

Méthode des éléments finis

Dr. Boudjellel MOULAI ALI

Université de Relizane

Faculté des Sciences et Technologie

Département Mécanique

M@il : boudjellel.moulaiali@univ-relizane.dz

02 Avril 2023

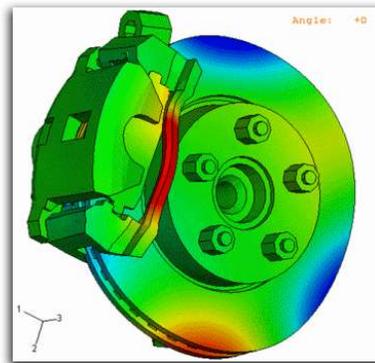


Table des matières

Objectifs	4
Introduction	5
I - Pré requis :	6
II - Exercice : Test des pré-requis	7
III - Exercice : Test des pré-requis	8
IV - Concepts de Base	9
1. Généralité.....	9
1.1. Les étapes majeure de la méthode	10
2. Rappels en élasticité linéaire	10
2.1. Tenseurs fondamentaux	10
2.2. Relations entre déplacements et déformations	11
2.3. Relations entre déformations et contraintes	12
2.4. Cas de l'élasticité plane	13
3. Méthode d'analyse matricielle.....	14
3.1. L'addition et la soustraction	14
3.2. La multiplication	15
3.3. Déterminant	15
3.4. Inverse d'une matrice	16
4. Principe des travaux virtuels.....	16
4.1. Écriture du principe des travaux virtuels	17
4.2. Discrétisation du Principe des Travaux Virtuels.....	18
4.3. Écriture du PTV pour un problème de traction - compression.....	18
V - Eléments de structures	20
1. Méthodes numériques dans le cadre de la MEF	20
1.1. Discrétisation du milieu	20
1.2. Approximation nodale et élémentaire	21
1.3. Calcul des matrices élémentaires.....	22
1.4. Assemblage et conditions aux limites	23
2. Eléments de ressort	24
2.1. Système à un ressort linéaire.....	24
2.2. Système à plusieurs ressorts linéaires	24
2.3. Notion de degrés de liberté	25
2.4. Exemple d'application1	26
2.5. Exercice : Exercice N°01	27
2.6. Exercice : Exercice N°02	28
3. Eléments de Poutre	28
3.1. Généralité	28
3.2. Matrice de rigidité élémentaire.....	28
3.3. Exercice : Exercice N°1	31
3.4. Exercice : Exercice N°2	32

4. Élément structure treillis.....	32
4.1. Généralité	32
4.2. Exemple d'application	33
4.3. Exercice	37
4.4. Exercice	38
VI - Formulation Isoparamétrique	39
1. Introduction.....	39
2. Formulation sous, super & isoparamétriques.....	40
3. La formulation Isoparamétrique.....	42
4. Élément Quadrilatéral à 4 Noeuds pour les problèmes d'avion.....	47
5. Code informatique à élément Quadrilatéraux isoparamétrique.....	49
5.1. Echantillon d'entrée/sortie.....	60
5.2. Points destress optimaux.....	62
6. Élément Lagrangien isoparamétrique pour les probleme plans.....	63
6.1. Éléments Quadratique.....	63
6.2. Éléments Cubique.....	64
7. Élément de Serendipité.....	64
8. Élément de Transition.....	67
8.1. Intégration Numérique.....	68
9. Exercices d'application.....	70
9.1. Exercice N°1.....	70
9.2. Exercice N°2.....	70
9.3. Exercice N°3.....	70
VII - Éléments Axisymétrique	71
1. Modélisation axisymétrique.....	71
2. Éléments finis axisymétriques.....	72
2.1. Volumes axisymétrique.....	72
2.2. coques axisymétriques.....	73
2.3. Autres éléments.....	73
3. Élément triangulaire du premier degré.....	74
4. Chargement d'un élément axisymétrique.....	76
5. Exemples d'application.....	77
5.1. Premier exemple.....	77
5.2. dixième exemple.....	78
VIII -Conclusion	81

Objectifs



Le cours "**méthode des éléments finis**" vise à aborder les notions fondamentales de la méthode des éléments finis à partir de l'étude des structures barre et portiques. Puis généraliser à différents problèmes de la physique pour comprendre et savoir utiliser les modèles numériques de type éléments finis dans le cadre de problèmes plus complexes.

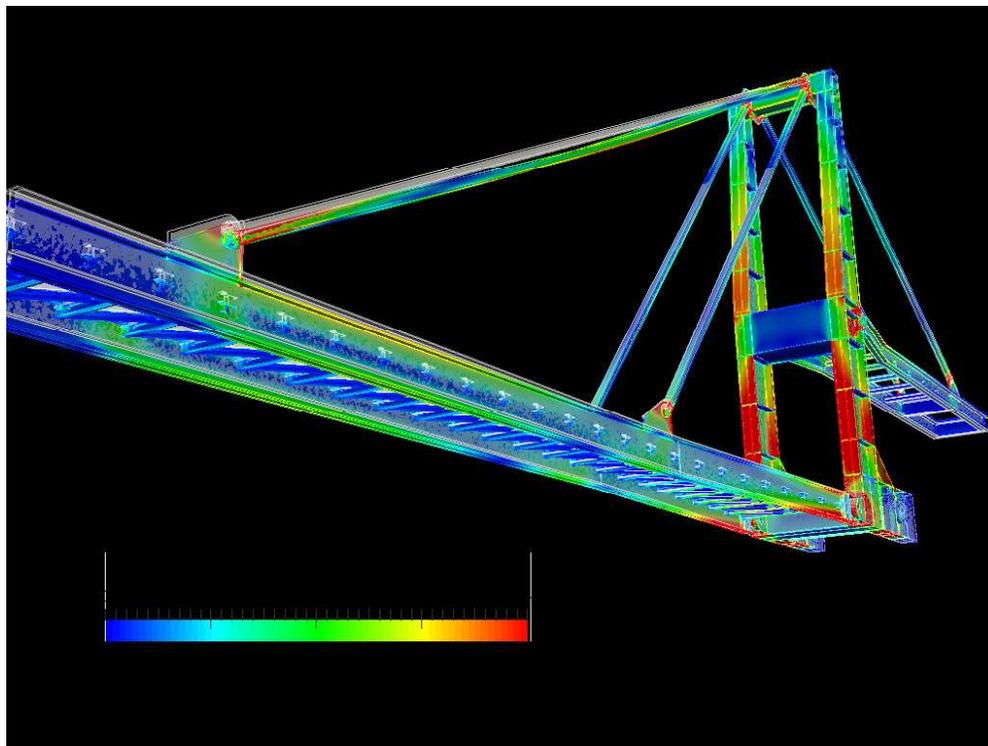
- présenter la **méthode des éléments finis** et de son implémentation pratique sur ordinateur.
- Démontrer les techniques de maillages adaptatifs et la résolution de problèmes de conception et d'optimisation.
- Connaître les principes théoriques, mathématique et techniques, accompagnés d'exemples et d'exercice d'application.

Introduction



Dans toutes les disciplines de la science et de l'ingénierie, l'accent est mis sur la détermination de ce qui se passera lorsqu'un système physique intéressant (par exemple, un bâtiment, un pont, un avion, un groupe de molécules ou même un organisme) est exposé à des influences environnementales, qui peut à son tour déclencher une réponse du système. Par exemple, si nous avons un bâtiment qui est soumis à des forces dues au poids des occupants ou à un tremblement de terre, les composants structurels du bâtiment réagiront par des déformations et des contraintes. De même, si une pièce chaude est jetée dans une grande bassine d'eau froide, la pièce se refroidira rapidement.

Les exemples ci-dessus ne sont que des cas particuliers de processus physiques dans des systèmes de matière - c'est-à-dire des changements qui se produisent dans un morceau de matière que nous l'isolons et examinons - en raison de l'interaction de ce morceau avec son environnement. Tout processus physique peut être décrit mathématiquement, ce qui signifie que nous pouvons formuler un ensemble d'expressions mathématiques qui décrivent le processus et nous permettent de spécifier comment le processus se produit dans l'espace et dans le temps.



Pré requis :



l'utilisation de la méthode des éléments finis nécessite des pré-requis dans plusieurs domaines à savoir:

 **Remarque**

- **En Mathématiques :** Algèbre linéaire, géométrie, intégration et équations différentielles.
- **En Physique :** Mécanique des solides et mécanique des milieux continus, résistance des matériaux...etc.
- Des connaissances en vibration des structures sont un plus.

Exercice : Test des pré-requis



Exercice

Comment calculer la contrainte en RDM ?

Exercice

Comment calculer la deformation en RDM ?

Exercice

Quels sont les types de sollicitation ?

Exercice

Quelles sont les propriétés des matériaux ?

Exercice

Qu'est-ce que la déformation plastique d'un matériau ?

Exercice : Test des pré-requis



Exercice

Qu'est-ce qu'une contrainte en RDM ?

- action de contact d'un objet sur un autre
- la force nécessaire pour vaincre la résistance de frottement .
- un effort par unité de surface qui s'exerce dans le matériau.

Exercice

C'est quoi une résistance à la rupture ?

- la contrainte de traction mécanique maximale avec laquelle une éprouvette peut être chargée.
- la résistance au allongement mécanique
- la capacité de matériaux d'absorber de l'énergie



1. Généralité

Dans la méthode des éléments finis, le domaine d'intérêt est divisé en **sous-domaines** appelés éléments, comme le montre la figure I.1, et nous approximations la fonction dans chaque élément séparément.

La subdivision du domaine en éléments est appelée discrétisation. L'ensemble de tous les éléments représentant un domaine constitue le maillage d'éléments finis. Comme le montre également Figure I.1, si nous voulons obtenir une précision améliorée à partir d'une analyse par éléments finis, nous pouvons établir une discrétisation différente pour le domaine, en utilisant une taille d'élément plus petite (et donc avoir un plus grand nombre d'éléments finis dans l'analyse). Le processus de re-discrétisation à l'aide d'éléments plus petits est appelé raffinement du maillage. Si plusieurs conditions sont remplies par nos approximations éléments finis, alors un raffinement du maillage correspondra à des résultats plus précis. Nous dirons qu'au fur et à mesure que nous affinons le maillage, la solution approximative par éléments finis convergera vers la solution exacte.

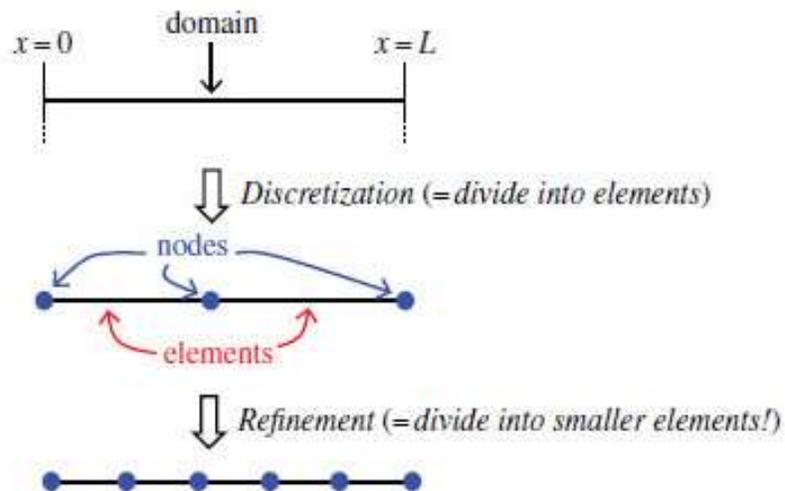
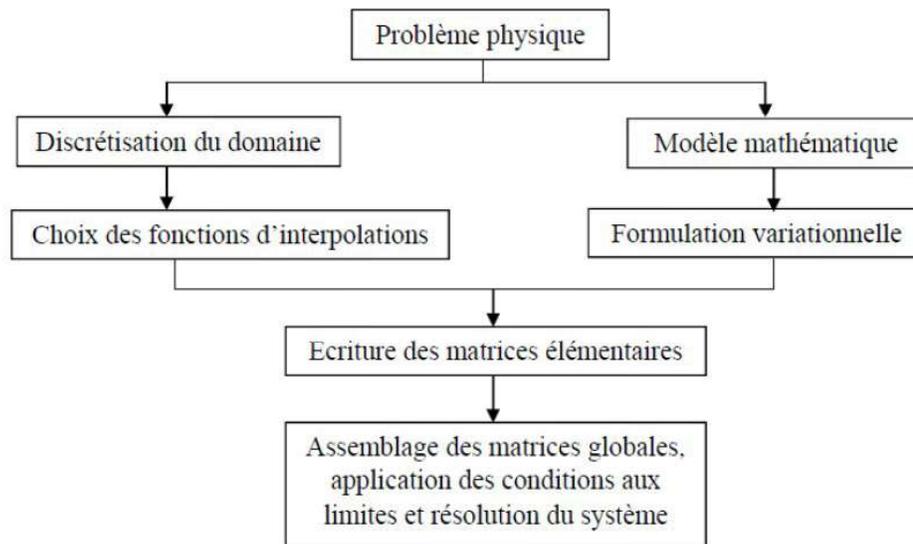


Figure I.1 : Procédure de discrétisation par éléments finis.

