω à une tension de référence V et de faire la synthèse d'un correcteur selon un cahier de charges.

Le système à contrôler est donné par sa fonction de transfert suivante :

$$G(p) = \frac{V_g}{V} = \frac{K_s}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}$$

$$K_s = 1 ; T_1 = 0.1 \text{ s} ; T_2 = 0.5 \text{ s}$$

Le cahier des charges est :

- ✓ Erreur indicielle nulle. (Précision statique parfaite)
- ✓ Marge de phase $MP = 45^\circ$.

La contrainte sur la précision nécessite l'introduction d'une intégration dans la chaîne en boucle ouverte. Comme le système n'en dispose pas, le régulateur doit être de type intégrateur.

Quant à la deuxième contrainte, elle peut être assurée par une action proportionnelle. Soit donc le régulateur PI suivant:

$$R(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right)$$

On commence par ajuster le gain K_p du régulateur P supposé agissant seul de manière à satisfaire la contrainte sur la marge de phase:

$$\begin{cases} |K_p G(j\omega_0)| = 1 \\ MP = 180^\circ + \arg(K_p G(j\omega_0)) \end{cases}$$

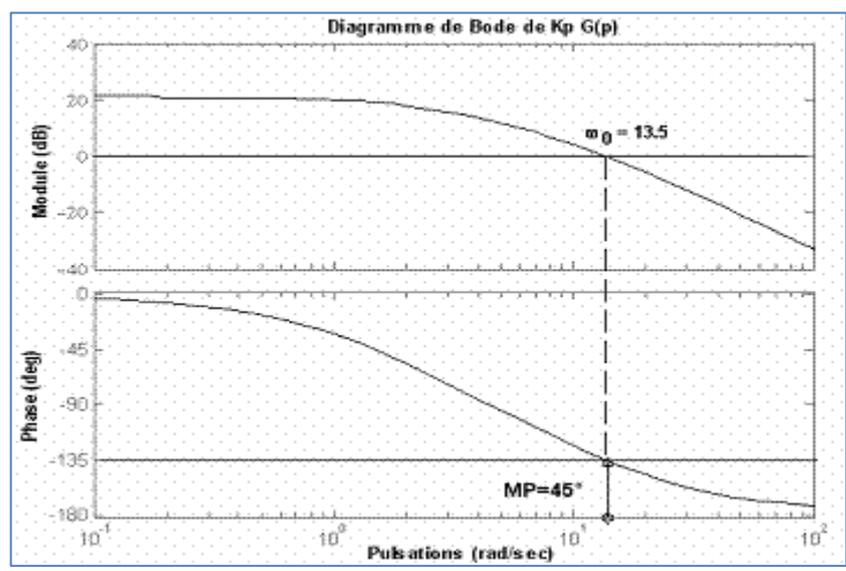
Soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{5K_p}{\sqrt{(1 + (0.5\omega_0)^2)(1 + (0.1\omega_0)^2)}} = 1 \quad (1) \\ MP = 180^\circ - \arctg(0.5\omega_0) - \arctg(0.1\omega_0) = 45^\circ \quad (2) \end{array} \right.$$

De l'équation (2) on déduit que $\omega_0 = 13.5 \text{ rad/s}$ et de l'équation (1) on calcule le gain K_p ; soit $K_p = 2.3$.

La figure suivante confirme le respect de la contrainte sur la marge de phase.

Chapitre 02 : Calcul des contrôleurs dans le domaine fréquentiel



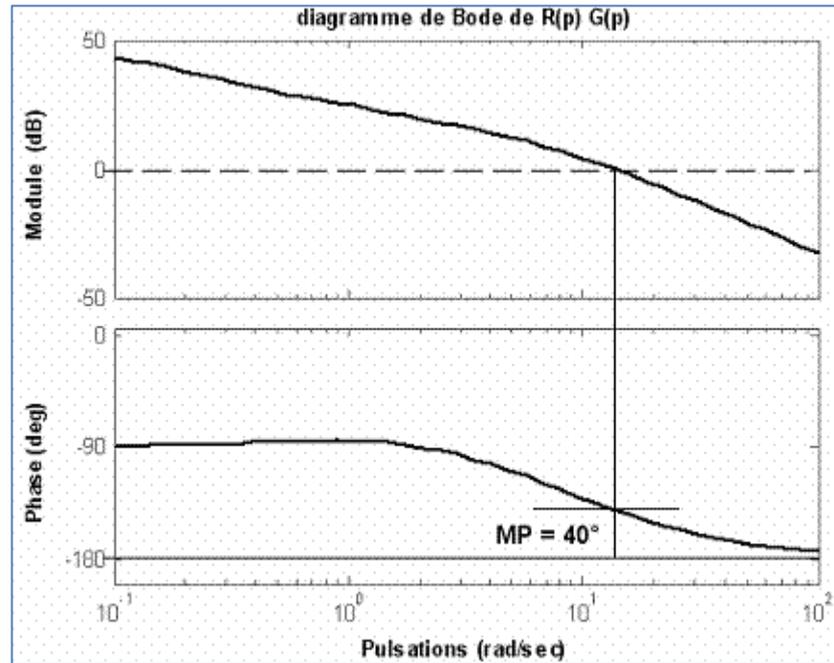
Il convient à présent de calculer la constante d'intégration T_i de manière à ce que la marge de phase reste à peu près égale à 45° . Il est possible de choisir T_i de telle sorte que la contribution en module et en phase du terme $1 + \frac{1}{T_i p}$ soit négligeable à la pulsation ω_0 . Pour ce faire, on prendra $\frac{1}{T_i} \approx 0.1 \omega_0$ (une décade à gauche de ω_0), ce qui permet de placer ce terme suffisamment à gauche de la pulsation ω_0 . D'où la valeur de $T_i = 0.74$.

Le régulateur est

$$R(p) = 23 \left(1 + \frac{1}{0.74p} \right)$$

Remarque :

Comme le montre les courbes de Bode de $R(p)G(p)$ données par la figure ci-dessous, la marge de phase est légèrement inférieure à 45° . Cela est dû au fait que la phase apportée par le terme $1 + \frac{1}{T_i p}$ à la pulsation ω_0 n'est pas nulle. A priori une marge de phase de 40° est aussi correcte, néanmoins on peut remédier à cette situation (s'il le faut !!) en plaçant ce terme davantage à gauche ou surestimer la marge de phase nécessaire (50° au lieu de 45° par exemple).



Exemple

On reprend le même système que dans l'exemple précédent avec le cahier des charges suivant:

- ✓ Erreur indicielle maximale de 0.5 lorsque la consigne est un échelon d'amplitude égal à 10;
- ✓ Marge de phase $MP = 45^\circ$.

Il est évident qu'on n'a pas besoin d'une action intégrale puisqu'on peut tolérer une erreur indicielle.

On commence par envisager si un simple régulateur P peut répondre aux deux contraintes du cahier des charges.

Soit :

$$R(p) = K_p \rightarrow R(p)G(p) = \frac{5K_p}{(1 + 0.5p)(1 + 0.1p)}$$

Avec l'erreur indicielle en régime statique à un échelon d'amplitude égale à 10 est:

$$\varepsilon = \frac{10}{1 + 5K_p}$$

Si on souhaite avoir $\varepsilon < 0.5$, il faut prendre $K_p > 3.8$

Pour la valeur minimale de $K_p = 3.8$, on vérifie si la contrainte sur la marge de phase est satisfaite :

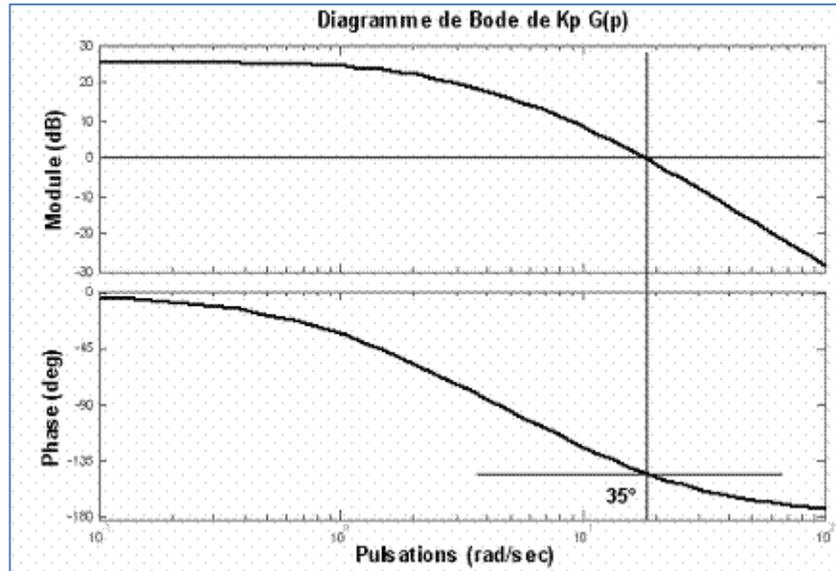
$$\begin{cases} |K_p G(j\omega_0)| = 1 \\ MP = 180^\circ + \arg(K_p G(j\omega_0)) \end{cases}$$

Chapitre 02 : Calcul des contrôleurs dans le domaine fréquentiel

Soit:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{5K_p}{\sqrt{(1 + (0.5\omega_0)^2)(1 + (0.1\omega_0)^2)}} &= 1 & (1) \\ MP = 180^\circ - \arctg(0.5\omega_0) - \arctg(0.1\omega_0) &= 45^\circ & (2) \end{aligned} \right.$$

De l'équation (1), on déduit que $\omega_0 = 18.2 \text{ rd/s}$ et de l'équation (2), on déduit que la marge de phase est de 35° , comme il est montré sur la figure suivante.



Par conséquent, la deuxième contrainte n'est pas satisfaite. Il est inutile de chercher à diminuer la valeur de K_p pour augmenter la marge de phase à 45° car cela conduirait à une erreur statique supérieure à 0.5 (Dilemme stabilité-précision). Une solution consiste à envisager un régulateur de type PD susceptible d'apporter une phase positive.

Soit la fonction de transfert du régulateur PD:

$$R(p) = K_p (1 + T_d p),.$$

La fonction de transfert en boucle ouverte est :

$$R(p)G(p) = \frac{5K_p (1 + T_d p)}{(1 + 0.5p)(1 + 0.1p)}$$

On commence par déterminer le gain K_p de l'action P agissant seule car l'action D n'intervient pas en régime statique. D'après le calcul précédent, on retient la valeur limite $K_p = 3.8$ pour laquelle l'erreur statique est de 0.5 et la marge de phase est de 35° . Il faut à présent ajuster le paramètre T_d du terme $(1 + T_d p)$ de manière à augmenter la marge de phase à 45° . On choisit T_d tel que :

$$\text{Arg}(1 + T_d j\omega_0) = \text{Arctg}(T_d \omega_0) = 10^\circ \text{ à la pulsation } \omega_0 = 18.2 \text{ rd/s}.$$

Chapitre 02 : Calcul des contrôleurs dans le domaine fréquentiel

D'où la valeur de $T_d = 0.0097$

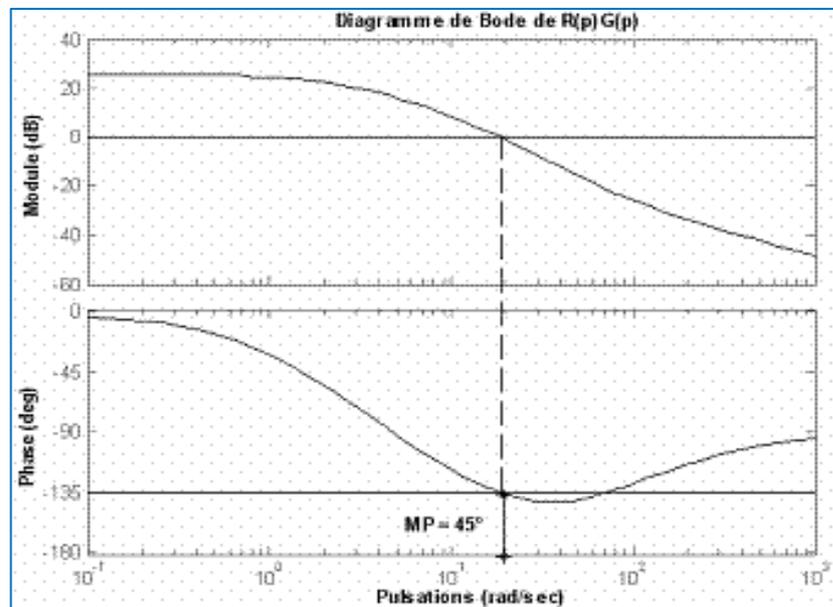
Le régulateur résultant est $R(p) = 3.8 (1 + 0.0097p)$.

Remarque

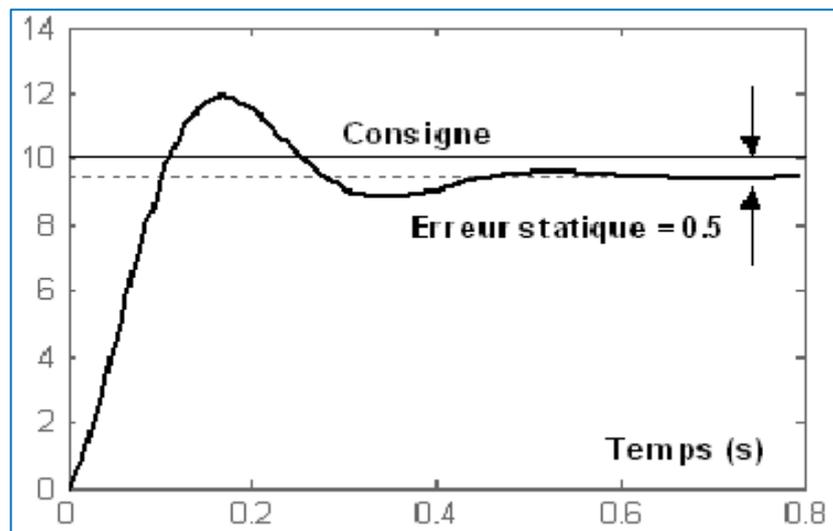
Ce calcul suppose que la courbe de gain n'est pas affectée au point ω_0 par le terme $(1 + 0.0097p)$. En fait c'est pratiquement le cas puisqu'on a :

$$|1 + 0.0097j\omega_0| = \sqrt{1 + (0.0097\omega_0)^2} = 1$$

La courbe suivante représente le lieu de transfert en boucle ouverte $R(p)G(p)$ qui confirme le respect de la contrainte sur la marge de phase.



La réponse indicielle en boucle fermée est donnée par la figure suivante :



2.12.8. Synthèse par compensation des poles (18)

Une méthode de synthèse fréquemment utilisée consiste à compenser les pôles les plus lents du processus par les zéros du régulateur puis à rechercher le gain de manière à avoir une réponse optimale du point de vue de la consigne. Ainsi, dans le cas d'un système d'ordre 3 tel que $\tau_1 \geq \tau_2 \geq \tau_3$

$$G(s)_{processus} = K_0 \frac{1}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)(1+s\tau_3)} \quad (27.2)$$

On compensera le produit $(1 + s\tau_1) (1 + s\tau_2) = 1 + s (\tau_1 + \tau_2) + s^2 \tau_1\tau_2$

par le numérateur du régulateur PID :

$$G_c(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d \right) = \frac{K_P(1 + sT_i + s^2T_iT_d)}{sT_i} \quad (28.2)$$

La compensation des deux constantes de temps les plus lentes τ_1 et τ_2 conduit à choisir T_i et T_d tel que:

$$1 + s (\tau_1 + \tau_2) + s^2 \tau_1\tau_2 = 1 + sT_i + s^2T_iT_d$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} T_i = \tau_1 + \tau_2 \\ T_d = \frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} \end{cases} \quad (29.2)$$

Ainsi, dans le cas d'un système d'ordre 3, la compensation de deux pôles par les zéros du régulateur PID conduit à un système global d'ordre 2 avec integration:

$$G_{bo}(s) = K_{bo} \frac{1}{sT_i(1 + s\tau_3)} \quad (30.2)$$

Avec:

$$K_{bo} \equiv K_P K_0$$

On obtient alors en boucle fermée un système d'ordre 2 :

$$G_{bf}(s) = \frac{G_{bo}(s)}{1 + G_{bo}(s)} = \frac{1}{1 + s \frac{T_i}{K_{bo}} + s^2 \frac{T_i\tau_3}{K_{bo}}} \quad (31.2)$$

dont on peut fixer l'amortissement ζ souhaité en identifiant le dénominateur de $G_{bf}(s)$ avec la forme canonique

$$1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{1}{\omega_n^2} s^2$$

On montre alors aisément que le gain K_P dépend du facteur d'amortissement ζ souhaité, des trois constantes de temps du processus, du gain statique K_0 et qu'il vaut:

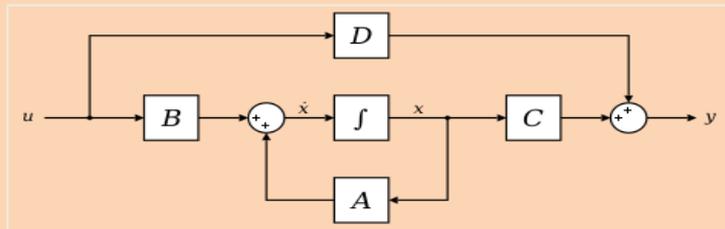
$$K_p = \frac{1}{K_0} \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_3} \frac{1}{4\zeta^2}$$

En choisissant $\zeta = 0.6$, le dépassement de la réponse indicielle sera d'environ 10%. Tenant compte du fait que les trois constantes de temps choisies sont égales à 1 seconde, on obtient :

$$K_p = \frac{1}{K_0} \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_3} \frac{1}{4\zeta^2} = 0.695 [/]$$

$$T_i = \tau_1 + \tau_2 = 2.0 [sec] ; T_d = \frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} = 0.5 [sec]$$

Partie 2



Chapitre 3

1. Introduction
2. Concepts (état, variables d'état, ...)
3. Représentation d'état des systèmes linéaires continus.
4. Représentation d'état des systèmes discrets.
5. Formes canoniques.
6. Représentation d'état des systèmes non linéaires.
7. Linéarisation

3.1. Introduction (19)

Tout système linéaire peut être représenté par plusieurs méthodes (voir figure)

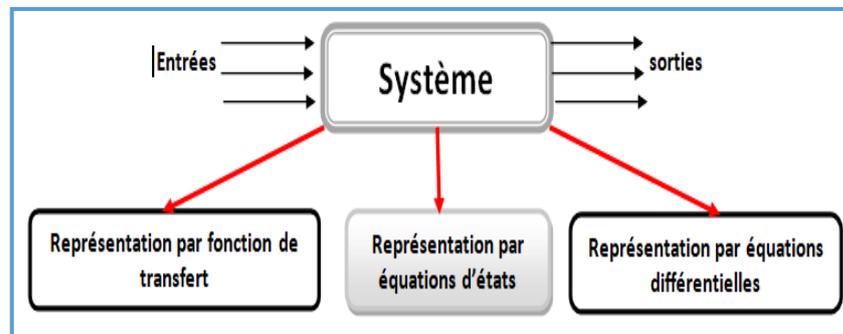


Fig.3.1. Différentes méthodes de la représentation des systèmes

Représentation **internes (ou d'état)** Le principe général de la représentation d'état consiste à décrire un système en considérant sa dynamique interne et pas seulement une relation entre son entrée et sa sortie (comme le fait la fonction de transfert). Ainsi, il convient de redonner de l'importance à des grandeurs qui ne sont ni entrée, ni sortie, tout en prenant en compte l'ensemble des phénomènes dynamiques et statiques qui confère au système son comportement. Une telle préoccupation conduit aux définitions suivantes

D'autre terme :

1) En automatique, une représentation d'état permet de modéliser un système dynamique en utilisant des variables d'état (**variables internes**). Cette représentation, qui peut être linéaire ou non, continue ou discrète, permet de déterminer l'état du système à n'importe quel instant futur si l'on connaît l'état à l'instant initial et le comportement des variables exogènes qui influent sur le système. La représentation d'état du système permet de connaître son comportement "interne" et pas seulement son comportement "externe" comme c'est le cas avec sa fonction de transfert

2) Jusqu'à présent, on a modélisé le comportement des systèmes à l'aide des fonctions de transfert, en utilisant la transformée de Laplace. Principalement, le désavantage de cette méthode est qu'elle n'est valide que pour des systèmes linéaires invariants. Un avantage majeur, par contre, est que ces fonctions de transfert donnent rapidement de l'information sur la stabilité et la réponse transitoire. Avec le développement de systèmes plus complexes, les approximations de systèmes linéaires ne sont plus valides. Il faut une méthode plus robuste pour faire l'analyse. On doit aussi avoir une méthode qui peut facilement analyser plusieurs entrées et plusieurs sorties.

3.1.1. Définitions (19)

État : l'état à l'instant t_0 d'un système d'ordre n représente l'ensemble de n informations que l'on doit posséder sur le système à cet instant pour pouvoir déterminer son évolution ultérieure ($t > t_0$), à partir de la seule connaissance de l'entrée ultérieure.

Variables d'état : Les variables d'état sont des grandeurs, qui le plus souvent ont une signification physique ; l'ensemble de ces informations constitue les variables d'état du système à l'instant t_0 :

$$x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0).$$

Vecteur d'état : les variables d'état sont toujours rassemblées dans un vecteur x nommé vecteur d'état, ainsi à $t = t_0$, on aura $x(t_0) = [x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)]^T$, on peut dire que les variables d'état représentent l'évolution des conditions initiales, ou encore qu'elles résument tous le passé du système, les variables d'état sont la mémoire du passé.

Espace d'état : Il s'agit tout simplement de l'espace vectoriel dans lequel le vecteur d'état x est susceptible d'évoluer, à chaque instant le vecteur x étant associé à un point de cet espace. Cet espace est donc .

Dans la plupart des cas, l'évolution en fonction du temps du système peut être décrite par les deux équations (équation d'état et équation de sortie) suivantes :

Dans le cas où le système considéré est linéaire, la représentation d'état se met sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases} \quad (1.3)$$

Si le système est supposé, en outre invariant (stationnaire), il vient :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

Où :

<p>x : Vecteur d'état ($n, 1$)</p> <p>u : Vecteur d'entrée ou de commande ($r, 1$)</p> <p>y : Vecteur de sortie, de mesure ou 'observation' ($m, 1$)</p>	<p>A : la matrice d'état ou dynamique (n, n)</p> <p>B : la matrice de commande (n, r)</p> <p>C : la matrice d'observation (m, n)</p> <p>D : la matrice de liaison directe ou transmission (m, r)</p>
--	--

Exemple: (20)

Considérons un moteur à courant continu (MCC) commandé par la tension (u) aux bornes de l'inducteur (stator) et supposons qu'il fonctionne en régime linéaire (courant de l'induit constant). Trouver une représentation d'état pour le MCC. La sortie étant la vitesse de rotation (y)

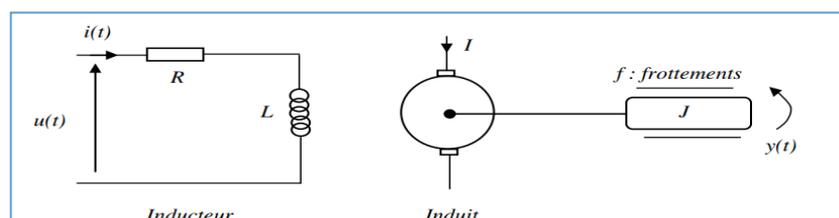


Fig.3.2. Schéma de principe d'un MCC.

Le moteur admet trois équations :

Equation électrique :
$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

Equation mécanique :
$$T(t) = fy(t) + J \frac{dy(t)}{dt}$$

Equation de couplage :
$$T(t) = Ki(t)$$

Où : $i(t)$ est le courant inducteur, $T(t)$ est le couple, f est le coefficient de frottement visqueux et K est la constante de couple.

Par le jeu de substitution, on peut éliminer le couple et le courant et on obtient l'équation différentielle d'ordre 2 régissant le fonctionnement du moteur.

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_0u(t)$$

Avec :

$$a_1 = (Lf + JR)/L,$$

$$a_0 = Rf/L,$$

$$b_0 = K/.$$

On pose :

$$x_1(t) = y(t)$$

$$\begin{aligned} x_2(t) = \dot{y}(t) = \dot{x}_1(t) &\Rightarrow \dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = b_0u(t) - a_1\dot{y}(t) - a_0y(t) \\ &= b_0u(t) - a_1x_2(t) - a_0x_1(t) \end{aligned}$$

On a alors :

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = b_0u(t) - a_1x_2(t) - a_0x_1(t)$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Représentation internes (ou d'état) La représentation d'état étant particulièrement adaptés aux systèmes multivariables, elle est obtenue à partir des autres représentations (particulièrement à partir de la matrice de transfert). Un système linéaire multivariable et invariant possédant m entrées et p sorties, peut être représenté par :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

3.2. Représentation analogique des modèles d'état (21)

Soit la représentation d'état suivante :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Le schéma analogique de cette représentation est le suivant :

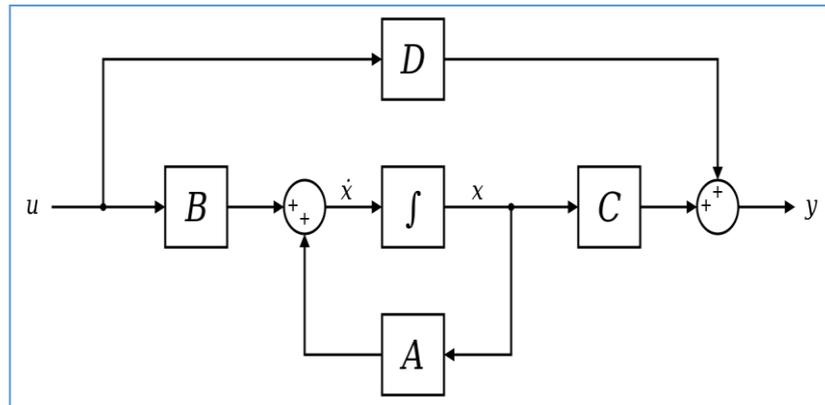


Fig.3.3. Schéma analogique d'un modèle d'état

3.3. Représentation d'état des systèmes à temps discret (22)

Les systèmes à temps discret comme ceux à temps continus peuvent être représentés en utilisant un certain nombre de variables appelées variables d'états. Ces variables peuvent avoir ou non une signification physique. En temps continu la représentation d'état est une combinaison correspondance entre ces variables d'état et leurs dérivées, en temps discret on ne trouve plus de dérivée mais des équations de récurrence qui déduisent les valeurs futures des variables d'état partants des valeurs actuelles entre autres.

La forme générale de la représentation d'état d'un système discret est donnée ci-dessous :

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k+1) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

La matrice A est appelée matrice de commande.

La première équation dite de commande du système ci-dessous est formée de n équations de la forme :

$$x_i(k+1) = a_{i1}x_1(k) + a_{i2}x_2(k) + \dots + a_{in}x_n(k) + b_{i1}e_1(k) + b_{i2}e_2(k) + \dots + b_{im}e_m(k) \quad (2.3)$$

La deuxième équation dite de sortie est formée de p équations de la forme :

$$y_j(k+1) = c_{j1}x_1(k) + c_{j2}x_2(k) + \dots + c_{jn}x_n(k) + d_{j1}e_1(k) + d_{j2}e_2(k) + \dots + d_{jm}e_m(k) \quad (3.3)$$

On déduit donc que les matrices A, B, C et D ont les dimensions suivantes :

$$A (n \times n) ; B (n \times r) ; C (m \times n) \text{ et } D (m \times r)$$

Remarques

- Si les matrices A, B, C et D sont à coefficients constants on parlera de systèmes invariants.
- La matrice D, appelée matrice d'action directe, est en général nulle.
- n représente le nombre d'états, r le nombre de commandes et m le nombre de sorties.
- Si et on parlera d'un système multi entrées multi sorties ou en anglais " multi input multi output" ou système MIMO.

3.4. Avantages de la représentation d'état

- ➡ C'est une représentation qui s'adapte bien aux systèmes multivariables, contrairement, à la représentation classique par fonction de transfert qui ne s'applique que dans le cas monovariable.
- ➡ C'est une représentation interne permettant d'accéder aux grandeurs internes (variables d'état) du système, on est capable de suivre, à tout instant, l'évolution de chacune des variables internes, alors que la représentation par fonction de transfert n'aurait fourni que la sortie.
- ➡ Dans la représentation d'état les conditions initiales apparaissent explicitement, comme dans toute équation différentielle, au contraire, la représentation externe par fonction de transfert impose que les conditions initiales soient nulles (ceci n'est pas toujours vérifié en réalité).

3.5. Conversion de fonction de transfert a espace d'état (23)

Pour simplifier les calculs, nous ne considérerons que le cas mono-entrée, mono-sortie. Considérons donc la fonction de transfert d'un système mono-entrée, mono-sortie

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \tag{4.3}$$

Pour ce système, nous introduisons une variable auxiliaire (état partiel) $V(p)$ tel que $H(p)$ se décompose de la façon suivante :

$$\frac{V(s)}{U(s)} \times \frac{Y(s)}{V(s)} = \left(\frac{1}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \right) \times (b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0) \tag{5.3}$$

$$\frac{Y(s)}{V(s)} = b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0 \tag{6.3}$$

$$\frac{V(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \tag{7.3}$$

On tire que ;

$$y(t) = b_n v^n(t) + \dots + b_1 v'(t) + b_0 v(t) \tag{8.3}$$

De même, on a

$$u(t) = v^n(t) + a_{n-1} v^{n-1} + \dots + a_0 v(t) \tag{9.3}$$

Soit,

$$v^n(t) = -a_{n-1} v^{n-1} - \dots - a_0 v(t) + u(t) \tag{10.3}$$

En posant :

$$\begin{cases} x_1 = v \\ x_2 = v' \\ \vdots \\ x_n = v^{n-1} \end{cases} \quad (11.3)$$

On obtient :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = v^n = -a_{n-1}x_n - \dots - a_0x_1 + u \end{cases} \quad (12.3)$$

En outre, de la sortie $y(t)$ prend la forme ;

$$y(t) = (b_0 - b_n a_0)x_1 + (b_1 - b_n a_1)x_2 + \dots + (b_{n-1} - b_n a_{n-1})x_n + b_n u \quad (13.3)$$

Soit, sous forme vectorielle :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \dots & \mathbf{0} \\ & & & \ddots & \\ & & & & -a_{n-1} \\ -a_0 & -a_1 & \dots & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} r \quad (14.3)$$

$$y = [(b_0 - b_n a_0) \quad (b_1 - b_n a_1) \quad \dots \quad (b_{n-1} - b_n a_{n-1})] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_n r \quad (15.3)$$

On retombe ainsi sur la forme canonique de commandabilité. Il existe d'autres formes canoniques

Convertir la fonction de transfert suivante en espace d'état :

Exemple (24)

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 6s + 4}$$

On a :

$$(s^3 + 2s^2 + 6s + 4)C(s) = R(s)$$

En forme différentielle, si les conditions initiales sont nulles :

$$\ddot{c} + 2\dot{c} + 6c + 4c = r$$

Les variables d'état sont :

$$\begin{cases} x_1 = c \\ x_2 = c' \\ x_3 = c'' \end{cases}$$

Les équations d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -4x_1 - 6x_2 - 2x_3 + r \\ y = c = x_1 \end{cases}$$

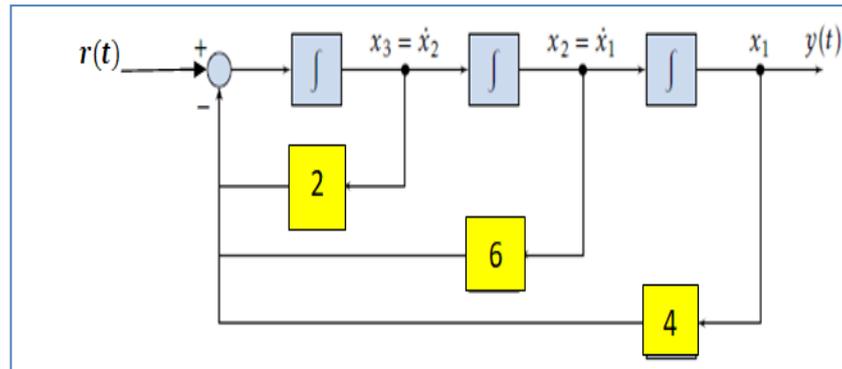
Chapitre 03 : Représentation d'état des systèmes linéaire

En forme de matrices :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & -6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

On peut représenter ce système par un schéma bloc. On trace en premier les trois blocs d'intégration, puis on relie le tout avec les gains appropriés.