1.1. Les étapes majeur de la méthode

les étapes d'application de la méthode des éléments finis et les outils nécessaires à sa mise en oeuvre pour La résolution d'un problème physique suit grosso modo les étapes suivantes :



Etapes générale de la méthode des éléments finis

1. La majorité des problèmes d'ingénierie sont décrits par **des équations différentielles** aux dérivées partielles associées à des conditions aux limites définies sur un domaine et son contour. L'application de la MEF exige une réécriture de ces équations sous **forme intégrale**. La formulation faible est souvent utilisée pour inclure les conditions aux limites.
2. **Discrétiser** le domaine en éléments et calculer les connectivités de chacun ainsi que les coordonnées de ses noeuds. Elle constitue ainsi la phase de préparation des données géométriques.
3. Dans chaque élément la variable tel que le déplacement, la pression, la température, est approximée par une simple fonction linéaire, polynomiale ou autre. **Le degré du polynôme d'interpolation** est relié au nombre de noeuds de l'élément. L'approximation nodale est appropriée. C'est dans cette étape que se fait la construction des **matrices élémentaires**.
4. Toutes les propriétés de l'élément (masse, rigidité,...) doivent être assemblées afin de former le système algébrique pour les valeurs nodales des variables physiques. C'est à ce niveau qu'on utilise les connectivités calculées à l'étape 2 pour construire **les matrices globales** à partir des matrices élémentaires.
5. Le système global peut être **linéaire ou non linéaire**. Il définit soit un problème d'équilibre qui concerne un cas stationnaire ou statique ou un problème de valeurs critiques où il faut déterminer les valeurs et vecteurs propres du système qui correspondent généralement aux fréquences et modes propres d'un système physique.

2. Rappels en élasticité linéaire

2.1. Tenseurs fondamentaux

a) Tenseur des déplacements :

On considère d'abord le tenseur U_i du champ des déplacements qui est un vecteur noté U_i et qui a pour composantes (en 3D) :

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

b) Tenseur des déformations :

On considère ensuite le tenseur ϵ_{ij} du champ des déformations (appelé tenseur de Green-Lagrange linéarisé) qui est une matrice symétrique notée $[\epsilon]$ et qui a pour composantes (en 3D) :

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_y & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_z \end{bmatrix}$$

Il faut faire attention au fait que l'on utilise également d'autres composantes de déformations notées :

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= 2 \cdot \epsilon_{xy} \\ \gamma_{xz} &= 2 \cdot \epsilon_{xz} \\ \gamma_{yz} &= 2 \cdot \epsilon_{yz} \end{aligned}$$

On utilise également une notation du tenseur des déformations (qui à la base est une matrice symétrique à 9 composantes) sous la forme d'un vecteur à 6 composantes.

Dans ce cas, les composantes considérées sont les suivantes (ce qui est une source d'erreur importante car les composantes ne sont pas les mêmes) :

$$\langle \epsilon \rangle = \langle \epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z \gamma_{xy} \gamma_{xz} \gamma_{yz} \rangle$$

c) Tenseur des contraintes :

On considère enfin le tenseur du champ σ_{ij} des contraintes (appelé tenseur de Cauchy-Euler) qui est une matrice symétrique notée $[\sigma]$ et qui a pour composantes (en 3D) :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Tout comme pour les déformations, on utilise également une notation du tenseur des contraintes (qui à la base est une matrice symétrique à 9 composantes) sous la forme d'un vecteur à 6 composantes. Dans ce cas, les composantes considérées sont les suivantes :

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{xy} \tau_{xz} \tau_{yz} \rangle$$

On rappelle qu'une surface élémentaire de vecteur normal unitaire $n \boxtimes$ dans le champ de contraintes $[\sigma]$ subit des efforts par unité de surface (contraintes) $T \boxtimes$ tels que :

$$\{T\} = [\sigma] \cdot \{n\}$$

Ainsi, si les composantes des vecteurs $T \boxtimes$ et $n \boxtimes$ sont les suivantes :

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix} \text{ et } \{n\} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} \text{ avec } \|n\| = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = 1$$

On a les relations :

$$\begin{aligned} T_x &= \sigma_x \cdot n_x + \tau_{xy} \cdot n_y + \tau_{xz} \cdot n_z \\ T_y &= \tau_{xy} \cdot n_x + \sigma_y \cdot n_y + \tau_{yz} \cdot n_z \\ T_z &= \tau_{xz} \cdot n_x + \tau_{yz} \cdot n_y + \sigma_z \cdot n_z \end{aligned}$$

2.2. Relations entre déplacements et déformations

On peut déterminer facilement les déformations à partir de la connaissance des déplacements en utilisant les relations classiques :

$$\epsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \gamma_{xz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

D'où on déduit que :

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

On peut exprimer cette même relation matricielle en utilisant les notations tensorielles (ou indicielles).

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \cdot (U_{i,j} + U_{j,i})$$

Les déformations sont donc globalement homogènes aux dérivées premières des déplacements par rapport aux variables d'espace. Ceci a une importance particulière dans l'interprétation des résultats de calcul par EF car, en EF, on calcule les déformations en dérivant les composantes de déplacement.

Les relations entre le champ de déplacements et le champ de déformations impliquent des conditions (ou relations) de compatibilité entre composantes du tenseur des déformations. Ces conditions de compatibilité sont exprimées par les 6 relations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} &= 0 & \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial z} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} &= 0 & \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial y \partial z} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial z} &= 0 & \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned}$$

Ces relations s'expriment sous forme tensorielle par :

$$\varepsilon_{kl,ij} + \varepsilon_{ij,kl} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0$$

2.3. Relations entre déformations et contraintes

On peut ensuite déterminer facilement les contraintes à partir de la connaissance des déformations en utilisant la **loi de Hooke**. Cette loi peut être exprimée de manière matricielle (pour un état de contraintes et de déformations tridimensionnels) :

$$\{\sigma\} = [H] \cdot \{\varepsilon\}$$

La matrice [H] est appelée **matrice de Hooke** et vaut pour un matériau homogène et isotrope défini par son module de Young E et son coefficient de Poisson ν :

$$[H] = \frac{E}{(1-2\nu) \cdot (1+\nu)} \cdot \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \text{ ou } a = \frac{(1-2\nu)}{2}$$

On peut exprimer cette même relation matricielle en utilisant les notations tensorielles (ou indicielles). La loi de Hooke s'exprime alors par :

$$\sigma_{ij} = \lambda \cdot \delta_{ij} \cdot \varepsilon_{kk} + 2 \cdot G \cdot \varepsilon_{ij}$$

où :

G est le module de cisaillement :

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)}$$

λ est le module volumétrique :

$$\lambda = \frac{\nu \cdot E}{(1 + \nu)(1 - 2 \cdot \nu)}$$

δ_{ij} est le tenseur de Kronecker

2.4. Cas de l'élasticité plane

Dans certaines configurations de **géométrie** et de **sollicitation**, il n'est pas nécessaire de considérer un état de déformations et de contraintes complètement tridimensionnel.

C'est le cas lorsqu'on considère des poutres sous certaines sollicitations. C'est le cas également en **élasticité plane** où l'on considère, selon certaines hypothèses, des états simplifiés de déformations et de contraintes (états plans de déformations et de contraintes).

Si on peut appliquer l'hypothèse des déformations planes, alors on considère que l'on a un **état plan de déformations** et par conséquent, la matrice des déformations se réduit aux termes non nuls suivants :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'état de déformations planes correspond, pour ce qui est des contraintes, à un état de contraintes tridimensionnel où certaines composantes sont néanmoins nulles.

En effet, pour un état de déformations planes, les termes non nuls de la matrice des contraintes sont les suivants :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Cet **état de déformations** peut se produire pratiquement pour des **objets très épais** dans certaines conditions de sollicitation. On résume alors la relation entre les

contraintes et les déformations pour un état de déformations planes par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [H_{DP}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1 - 2 \cdot \nu)(1 + \nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} - \nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\text{avec } \sigma_z = \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{E \cdot \nu}{(1 - 2 \cdot \nu) + (1 + \nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

Une autre hypothèse possible est celle des **contraintes planes**. On considère ici que l'on a un état plan de contraintes et que, par conséquent, la matrice des contraintes se réduit aux termes non nuls suivants :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'**état de contraintes planes** correspond pour ce qui est des déformations à un état de déformations tridimensionnel où certaines composantes sont néanmoins nulles. En effet, pour un état de contraintes planes, les termes non nuls de la matrice des déformations sont les suivants :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Cet état de contraintes peut notamment être considéré, de manière pratique, pour des plaques minces chargées dans leur plan. On résume alors la relation entre les contraintes et les déformations, pour un état de contraintes planes par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [H_{CP}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \text{ avec } \varepsilon_z = \frac{-\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

3. Méthode d'analyse matricielle

Les matrices sont des tableaux où les éléments qui le contiennent sont des scalaires (a_{11}, a_{12}, \dots).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- A : Matrice de (m) lignes et (n) colonnes, ($m \times n$) s'appelle la dimension (ordre) d'une matrice
- Vecteur lignes(-) contient une seule ligne et (n) colonnes, ordre ($1 \times n$)
- Vecteur colonnes(l) contient une seule colonne et (m) lignes, ordre ($m \times 1$)

transposé d'une matrice [A] et la matrice [A]^T :

la transposition d'une matrice signifie que son vecteur ligne devient vecteur colonne et vice versa

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \Rightarrow [A]^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}; \quad a_{mn} \Rightarrow a_{nm} \text{ et } A(4 \times 3) \Rightarrow A^T(3 \times 4)$$

3.1. L'addition et la soustraction

Condition : les matrices doivent être de même ordre.

pour l'addition $A=B+C$ on a, $a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}$ et même pour la soustraction $A=B-C$ on a, $a_{ij}=b_{ij}-c_{ij}$.

$$A = B + C \Rightarrow A = \begin{bmatrix} b_{11} + c_{11} & b_{12} + c_{12} & \dots & b_{1n} + c_{1n} \\ b_{21} + c_{21} & b_{22} + c_{22} & \dots & b_{2n} + c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} + c_{m1} & b_{m2} + c_{m2} & \dots & b_{mn} + c_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A = B - C \Rightarrow A = \begin{bmatrix} b_{11} - c_{11} & b_{12} - c_{12} & \dots & b_{1n} - c_{1n} \\ b_{21} - c_{21} & b_{22} - c_{22} & \dots & b_{2n} - c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} - c_{m1} & b_{m2} - c_{m2} & \dots & b_{mn} - c_{mn} \end{bmatrix}$$

? Exemple

soit les deux Matrice [A] & [B] deux même dimension (3x3) :

$$[A] = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 8 \\ 6 & 9 & 9 \end{bmatrix}, \text{ et } [B] = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 8 \\ 11 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

$$[A] + [B] = [C] = \begin{bmatrix} 5+4 & 3+1 & 2+2 \\ 4+3 & 7+8 & 8+8 \\ 6+11 & 9+9 & 9+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 4 \\ 7 & 15 & 16 \\ 17 & 18 & 16 \end{bmatrix}$$

$$[A] - [B] = [E] = \begin{bmatrix} 5-4 & 3-1 & 2-2 \\ 4-3 & 7-8 & 8-8 \\ 6-11 & 9-9 & 9-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3.2. La multiplication

Condition : il faut que le nombre des colonnes de la 1ère matrice soit égale au nombre des ligne de la 2ème matrice. Par conséquent une matrice de (m*n) peut être multipliée par une matrice de (n*q).