Exercice

Soit le système décrit par sa fonction de transfert telle que :

$$G(p) = \frac{10(p+20)}{p(p+3)(p+10)}$$

Déterminer la représentation d'état de ce système, une représentation d'état à mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

Solution:

$$G(p) = \frac{Y(p)}{H(p)} \times \frac{H(p)}{U(p)} = (p+20) \times \frac{10}{p(p+3)(p+10)}$$

1)

$$\frac{H(p)}{U(p)} = \frac{10}{p(p+3)(p+10)} = \frac{10}{p^3 + 13p^2 + 30p} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \ddot{h} + 13\dot{h} + 30h = 10u$$

On pose :

$$\begin{aligned} \dot{h} &= x_2 \\ \ddot{h} &= \dot{x}_2 = x_3 \\ \ddot{x}_3 &= -30x_2 - 13x_3 + 10u \end{aligned}$$

Donc ;

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -13 & -30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} u$$

$$h = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

2)

$$\frac{Y(p)}{H(p)} = p + 20 \Rightarrow Y(p) = pH(p) + 20H(p) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y = \dot{h} + 20h = 20x_1 + x_2$$

$$Y = [20 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

3.6. Conversion de fonction de transfert a espace d'état

Considérons la représentation d'état

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Avec

$$x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \text{ et } y \in \mathbb{R}^r.$$

En appliquant la transformée de Laplace il vient que

$$pX(p) - x(0^+) = AX(p) + BU(p) \quad (16.3)$$

$$\Rightarrow X(p) = (pI_n - A)^{-1}x(0) + (pI_n - A)^{-1}BU(p) \quad (17.3)$$

$$Y(p) = CX(p) + DU(p) \quad (18.3)$$

$$\Rightarrow Y(p) = C(pI_n - A)^{-1}x(0) + [C(pI_n - A)^{-1}B + D]U(p) \quad (19.3)$$

Pour des conditions initiales nulles (hypothèse de base pour le calcul des fonctions de transfert), nous obtenons

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = C(pI_n - A)^{-1}B + D \quad (20.3)$$

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = C \left(\frac{\text{adj}(pI_n - A)}{\det(pI_n - A)} \right) B + D \quad (21.3)$$

Exemple

Soit un système donne par sa représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Déterminer la fonction de transfert :

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-3 & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} = \frac{\begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s-3 \end{bmatrix}}{(s+2)(s-3)}$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{s-2}{(s+2)(s-3)}$$

En utilisant la fonction préétablie de Matlab (ss2tf), on obtient :

```

Command Window
New to MATLAB? See resources for Getting Started.
>> A=[3 1;0 -2];
>> B=[0;1];
>> C=[1 1];
>> D=0;
>> [Num,Den]=ss2tf(A,B,C,D)

Num =
    0    1   -2

Den =
    1   -1   -6

>> G=tf(Num,Den)

G =
    s - 2
-----
s^2 - s - 6

Continuous-time transfer function.

```

Fig.3.4. Passage de la R.E vers FT par matlab

3.7. Différentes représentations d'état (modèles)

Plusieurs techniques peuvent être appliquées pour donner une représentation d'état d'un système à partir de sa fonction de transfert. On présente ici les représentations d'état sous formes canoniques.

Soit le système défini comme suit :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (22.3)$$

A. Forme canonique commandable

La représentation suivante est appelée forme canonique commandable

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \vdots & & \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (23.3)$$

$$y = [(b_0 - b_n a_0) \quad (b_1 - b_n a_1) \quad \dots \quad (b_{n-1} - b_n a_{n-1})] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_n u \quad (24.3)$$

Cette forme de représentation est appelée forme compagne car la matrice de commande du système contient, en une seule ligne, l'ensemble des coefficients du dénominateur de la fonction de transfert.

Elle est dite commandable car, bien que seule la variable x_n soit directement affectée par le signal d'entrée, toutes les variables d'état s'en trouvent influencées par intégrations successives. Si un système est complètement commandable, alors on peut le mettre sous forme compagne commandable (25)

On note que dans cas général $b_n = 0$; l'équation de sortie se simplifie et devient sous la forme suivante :

$$y = [(b_0) (b_1) \dots (b_{n-1})] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_n u \quad (25.3)$$

Si la forme canonique de commandalite existe ; elle peut s'obtenir a partir de sa fonction de transfert.

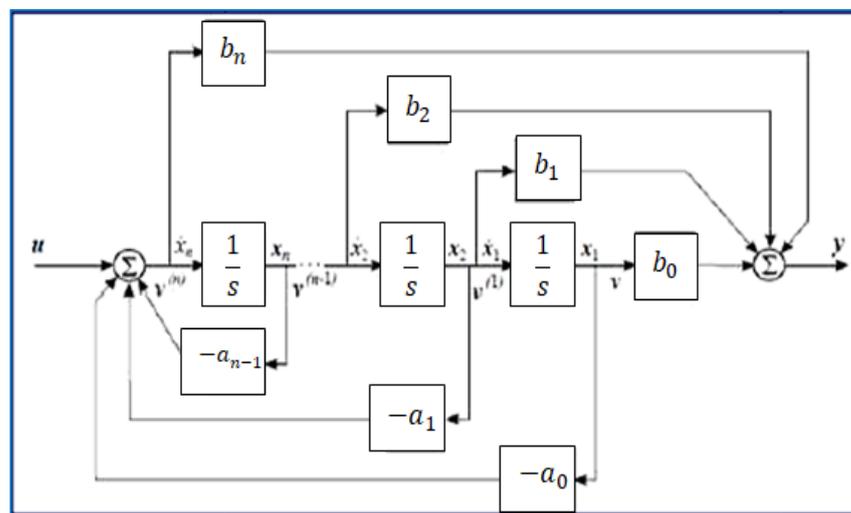


Fig.3.5. Schéma de simulation de la forme commandable

Exemple

Soit un système d'ordre 3 donne par la fonction de transfert $G(s)$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0s^3 + b_1s^2 + b_2s + b_3}{s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3}$$

$G(s)$ peut se mettre sous la forme suivante ;

$$G(s) = \frac{Y(s)H(s)}{H(s)U(s)} = (b_0s^3 + b_1s^2 + b_2s + b_3) \times \left(\frac{1}{s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3} \right)$$

De ces deux fonctions de transfert on tire les deux équations

Différentielles ou la variable h est un intermédiaire de calcul ($b_0 = 0$) :

$$\frac{d^3h}{dt^3} = -a_1 \frac{d^2h}{dt^2} - a_2 \frac{dh}{dt} - a_3h + u$$

$$y = b_1 \frac{d^2h}{dt^2} + b_2 \frac{dh}{dt} - b_3h$$

En choisissant comme composantes du vecteur d'état :

$$\begin{aligned}
 x_1 &= h \\
 \dot{x}_2 &= \frac{dh}{dt} = \frac{dx_1}{dt} = (\dot{x}_1) \\
 \dot{x}_3 &= \frac{d^2h}{dt^2} = \frac{dx_2}{dt} = (\dot{x}_2) \\
 \frac{dx_3}{dt} &= -a_1x_3 - a_2x_2 - a_3x_1 + u = (\dot{x}_3) \\
 y &= b_1x_3 + b_2x_2 + b_3x_1
 \end{aligned}$$

Les dernières équations se résument sous la forme matricielle pour donner une représentation d'état :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\
 y &= [b_3 \quad b_2 \quad b_1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Chaque variable d'état x_i est la dérivée de la variable précédente . On parle de **variable de phase** En agissant sur u , on fait évoluer x_n , par effet de cascade on agit sur les autres états qui peuvent être commandés et modifiés

B. Forme canonique observable

Soit le système défini comme suit :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

La représentation suivante est appelée forme canonique observable

$$\left\{ \begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \dots 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 \dots 0 & -a_1 \\ & 0 & 1 & \dots 0 \\ & & & \vdots \\ & & & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 - a_0 b_n \\ b_1 - a_1 b_n \\ \vdots \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_n \end{bmatrix} u \\
 y &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_n u
 \end{aligned} \right. \tag{26.3}$$

Cette forme de représentation est appelée forme compagne observable car, le fait que la matrice de commande du système contient en une seule colonne l'ensemble des coefficients du dénominateur de la fonction de transfert, on remarque que la sortie de ce système est égale à x_n et qui est par intégrations successives influencée par toutes les variables d'état. Si un système est complètement observable, alors on peut le mettre sous forme compagne observable. (25)

On note que dans le cas général $b_0 = 0$, la représentation se simplifie et devient sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \cdots 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 \cdots 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots 0 & \vdots \\ & & \vdots & \\ & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 \cdots 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} u \\ \\ y = [0 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \end{cases} \quad (27.3)$$

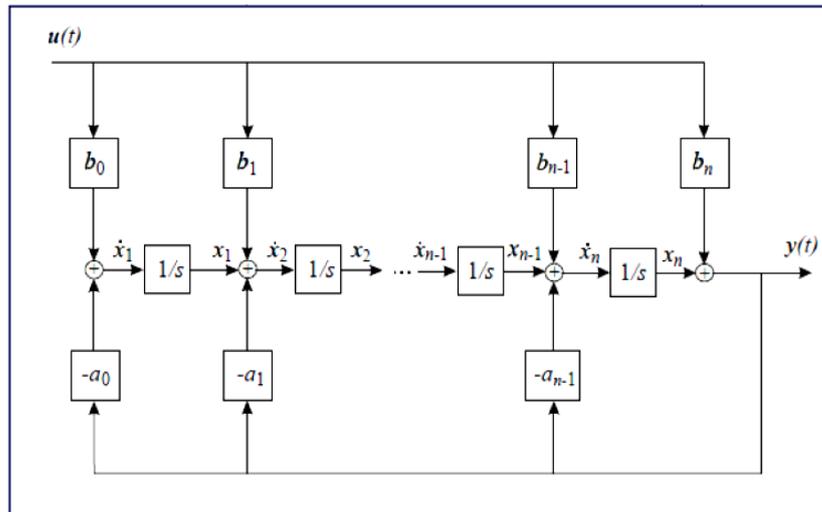


Fig.3.6. Forme compagne observable

C. Forme canonique diagonale (modale)

Cette forme est appliquée au système où le dénominateur est décomposable pour obtenir des fonctions de transfert en fraction simple comme suit :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} = \mathbf{b_0} + \frac{c_1}{s+p_1} + \frac{c_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{c_n}{s+p_n} \quad (28.3)$$

D'où la forme diagonale est déduite à partir des **pôles** de chaque fraction du **1er ordre**

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [C_1 \ C_2 \ C_3 \ \dots \ C_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \end{cases} \quad (29.3)$$

Chaque état est indépendant des autres, d'où le schéma bloc suivant

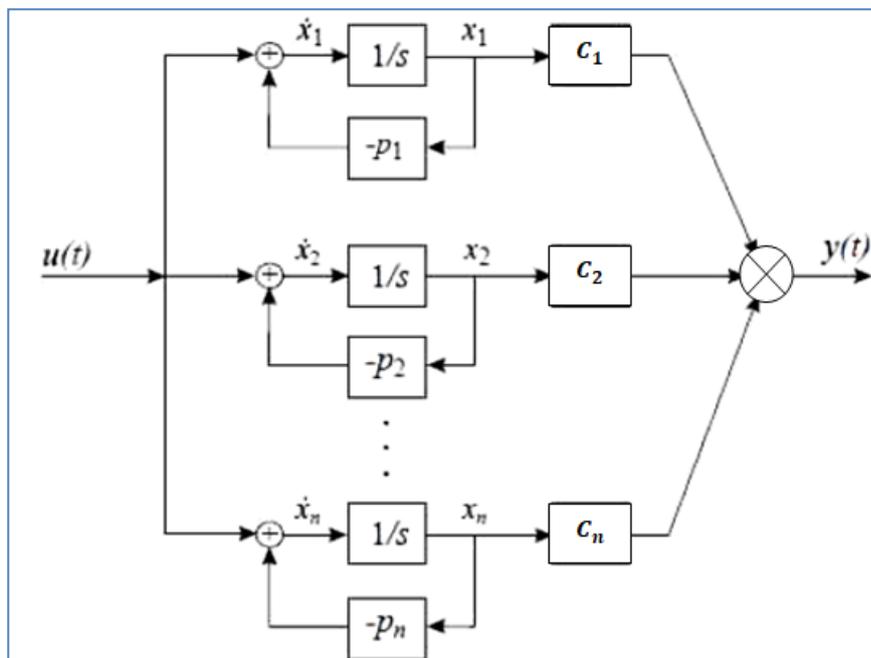


Fig.3.7. La représentation de la forme modale

D. Forme canonique de Jordan

Dans le cas où les pôles du dénominateur la forme canonique modale sera de la forme de Jordan. Si on considère que seul le pole simples la fonction de transfert du système est comme suit

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = b_0 \frac{s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{(s-p_1)^i (s+p_2) \dots s+p_n} \quad (30.3)$$

$$= b_0 + \frac{\alpha_i}{(s-p_1)^i} + \frac{\alpha_{i-1}}{(s-p_1)^{i-1}} + \dots + \frac{\alpha_1}{(s-p_1)^1} + \frac{C_1}{s+p_2} \dots + \frac{C_n}{s+p_n} \quad (31.3)$$

La représentation d'état pour **i = 3** sous la forme canonique de Jordan est donnée par :

exemple

Bloc de Jordan

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -p_1 & 1 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -p_4 & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & -p_i & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

3.8. Représentation d'état des systèmes non linéaires. (26)

1) **Modèle d'état d'un système non-linéaire stationnaire**

Equation d'état	Equation de sortie
$\dot{x}_1 = f_1(x_1(t); x_2(t); \dots x_n(t), u_1(t) \dots u_m(t))$	$y_1 = g_1(x_1(t); x_2(t); \dots x_n(t), u_1(t) \dots u_m(t))$
\vdots	\vdots
$\dot{x}_n = f_n(x_1(t); x_2(t); \dots x_n(t), u_1(t) \dots u_m(t))$	$y_p = g_p(x_1(t); x_2(t); \dots x_n(t), u_1(t) \dots u_m(t))$

2) **Forme matricielle**

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t); u(t)) \\ y = g(x(t); u(t)) \end{cases} \text{ Avec } x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, y(t) \in \mathbb{R}^p$$

f et g : sont des champs de fonctions non – linéaires

3) **Point nominal ou point de fonctionnement :**

Soit \bar{u} , une entrée nominale et soit \bar{x} l'état correspondant c.-à-d. : $\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}(t); \bar{u}(t))$.
 $(\bar{x}(t); \bar{u}(t))$ défini une trajectoire dans l'espace d'état qui peut se réduire à un point de fonctionnement $(\bar{x}; \bar{u})$; soit \bar{y} la sortie correspondante : $\bar{y} = g(\bar{x}(t); \bar{u}(t))$

4) **Perturbations :**

- Soient des perturbations faibles $u(t)$ affectant

$$\bar{u} \Rightarrow u(t) = \bar{u}(t) + e_u(t) \tag{32.3}$$

- Ces perturbations affectent le vecteur d'état

$$x(t) = \bar{x}(t) + e_x(t) \Rightarrow \dot{x}(t) = \dot{\bar{x}}(t) + \dot{e}_x(t) \tag{33.3}$$

$$\dot{x}(t) = \dot{\bar{x}}(t) + \dot{e}_x(t) = f(x; u(t)) = f(\bar{x}(t) + e_x(t); \bar{u}(t) + e_u(t)) \quad (34.3)$$

- Les perturbations affectent la sortie :

$$y = g(x(t); u(t)) = g(\bar{x}(t) + e_x(t); \bar{u}(t) + e_u(t)) \quad (35.3)$$

3.9. Linéarisation du système non linéaire

- Linéarisation autour du point de fonctionnement (\bar{x}, \bar{u})

On réalise un développement de Taylor au 1^{er} ordre de f et g

- Equations d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(\bar{x}(t) + e_x(t); \bar{u}(t) + e_u(t)) = f_1(\bar{x}; \bar{u}) + \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} x_1 + \dots + \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} x_n + \left. \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} u_1 + \dots + \left. \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} u_m \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(\bar{x}(t) + e_x(t); \bar{u}(t) + e_u(t)) = f_n(\bar{x}; \bar{u}) + \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} x_1 + \dots + \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} x_n + \left. \frac{\partial f_n}{\partial u_1} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} u_1 + \dots + \left. \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} u_m \end{cases} \quad (36.3)$$

- Equations de sortie :

$$\begin{cases} y_1(t) = g_1(\bar{x}(t) + e_x(t); \bar{u}(t) + e_u(t)) = g_1(\bar{x}; \bar{u}) + \left. \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} x_1 + \dots + \left. \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} x_n + \left. \frac{\partial g_1}{\partial u_1} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} u_1 + \dots + \left. \frac{\partial g_1}{\partial u_m} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} u_m \\ \vdots \\ y_p(t) = g_p(\bar{x}(t) + e_x(t); \bar{u}(t) + e_u(t)) = g_p(\bar{x}; \bar{u}) + \left. \frac{\partial g_p}{\partial x_1} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} x_1 + \dots + \left. \frac{\partial g_p}{\partial x_n} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} x_n + \left. \frac{\partial g_p}{\partial u_1} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} u_1 + \dots + \left. \frac{\partial g_p}{\partial u_m} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} u_m \end{cases} \quad (37.3)$$

- Formes matricielle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \dot{\bar{x}}(t) + \dot{e}_x(t) \approx f_1(\bar{x}; \bar{u}) + F_x(x(t) + F_u u(t)) \\ y = \bar{y}(t) + e_y(t) \approx g(\bar{x}; \bar{u}) + G_x(x(t) + G_u u(t)) \end{cases} \quad (38.3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{e}_x(t) = F_x x(t) + F_u u(t) \\ e_y(t) = G_x x(t) + G_u u(t) \end{cases} \quad \text{(modèle linéarisé)} \quad (39.3)$$

$$F_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\bar{x}; \bar{u}} ; F_u = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}_{\bar{x}; \bar{u}} \quad (40.3)$$

$$G_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\bar{x}; \bar{u}} ; G_u = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \frac{\partial g_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial u_1} & \frac{\partial g_p}{\partial u_m} \end{bmatrix}_{\bar{x}; \bar{u}} \quad (41.3)$$

F_x, F_u, G_x et G_u Sont les matrices jacobéennes des dérivées partielles de f et g par rapport à x et u et évaluées au point (\bar{x}, \bar{u})

Matrices du modèle : $A = F_x$, $B = F_u$, $C = G_x$, $D = G_u$

Exemple :

Soit le système mécanique régit par l'équation différentielle :

$$m\ddot{z} = F + k_1z + k_2z^3$$

Modelé d'état :

- $u(t) = F$, $y(t) = z(t)$
- $x_1(t) = z(t)$; $x_2(t) = \dot{z}(t)$
- Modelé non linéaire :

$$x_1(t) = z(t) \Rightarrow \dot{x}_1(t) = \dot{z}(t) = x_2(t)$$

$$m\ddot{z} = F + k_1z + k_2z^3 \Rightarrow \dot{x}_2(t) = \frac{F}{m} + \frac{k_1}{m}x_1(t) + \frac{k_2}{m}x_1(t)^3$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{k_1}{m}x_1(t) + \frac{k_2}{m}x_1(t)^3 + \frac{F}{m} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = f(x_1(t), x_2(t), u(t)) = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ \frac{k_1}{m}x_1(t) + \frac{k_2}{m}x_1(t)^3 + \frac{F}{m} \end{bmatrix}$$

$$y(t) = h(x_1(t), x_2(t), u(t)) = x_1(t)$$

- **Détermination du point de fonctionnement (\bar{x}, \bar{u}) :**

On choisit comme point de fonctionnement, un point stationnaire c'est-à-dire tel que :

$$\dot{\bar{x}}(t) = f(\bar{x}(t); \bar{u}(t)) = 0$$

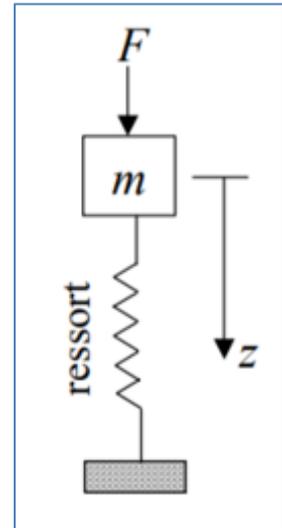
$$f(\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t), \bar{u}(t)) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{x}_2(t) \\ \frac{k_1}{m}\bar{x}_1(t) + \frac{k_2}{m}\bar{x}_1(t)^3 + \frac{\bar{u}}{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De plus on prendra $\bar{u} = 0$. On alors :

$$\begin{cases} \tilde{x}_2 = 0 \\ \frac{k_1}{m}\tilde{x}_1(t) + \frac{k_2}{m}\tilde{x}_1(t)^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{x}_2 = 0 \\ \tilde{x}_1 = 0 \text{ ou } \tilde{x}_1 = \pm \sqrt{\frac{-k_1}{k_2}} \end{cases}$$

Point de fonctionnement :

$$(\bar{x}, \bar{u}) = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; 0 \right) \text{ ou } \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \pm \sqrt{\frac{-k_1}{k_2}} \end{bmatrix}; 0 \right)$$



• Matrices

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{(k_1 + 3k_2x_1^2)}{m} & 0 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \frac{\partial f_n}{\partial u} \end{bmatrix}_{\vec{x};\vec{u}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ m \end{bmatrix}_{\vec{x};\vec{u}}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{bmatrix} = [1 \quad 0] ; \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial u} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Seule la matrice de commande A change selon les points de fonctionnement :

• Premier point : $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; 0 \right)$ on a $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{k_1}{m} & 0 \end{bmatrix}$

• Deuxième point : $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ \pm \sqrt{\frac{-k_1}{k_2}} \end{bmatrix} ; 0 \right)$ on a $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-2k_1}{m} & 0 \end{bmatrix}$

Chapitre 4

1. Résolution des équations d'état et matrice de transition
2. Stabilité
3. Notions de commandabilité et d'observabilité

Chapitre 04. Analyse des systèmes dans l'espace d'état

4.1. Résolution des équations d'état et matrice de transition (27)

On considère l'équation différentielle du premier ordre

$$\frac{dx}{dt} = a x(t) + bu(t) \quad (1.4)$$

Avec :

$x(t)$ et $u(t)$ sont des fonction scalaire dans le temps

Et par la transformée de Laplace on trouve :

$$sX(s) - X(0) = aX(s) + bU(s) \quad (2.4)$$

Ou $X(0)$ c'est la condition initiale :

$$X(s) = \frac{X(0)}{(s-a)} + \frac{b}{(s-a)} U(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} x(t) = e^{at} x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)} bu(\tau) d\tau \quad (3.4)$$

Ou τ est variable de temps fictif

Et sachant que le développement en série de Taylor de e^{at} est donné par :

$$e^{at} = 1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \dots + \frac{a^k t^k}{k!} \quad (4.4)$$

On considère maintenant l'équation d'état suivante

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Avec la transformée de Laplace on trouve ;

$$sX(s) - X(0) = AX(s) + BU(s)$$

$$(sI - A)X(s) = X(0) + BU(s)$$

On multiplie par $(sI - A)^{-1}$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}X(0) + (sI - A)^{-1}BU(s)$$

On utilise la transformée inverse de Laplace :

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

Produit de convolution

Si le temps initial est t_0 :

La solution de l'équation d'état devient :

$$x(t) = \underbrace{e^{A(t-t_0)} x(0)}_{\text{solution libre}} + \underbrace{\int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau}_{\text{solution forcée}} \quad (5.4)$$

Chapitre 5. Commande par retour d'état

- La matrice exponentielle e^{At} est appelée la matrice de transition de l'état
- $\Phi(t)$ représente la réponse libre du système et Par conséquent :

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \Phi(t) = e^{At} \quad (6.4)$$

Alternativement

$$\Phi(t) = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{A^k t^k}{k!} \quad (7.4)$$

Exemple

Soit le système :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

Et : $\begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} \Rightarrow \Phi(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

D'où :

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)} & \frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)} + \frac{2}{(s+2)} & -\frac{1}{(s+1)} + \frac{2}{(s+2)} \end{bmatrix}$$

Et avec la transformée inverse on déduit que :

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2(e^{-t} - e^{-2t}) & -e^{-t} - 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Donc la solution libre du système est :

$$x(t) = \Phi(t) x(0)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2(e^{-t} - e^{-2t}) & -e^{-t} - 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

$$x_2 = -2(e^{-t} - e^{-2t})$$

4.2. Stabilité : (21)

4.2.1. Position du problème et définitions

La propriété de stabilité des systèmes bouclés est non seulement une performance mais une exigence pour le bon fonctionnement d'une boucle d'asservissement ou de régulation. Une boucle instable est une boucle inutilisable.

On commence par définir la notion de stabilité des systèmes linéaires continus pour ensuite l'appliquer aux systèmes bouclés.

- **Definition**

Un système est stable si à une entrée bornée correspond une sortie bornée. Le comportement d'un système stable est tel que : En lui appliquant une entrée de type échelon (entrée bornée), la sortie converge vers une valeur aussi bornée. Par contre, un système instable verra sa sortie diverger.

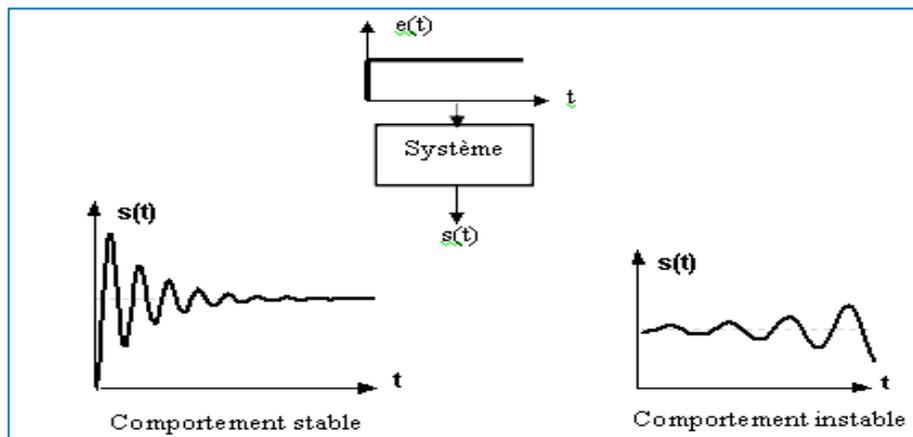


Fig.4.1 .Réponse indicielle d'un système instable et un système stable

Un système qui ne revient pas à sa position d'équilibre mais ne s'en écarte pas est dit oscillant ou en pompage.

Remarque

En théorie un système réel instable oscille jusqu'à la destruction, mais en pratique les amplitudes de ces oscillations sont dans le cas général limitées par les différentes saturations (saturations des amplificateurs opérationnels, fin de courses, butées physiques,...) et laisser croire que la sortie du système est bornée. Le système ne peut plus être considéré comme linéaire. La première définition ne peut être utilisée.

4.2.2. Fonction de transfert et stabilité

- **Condition de stabilité.**

On peut écrire une nouvelle condition de stabilité d'un système : Un système est stable si et seulement si, sa fonction de transfert n'a pas de pôle à partie réelle positive ou nulle. La position des pôles de la fonction de transfert permet donc de renseigner sur la stabilité du système.

La figure ci-dessous résume le comportement convergent ou divergent d'un système selon la position de ses pôles dans le plan complexe (le cas juste oscillant n'est pas illustré) :

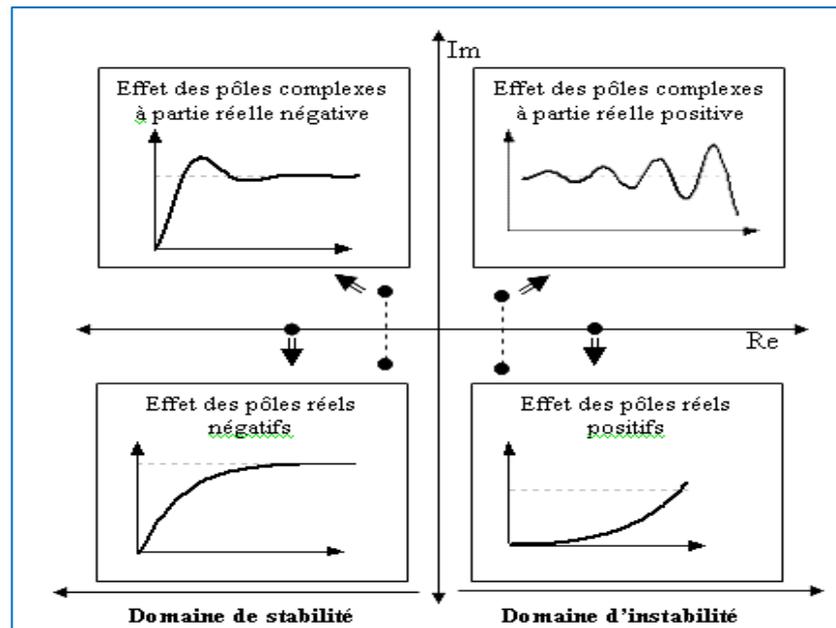


Fig.4.2. Positions des pôles des systèmes stable et instables

- **Analyse de la stabilité**

La stabilité de l'état est conditionnée par celle de la matrice de transition e^{at} . En effet d'après la solution de l'équation homogène $x(t) = e^{at}x_0$ tend vers 0 quelle que la condition initiale si e^{at} tend vers 0 quand t tend vers l'infini. en examinant le lien entre les matrices $[A, B, C, D]$ et la fonction de transfert du système, on remarque que les pôles de cette dernière ne sont autres que les valeurs propres de la matrice dynamique A. On retient donc que e^{at} converge si et seulement si les valeurs propres de la matrice A sont à parties réelle strictement négative.

- **Analyse transitoire**

On peut prévoir la forme du régime transitoire et évaluer sa durée à partir de la connaissance des valeurs propres ? par analogie avec les pôles de la fonction de transfert, on peut conclure avec certitude que :

- ✓ Si les valeurs propres sont réelles et strictement négatives : réponse transitoires apériodique

Chapitre 5. Commande par retour d'état

- ✓ Si parmi les valeurs propres il y'en a qui sont complexes et a partie réelle strictement négatives ; réponse transitoire oscillatoire amortie.
- ✓ Si la matrice d'état A possède à la fois des valeurs propres réelles strictement négatives : la forme du régime transitoire est caractérisé par des valeurs propres dominantes

- **Analyse permanent (statique)**

Pour une entrée constante u_0 c'est-à-dire de type échelon : il s'établit un comportement statique ou toutes les variables d'état et de sortie atteignent des valeurs finales constantes sous réserve de la stabilité du système.

L'état du système converge vers l'état final qui peut être déterminé à partir du gain statique .celui-ci s'obtient en mettant $p = 0$ dans la fonction du transfert, ce qui se traduit par la relation suivante :

$$K_s = H(p)|_{p=0} = C(pI - A)^{-1}B + D|_{p=0} = -CA^{-1}B + D \quad (8.4)$$

L'état et la sortie en régime statique s'obtiennent par :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = -A^{-1}Bu_0 \quad (9.4)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = (-CA^{-1}B + D)u_0 \quad (10.4)$$

On peut envisager trois cas pour la stabilité des systèmes :

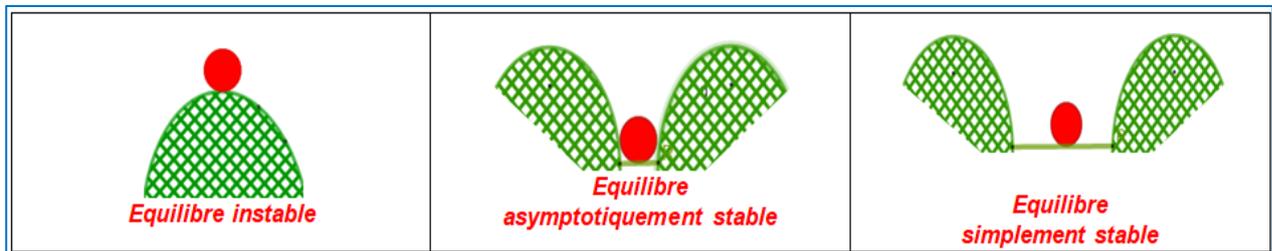


Fig.4.3. représentation de la stabilité

- Un état d'équilibre est dit **asymptotiquement stable** si, lorsque le système est écarté de cet état sous l'effet d'une perturbation, il y revient (en un temps infini).
- L'état d'équilibre est dit **instable** si, après perturbation, le système s'en éloigne davantage.
- L'état d'équilibre est dit **simplement stable** si, après perturbation, le système reste dans un voisinage du point d'équilibre.