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik} \cdot c_{kj}$$

? Exemple

soit les deux matrice suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 9 & 13 \\ 10 & 14 \\ 11 & 15 \\ 12 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1*9+2*10+5*11+6*12 & 1*13+2*14+5*15+6*16 \\ 3*9+4*10+7*11+8*12 & 3*13+4*14+7*15+8*16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 156 & 212 \\ 240 & 328 \end{bmatrix}$$

On remarque que : (2*4)x(4*2)=(2*2) donc :(m*n)x(n*q)=(m*q)

3.3. Déterminant

Soit [A] matrice d'ordre 3 tel que :

$$A = \begin{bmatrix} ' + ' ' - ' ' + ' \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = +a_{11} \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

? Exemple

soit la matrice suivant :

$$A = \begin{bmatrix} ' + ' ' - ' ' + ' \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = +1 \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = 6$$

3.4. Inverse d'une matrice

soit une matrice $[A]$, pour calculer la matrice inverse de $[A]$, il faut que matrice $[A]$ soit carré et le déterminant doit être différent de zéro :

$$[A]^{-1} = (\text{com } A) / |A|$$

? Exemple

soit une matrice $[M]$ de dimension (3×3) :

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix} \begin{matrix} i/j \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

- calculer $\det(A)$:

$$|A| = +1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (50 - 48) - 2 \cdot (40 - 42) + 3(32 - 35) = -3$$

- Calculer $\text{com}(A)$:

$$\text{Com}(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ (+i) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} & (-i) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} & (+i) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ (-i) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & (+i) \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} & (-i) \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ (+i) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & (-i) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} & (+i) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 4 & -11 & 6 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 2 & -11 & 2 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc : } A^{-1} = \frac{\text{com}(A)}{|A|} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 2 & -11 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} * \left(\frac{1}{-3}\right) = \begin{pmatrix} -2/3 & -4/3 & 1 \\ -2/3 & 11/3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier le résultat par le produit suivant :

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [I]$$

4. Principe des travaux virtuels

Dans certains domaines de la physique, des considérations énergétiques permettent la formulation du problème en tant que principe variationnel, aboutissant

ainsi à une formulation intégrale. L'intérêt de ces principes est de fournir directement la forme intégrale sans avoir à passer par les équations aux dérivées

partielles comme nous l'avons fait dans le cadre des méthodes variationnelles.

La formulation mathématique du principe est basée sur les mêmes hypothèses de modélisation du problème physique. En mécanique, le Principe des Travaux Virtuels (PTV) en déplacement est le plus couramment utilisé.

4.1. Écriture du principe des travaux virtuels



Pour tout système matériel D en mouvement par rapport à un repère galiléen, pour tout déplacement virtuel δu à tout instant $\delta A = \delta T$ avec :

$$\delta A = \int_D \vec{\gamma}(P) \cdot \delta \vec{u} \, dm(P) = \int_D \delta \vec{u} \cdot \rho \ddot{\vec{u}} \, dV$$

travail virtuel des quantités d'accélération

$$\delta T = - \int_D \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\delta \epsilon}} \, dV + \int_D \delta \vec{u} \cdot \vec{f} \, dV + \int_{\partial D} \delta \vec{u} \cdot \vec{T} \, dS$$

travail virtuel des efforts intérieurs et extérieurs



Du fait des relations déplacements - déformations $\delta \epsilon = \text{grad } \delta u$, nous obtenons la forme (1) du PTV.

$$\forall \delta \vec{u}, \int_D \rho \delta \vec{u} \cdot \ddot{\vec{u}} \, dV = - \int_D \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\text{grad}_s \delta \vec{u}}} \, dV + \int_D \delta \vec{u} \cdot \vec{f} \, dV + \int_{\partial D} \delta \vec{u} \cdot \vec{T} \, dS$$

Forme (1) du PTV



On peut dès à présent constater que cette équation intégrale coïncide avec la formulation variationnelle du problème, ce n'est évidemment pas un hasard. Nous allons transformer cette forme intégrale par intégrations par parties afin de retrouver l'équation locale et les conditions aux limites du problème. Vous notez que la démarche est rigoureusement l'inverse de celle utilisée dans le paragraphe précédent.

$$\int_D \rho \delta \vec{u} \cdot \left(\ddot{\vec{u}} - \text{div } \overline{\overline{\sigma}} - \vec{f} \right) \, dV = - \int_D \text{div} \left(\overline{\overline{\sigma}} \delta \vec{u} \right) \, dV + \int_{\partial D} \delta \vec{u} \cdot \vec{T} \, dS$$

Appliquons le théorème d'Ostrogradsky, nous obtenons :

$$\forall \delta \vec{u}, \int_D \delta \vec{u} \cdot \left(\rho \ddot{\vec{u}} - \text{div } \overline{\overline{\sigma}} - \vec{f} \right) \, dV = \int_{\partial D} \delta \vec{u} \cdot \left(\vec{T} - \overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{n} \right) \, dS$$

Forme (2) du PTV

Pour un champ de déplacements cinématiquement admissible nous avons $\forall M \in \Gamma_u, \delta u = 0$. La forme intégrale précédente nous permet de retrouver :

- l'équation locale : $\forall M \in D, \rho \ddot{u} - \text{div } \sigma = f$
- les conditions sur les efforts donnés : $\forall M \in \Gamma_\sigma, \sigma \cdot n = T_d$

La boucle est fermée, nous sommes au point de départ des méthodes variationnelles. Il y a équivalence entre le PTV et le système d'équations différentielles : équations locales et conditions aux limites du problème.

4.2. Discrétisation du Principe des Travaux Virtuels



La discrétisation du PTV consiste à utiliser une approximation pour exprimer le champ des déplacements et le champ des déplacements virtuels. En pratique, nous utilisons la même approximation ce qui permet d'obtenir une expression matricielle symétrique.

Avant d'utiliser l'approximation précisons la nature des conditions aux limites, pour exprimer l'intégrale sur la frontière du domaine :

$$\int_{\partial D} \delta \vec{u} \cdot \vec{T} \, dS = \int_{\Gamma_u} \delta \vec{u} \cdot \vec{T}_I \, dS + \int_{\Gamma_\sigma} \delta \vec{u} \cdot \vec{T}_d \, dS$$



Cette écriture fait apparaître explicitement le champ des efforts inconnus (TI : actions de liaison) correspondant aux conditions aux limites cinématiques $\forall M \in \Gamma_u, u = u_d$. Si nous utilisons une approximation quelconque du champ des déplacements, nous obtenons une équation intégrale pour deux champs inconnus, et nous ne pourrions pas résoudre le problème. Cette méthode s'apparente à la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Pour résoudre, il faut tenir compte a posteriori des conditions aux limites cinématiques dans les équations du modèle.

$$\forall \vec{u}^* \text{ C.A.}, \int_D \delta \vec{u}^* \cdot \rho \ddot{\vec{u}}^* \, dV = - \int_D \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\text{grad}_s}} \delta \vec{u}^* \, dV + \int_D \delta \vec{u}^* \cdot \vec{f} \, dV + \int_{\Gamma_\sigma} \delta \vec{u}^* \cdot \vec{T}_d \, dS$$

Si nous utilisons une approximation dite cinématiquement admissible, nous obtenons la même équation intégrale que celle déduite de la méthode variationnelle écrite dans les mêmes conditions :

« Hervé Oudin. Méthode des éléments finis. Engineering school. Ecole Centrale de Nantes, 2008, pp.63. »

4.3. Écriture du PTV pour un problème de traction - compression



Soient les hypothèses de modélisation suivantes :

- petits déplacements $u(M, t) = u(x, t)x_0$
- petites déformations $\epsilon_{xx} = u_{,x}$
- milieu homogène isotrope élastique $\sigma_{xx} = E \cdot \epsilon_{xx}$

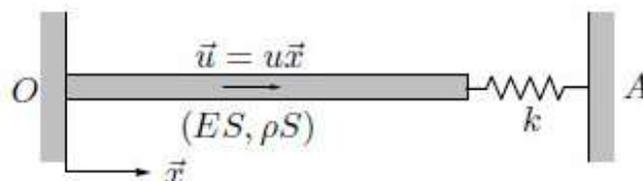


Figure 1 - Traction-compression

Compte tenu de ces relations, le Principe des Travaux Virtuels s'écrit :

$$\forall \delta \vec{u}, \int_0^\ell \ddot{u} \delta u \rho S \, dx = - \int_0^\ell u_{,x} \delta u_{,x} ES \, dx - k(u(A) - u(\ell, t))(u(A) - u(\ell)) + F_O \delta u_O + F_A \delta u_A$$

Utilisons un champ de déplacement virtuel cinématiquement admissible $\delta u_0 = 0$ et $\delta u_A = 0$. Le PTV se réduit alors à :

$$\forall \delta \bar{u} \text{ c.a.} \quad \int_0^\ell \ddot{u} \delta u \rho S dx = - \int_0^\ell u_{,x} \delta u_{,x} ES dx + k(u(A) - u(\ell, t)) \delta u(\ell)$$

Approximation à un paramètre

Soit $u^*(x, t) = x.q(t)$ et une fonction de pondération utilisant les mêmes fonctions de forme, à savoir $\delta u(x) = x \delta q$. Cette approximation est cinématiquement admissible et nous pouvons donc utiliser la forme (1) qui nous conduit à l'équation suivante :

$$\forall \delta q, \delta q \left[\left(\int_0^\ell \rho S x^2 dx \right) \ddot{q} + \left(\int_0^\ell ES dx + k \ell^2 \right) q \right] = 0$$

soit $m \ddot{q} + k q = 0$ avec $m = \frac{\rho S \ell^3}{3}$ et $k = ES \ell + k \ell^2$. Posons $\alpha = \frac{ES}{k \ell}$, l'approximation de la première pulsation propre est $\omega_1 = \frac{3(1+\alpha)}{\alpha} \frac{E}{\rho \ell^2}$. Pour pouvoir comparer avec la solution analytique, supposons que $\alpha = 10$. La solution analytique est alors $\omega_1 = 1,632 \frac{E}{\rho \ell^2}$ et l'approximation $\omega_1 = 1,817 \frac{E}{\rho \ell^2}$, soit une erreur de 11%. Cette erreur est importante car l'approximation n'est pas assez riche.

Approximation à deux paramètres

Soit une nouvelle approximation cinématiquement admissible plus riche à deux paramètres $u^*(x, t) = x.q_1 + x^2.q_2 = w(x)q(t)$, nous obtenons :

$$\mathbf{K} = \frac{ES \ell}{3} \begin{bmatrix} 3 & 3\ell \\ 3\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} + k \ell^2 \begin{bmatrix} 1 & \ell \\ \ell & \ell^2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{M} = \frac{\rho S \ell^3}{60} \begin{bmatrix} 20 & 15\ell \\ 15\ell & 12\ell^2 \end{bmatrix}$$

d'où l'approximation des deux premières pulsations propres $\omega_1 = 1,638 E/\rho \cdot \ell^2$ et $\omega_2 = 5,725 E/\rho \cdot \ell^2$.

L'erreur sur l'approximation de la première pulsation est de 0,4% : l'enrichissement du champ de déplacement améliore sensiblement le calcul des pulsations propres



1. Méthodes numériques dans le cadre de la MEF

Les principales étapes de construction d'un modèle éléments finis sont les suivantes :

1. Discrétisation du milieu continu en sous domaines.
2. Construction de l'approximation nodale par sous domaine.
3. Calcul des matrices élémentaires correspondant à la forme intégrale du problème.
4. Assemblage des matrices élémentaires - Prise en compte des conditions aux limites.
5. Résolution du système d'équations.