- **Valeurs propres et la stabilité**

On peut démontrer que la stabilité d'un système est obtenue à partir de :

$$\det(sI - A) = 0$$

Où I est la matrice identité et s l'opérateur de Laplace.

Exemple

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ -10 & -5 & -2 \end{bmatrix} [x] + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Chapitre 5. Commande par retour d'état

$$y = [1 \ 0 \ 0]x$$

Vérifier la stabilité de ce système.

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ -10 & -5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -3 & -1 \\ -2 & s-8 & -1 \\ 10 & 5 & s+2 \end{bmatrix}$$

Le déterminant est :

$$s^3 - 6s^2 - 7s - 52$$

La fonction de transfert du transfert du système est :

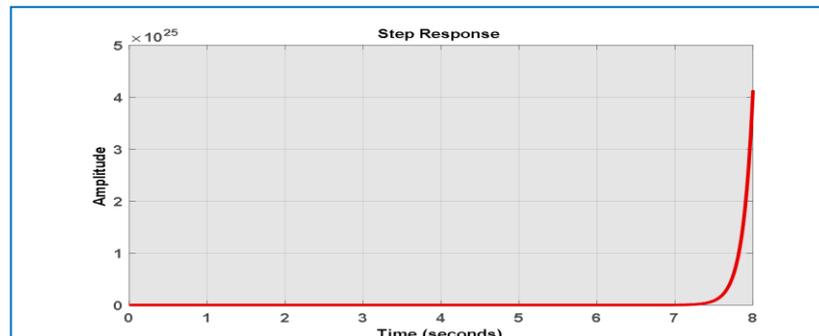
$$H(P) = \frac{10s^2 - 60s - 110}{s^3 - 6s^2 - 7s - 52}$$

On constate clairement que le polynôme caractéristique du système c'est le déterminant de $(sI - A)$, ce qui résulte que les valeurs propres de la matrice dynamique sont les pôles de la fonction du transfert .

On remarque que les pôles de FT (valeurs propres de A) sont :

$$\lambda_1 = 7.7642 + 0.0000i \quad \lambda_2 = -0.8821 + 2.4330i \quad \lambda_3 = -0.8821 - 2.4330i$$

Et par conséquent l'instabilité du système :



4.3. Notions de commandabilité et d'observabilité (définitions et méthodes de test). (28)

• Introduction :

Un système est représenté par un vecteur d'état par en fait par un point dans un espace d'état est à un instant t qui va se trouve quelque part dans un endroit $x(t_1)$ (voir figure).

Si on agit pas sur ce système et bien la loi physique ou biologique ... va le faire évoluer d'une certaine manière dans l'espace d'état sans commande alors le système n'est pas commandé et si en agissant par une commande sur ce système en partant de ce point alors on va piloter la direction de déplacement de ce vecteur d'état vers $x(t_2)$ alors le système est commandé c'est-à-dire un système sous une commande on fait varier l'évolution du système dans l'espace d'état par exemple l'espace d'état représenté par la somme des températures autour d'une pièce, à t_1 nous avons la température T_1 en été et on veut l'amener avec une commande à T_2 dans un temps précis (t_1 à t_2) donc le système est commandé .

Chapitre 5. Commande par retour d'état

Mais sans commande la température va bouger de la valeur T_1 à une autre valeur T_3 supérieure à T_1 aléatoirement (affecté par les perturbations extérieures) alors le système n'est pas commandé

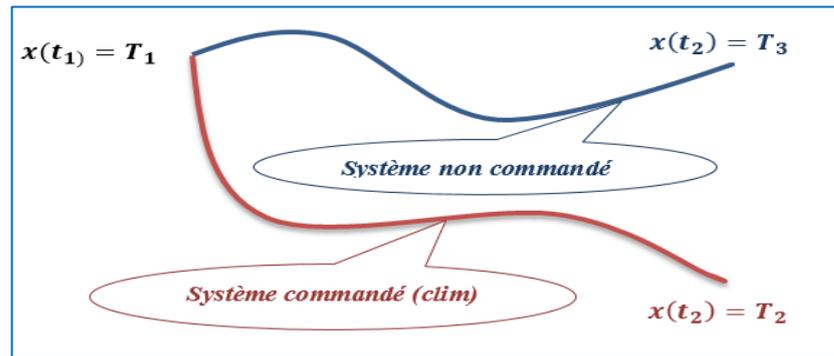


Fig.4.4 Exemple introctif

4.3.1. Notion de la commandabilité :

- **Definition :**

Un système d'équation d'état

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m})$$

Est dit complètement commandable sur un intervalle de temps $[t_0, t_1]$ $t_1 < \infty$ s'il existe une commande $u(t)$ définis sur cette intervalle permettant de faire évoluer le système d'un état initial quelconque $x(t_0)$ à un état desiré quelconque $x(t_1)$ (l'évolution du système se fait dans un temps fini $\Delta t = t_1 - t_0$)

La question c'est existe-t-il une commande $u(t)$ qui fait évoluer le système de l'état $x(t_0)$ à un état $x(t_1)$ en un temps fini ? Si oui, le système est dit complètement commandable

- **Critère de commandabilité (29)**

Un système différentiel linéaire d'ordre n est complètement commandable si et seulement si la matrice de commandabilité Q_c , de dimension (n, nxm) , est de rang n (possède n colonnes donc n lignes linéairement indépendantes) (**critère de KALMAN**)

- **Matrice de commandabilité :**

$$Q_c(A, B) = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (11.4)$$

Et le rang de $Q_c(A, B)$ soit plein

$$\text{rang} [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B \quad \dots \quad A^{n-1}B] = n \quad (12.4)$$

Remarques

- La définition de la commandabilité ne fait pas intervenir l'équation de sortie du système. Il n'est donc pas étonnant que seules les matrices A et B interviennent dans le critère de commandabilité.
- Dans le cas d'un système mono-entre mono-sortie (SISO) la matrice de la commandabilité est une matrice carrée $m = 1 \Rightarrow Q_c(A, B) \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Chapitre 5. Commande par retour d'état

➤ $\text{rang } Q_c(A, B) = n \Rightarrow \det(Q_c(A, B)) \neq 0$ avec $\det(Q_c(A, B))$ c'est le déterminant de $Q_c(A, B)$

• Approche pratique de vérification de la commandabilité

- Former la matrice de la commandabilité $Q_c(A, B)$
- Calculer le $\det(Q_c(A, B))$ et en déduire le rang de la matrice de la commandabilité
- En déduire que le système est commandable si $\text{rang } Q_c(A, B) = n$

Exemple

Etudier suivant les valeurs de α la commandabilité du système suivant :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \alpha & -4 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- La matrice de la commandabilité $Q_c(A, B) = [B \quad AB]$

$$AB = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \alpha & -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \alpha - 4 \end{bmatrix} \Rightarrow Q_c(A, B) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \alpha - 4 \end{bmatrix}$$

- $\det(Q_c(A, B)) = \alpha - 3$ alors le système est commandable ssi $\det(Q_c(A, B)) \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq 3$

4.3.2. Notion d'observabilité

Exemple introductif

Soit une Conduite d'une voiture assurée par GPS pour détecter la position de la voiture $x(t)$ qui subit une perte de connexion à l'entrée du tunnel

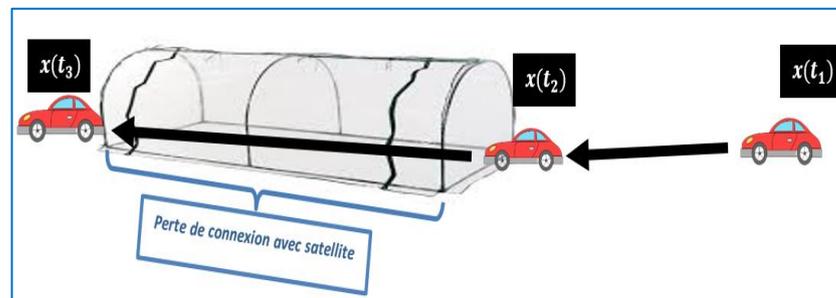


Fig.4.5: Exemple introductif

- La variable d'état : position de la voiture
- Entrée : l'accélération
- Sortie ; la position finale de voiture

La question c'est comment connaître l'état $x(t_2)$ en perdant la connexion avec le satellite à l'entrée du tunnel ?

Le système va reconstituer la variable d'état en fonction de l'accélération et la distance restante du tunnel pendant la perte de la connexion du GPS avec le satellite

• Définition

Le système:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

est complètement observable s'il existe un temps fini $t_1 > 0$, tel que la connaissance de l'entrée $u(t)$ et de la sortie $y(t)$ pour tout t ($0 < t < t_1$), est suffisante pour déterminer $x(t)$.

• **Critère d'observabilité (30)**

Un système différentiel linéaire invariant d'ordre n est complètement observable si la matrice d'observabilité Q_0 est de rang n :

$$Q_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (13.4)$$

Une autre représentation :

$$Q_0(C, A) = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & (A^T)^2 C^T & \dots & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix} \quad (14.4)$$

• **Analyse:**

Un système observable est un système reconstituible c'est-à-dire on peut reconstruire l'état $x(t)$ $\forall t \geq 0$ par :

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

Remarques

- La notion de l'observabilité ne porte que sur les matrices (A et C) ; dire que le système est observable équivaut à dire que la paire $(C; A)$ est observable.
- Dans le cas des systèmes mono entrée mono sortie la matrice de l'observabilité est une matrice carrée dont le déterminant est différent de 0 [$\det(Q_0(C, A)) \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(Q_0(C, A)) = n$]

• **Approche pratique de vérification de l'observabilité (28)**

- Former la matrice de l'observabilité $Q_0(C, A)$
- Calculer le $\det(Q_0(C, A))$ et en déduire le rang de la matrice de l'observabilité
- En déduire que le système est observable si $\text{rang } Q_0(C, A) = n$

Exemple

Soit le système à quatre variables d'état découplées régi par les équations d'état et d'observation suivante:

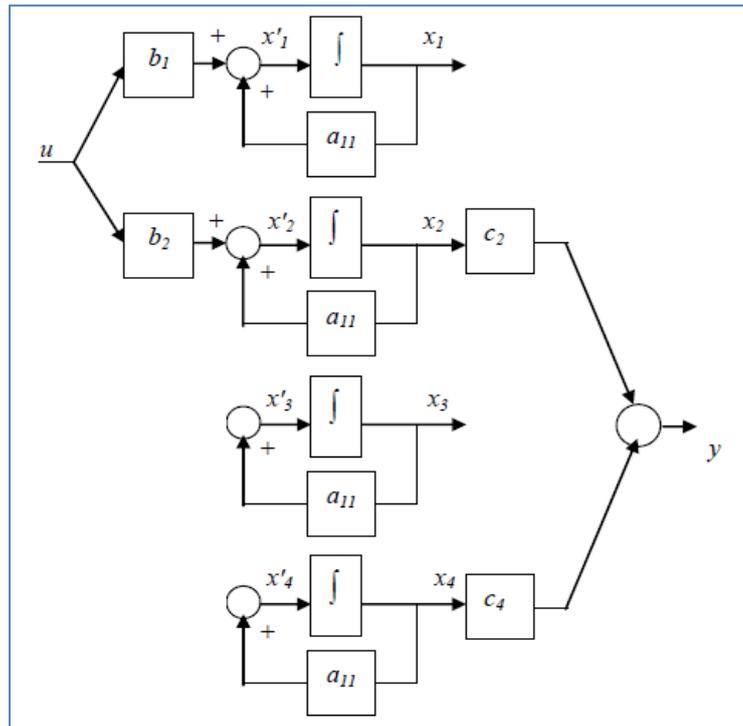
Chapitre 5. Commande par retour d'état

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [0 \quad c_2 \quad 0 \quad c_4]x(t) \end{cases}$$

Qui s'écrit aussi sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + b_1u(t) \\ \dot{x}_2 = a_{22}x_2 + b_2u(t) \\ \dot{x}_3 = a_{33}x_3 \\ \dot{x}_4 = a_{44}x_4 \\ y(t) = c_2x_2 + c_4x_4 \end{cases}$$

L'application des critères de commandabilité et d'observabilité sont susceptibles de nous renseigner sur ces deux propriétés. En fait, ce système n'est pas complètement commandable et pas complètement observable. Cependant la représentation (figure suivante) permet de définir les variables non commandables et les variables non observables. On conçoit intuitivement que les variables x_1 et x_2 sont commandables (ou gouvernables). Les variables x_3 et x_4 ne le sont pas. En effet la commande $u(t)$ n'a aucun moyen d'agir sur ces dernières. Ceci s'exprime sur la figure par l'absence de liaison de $u(t)$ vers x_3 et x_4 et par la nullité des coefficients b_3 et b_4 dans la matrice B d'application de la commande dans l'équation d'état. Les variables x_2 et x_4 sont observables, les variables x_3 et x_1 ne le sont pas. En effet sur la figure, les variables x_3 et x_1 ne débouchent pas sur la sortie y . De même les coefficients c_1 et c_3 de la matrice d'observation C sont nuls.



Chapitre 5. Commande par retour d'état

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

$$\Rightarrow Y(s) \times (s^3 + 6s^2 + 11s + 6) = 2 \times U(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \ddot{y} + 6\dot{y} + 11y + 6y = 2u$$

On pose :

$$\begin{cases} x_1 = y \\ \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3 \\ \dot{x}_3 = \dddot{y} = -6x_3 - 11x_2 - 6x_1 + 2u \end{cases}$$

Et sous forme matricielle :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) \\ y = [1 \quad 0 \quad 0]x(t) \end{cases}$$

On constate clairement que : $n = 3$

1. Vérification de la contrôlabilité :

$$Q_c(A, B) = [B \quad AB \quad A^2B]$$

$$\bullet AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -12 \end{bmatrix}$$

$$\bullet A^2B = A \times AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -12 \\ 50 \end{bmatrix}$$

$$\bullet Q_c(A, B) = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -12 \\ 2 & -12 & 50 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(Q_c(A, B)) = -8$$

$$\Rightarrow \text{rang}(Q_c(A, B)) = 3$$

- Le système est commandable

2. Vérification de l'observabilité

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}$$

$$\bullet CA = [1 \quad 0 \quad 0] \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} = [0 \quad 1 \quad 0]$$

$$\bullet CA^2 = CA \times A = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 1]$$

$$\bullet Q_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(Q_o(C, A)) = 1$$

$$\Rightarrow \text{rang}(Q_o(C, A)) = 3 ; \text{ Donc Le système est observable}$$

Chapitre 5



1. Formulation du problème de placement de pôles par retour d'état.
2. Méthodes de calculs pour les systèmes mono-variables.
3. Cas de systèmes multi-variables.
4. Implémentation.

Chapitre 05. La commande par Le retour d'état

5.1. Principe de la commande par retour d'état linéaire (31)

Le principe est de déterminer une commande telle que les pôles du système de la fonction de transfert du système bouclé soient convenablement placés dans le plan complexe et satisfasse des spécifications d'amortissement, de rapidité... Les pôles de la fonction de transfert étant les valeurs propres de la matrice d'état, le but est donc de réaliser un asservissement modifiant convenablement la matrice d'état du système.

On désire asservir le système a une valeur $y_{ref}(t)$ tout en imposant les dynamiques du régime transitoire et en maintenant une erreur petite ou nulle en régime permanent. Modifier le régime transitoire du système, c'est modifier les pôles de la matrice dynamique A . On implante ainsi une loi de commande (*Cette technique s'appelle également commande par placement de pôles*) par retour d'état qui prend en compte les valeurs de l'état à l'instant t :

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Remarque

L'implantation de cette commande par retour d'état nécessite :

- Le système doit être commandable
- tous les états du système doivent être mesurables ce qui est une hypothèse assez forte.