<https://meefi.pedagogie.ec-nantes.fr/MEF/MEF.htm>¹

1.1. Discrétisation du milieu

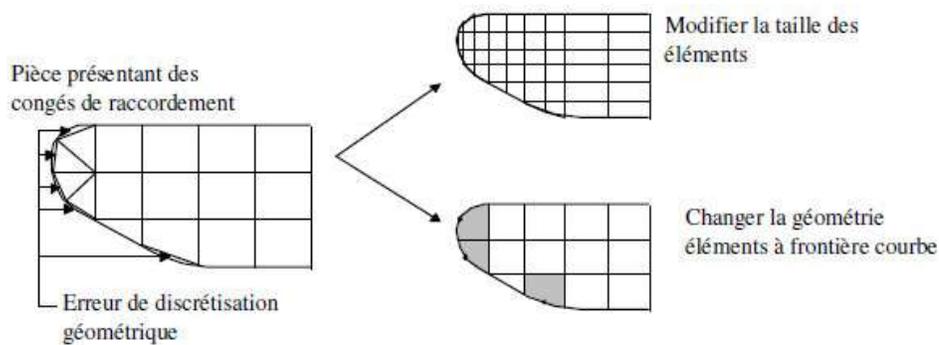
Cette opération consiste à décomposer le domaine continu en un nombre fini de sous domaines « éléments finis ».

$$D = \sum_{e=1}^{ne} D_e \quad \text{telle que} \quad \lim_{\text{taille des } e \rightarrow 0} \left(\bigcup_e D_e \right) = D$$

Remarque

Il ne doit y avoir ni recouvrement ni trou entre deux éléments ayant une frontière commune. De plus lorsque la frontière du domaine est complexe, une erreur de discrétisation géométrique est inévitable.

Cette erreur doit être estimée, et éventuellement réduite en modifiant la forme ou en diminuant la taille des éléments concernés.

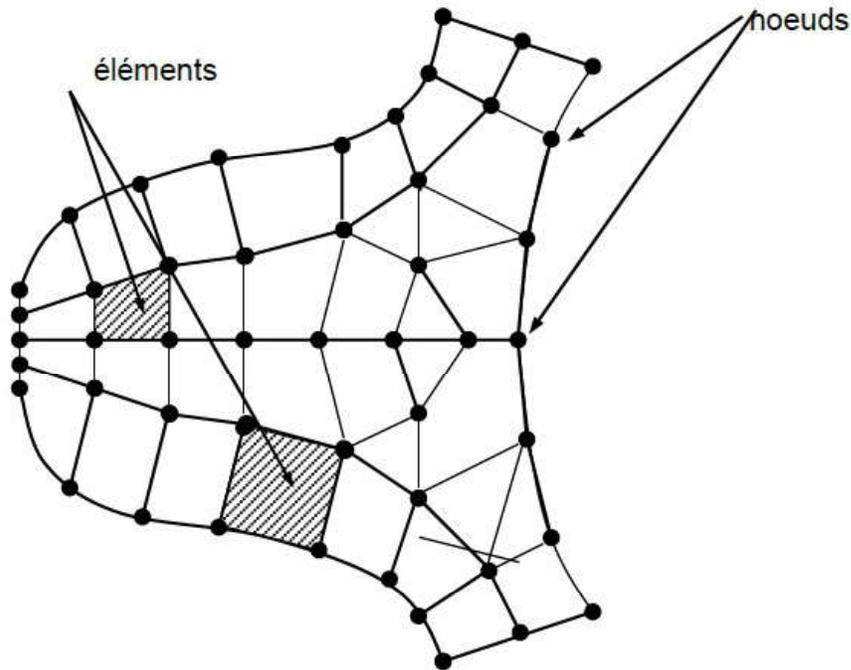


Erreur de discrétisation géométrique

¹ Polycopié de cours Méthode des éléments finis

1.2. Approximation nodale et élémentaire

Une description non-sophistiquée de la MEF pourrait être définie sous la forme suivante : la structure à analyser est divisée en plusieurs éléments. Ces éléments sont ensuite reconnectés par l'intermédiaire des nœuds (Fig. 1.2). Ces nœuds maintiennent les éléments dans un ensemble unitaire.



Discretisation d'une structure en nœuds et éléments (dent d'une roue dentée).

Il existe plusieurs formes d'éléments classiques correspondant à des domaines à une, deux ou trois dimensions. Chaque type d'élément est identifié par un nom précisant sa forme et par le nombre de nœuds géométrique qui le composent.

Eléments	linéaires	paraboliques (quadratiques)	cubiques
unidimensionnels			
bidimensionnels			
tridimensionnels			

différents type d'élément utilisés dans MEF

1.3. Calcul des matrices élémentaires

Présentons maintenant les techniques numériques élémentaires (utilisées sur chaque élément) permettant de calculer les formes matricielles déduites de la formulation variationnelle (forme intégrale) d'un problème de physique.

Le calcul des matrices élémentaires nécessite une dérivation puis une intégration sur le domaine élémentaire. Le calcul analytique n'est possible que pour des éléments très simples, les éléments monodimensionnels ou en 2D le T3 et le Q4 rectangulaire. Un code éléments finis a donc recours aux calculs numériques, basés sur l'utilisation d'éléments de référence, de la matrice Jacobienne de la transformation géométrique, et de l'intégration numérique pour calculer les coefficients des matrices.

Ce paragraphe présente quelques aspects du calcul numérique, indispensables pour comprendre les erreurs numériques liées à la forme du maillage, lors de l'analyse de résultats.

Transformation géométrique



Tout élément réel peut être défini comme l'image par une transformation géométrique d'un élément parent dit de référence pour lequel les fonctions d'interpolation sont connues.

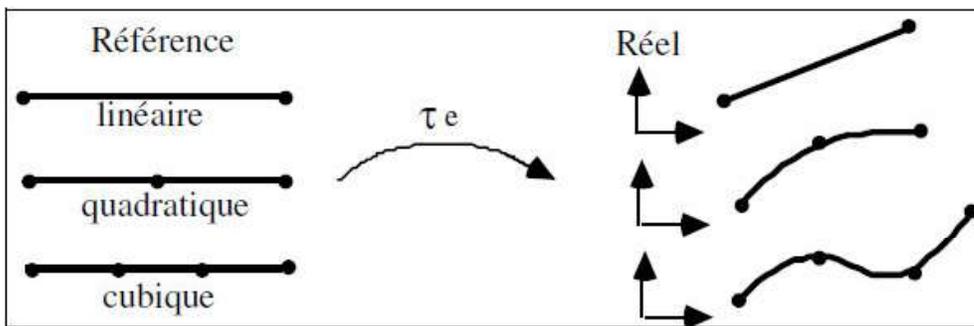
La transformation géométrique définit les coordonnées (x, y, z) de tout point de l'élément réel à partir des coordonnées (s, t, u) du point correspondant de l'élément de référence. Un même élément de référence permet donc de générer toute une classe d'éléments réels.

En 3D la transformation géométrique est définie par :

$$\begin{cases} x = \langle N_g(s, t, u) \rangle \{x_n\} \\ y = \langle N_g(s, t, u) \rangle \{y_n\} \\ z = \langle N_g(s, t, u) \rangle \{z_n\} \end{cases} \text{ avec : } \begin{cases} \{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\} \\ \langle N_g(s, t, u) \rangle \end{cases}$$

Dans ce cours nous ne présentons que des **éléments iso paramétriques** pour lesquels les nœuds d'interpolation et les nœuds géométriques sont confondus. Les fonctions de la transformation géométrique N_g seront identiques aux fonctions d'interpolation N .

Éléments à une dimension.

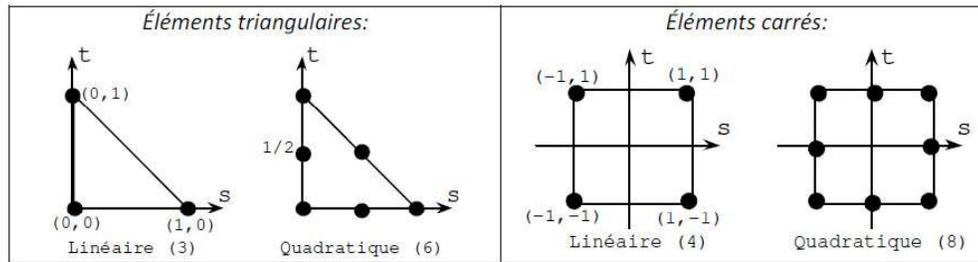


Transformations géométriques d'éléments à une dimension

Éléments à deux dimensions.

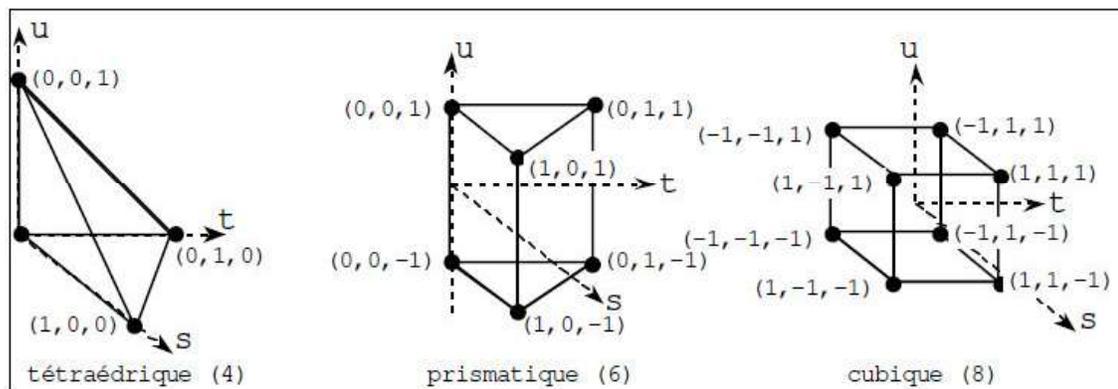


Pour ces éléments les transformations géométriques conduisent respectivement à des frontières linéaires, quadratiques.



Éléments à trois dimensions.

? Exemple



Éléments volumiques à transformation linéaire

1.4. Assemblage et conditions aux limites

Le comportement de chaque élément est décrit par un groupe d'équations algébriques. Dans l'analyse des contraintes ces équations sont des équations d'équilibre des nœuds. Du fait que le nombre de ces équations est très grand (centaines ou milliers), l'utilisation d'un ordinateur est absolument obligatoire.

Autrement dit, dans un élément, une quantité de champ (ex. le champ de déplacement) est interpolé à partir des valeurs existantes dans les nœuds. En connectant les éléments ensemble, la quantité de champ devient interpolée sur l'ensemble de la structure. Les meilleures valeurs de la quantité de champ dans les nœuds sont celles qui minimisent certaines fonctions (telle que l'énergie totale). Le processus de minimisation génère un ensemble d'équations algébriques simultanées pour les différentes valeurs de la quantité de champ dans les nœuds.

Cet ensemble d'équations est décrit sous forme matricielle par :

$$\{F\} = [K] \cdot \{U\}$$

où :

$\{U\}$ = vecteur d'inconnues (ex : vecteur des déplacements) ;

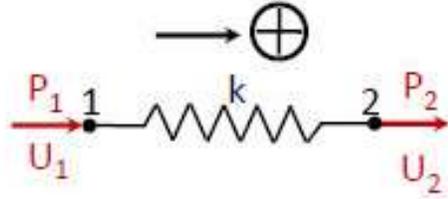
$[K]$ = matrice des constantes (ex : matrice de rigidité) ;

$\{F\}$ = vecteur des chargements (ex : vecteur des forces nodales).

2. Eléments de ressort

2.1. Système à un ressort linéaire

On considère le ressort linéaire de raideur « k » de la figure ci dessous :



Le déplacement U_1 et U_2 des 2 extrémités du ressort correspond à l'application des forces axiales P_1 et P_2 .

Si le ressort est en équilibre statique, la somme des forces est nulle:

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = 0 \Rightarrow P_1 = -P_2$$

Le déplacement du ressort soumis à ces forces est égale à $(U_2 - U_1)$, et est proportionnel à la force appliquée:

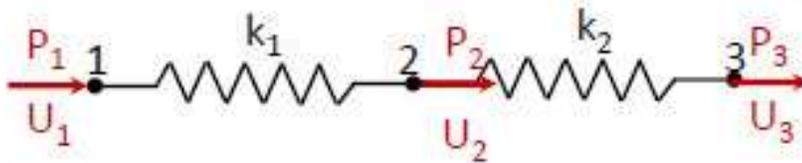
$$P_1 = K(U_1 - U_2) \quad P_2 = K(U_2 - U_1)$$

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}}_{\text{vecteur force élémentaire}} = \underbrace{\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}}_{\text{Matrice de rigidité élémentaire}} \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}}_{\text{vecteur de déplacement}}$$

$$\text{avec : } [K] = \begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix}$$

2.2. Système à plusieurs ressorts linéaires

Considérons maintenant le système de 2 ressorts :



L'équilibre statique au noeud 1 impose que la force appliquée P_1 soit égale à la force de tension du ressort 1 :

$$P_1 = K_1(U_1 - U_2)$$

De même pour le noeud 2, la force extérieure est égale à la somme des forces de tension des ressorts 1 et 2 :

$$P_2 = K_1(U_2 - U_1) + K_2(U_2 - U_3)$$

Pour le noeud 3, on obtient :

$$P_3 = K_2(U_3 - U_2)$$

Ces 3 équations forment un système linéaire de (3 x 3) de la forme :

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow [K] = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 \\ -K_1 & K_1 + K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2 \end{bmatrix}$$

Ceci est appelé **assemblage** et la matrice obtenue est **la matrice de rigidité de tout le système** (formé dans ce cas de 02 éléments ressorts) ;

Elle est obtenue par assemblage des matrices élémentaires de chaque ressort.

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 \\ -K_1 & K_1 + K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

Ce système linéaire n'admet, pas tel quel, de solutions uniques, puisque la solution est définie à une translation arbitraire suivant l'axe « Ox »

Pour rendre la solution unique, il faut imposer au moins une condition aux limites sur le déplacement en 1 ou en 3.

Par exemple si le système est fixé en 1, le déplacement est nul, et le système admet une solution unique. Il s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} R_x \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 \\ -K_1 & K_1 + K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

La force de réaction en 1 est évidemment obtenue après résolution de système d'équation réduit:

$$\underbrace{P_1}_{R_x} = K_1 (\underbrace{U_1}_0 - U_2) \Rightarrow R_x = -K_1 U_2$$

L'effort dans chaque ressort est exprimé ainsi :

$$F = K (U_j - U_i)$$

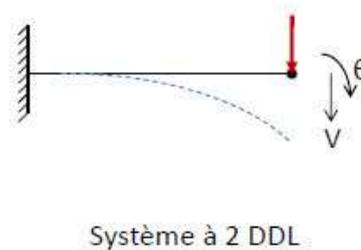
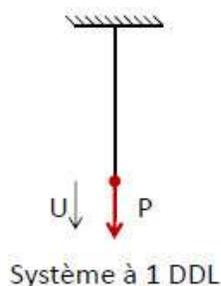
- U_i représente le déplacement au noeud origine « i »;
- U_j représente le déplacement au noeud extrémité « j ».

$$F_1 = -R_1 = K_1 (U_2 - 0) \text{ pour ressort (1)}$$

$$F_2 = K_2 (U_3 - U_2) \text{ pour ressort (2)}$$

2.3. Notion de degrés de liberté

Le nombre de degrés de liberté, (NDDL) et la possibilité d'une structure de se déplacer, il est défini par le nombre total des possibilités des déplacements des noeuds.



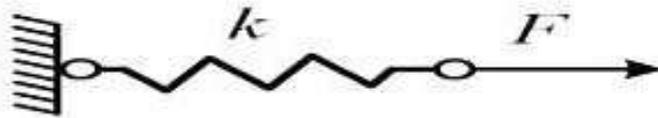
Dans le cas des ressorts, nous avons un seul DDL; il s'agit du déplacement axial « U », La taille de la matrice de rigidité en dépend; elle est donnée par :

(NDDL x Nombre de noeuds)

2.4. Exemple d'application1

? Exemple

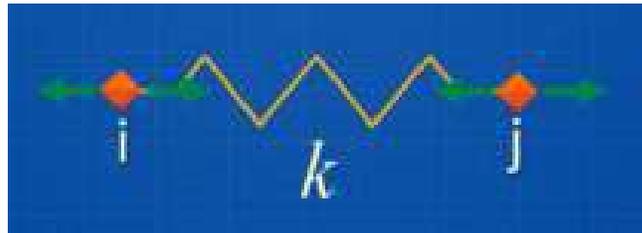
Soit un ressort de raideur $K = 100 \text{ KN/m}$ soumis à un effort de traction de $F = 15 \text{ KN}$.



1. Ecrire les matrices de rigidité élémentaires .
2. Faire l'assemblage.
3. Calculer les déplacements aux noeuds.
4. Calculer les efforts dans les ressorts.

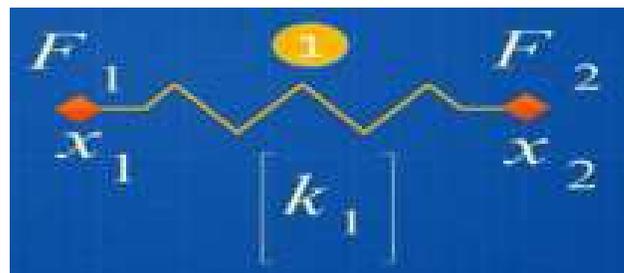
cet exercice traite l'exemple le plus simple, les ressorts à 1D en statique.

Ce sont des éléments définis par leur coefficient de raideur K et deux noeuds qui ne peuvent que glisser sur un seul axe chacun.



Un seul DDL par noeud

1. En commence par le maillage.



2. établir le tableau de connectivité.

Elements e	Noeuds	
	i	j
1	1	2

tableau de connectivité

3. écrire la matrice de rigidité élémentaire et globale.

Dimension de la matrice globale = 1 DDL x 2 Noeuds = matrice (2 x 2).

$$[K] = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1 \end{bmatrix}$$

4. écrire l'équation d'équilibre statique.

$$\{F\} = [K] \cdot \{U\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}$$

5. application des conditions aux limites.

On va simplifier l'équation d'équilibre statique en appliquant les conditions aux limites.

On un encastrement au niveau du nœud N°1 signifiant un déplacement x_1 nulle : ($x_1=0$)

Le système simplifier sera :

$$\begin{Bmatrix} R_x \\ F_{ext} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

$$F_{ext} = K_1 * x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{F_{ext}}{K_1} = \frac{15}{100} \Rightarrow x_2 = 0.15 \text{ m}$$

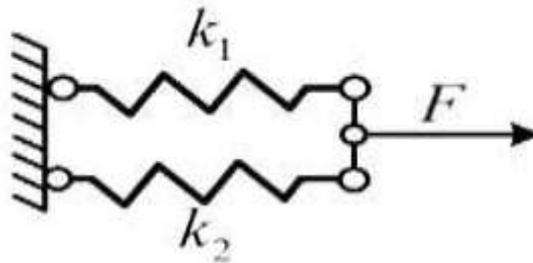
Une fois le déplacement est calculer, en revient au système globale pour calculer les réactions.

$$\begin{Bmatrix} R_x \\ 15 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.15 \end{Bmatrix}$$

$$R_x = K_1 * 0 - K_1 * 0.15 \Rightarrow R_x = -100 * 0.15 \Rightarrow R_x = -15 \text{ KN}$$

2.5. Exercice : Exercice N°01

Soit deux ressort de raideur $K_1 = 120 \text{ KN/m}$, $K_2 = 120 \text{ KN/m}$, soumit à un effort de traction de $F = 20 \text{ KN}$.



Question

Ecrire les matrices de rigidité élémentaires .

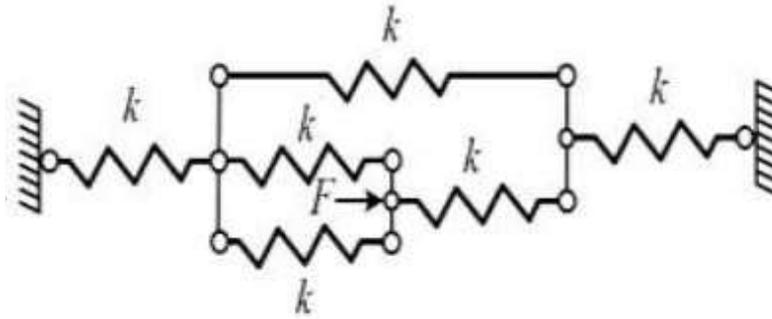
Faire l'assemblage.

Calculer les déplacements aux nœuds.

Calculer les efforts dans les ressorts.

2.6. Exercice : Exercice N°02

on donne $K = 120 \text{ KN/m}$, $F = 20 \text{ KN}$.



Question

Ecrire les matrices de rigidité élémentaires.

Ecrire les matrices de rigidité globale.

Calculer les déplacements aux nœuds ainsi les efforts dans les ressorts.

3. Eléments de Poutre

3.1. Généralité

La poutre est un élément de structure dont les dimensions transversales sont généralement petites par rapport à la longueur et qui est soumis à un système de sollicitation qui le fait fléchir. Nous allons successivement étudier les problèmes de flexion simple d'une poutre dans un plan. Nous nous limitons dans ce paragraphe au cas des structures formées par des poutres droites dont les lignes moyennes sont contenues dans un même plan et chargées par des forces normales ou transversales appartenant à ce plan, ou par des moments perpendiculaires à ce plan.

Dans ces conditions, les lignes moyennes restent dans le plan après déformation. Nous utilisons le plan (Oxy) comme plan moyen. Les noeuds associés à l'élément de poutre sont les 2 points de la ligne moyenne situés aux extrémités du tronçon de poutre considéré. Dans un premier temps, nous travaillons dans la base locale de l'élément. Nous donnons ensuite les règles pour passer dans la base globale.

3.2. Matrice de rigidité élémentaire

Soit l'élément finis poutre représenté sur la figure avec l'orientation du sens positif des déplacements et rotations verticales (ainsi que l'effort tranchant et moment fléchissant).