Soit le système linéaire stationnaire défini par sa représentation d'état $(A, B, C, 0)$.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

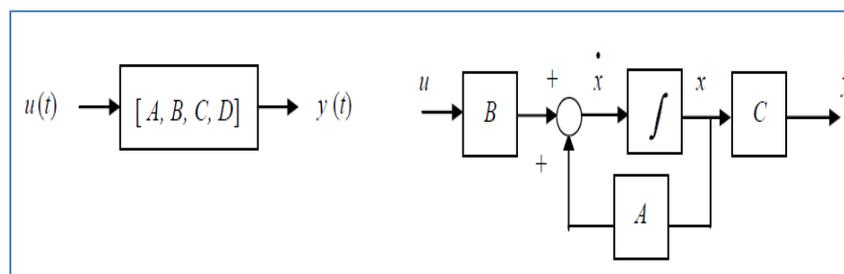


Fig.5.1 Système en boucle ouverte

• But de la commande par retour d'état :

La stabilité et la dynamique du système S est fixés par les valeurs propres de :

$$A, \sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \quad (1.5)$$

Et On souhaite commander le système dans le but d'améliorer les performances ou respecter un certain cahier de charge (coefficient d'amortissement, temps de réponse, dépassement ...)

5.2. Formulation

La loi de commande s'écrit alors :

$$u(t) = -Kx(t) + r(t) \tag{2.5}$$

Le système boucle est donne par la figure suivante :

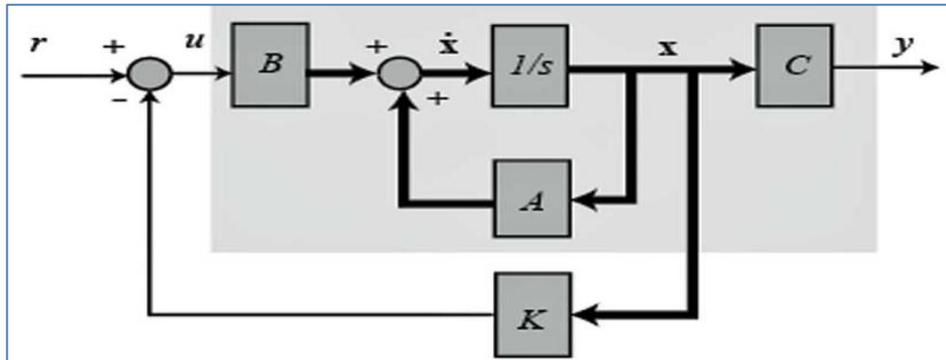


Fig.5.2 . Système en boucle fermée (par retour d'état)

Où $K \in R^{m \times n}$ est une matrice appelée gain du retour d'Etat et $r(t)$ est une nouvelle entrée pour le système en boucle fermée (éventuellement ce dernier signal peut représenter la consigne). C'est une commande en boucle fermée car elle dépend des signaux internes du système même si elle ne prend pas en compte directement la sortie du système $y(t)$ comme le montre la figure précédente.

Remarque

Dans le cas d'un système à une entrée, la commande par retour d'Etat s'écrit :

$$u(t) = -Kx(t) + r(t) = (-\sum_{i=1}^n k_i x_i(t)) + v(t) \text{ avec } K = [k_1, \dots, k_n]. \tag{3.5}$$

Si on remplace l'expression de $u(t)$ dans l'équation d'Etat et l'équation de sortie on trouve:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B(-Kx(t) + r(t)) \\ y(t) = Cx(t) + D(u(-Kx(t) + r(t))) \end{cases} \tag{4.5}$$

Le système en boucle fermée s'écrit donc :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + Br(t) \\ y(t) = (C - DK)x(t) + Dr(t) \end{cases} \tag{5.5}$$

Et est représenté par le schéma bloc compact de la figure suivante :

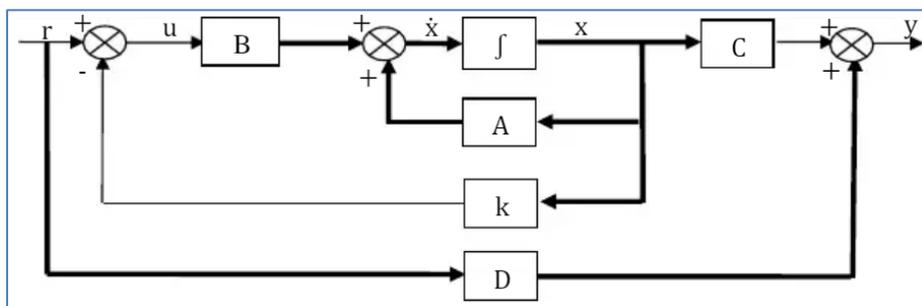


Fig.5.3 Schéma bloc en boucle fermée (par retour d'état)

5.3. Approche pratique pour calculer le gain du retour d'état

On donne ci-dessous les principales étapes à suivre pour mettre en œuvre la technique de la commande par placement de pôles :

Soit les désirés pour satisfaire le cahier de charge souhaité :

$$P_{des} = \{ \lambda_1; \lambda_2; \lambda_3; \dots; \lambda_n \}$$

• **Méthode direct Calculer le gain K :**

Tel que :

$$\det(\lambda I - (A - BK)) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) \quad (6.5)$$

Avec :

$$\sigma(A - BK) = \{ \lambda_1; \lambda_2; \lambda_3; \dots; \lambda_n \} \text{ Sont les valeurs propres de } (A - BK)$$

D'où P le vecteur colonne désire est: $\mathbf{P} = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3 \ \dots \ \lambda_n]^T$

Pour ce faire :

- Poser $K = [k_1 k_2 \dots k_n]$
- Calculer en fonction de K , la matrice d'état en boucle fermée $A - BK$.
- Calculer la matrice $\lambda I - (A - BK)$ et en déduire son déterminant pour obtenir le polynôme caractéristique en boucle fermée en fonction de K , $P_{BF}(\lambda)$.
- Développer le polynôme caractéristique désiré $P_{desiré}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)$.
- En identifiant terme à terme les deux polynômes caractéristiques, $P_{BF}(\lambda)$. et $P_{desiré}(\lambda)$, on obtient un système d'équations dont les inconnues sont les éléments $k_i, i = 1 \dots n$.
- **Calcul de K par Matlab**
- $M_c = \text{ctrb}(A, B)$;
- $R = \text{rond}(M_c)$
- $K = \text{place}(A, B, P)$; % P vecteur colonne contiennent les valeurs propres désirés.

Exemple

5.4. Soit le système en boucle ouverte représenté par l'équation d'état suivant :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Calculer la commande par retour d'état, $K = ?$, assurant aux système en boucle fermé les pôles désirés $\lambda = [-1, -2]$.

$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^2 - 3\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -0.56$ et $\lambda_2 = 3.56$ ce qui prouve l'instabilité du système en boucle ouvert.

Afin de calculer le vecteur K , on suive les étapes suivantes :

- Poser $K = [k_1 \ k_2]$
- On calcule en fonction de K , la matrice d'état en boucle fermée $A - BK$.

$$A - BK = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2] = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -k_1 & -k_2 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + k_1 & -4 + k_2 \\ 2 - k_1 & 5 - k_2 \end{bmatrix}$$

- On calcule le polynôme caractéristique en boucle fermée en fonction de K , $P_{BF}(\lambda)$.

$$P_{BF}(\lambda) = \det(\lambda I - (A - BK)) = \det \left(\begin{bmatrix} \lambda + 2 - k_1 & 4 - k_2 \\ -2 + k_1 & \lambda - 5 + k_2 \end{bmatrix} \right) = \lambda^2 + (-3 - k_1 + k_2)\lambda - 2 + k_1$$

- On développe le polynôme caractéristique désiré:

$$P_{désiré}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = (\lambda + 1)(\lambda + 2) = \lambda^2 + 3\lambda + 2.$$

- Par identifiant terme à terme les deux polynômes caractéristiques, $P_{BF}(\lambda)$. et $P_{désiré}(\lambda)$,

On obtient le système d'équations suivant.

$$\begin{cases} -3 - k_1 + k_2 = 3 \\ -2 + k_1 = 2 \end{cases}$$

Dont la solution est :

$$\begin{cases} k_1 = 4 \\ k_2 = 10 \end{cases}$$

- **Application par Matlab**

Soit le système décrit par sa fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{8}{s^2 - 0.08s + 0.4}$$

- ✓ Etudier la stabilité du système.
- ✓ Représenter la réponse indicielle du système en boucle ouverte
- ✓ Trouver le gain du retour d'état en désirant les pôles suivants :

$$\lambda_1 = -0.09000 + j0.9596 \quad \lambda_2 = -0.09000 - j0.9596$$

- ✓ Représenter la réponse indicielle du système en boucle fermée.

Réponse

```
clear all
clc
n=8
d=[1 -0.08 0.4]
g=tf(n,d)
pole(g)
[a,b,c,d]=tf2ss(n,d)
t=ss(a,b,c,d)
q=[-0.09000+0.9596i -0.09000-0.9596i]
K = place(a,b,q)
m=a-b*K
l=c-d*K
j=ss(m,b,l,d)
```

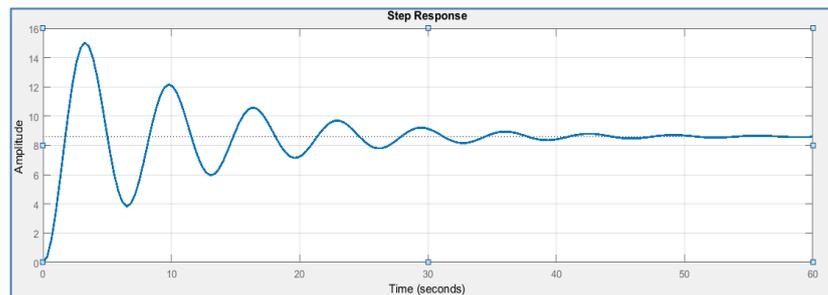
Chapitre 5. Commande par retour d'état

- o La reponse indicielle en boucle ouverte



On constate clairement que le système est instable.

- o La reponse indicielle en boucle fermée



On remarque que la commande par retour d'état a imposé la stabilité au système par le déplacement des pôles vers le demi-plan gauche du plan complexe.

Chapitre 6



1. Introduction,
2. Observateurs déterministes (Luenberger) et méthodes de calculs,
3. Observateurs réduits,
4. Observateurs stochastiques (filtre de Kalman).

Chapitre 06 : Observateur d'état

6.1. Principe (28)

Il arrive souvent que toutes les variables d'état d'un système ne soient pas accessibles à la mesure. Dans ce cas, l'implémentation directe de la commande $u = -Kx$ est impossible. De plus, la connaissance de la sortie y ne résout pas le problème. En effet, comme le vecteur C n'est pas inversible la connaissance de $y = Cx$ ne permet pas de connaître x .

L'idée est donc de reconstruire l'état x à partir des informations disponibles, c'est-à-dire la sortie y et la commande u . On utilise pour cela un système dynamique permettant d'approximer x : un **observateur**. On parle également de **reconstructeur, d'estimateur, de filtre...**

Il y a deux environnements possibles :

- le cas déterministe
- le cas stochastique qui permet de prendre en compte les bruits de mesure.

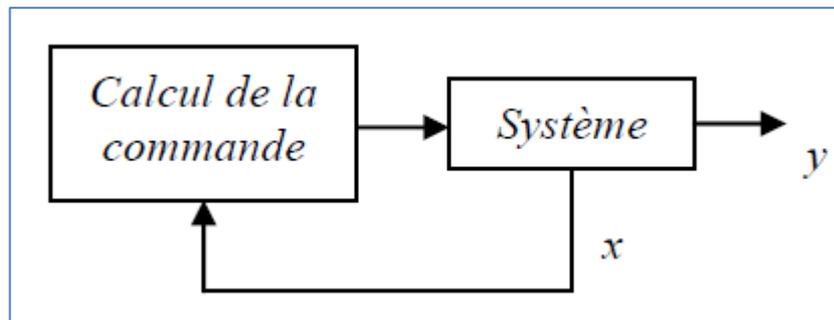


Fig. 3.1. Structure de la commande dans le cas où l'état est mesurable

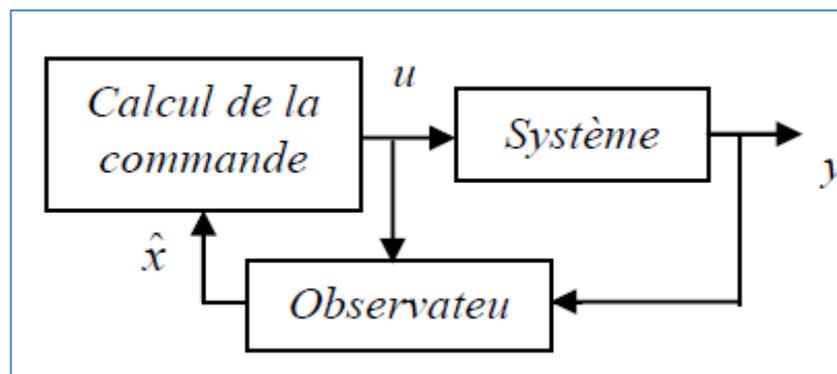


Fig. 6.1. Reconstruction de l'état

6.2. Synthèse d'observateur (28)

6.2.1. Définition

On appelle observateur du système un opérateur qui génère une estimation \hat{z} de la variable $z = Tx$ sous la forme :

$$\dot{\hat{z}} = F\hat{z} + Ly + Ju \quad (1.6)$$

Où u est la commande et y la sortie.

- Si z et x ont même dimension, l'observateur est dit complet (tout l'état est estimé). On choisit $T = I$ ($z = x$) et $\hat{z} = \hat{x}$
- Si $\dim(z) < \dim(x)$ (par exemple : $\dim(z) = \dim(x) - \dim(y)$), alors l'observateur est dit d'ordre réduit.

Remarques :

1. Un observateur doit être stable.
2. Un observateur doit assurer la convergence de \hat{z} vers z (**estimation sans biais**).
3. Dans le cas déterministe, la convergence s'écrit :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\hat{z}(t) - z(t)] = 0 \quad , \quad \forall u, \forall x(t_0)$$

On note $\varepsilon(t) = z(t) - \hat{z}(t)$ l'erreur de reconstruction.

6.2.2. Observateur identité (28)

L'observateur identité est un observateur sans biais $\hat{z}(t) \rightarrow z(t)$ s $t \rightarrow \infty$ où $z = x$. Les équations du couple (**système, observateur**) sont :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = F\hat{x} + Ly + Ju \\ \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (2.6)$$

Exprimons l'erreur d'estimation ε :

$$\varepsilon = z(t) - \hat{z}(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (3.6)$$

$$\Rightarrow \dot{\varepsilon} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - F\hat{x} - Ly - Ju \quad (4.6)$$

$$\Rightarrow \dot{\varepsilon} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - F\hat{x} - LCx - Ju = (A - LC)x + (B - J)u - F\hat{x} \quad (5.6)$$

$$\dot{\varepsilon} = (A - LC)x + (B - J)u - F(x - \varepsilon) = (A - LC - F)x + (B - J)u + F\varepsilon \quad (6.6)$$

On veut une estimation sans biais, c'est-à-dire: $\dot{\varepsilon} = 0 \quad \forall x; \forall u$, ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} A - LC - F = 0 \\ B = J \\ F \text{ stable} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F = A - LC \\ J = B \\ A - LC \text{ stable} \end{cases}$$

Remarque

1. Pourquoi la matrice $(A - LC)$ soit stable ?

D'après le précédent on a trouvé que :

$$\dot{\varepsilon} = \overbrace{(A - LC - F)}^0 x + (B - J)u + F\varepsilon \quad (8.6)$$

$$\dot{\varepsilon} = F\varepsilon = (A - LC)\varepsilon \Rightarrow \varepsilon(t) = e^{(A-LC)t} \quad (9.6)$$

Donc pour avoir la convergence vers 0 il faut donc que la matrice $(A - LC)$ doit avoir des valeurs propres à partie réelle négative (stabilité de la matrice)

2. Il faut que le système soit observable (il vérifie le critère de KALMAN)

Et par conséquent :

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Ly + Bu \tag{10.6}$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) \tag{11.6}$$

Posons $\hat{y} = C\hat{x}$

il vient :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \tag{12.6}$$

La figure suivante illustre la structure de l'observateur mise en évidence par cette dernière expression.

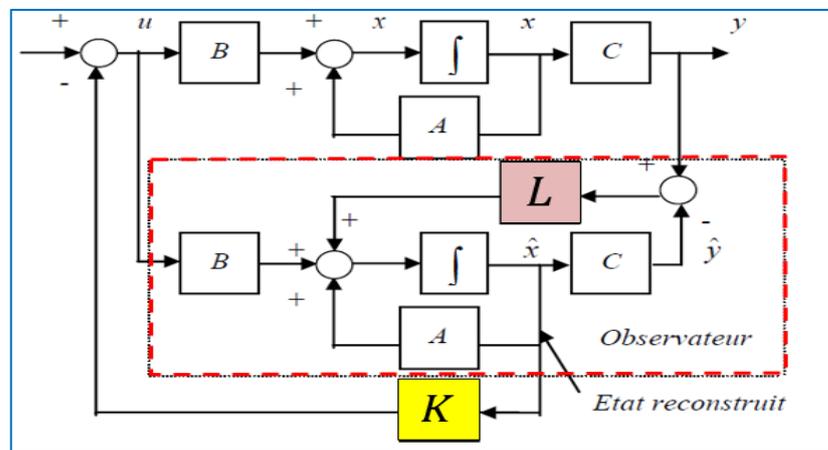


Fig.6.2 Structure de la commande avec synthèse d'un observateur

L'observateur est constitué de deux parties :

- Un simulateur du système réel caractérisé par les matrices $(A; B; C)$, ayant comme entrées u et y et comme sortie \hat{y} .
 - Un correcteur réalisant une contre-réaction fonction de l'écart entre la sortie y et son estimée \hat{y} .
- Ce correcteur permet d'assurer la convergence de l'estimation de l'état \hat{x} vers l'état x . K est appelée le gain de l'observateur. Il y a convergence si ε converge vers 0, c'est-à-dire si F est stable, soit encore si $(A - LC)$ est stable.

6.3. Observateur de Luenberger

La théorie de l'observation de Luenberger repose essentiellement sur des techniques de placement de pôles. Supposons que le système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

soit observable. Le but est de construire un observateur asymptotique \hat{x} de x , i.e. une fonction dynamique \hat{x} de l'observable y , telle que $\hat{x}(t) - x(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$ L'id'ee est de copier la

dynamique du système observe et d'y ajouter un terme correctif qui tienne compte de l'écart entre la prédiction et la réalité.

• **Approche pratique pour trouver l**

- ✓ Ecrire $\hat{\dot{x}}$ en fonction de $\hat{x}; u$ et y
- ✓ Noter $\varepsilon = x(t) - \hat{x}(t)$ l'erreur de l'observateur /
- ✓ Ecrire la dynamique de l'erreur $\dot{\varepsilon} = \dot{x} - \hat{\dot{x}}$
- ✓ Sous quelles conditions sur K que l'erreur converge exponentiellement vers 0

Exemple

Construction d'un observateur identité Soit le système défini par le quadruplet $\{A, B, C, D\}$

Avec :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0]; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et } D = 0$$

On souhaite construire un observateur identité ayant pour pôles -2 et -5 .

Les pôles de la matrice F sont donc -2 et -5 et le polynôme caractéristique associé est $P_{des}(\lambda) = \lambda^2 + 7\lambda + 10$.

Calculons la matrice $A - LC$ en posant $L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$

$$A - LC = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} [1 \quad 0] = \begin{bmatrix} -1 - l_1 & 1 \\ 2 - l_2 & -2 \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique s'écrit alors en fonction de l_1 et l_2 :

$$P_{A-GC}(\lambda) = \lambda^2 + \lambda(3 + l_1) + 2l_1 + l_2$$

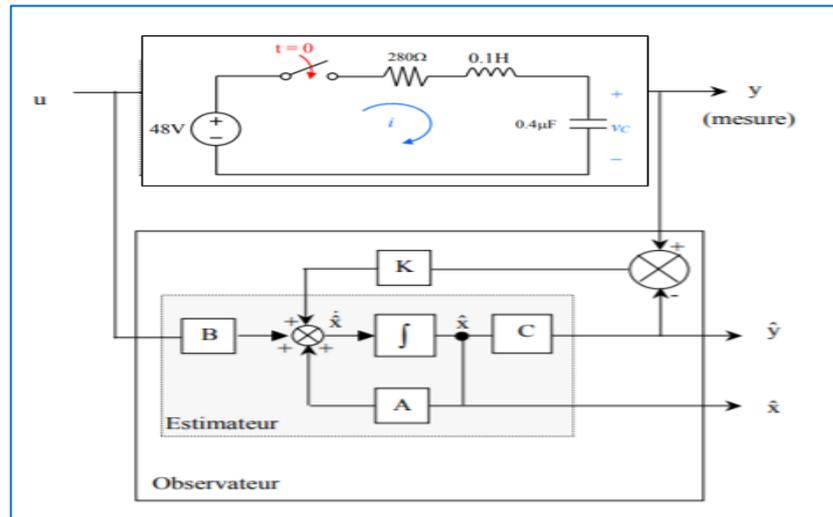
En égalant $P_{A-GC}(\lambda) = P_{des}(\lambda)$. on obtient la valeur de L et F .

$$L = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Exercice

Soit le système suivant (voir figure):

- ✓ Vérifier l'observabilité du système.
- ✓ Déterminer L pour placer les valeurs propres de l'observateur en -4 et -25 .



6.4. Observateur d'ordre réduit (32)

L'observateur d'ordre réduit introduit par Luenberger ((Luenberger, 1966) et (Luenberger, 1971)) consiste à estimer les états non mesurables. Ainsi pour un système défini le modelé d'état l'observateur réduit sera d'ordre $n - p$. ($y \in \mathbb{R}^p$)

L'idée est de reconstruire uniquement les états manquants, les autres étant mesurés. On suppose que l'Etat est divisé en deux sous-ensemble $x_1(t) = y(t)$ (mesurés) $x_2(t)$ (non mesurés).

avec donc $x_1 \in \mathbb{R}^p$ et $x_2 \in \mathbb{R}^{n-p}$. Le système dynamique original peut alors s'écrire :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_1u(t) \\ \dot{x}_2(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_2u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \quad (13.6)$$

Afin de mettre en valeur les dynamiques de l'état inconnu, transformons le système

$$\dot{x}_2(t) = A_{22}x_2(t) + \overbrace{A_{21}x_1(t) + B_2u(t)}^{\tilde{u}(t)} \quad (14.6)$$

Avec : $\tilde{u}(t)$ une nouvelle commande (En effet, cette dernière commande est un signal connu car $x_1(t)$ est la sortie mesurée du système.)

On pose une nouvelle équation de sortie :

$$w(t) = \dot{x}_1(t) - A_{11}x_1(t) - B_1u(t) = A_{12}x_2(t) \quad (15.6)$$

Finalement, nous obtenons un nouveau système dynamique d'ordre réduit $n - p$

$$\begin{cases} \dot{x}_2(t) = A_{22}x_2(t) + \tilde{u}(t) \\ w(t) = A_{12}x_2(t) \end{cases} \quad (16.6)$$

Avec $\tilde{u}(t)$ et $w(t)$ sont respectivement une nouvelle commande et une nouvelle sortie liées au système original.

On propose alors de construire un observateur identité pour le système d'ordre réduit

$$\begin{cases} \dot{z} = Fz(t) + Lw(t) + \tilde{u}(t) \\ \hat{x} = z(t) \end{cases} \quad (17.6)$$

Avec la relation suivante :

$$z(t) = x_2(t) + \varepsilon(t) \quad (18.6)$$

Et la relation matricielle :

$$F = A_{22} - LA_{12} \quad (19.6)$$

Afin d'écrire le système en fonction des signaux d'entrées $y(t)$ et $u(t)$ du système original, on transforme l'observateur minimal ainsi :

$$\begin{cases} \dot{z} = Fz(t) + L \overbrace{(\dot{x}_1(t) - A_{11}x_1(t) - B_1u(t))}^{w(t)} + \overbrace{A_{21}x_1(t) + B_2u(t)}^{\tilde{u}(t)} \\ \hat{x} = z(t) \end{cases} \quad (20.6)$$

Afin d'éviter la dérivée \dot{x}_1 dans le second membre de la première équation, on pose une nouvelle variable $s(t)$ telle que :

$$s(t) = z(t) - Lx_1(t) \Rightarrow \dot{s} = \dot{z}(t) - L\dot{x}_1(t) \quad (21.6)$$

Donc :

$$\begin{cases} \dot{s} = Fs(t) + (FL - LA_{11} + A_{21})y(t) + (B_2 - LB_1)u(t) \\ \hat{x} = s(t) + Ly(t) \end{cases} \quad (22.6)$$

Ces dernières équations représentent bien un système dynamique, observateur d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$ de sortie \hat{x} et dont l'état $s(t)$ est de dimension réduite ($s(t) \in \mathbb{R}^{n-p}$) par rapport à l'observateur classique de Luenberger.

Exemple:

Sot le système suivant :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} ; C = [1 \quad 0] ; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et } D = 0$$

On constate , seul le premier état est accessible a la mesure, nous avons donc directement les valeurs des différentes matrices:

$$A_{11} = -1, A_{12} = 1, A_{21} = 2, A_{22} = 2, B_1 = 1, B_2 = 1.$$

Nous devons ensuite résoudre l'équation $F = A_{21} - LA_{12}$. Nous choisissons la dynamique de l'erreur grâce aux pôles de F . Ici $F \in \mathbb{R}^{1 \times 1} = -5$. Nous trouvons donc $L = 7$. L'observateur réduit a donc pour equation dynamique :

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = -5s(t) - 26y(t) - 6u(t) \\ \hat{x}(t) = s(t) + 7y(t) \end{cases}$$

Exemple:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

6.5. Commande par retour d'état avec observateur

On suppose dans cette partie que l'état n'est pas accessible par une mesure. Nous avons seulement la connaissance de $y(t)$. Nous proposons une commande par retour d'état estime du type :

$$u(t) = -K\hat{x}(t) + r(t)$$

Où $\hat{x}(t)$ est la sortie du système dynamique observateur et $r(t)$ une nouvelle entrée pour le système bouclé (éventuellement la consigne).

Le théorème suivant nous justifie le choix de cette structure de commande :

Théorème :

Les pôles du système augmente (dont l'état généralisé est $\begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$) asservi par le retour d'état et l'observateur est l'union des pôles de $(A - BK)$ et des pôles de $(A - LC)$.

La figure suivante illustre le comportement général de la commande par retour d'état avec observateur

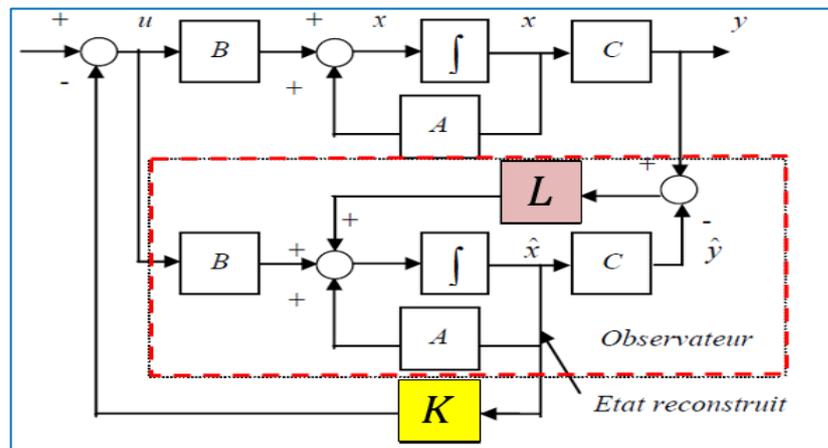


Fig.6.3. Illustration le comportement général de la commande par retour d'état

L'observateur ci-dessus possède une caractéristique intéressante connue sous le nom de **Principe de séparation**. dans le cas d'une commande linéaire, on peut concevoir séparément une commande à retour d'état (en supposant l'état connu) et un observateur d'état complet. En effet, si le système muni du retour d'état est stable, et si l'observateur conçu est stable lui aussi (i.e. les valeurs propres des matrices :

($A - BK$) et celles de ($A - LC$) sont dans le demi-plan gauche) alors le système commandé par retour de l'état reconstruit est stable.

En effet, considérons le système linéaire invariant suivant, observable et commandable, ainsi que l'observateur d'état complet :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \quad (23.6)$$

En réalisant un bouclage $u = -K\hat{x}$, la dynamique du système bouclé s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - BK\hat{x} \\ y = Cx \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} - BK\hat{x} + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \quad (24.6)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - BK\hat{x} \\ \dot{\hat{x}} = (A - BK)\hat{x} + LC(x - \hat{x}) \end{cases} \quad (25.6)$$

On peut faire le changement de variable suivant, pour écrire l'erreur de reconstruction :

$$\varepsilon = x - \hat{x} \quad (26.6)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - BK(x - \varepsilon) \\ \dot{\hat{x}} = (A - BK)(x - \varepsilon) + LC\varepsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = (A - BK)x + BK\varepsilon \\ \dot{\hat{x}} = (A - BK)x + (LC - A + BK)\varepsilon \end{cases} \quad (27.6)$$

$$\Rightarrow \dot{\varepsilon} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax - BKx - BK\varepsilon - (A - BK)x - (LC - A + BK)\varepsilon = (BK)x + (A - LC)\varepsilon$$

Et finalement on trouve le système augmente :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ \varepsilon \end{bmatrix} \quad (28.6)$$

Cette matrice est triangulaire **par blocs**, et par conséquent le spectre du système bouclé est constitué de la réunion disjointe des spectres des blocs diagonaux, c'est-à-dire l'union des spectres du système initial commandé, et du système initial observé. Ainsi la synthèse d'un système commandé par un retour d'état reconstruit par un observateur est particulièrement simple pour les systèmes linéaires invariants, puisqu'on peut synthétiser les deux fonctions séparément.

• **La question qui se pose**

Sous quelles condition sur L et K pour que l'erreur de l'observateur et l'état du retour d'état converge exponentiellement vers 0 ?

• **Réponse :**

Il faut que les valeurs propres de $\begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix}$ soient à parties réelles négatives

Donc on calcule :

$$\det \left(\begin{bmatrix} sI - A + BK & BK \\ 0 & sI - A + LC \end{bmatrix} \right) = \det(sI - A + BK) \times \det(sI - A + LC)$$

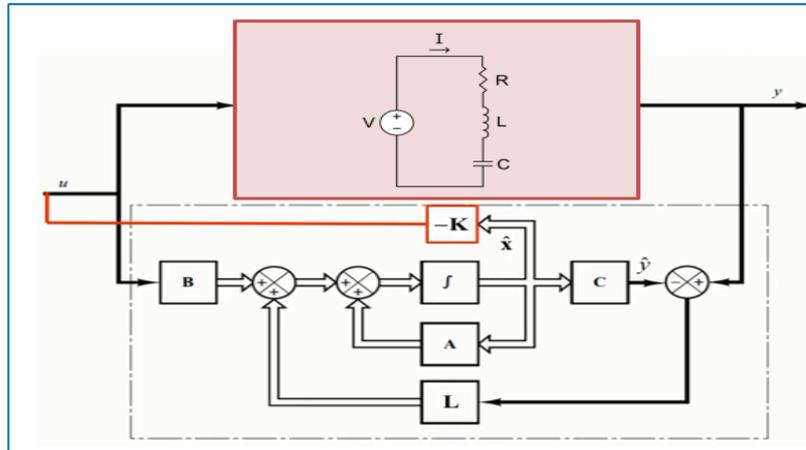
Et pour trouver K et L , on applique le principe de séparation :

C'est-à-dire on peut placer indépendamment les pôles de l'observateur et du correcteur :

Exemple:

Soit le système suivant commandé par retour d'état par un observateur d'état :

Avec : $R = 10$; $L = 0.1$ et $C = 0.01$



- Vérifier l'observabilité et la commandabilité du système
- Déterminer L pour placer les valeurs propres de l'observateur en -4 et -25 et K pour placer les valeurs propres de régulateur en -1 et -2 (il faut que l'observateur converge en premier)

Solution:

On applique la loi des mailles sur le circuit et par conséquent on trouve le modèle d'état suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u \\ y = [0 \quad 1]x \end{cases}$$

On pose :

Le vecteur du gain de l'observateur $L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$ et le vecteur du gain du retour d'état: $K = [k_1 \quad k_2]$.