Elément poutre et signe conventionnel de l'effort tranchant et moment fléchissant

La déformée est reliée au moment fléchissant par :

$$M(x) = -E I_z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

La contrainte est donnée par la relation suivante :

$$\sigma = \frac{M(x)}{I_z} y = -yE \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

La déformation déduite est donnée par l'expression :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = -y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

la détermination de la matrice de rigidité élémentaire d'une poutre suit les étapes suivantes :

a) Identification de problème

Cette étape consiste à choisir un système de coordonnées et une numérotation des noeuds appropriés pour l'élément. Les vecteurs des déplacements nodaux et des charges nodales pour la poutre i-j prennent la forme :

$$\{U^e\} = \begin{Bmatrix} \{U_i^e\} \\ \{U_j^e\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \dots \dots \dots \{f^e\} = \begin{Bmatrix} \{f_i^e\} \\ \{f_j^e\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ M_i \\ f_j \\ M_j \end{Bmatrix}$$

b) choix des fonctions de déplacement convenables

Cette étape consiste à choisir fonction de déplacement qui définit de façon unique l'état de déplacement de tous les points de l'élément.

$$v(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$$

$$\theta(x) = \frac{\partial v}{\partial x} = a_2 + 2 \cdot a_3 x + 3 \cdot a_4 x^2$$

où a1, a2, a3 et a4 sont des coefficients à déterminer.

$$\text{Au noeud (i), } x=0 \begin{cases} v(x=0) = v_i = a_1 \\ \theta(x=0) = \theta_i = a_2 \end{cases}$$

$$\text{Au noeud (j), } x=L \begin{cases} v(x=L) = v_j = a_1 + a_2 L + a_3 L^2 + a_4 L^3 \\ \theta(x=L) = \theta_j = a_2 + 2 \cdot a_3 L + 3 \cdot a_4 L^2 \end{cases}$$

Cela donne sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}$$

les coefficients a1, a2, a3 et a4 sont déterminés par :

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 3 & -1 \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$$

c) Relations entre déplacements et déformations

Les déformations aux différents points de l'élément peuvent être obtenues à partir de la fonction de déplacement par une différentiation dont la forme exacte dépend du type de problème traité. Dans notre cas de problème il s'agit des problèmes de flexion, les déformations sont associées à la courbure de de l'élément et correspondent aux dérivées secondes.

$$v(x) = \underbrace{\left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right)}_{N_{1x}} v_i + \underbrace{\left(x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right)}_{N_{2x}} \theta_i + \underbrace{\left(\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}\right)}_{N_{3x}} v_j + \underbrace{\left(\frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L}\right)}_{N_{4x}} \theta_j$$

$$\{\varepsilon(x, y)\} = -y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \\ -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \\ \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \end{bmatrix}$$

La matrice [B] est déduite du vecteur de déformation :

$$[B] = -y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \left[\begin{array}{cccc} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \end{array} \right]$$

La déformation est donnée par l'expression suivante (pour chaque élément).

$$\{\varepsilon\} = [B] \cdot \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$$

d) Relations entre les charges nodales aux déplacements nodaux

La matrice de rigidité pour l'élément finis poutre est donnée par :

$$[K_e] = \int_v [B]^T E [B] dv$$

$$[K_e] = \int_v y \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \\ -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \\ \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \end{bmatrix} E y \left[\begin{array}{cccc} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \end{array} \right] dv$$

Le développement de l'équation nous donne :

$$[K_e] = \int_A \underbrace{y^2 dA}_{I_z} \int_0^L y \begin{bmatrix} \frac{-6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \\ \frac{-4}{L} + \frac{6x}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \\ \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \end{bmatrix} E \left[\frac{-6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \quad \frac{-4}{L} + \frac{6x}{L^2} \quad \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \quad \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \right] dx$$

Finalement la **matrice de rigidité de l'élément barre** est donnée par l'expression suivant :

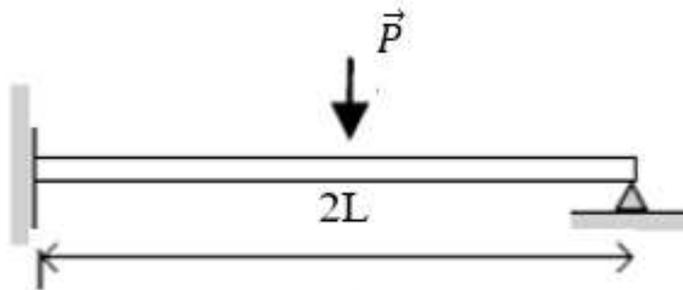
$$[K_e] = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Donc pour chaque élément on à l'équation d'équilibre statique de la forme suivante :

$$\{F\} = [K_e] \cdot \{U\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} f_i \\ M_i \\ f_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$$

3.3. Exercice : Exercice N°1

Considérons l'élément poutre Représenté par la figure (1), $E = 210 \text{ Gpa}$, $I = 60 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$, $P = 20 \text{ KN}$, $L = 1 \text{ m}$:



Question

Déterminer la matrice de rigidité de chaque élément

déterminer la matrice de rigidité globale.

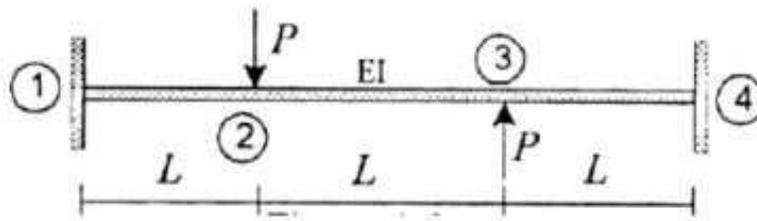
déterminer Les déplacements et les rotations dans les nœuds.

déterminer Les réactions aux appuis.

3.4. Exercice : Exercice N°2

Soit la poutre encastree dans ces deux extremités (1 et 4) sollicitée à des charges concentrees et opposees, distantes de longueur L (Figure 1).

Appliquer la methode des éléments finis (MEF) pour :



Question

déterminer la matrice de rigidité de chaque élément.

déterminer la matrice de rigidité globale.

déterminer Les déplacements et les rotations dans les nœuds.

déterminer Les réactions aux appuis.

4. Élément structure treillis

4.1. Généralité

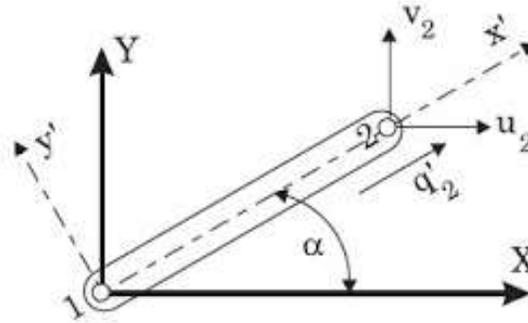
Dans la présente étude nous considérons la création d'un modèle par éléments finis d'un système mécanique composé de plusieurs éléments barres en plan est considéré. La discussion est limitée pour les structures treillis, que nous définissons comme structures composées de plusieurs barres élastiques sous aux forces axiales seulement.

Le système global est la référence dans laquelle les déplacements de la structure sont exprimés et habituellement choisis par convention dans la géométrie globale considérée, la liaison physique et la variation de l'orientation géométrique des éléments barres imposent les conditions suivantes :

1. Le déplacement nodal des éléments reliés doit être identique au déplacement du noeud de raccordement dans le système global.
2. Les caractéristiques physiques de chaque élément sous forme de matrice de rigidité et la force élémentaire doivent être transformées au repère global pour représenter les propriétés structurales dans le système global.
3. L'effort axial pour chaque élément est déterminé après la solution du problème dans le système global



L'élément structure treillis est un élément barre en 2D, donc sa matrice de rigidité s'inspire de la matrice de rigidité de l'élément barre avec un changement d'axe.



Élément finis treillis "Système de coordonnées local et global "



La matrice de rigidité de cet élément est donnée par la transformation suivante :

$$[k_e] = [T]^T [k_e^b] [T] = \begin{bmatrix} C & -S & 0 & 0 \\ S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & -S \\ 0 & 0 & S & C \end{bmatrix} \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & -S & C \end{bmatrix}$$

Avec, [T] la matrice de passage où de transformation des déplacement axiaux de l'élément barre aux déplacements globaux, [Ke] est la matrice de rigidité élémentaire de l'élément barre. La matrice de rigidité élémentaire [Ke] peut être réécrite de la façon suivante :

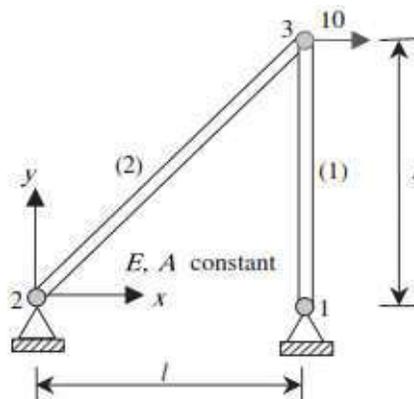
$$[k_e] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} k'_e & -k'_e \\ -k'_e & k'_e \end{bmatrix} \quad \text{Avec} \quad [k'_e] = \begin{bmatrix} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{bmatrix}$$

4.2. Exemple d'application



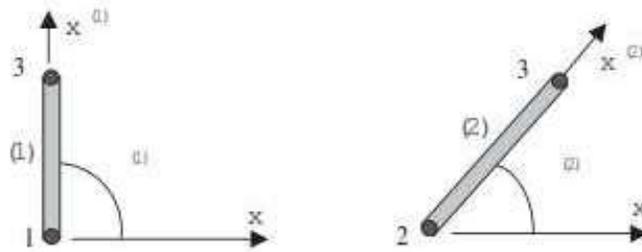
La figure suivante montre les propriétés des matériaux, la géométrie, les charges et les conditions aux limites de la structure à deux barres. Dans cet exemple, nous soulignons les quatre étapes principales de la méthode des éléments finis (FEM), à savoir :

1. le prétraitement.
2. la construction du comportement local (élément).
3. l'assemblage de matrices locales pour obtenir le comportement global.
4. le traitement.



a) solution

Étape 1 : consiste à subdiviser la structure en éléments, à affecter les numéros d'éléments à chaque barre, les numéros de nœuds à chaque joint, en commençant par les nœuds où les déplacements sont prescrits. Le modèle des éléments finis se compose de deux éléments numérotés 1 et 2 et de trois nœuds.



Étape 2 : traite de la formulation de chaque élément en commençant par l'élément 1.

L'élément 1 est numéroté avec les nœuds globaux 1 et 3. Il est positionné selon un angle $\theta = 90^\circ$ par rapport à l'axe x. Les autres relations sont les suivantes:

$$\cos 90^\circ = 0, \sin 90^\circ = 1, l_e = l$$

$$\mathbf{K}^{(1)} = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} [1] \\ [3] \\ [1] \\ [3] \end{matrix}$$

Élément 2:

L'élément 2 est numéroté avec les nœuds globaux 2 et 3. Il est positionné à un angle $\theta = 45^\circ$

$$\cos 45^\circ = 0.71, \sin 45^\circ = 0.71, l_e = l, 41.l$$

$$\mathbf{K}^{(2)} = \frac{AE}{\sqrt{2}l} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} [2] \\ [3] \\ [2] \\ [3] \end{matrix}$$

Étape 3: traiter la matrice globale du système.

Les déplacements inconnus peuvent être déduits à partir de l'équation suivante :

$$\frac{AE}{l} \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{3x} \\ u_{3y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} u_{3x} \\ u_{3y} \end{bmatrix} = \frac{l}{AE} \begin{bmatrix} 10 + 20\sqrt{2} \\ -10 \end{bmatrix}$$

On trouve aussi, le vecteur de réaction r_E :

$$\mathbf{r}_E = \begin{bmatrix} r_{1x} \\ r_{1y} \\ r_{2x} \\ r_{2y} \end{bmatrix} = \mathbf{K}_E \bar{\mathbf{d}}_E + \mathbf{K}_{EF} \mathbf{d}_F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 + 20\sqrt{2} \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ -10 \\ -10 \end{bmatrix}$$

La procédure pour déterminer la contrainte dans les deux éléments est la suivante:

$$\sigma^e = E^e \frac{u_{2x}^e - u_{1x}^e}{l^e} = \frac{E^e}{l^e} [-1 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} u_{1x}^e \\ u_{1y}^e \\ u_{2x}^e \\ \bar{u}_{2y}^e \end{bmatrix} = \frac{E^e}{l^e} [-1 \ 0 \ 1 \ 0] \mathbf{R}^e \mathbf{d}^e$$

$$\sigma^e = E^e \frac{u_{2x}^e - u_{1x}^e}{l^e} = \frac{E^e}{l^e} [-1 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} u_{1x}^e \\ u_{1y}^e \\ u_{2x}^e \\ \bar{u}_{2y}^e \end{bmatrix} = \frac{E^e}{l^e} [-1 \ 0 \ 1 \ 0] \mathbf{R}^e \mathbf{d}^e$$

$$= \frac{E^e}{l^e} [-\cos \phi^e \quad -\sin \phi^e \quad \cos \phi^e \quad \sin \phi^e] \mathbf{d}^e.$$

Pour le premier élément :

$$\mathbf{d}^{(1)} = \begin{bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{3x} \\ u_{3y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 + 20\sqrt{2} \\ -10 \end{bmatrix} \frac{l}{AE},$$

$$\sigma^{(1)} = [0 \quad -1 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 + 20\sqrt{2} \\ -10 \end{bmatrix} \frac{1}{A} = \frac{-10}{A}.$$

Pour le deuxième élément :

$$\mathbf{d}^{(2)} = \begin{bmatrix} u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_{3x} \\ u_{3y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 + 20\sqrt{2} \\ -10 \end{bmatrix} \frac{l}{AE},$$

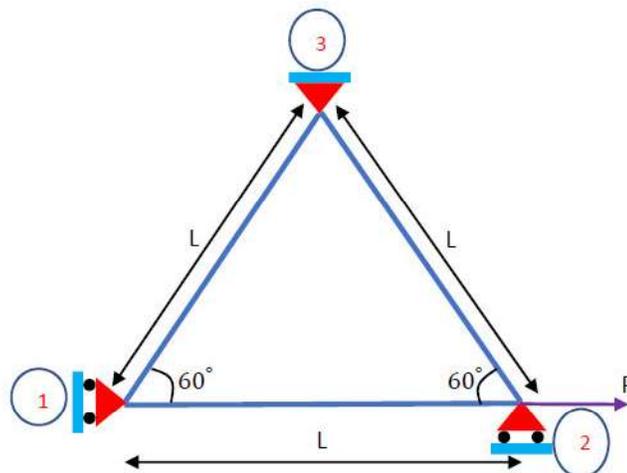
$$\sigma^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} [-1/\sqrt{2} \quad -1/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{2}] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 + 20\sqrt{2} \\ -10 \end{bmatrix} \frac{1}{A} = \frac{10\sqrt{2}}{A}.$$

4.3. Exercice

Exemple N°1 :

Soit le système de treillis contenant trois barres. Toutes les barres possèdent la même longueur L et la même rigidité axiale EA .

1. Déterminer la matrice de rigidité du système.
2. Calculer les déplacements nodaux.
3. Calculer les charges axiales dans les barres.



Structure treillis à trois barres.

Les exercices de cours sont corrigés sur le site, il faut chercher les réponses avant de consulter le corrigé. pour voir la solution, veuillez cliquer ce le lien ci dessous :

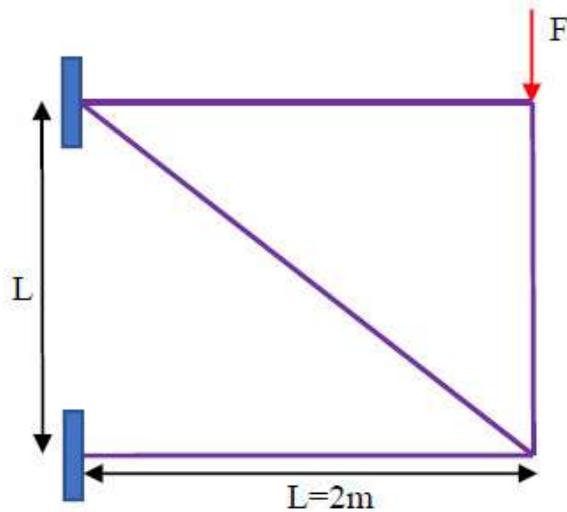
[cf. solution exercice N°1]

4.4. Exercice

Exercice N°2 :

Soit la structure de la figure, composée d'un assemblage de 4 barres. Toutes les barres sont de section $A = 0.01 \text{ m}^2$ et de module d'élasticité : $E = 105 \text{ N/m}^2$ sous l'action de la force $F = 50 \text{ N}$ Calculer en modélisant la structure avec des éléments finis de barre :

1. Les déplacements aux nœuds.
2. L'effort normal dans la barre inclinée.



Les exercices de cours sont corrigés sur le site, il faut chercher les réponses avant de consulter le corrigé. pour voir la solution, veuillez cliquer ce le lien ci dessous :

[cf. Solution exercice N°2]

Formulation Isoparamétrique

1. Introduction

Les éléments isoparamétriques ont été développés pour la première fois par Taig en 1958. Cependant, des travaux connexes n'ont été publiés qu'en 1966. Le développement de la formulation isoparamétrique a conféré à la méthode des éléments finis sa polyvalence, sa beauté, sa flexibilité et pouvoir. Des éléments avec des limites courbes pourraient être générés en utilisant ce concept. De tels éléments sont utiles dans la modélisation des limites incurvées et de forme irrégulière avec précision et en graduant un maillage de grossier à fin. Les éléments isoparamétriques ont été utilisés avec succès pour résoudre des problèmes à une, deux et trois dimensions. Ceux-ci incluent des éléments utilisés pour les structures de câbles et les problèmes de plans, de plaques, de coques et de solides. Le concept de cartographie isoparamétrique est en cours d'utilisation dans plusieurs algorithmes de génération de maillage. Éléments spéciaux utilisés pour modéliser la singularité du fond de fissure qui ont de larges applications en mécanique de la rupture, reposent également sur le concept isoparamétrique. Il est inutile de préciser que ces demandes ne se limitent pas aux seuls problèmes de mécanique des structures. Problèmes de conduction thermique, d'écoulement des fluides, de magnétisme et d'autres problèmes non structurels ont également été résolus avec succès grâce à cette excellente idée.

Dans la formulation isoparamétrique, nous utilisons certaines coordonnées naturelles généralement notées x , h , z . En conséquence, Le jacobien de la matrice de transformation doit être invoqué. Les expressions pour les coefficients de rigidité des éléments et le vecteur de charge des éléments devient compliqué, nécessitant l'utilisation de schémas d'intégration numérique. La quadrature de Gauss est le plus souvent utilisé à cette fin.

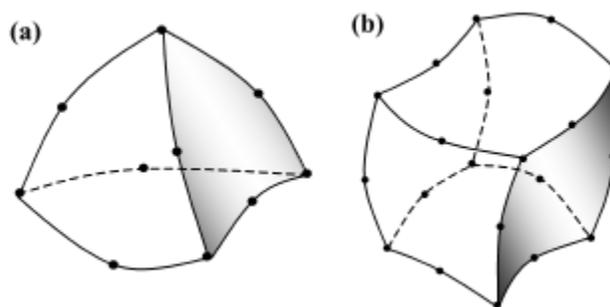


Figure 1.1 Éléments quadratiques isoparamétriques (a) tétraèdre et (b) hexaèdre avec bords incurvés.

La figure 1.1a montre un élément tétraèdre isoparamétrique quadratique qui a 10 nœuds limites et des arêtes courbes. La figure 1.1b représente un élément hexaédrique quadratique avec des bords incurvés qui comporte 20 nœuds. Cet élément est membre de ce qu'on appelle famille des hasards et constitue l'un des éléments les plus populaires actuellement utilisés pour la modélisation de continus tridimensionnels. Un maillage d'éléments finis pour un problème d'inclusion élastique qui utilise une méthode isoparamétrique bidimensionnelle à huit nœuds les éléments quadrilatères sont représentés sur la figure 1.2.

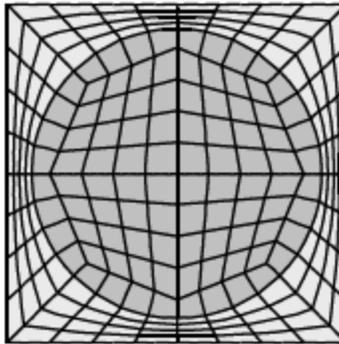


Figure 1.2 Un maillage contenant des éléments quadrilatères isoparamétriques plans à huit nœuds utilisé pour modéliser un problème d'inclusion élastique.

Dans ce chapitre, nous verrons d'abord l'idée générale de la formulation isoparamétrique. Un cas particulier d'un isoparamétrique à quatre nœuds L'élément quadrilatère est ensuite abordé. Un programme informatique simple est présenté pour démontrer les concepts de base de programmation par éléments finis. Le programme utilise deux classes simples, à savoir. la matrice et les classes vectorielles. Ainsi, les concepts de programmation orientée objet sont introduits de manière élémentaire.

2. Formulations sous, super & isoparamétriques

Grâce à la formulation isoparamétrique, nous pouvons produire des éléments avec des frontières courbes et irrégulières. Ceci est fait par utiliser un mappage de l'espace physique de l'élément incurvé réel vers un espace de coordonnées naturel d'un parent élément avec des limites droites et régulières comme le montre la Fig. 2.1.

Notons les coordonnées des nœuds de l'élément dans l'espace physique par $x_i, y_i, z_i, i = 1 \text{ à } n$, où n est le nombre de nœuds que possède l'élément. Ces nœuds sur l'élément physique sont mappés sur les nœuds correspondants de l'élément physique. Élément parent comme indiqué sur la Fig. 2.1. Les coordonnées nodales de l'élément parent sont connues en termes de coordonnées naturelles système de coordonnées physiques (ξ, η, ζ) , et ceux de l'élément physique sont connus en termes de système de coordonnées physiques (x, y, z) . Sur la figure 2.1b, nous voyons un élément hexaédrique régulier à 20 nœuds. Les coordonnées nodales de l'élément parent en naturel Le système de coordonnées se situe entre les limites -1 et +1. Ainsi, les nœuds A et B de l'élément physique correspondent à nœuds a et b de l'élément parent, dont les coordonnées sont respectivement $(+1, -1, +1)$ et $(+1, -1, -1)$ par rapport au système de coordonnées naturel. Les coordonnées physiques de ces nœuds pourraient être représentées par (x_A, y_A, z_A) et (x_B, y_B, z_B) respectivement.

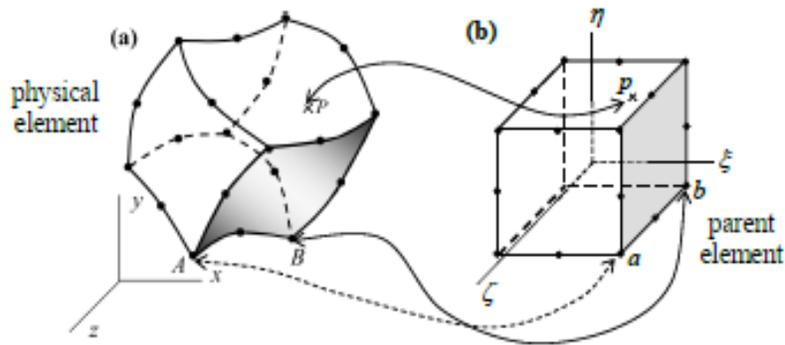


Figure 2.1 (a) Un élément hexaédrique courbe dans l'espace physique mappé sur **(b)** un hexaèdre régulier dans l'espace de coordonnées naturel.

La cartographie entre les coordonnées naturelles (ξ, η, ζ) et les coordonnées physiques (x, y, z) est liée par certains fonctions $N_i(\xi, \eta, \zeta)$. Ainsi, si l'on connaît les coordonnées (ξ, η, ζ) d'un point \mathbf{p} dans le système de coordonnées naturel, les coordonnées du point \mathbf{P} correspondant dans le système de coordonnées physiques (x, y, z) sont donnés par :

$$x = \sum_{i=1}^n N'_i x_i, y = \sum_{i=1}^n N'_i y_i, \text{ and } z = \sum_{i=1}^n N'_i z_i \quad 2.1$$

Où n est le nombre de nœuds sur l'élément.

Considérons ensuite le champ de déplacement de l'élément. Notons les composantes de déplacement du $i^{\text{ème}}$ nœud par u_i, v_i, w_i , avec $i = 1$ à n . Puis les composantes du vecteur déplacement en tout point (soit intérieur, soit extérieur) de l'élément sont donnés par interpolation. Ainsi, nous avons

$$u = \sum_{i=1}^n N'_i u_i, v = \sum_{i=1}^n N'_i v_i, \text{ and } w = \sum_{i=1}^n N'_i w_i \quad 2.2$$

On peut noter que N'_i et N_i apparaissant dans les Eqs. 2.1 et 2.2 sont des fonctions polynomiales des coordonnées naturelles (ξ, η, ζ) . En fonction du degré relatif de ces deux ensembles de polynômes, nous avons les trois types de possibles suivants formulations par éléments finis :

- (i) *formulation sous-paramétrique dans laquelle N'_i est de degré inférieur à N_i ,*
- (ii) *formulation isoparamétrique lorsque N'_i est identique à N_i , et*
- (iii) *formulation superparamétrique où N'_i est de degré supérieur à N_i .*

On peut prouver que parmi les trois formulations listées ci-dessus, seule la formulation isoparamétrique est mathématiquement correct et donc valable. Pour cette raison, nous ne considérerons dans ce livre que la formulation isoparamétrique.