- Est-ce que le système est observable ?

$$\det \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -RL \end{vmatrix} = \frac{1}{LC} \neq 0 \quad \text{Rang plein donc le système est observable}$$

- Est-ce que le système est commandable ?

$$\det([B \quad AB]) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{L^2} \neq 0 \quad \text{Rang plein donc le système est commandable}$$

Sachant que le système augmenté est donné par :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

Chapitre 6. Synthèse des observateurs d'état

On applique le principe de séparation :

On peut placer indépendamment les pôles de l'observateur et du correcteur :

$$\begin{aligned} \det(sI - A + BK) &= \begin{vmatrix} s & -1 \\ \frac{1 + k_1 C}{LC} & s - \frac{R - k_2}{L} \end{vmatrix} = s^2 + \frac{R - k_2}{L} s + \frac{1 + k_1 C}{LC} \\ &= s^2 + 10(10 - k_2)s - 1000 - 10k_1 \end{aligned}$$

Doit être égal à $(s + 1)(s + 2)$ donc $K = [99.8 \quad 9.7]$

Et on trouve pour L

$$\det(sI - A + LC) = (s + 4)(s + 25)$$

Et finalement :

$$L = \begin{bmatrix} 0.9 \\ -71 \end{bmatrix}$$

Annexes

Annexe A

- **Systèmes usuels (33)**

	1° ordre	2° ordre
Seul	$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$	$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$
Bouclé Retour unitaire	$H(p) = \frac{K_{BF}}{1 + \tau_{BF} p}$ $K_{BF} = \frac{K_{BO}}{1 + K_{BO}}$ $\tau_{BF} = \frac{\tau_{BO}}{1 + K_{BO}}$	$H(p) = \frac{K_{BF}}{1 + \frac{2z_{BF}}{\omega_{0BF}} p + \frac{p^2}{\omega_{0BF}^2}}$ $\omega_{0BF} = \omega_{0BO} \sqrt{1 + K_{BO}}$ $K_{BF} = \frac{K_{BO}}{1 + K_{BO}}$ $z_{BF} = \frac{z_{BO}}{\sqrt{1 + K_{BO}}}$

- **Pulsation de coupure**

Pulsation de coupure : C'est la pulsation pour laquelle le gain a diminué de 3dB par rapport à sa valeur maximum ou par rapport au gain statique suivant la nature du système (passe bas, passe haut, passe bande). De la même façon on peut définir la pulsation de coupure à 6dB. Une diminution de **3dB** se traduit par une diminution dans un rapport de $\frac{\sqrt{2}}{2}$:

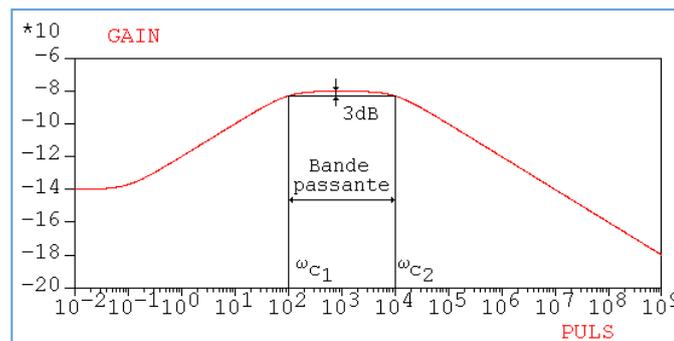
$$|H(j\omega)| = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}} = 0.707 H_{max}$$

Une diminution de **6dB** se traduit par une diminution dans un rapport de **1/2** :

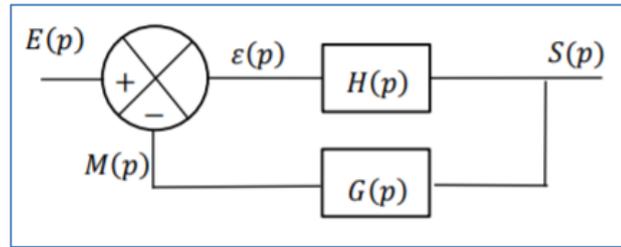
$$|H(j\omega)| = \frac{H_{max}}{2} =$$

- *

Un système en général transmet inégalement les diverses fréquences. On peut alors définir la bande passante comme étant l'intervalle de fréquences pour lequel le gain ne diminue pas de plus de 3dB (par exemple) par rapport à sa valeur maximale. Les fréquences extrêmes constituent des fréquences de coupure (basse ω_{c1} , et haute ω_{c2})



- Précision : (34)



Systèmes

Ecart des systèmes Au comparateur		
Retour non unitaire	Retour unitaire	
$\varepsilon(t) = e(t) - m(t)$	$\varepsilon(t) = e(t) - s(t)$	

$e(t)$	$E(p)$	Ecart au comparateur
$au(t)$	$\frac{a}{p}$	ε_s ou « Ecart statique »
$atu(t)$	$\frac{a}{p^2}$	ε_v ou « Ecart de traînage »

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + FTBO(p)} E(p)$$

$$E(p) = \frac{a}{p^\beta} \quad ; \quad \beta > 0$$

$$= K_{BO} \frac{FTBO(p)}{p^\alpha (1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m)}$$

$\alpha > 0 \quad ; \quad \alpha + m > n$

α : classe de la FTBO - Nombre d'intégrations

$\alpha + m$: ordre de la FTBO - Degré du dénominateur

✓ **Ecart statique**

C'est l'erreur en régime permanent entre la sortie et la loi d'entrée. Pour déterminer cette erreur on soumet le système à des entrées canoniques :

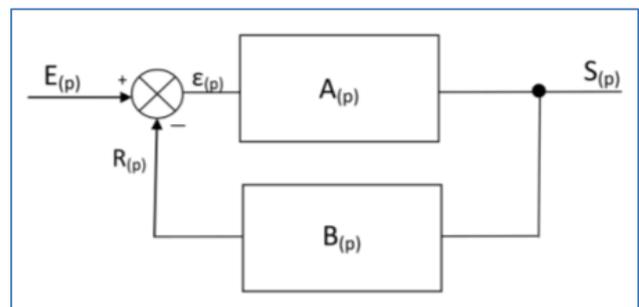
- Echelon, on parle alors d'erreur indicielle ;
- Rampe, erreur de traînage ou erreur de poursuite ;
- Accélération, erreur en accélération.

✓ **L'erreur dynamique :**

C'est l'écart instantané entre la sortie et l'entrée lors de la phase transitoire suivant l'application de l'entrée ou après une perturbation (hors du programme).

✓ **Calcul**

Dans le cas où un SLCI est défini par un modèle de connaissance dans l'espace de Laplace, on n'utilise pas la transformée inverse de Laplace pour retrouver le comportement temporel de l'écart mais on calcule la précision dans l'espace de Laplace en utilisant le Théorème de la valeur finale :



$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p)$$

$$\varepsilon = E - R = E - BS = E - AB\varepsilon$$

$$\varepsilon + AB\varepsilon = E \Rightarrow \varepsilon = \frac{E}{1 + AB}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = P \cdot \frac{E}{1 + AB}$$

Annexe B (Matlab pour l'automatique) (35)

✓ Calcul matriciel

+	addition de matrices
-	soustraction de matrices
*	produit de matrices
^	puissance
eye (n)	matrice unité (matrice identité) de taille n x n
inv (X)	inverse de la matrice carrée X
rank (X)	rang de la matrice X (nombre de colonnes ou de lignes indépendantes)
det (X)	déterminant de la matrice carrée X
X'	transposée de la matrice X
/	division à droite : A / B est équivalent à $A * \text{inv}(B)$
\	division à gauche : $A \setminus B$ est équivalent à $\text{inv}(A) * B$
eig	valeurs et vecteurs propres

✓ Représentation graphique d'une fonction à une variable $y = f(x)$

fplot	trace point par point le graphe d'une fonction
grid	ajoute une grille
xlabel	ajoute une légende pour l'axe des abscisses
ylabel	ajoute une légende pour l'axe des ordonnées
title	ajoute un titre
axis	modifie les échelles des axes
zoom	effectue un zoom
gtext	place une légende avec la souris
hold	ajoute un graphe dans la fenêtre courante
figure	crée une nouvelle fenêtre

✓ Calcul sur le polynôme

conv	produit de polynômes
residue	décomposition en éléments simples
roots	trouve les racines d'un polynôme
poly	trouve le polynôme à partir des ses racines
polyval	évalue le polynôme

✓ Représentation des systèmes linéaires

Fonctions de transfert (classe **tf**) Les fonctions de transfert se créent à l'aide de la fonction **tf**. Les premiers deux paramètres de **tf** sont des vecteurs MATLAB contenant respectivement les coefficients du numérateur et les coefficients du dénominateur, tandis que les paramètres suivants (facultatifs) spécifient des propriétés ultérieures de la fonction de transfert :

tf (num,den)	Créer une f.d.t. Continue $\frac{num}{den}$
tf(num,den,'Td',tr)	Créer une f.d.t. Continue avec retard tr
tf(num,den,te)	Créer une f.d.t. En z avec période d'échantillonnage te
tf(num,den,te,'Variable','z^-1')	Créer une f.d.t. En z
[num,den]=tfdata(fdt,'v')	Extraire le numérateur et le dénominateur
[num,den,te]=tfdata(fdt,'v')	Extraire aussi la période d'échantillonnage
[num,den,te,retard]=tfdata(fdt,'v')	Extraire encore le retard
G_zpk=zpk(zeros,poles,gain)	La forme zéros-pôles-gain
ss(A,B,C,D)	Créer un système continu en variables d'état
ss(A,B,C,D,te)	Créer un système discret avec période d'échantillonnage te
[A,B,C,D]=ssdata(sys)	Récupérer les matrices `a` partir de la variable sys
[Num,Den]=ss2tf(A,B,C,D)	Passage de E.E vers fonction de transfert
[A,B,C,D]=tf2ss(N{1},D{1})	Passage de tf vers E.E
impulse(sys)	Réponse impulsionnelles
step(sys)	Réponse indicielle

✓ Graphisme

On peut tracer les courbes sur des fenêtres graphiques séparées à condition de créer ces fenêtres à l'aide de la commande figure :

```
>> figure(1), plot(x,y), title('y');
```

```
>> figure(2), plot(x,y1), title('y1');
```

Si vous préférez tracer plusieurs courbes, dans la même fenêtre, mais dans des cadres séparés, on utilise subplot :

```
>> subplot(2,2,1), plot(x,y), title('y');
```

```
>> subplot(2,2,2), plot(x,y1), title('y1'); le graphe dans un carré au lieu du rectangle habituel.
```

plot	Affichage linéaire
loglog	Echelle log-log
semilogx	Echelle semilog sur x
semilogy	Echelle semilog sur y
line	Définition d'une ligne
title	Création d'un titre
xlabel	Commentaire sur x
ylabel	Commentaire sur y
grid	Création d'une grille
text	Commentaire sur graphe
axis	Gestion des axes (zoom)
subplot	Multi-graphe sur même figure
hold	Mode surimpression

bode(sys)	Diagramme de Bode
nyquist(sys)	Lieu de Nyquist
nichols(sys)	Diagramme de Black
margin	Comme la fonction bode mais donne en plus les marges de gain et de phase

✓ Analyse et commande

ctreb	Calcul de la matrice de la cpmmandabilite
obsv	Calcul de la matrice de l'observabilité
place	Calcul du gain de retour d'état (place placement de poles)
lqr	Régulateur linéaire quadratique optimal - temps continu
lqe	Estimateur de Kalman - temps continu
c2d	Passage d'un modèle continu à un modèle discret
d2c	Passage d'un modèle discret à un modèle continu
pzmap	Carte du Pole-zero (map).
iopzmap	Carte de Input/output pole-zero (map)
damp	Pulsation propre et coefficient d'amortissement
dcgain	renvoie le gain statique du système
lqgreg	Construction de regulateur LQG à partir du gain LQ et l'estimateur de Kalman

✓ Programmation

- **if, elseif, else**
- **while**
- **for**
- **switch, case, otherwise**
- **end**
- **break**
- **continue**

Bibliographie

1. Robert, Papanicola. *"Analyse fréquentielle des systèmes linaires"*. Lycée Jacques Amyot : s.n.
2. http://php.iai.heig-vd.ch/~mee/cours/cours_ra/chap_06/latex/chap_06.pdf.
3. Bachelier, Olivier. *Cours d'Automatique de la licence professionnelle*.
4. Choukairi, Med. *Analyse fréquentielle des signaux et systèmespage*. maroc : Université Hassan II Casablanca .
5. Granjon, Yves. *Systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état*. Paris : Dunod, 2001, 2010.
6. Cormier, Gabriel. *Asservissements Linéaires*. CANADA : s.n., 2000.
7. M.Rabi. *Régulation analogique industrielle*. ESTF- G.Thermique : s.n.
8. Sename, Olivier. *Analyse de stabilité et de performances des systèmes*. Drenoble : s.n., Septembre 2020.
9. M.K., FELLAH. *Cours d'asservissements linéaires continus*. Université Djillali Liabès – Sidi Bel-Abbès : s.n., 2013-2014.
10. ZAYANI, Hichem. *Support de cours : Régulation et contrôle des systèmes de climatisation*. Institut Supérieur des Etudes Technologiques de Sfax : s.n., 2014-2015.
11. <https://www.youtube.com/watch?v=B9lOnE6pxnw&t>. *Comment régler les marges de stabilité d'un système avec un correcteur à action proportionnelle*.
12. https://www.youtube.com/watch?v=Li_mU5bQ5IU. *Correcteur proportionnel*.
13. Correvon, Marc. *LES REGULATEURS STANDARDS*. Haute école spécialisée de suisse occidentale : s.n.
14. Granjon, Yves. *Systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret. représentation d'état*. Paris : Duno, 2001, 2010.
15. A.Meghebbar. *Module Commande Analogique*. s.l. : Université Aboubekr Belkaid Tlemcen.
16. autom, special. <http://www.specialautom.net/>. [En ligne]
17. <https://www.google.dz/search?q=echangeur+thermique&tbm>. [En ligne]
18. Mudry, Freddy. Ajustage des Paramètres d'un Régulateur PID. institut d'automatisation industriel ecole d'ingenieurs du conton duvand : s.n., 2002.
19. Mjahed, Mostafa. *commande des systèmes*. 2015.
20. Mohand Mokhtari, Michel Marie. *Applications matlab 5 et simulink 2*. france : springer, 1998.
21. Robert L. Williams II, Douglas A. Lawrence. *linear state-space control systems*. Ohio University : s.n., 2007.
22. *Asservissement des syst`emes linéaires `a temps continu Cours et Exercices*. Halalchi, Edouard Laroche.Houssem. Université de Strasbourg : s.n., 2009–2010.
23. *commande des processusreprésentation d'état*. cours, Notes de. Université Paris- sud 6-ENS de Cachan : s.n.
24. Cornier, Gabriel. *Etude des systèmes par equationdd'etats*. GLE 5313 : s.n.
25. Azzedine Moussaoui et Achor Manseur. *Commande par placement de poles pour des systèmes multivariabiles*. 2015.
26. architecture des systèmes d'information ASI 3 . INSA ROUAN. [En ligne] <http://asi.insa-rouen.fr/enseignement/siteUV/auto/cours/cours8.pdf>.
27. Larminat, Philippe de. *Analysis and Control of Linear Systems*. France : Hermès Science/Lavoisier, 2002. TJ220.A5313 2006.
28. Ainouz-Zemouche, Samia. *Observation et Commande des Systèmes*.
29. Mjahed, Mostafa. *Représentation d'Etat*. 2015.
30. Philippe de Larminat, , Hermès. *Automatique : Commande des systèmes linéaires*. paris : Lavoisier, 1996.
31. Larminat, Philippe de. *Analysis and Control of Linear Systems*. France : Hermès Science/Lavoisier, 2002. ISBN-13: 978-1-905209-35-4.
32. <https://homepages.laas.fr/fgouaisb/donnees/observateur4.pdf>. observateur d'etat . [En ligne]
33. DEFAUCHY, Denis. *Fiche résumé-Performances des systèmes asservis*. 2017.
34. Dijon, Eiffel. *Modéliser un systèmes automatique asservi*.
35. Tona, Paolino. *Introduction à MATLAB et SIMULINK*. e l'École Nationale Supérieure d'Ingenieurs Electriciens de Grenoble : s.n.

36. Hubert Egon, , Méthodes,. « *Asservissement linéaires échantillonnés et représentation d'état* ». 2001.
37. Luc Jaulin, Michel Kieffer, Olivier Didrit, Eric Walter. *Applied Interval Analysis-Springer*. 2001.
38. BAYLE, Bernard. *Automatique Continue*. Télécom Physique Strasbourg : s.n., 2016.
39. Correvon, Marc. *LES REGULATEURS STANDARDS*. haute école spécialisée de suisse occidentale : s.n.
40. <https://fr.wikipedia.org/wiki/Observateur>. wikipedia. [En ligne]