3. La formulation isoparamétrique

Nous avons vu dans la section ci-dessus que dans la formulation isoparamétrique par éléments finis, nous utilisons le même ensemble de polynômes fonctions pour l'interpolation du champ de déplacement et pour la cartographie entre les coordonnées physiques et naturelles systèmes. Ainsi, nous avons

$$u = \sum_{i=1}^n N'_i u_i, v = \sum_{i=1}^n N'_i v_i, \text{ and } w = \sum_{i=1}^n N'_i w_i \quad 3.1$$

et

$$x = \sum_{i=1}^n N'_i x_i, y = \sum_{i=1}^n N'_i y_i, \text{ and } z = \sum_{i=1}^n N'_i z_i \quad 3.2$$

Afin d'arriver aux coefficients de rigidité des éléments (ainsi qu'au vecteur de charge de l'élément, que nous considérerons par la suite), nous devons considérer les relations déformation-déplacement données par l'équation. 2.2.2. Ces relations font appel à dérivées du champ de déplacement par rapport aux coordonnées physiques (x, y, z) . Par contre,

l'interpolation fonctions Ni données par l'équation. 3.1 sont disponibles en termes de coordonnées naturelles (ξ, η, ζ). Par conséquent, nous devons invoquer la règle de chaîne de différenciation partielle donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

La règle ci-dessus, ainsi que deux expressions associées pour les dérivées partielles par rapport à y et z peuvent facilement être écrits ensemble en utilisant la notation matricielle comme :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{pmatrix}$$

Cependant, malheureusement, nous ne disposons pas de moyens pour évaluer les éléments de la matrice de transformation (le 3x3 matrice carrée) donnée ci-dessus. Nous essayons donc la relation inverse :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad 3.3$$

La matrice de transformation ci-dessus est appelée matrice jacobienne et est notée [J].

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad 3.4a$$

La matrice jacobienne peut être écrite de manière concise en utilisant la notation virgule pour les dérivées partielles comme :

$$[J] = \begin{bmatrix} x, \xi & y, \xi & z, \xi \\ x, \eta & y, \eta & z, \eta \\ x, \zeta & y, \zeta & z, \zeta \end{bmatrix} \quad 3.4b$$

Par conséquent, nous avons

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \quad 3.5$$

Les éléments de la matrice jacobienne sont évalués en utilisant les équations. 3.2 et 3.4. Par exemple, le premier élément de $[J]$, à savoir. J_{11} est obtenu comme ;

$$J_{11} = \frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i = \sum_{i=1}^n N_{i,\xi} x_i$$

Une fois les polynômes d'interpolation N_i connus, les dérivées apparaissant dans l'équation ci-dessus, à savoir. $\partial N_i / \partial \xi$, peut être facilement évalué. On rappelle que x_i sont les coordonnées nodales (en termes de système de coordonnées physiques) qui sont connus. Ainsi, la matrice jacobienne complète est obtenue à partir de ce qui suit :

$$[J] = \begin{matrix} \boxed{[\partial N]} \\ \begin{matrix} 3 \times 3 \\ \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & N_{2,\xi} & \dots & N_{n,\xi} \\ N_{1,\eta} & N_{2,\eta} & \dots & N_{n,\eta} \\ N_{1,\zeta} & N_{2,\zeta} & \dots & N_{n,\zeta} \end{bmatrix} \end{matrix} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & z_n \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} n \times 3 \end{matrix} \end{matrix} \quad 3.6$$

Notez que les tailles des matrices sont également indiquées dans l'équation ci-dessus. Comme matrice des dérivées des fonctions de forme $[\partial N]$ et la matrice contenant les coordonnées nodales de l'élément sont toutes deux facilement disponibles, la matrice jacobienne peut être calculé sans difficulté. Une fois la matrice jacobienne connue, on peut obtenir les dérivées des composantes du déplacement par rapport aux coordonnées physiques.

Par exemple, à partir de l'équation. 3.5, nous avons

$$\begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ u_{,z} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ u_{,\zeta} \end{Bmatrix}. \quad 3.7$$

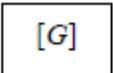
Nous pouvons écrire les relations déformation-déplacement telles que données par l'équation, alternativement comme :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ u_{,z} \\ v_{,x} \\ v_{,y} \\ v_{,z} \\ w_{,x} \\ w_{,y} \\ w_{,z} \end{Bmatrix}. \quad 3.8$$



Maintenant, à partir de l'équation. 3.7, on obtient :

$$\begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ u_{,z} \\ v_{,x} \\ v_{,y} \\ v_{,z} \\ w_{,x} \\ w_{,y} \\ w_{,z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [J]^{-1} & [0] & [0] \\ [0] & [J]^{-1} & [0] \\ [0] & [0] & [J]^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ u_{,\zeta} \\ v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \\ v_{,\zeta} \\ w_{,\xi} \\ w_{,\eta} \\ w_{,\zeta} \end{Bmatrix}. \quad 3.9$$



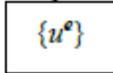
Les dérivées des composantes de déplacement par rapport aux coordonnées naturelles (ξ, η, ζ) sont facilement disponibles de l'équation. 3.2. Ainsi, par exemple, nous avons ;

$$u_{,\xi} = \sum_{i=1}^n N_{i,\xi} u_i$$

Ce qui précède peut-être écrit en termes de vecteur de déplacement nodal d'élément comme ;

$$u, \xi = [N_{1,\xi} \quad 0 \quad 0 \quad N_{2,\xi} \quad 0 \quad 0 \dots N_{n,\xi} \quad 0 \quad 0] \{u^e\}$$

où $\{u^e\} = [u_1 \ v_1 \ w_1 \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ \dots \ u_n \ v_n \ w_n]^T$ est le vecteur de déplacement nodal de l'élément. De même, on peut écrire tout les dérivées du vecteur déplacement par rapport aux coordonnées naturelles. Ces dérivés peuvent être écrits conjointement en utilisant la notation matricielle comme :

$$\begin{Bmatrix} u, \xi \\ u, \eta \\ u, \zeta \\ v, \xi \\ v, \eta \\ v, \zeta \\ w, \xi \\ w, \eta \\ w, \zeta \end{Bmatrix} = [\partial N'] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \\ w_n \end{Bmatrix}, \quad 3.10a$$


où $[\partial N']$ contient les dérivées des polynômes d'interpolation N_i et est donné par

$$[\partial N'] = \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & 0 & 0 & N_{2,\xi} & 0 & 0 & \dots & N_{n,\xi} & 0 & 0 \\ N_{1,\eta} & 0 & 0 & N_{2,\eta} & 0 & 0 & \dots & N_{n,\eta} & 0 & 0 \\ N_{1,\zeta} & 0 & 0 & N_{2,\zeta} & 0 & 0 & \dots & N_{n,\zeta} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,\xi} & 0 & 0 & N_{2,\xi} & 0 & \dots & 0 & N_{n,\xi} & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & N_{1,\zeta} & 0 & 0 & N_{2,\zeta} & \dots & 0 & 0 & N_{n,\zeta} \end{bmatrix}. \quad 3.10b$$

Combiner les équations. 3.8, 3.9 et 3.10, nous obtenons la matrice déformation-déplacement $[B]$ (qui relie le champ de déformation à l'intérieur de l'élément au vecteur de déplacement nodal de l'élément par $\{\epsilon\} = [B]\{u^e\}$) comme :

$$[B] = [A][G][\partial N'] \quad 3.11$$

Dans ce qui précède, $[A]$ est une matrice contenant des zéros et des uns comme indiqué dans l'équation. 3.8. Les éléments des deux autres matrices, à savoir. $[G]$ et $[\partial N']$, sont des fonctions non linéaires des coordonnées naturelles ξ , η et ζ . La matrice de rigidité des éléments est obtenue comme :

$$[k^e] = \int_{V_e} B^T DB dV_e = \int_{V_e} B^T DB dx dy dz. \quad 3.12$$

On peut montrer que :

$$dx dy dz = |J| d\xi d\eta d\zeta, \quad 3.13$$

où $|J|$ est le déterminant de la matrice jacobienne qui est simplement noté J et est appelé le jacobien. D'où la matrice de rigidité des éléments est donnée par :

$$[k^e] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} B^T DB J d\xi d\eta d\zeta. \quad 3.14$$

Il est impossible d'évaluer analytiquement l'intégrale ci-dessus sauf dans des cas simples impliquant une géométrie d'élément régulière (par exemple, un hexaèdre régulier). Par conséquent, l'intégration numérique est utilisée à cette fin. La méthode la plus populaire est la quadrature de Gauss. Voir l'annexe (donnée à la fin de celui-ci) pour une brève description de l'intégration numérique.

4. Élément Quadrilatéral À Quatre Nœuds Pour Les Problèmes D'avion

Dans cette section, nous démontrerons l'implémentation d'un élément quadrilatère isoparamétrique plan bilinéaire. Un tel élément à quatre nœuds. L'élément parent et un élément dans l'espace de coordonnées physiques sont représentés sur la figure 4.1.

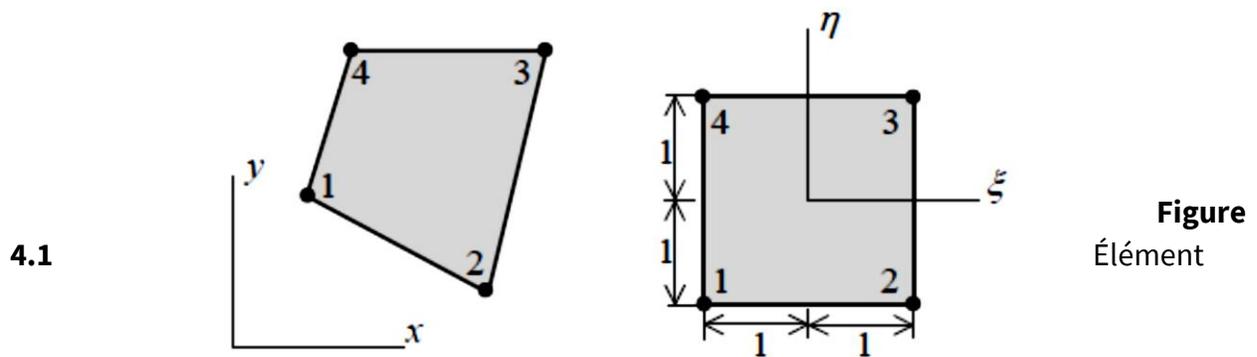


Figure 4.1
Élément

isoparamétrique plan bilinéaire.

Les polynômes d'interpolation utilisés pour cet élément sont obtenus en multipliant les deux interpolations lagrangiennes linéaires polynômes, l'un en fonction de ξ et l'autre η . Ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) & N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) & N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta). \end{aligned} \quad 4.1$$

Les polynômes d'interpolation donnés ci-dessus peuvent être écrits de manière concise sous la forme :

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i), \quad i = 1 \text{ to } 4, \quad 4.2$$

où ξ_i et η_i sont les valeurs des coordonnées naturelles au nœud i .

Cet élément est également appelé élément bilinéaire, car les polynômes d'interpolation sont le produit de deux éléments linéaires. polynômes en ξ et η . Notez que ce n'est pas un élément linéaire (cela est dû à la présence du terme $\xi\eta$).

Les dérivées des fonctions de forme par rapport aux coordonnées naturelles sont facilement évaluées. Ainsi, la matrice $[\partial N]$ de l'équation. 3.6 est obtenu comme :

$$[\partial N] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix}.$$

Les dérivées des fonctions de forme peuvent également être écrites de manière concise en prenant les dérivées de l'équation. 4.2. Ainsi, nous avons

$$N_{i,\xi} = \frac{1}{4} \xi_i (1 + \eta\eta_i), \quad i = 1 \text{ to } 4 \quad 4.3$$

$$N_{i,\eta} = \frac{1}{4} \eta_i (1 + \xi\xi_i), \quad i = 1 \text{ to } 4. \quad 4.4$$

Nous utiliserons les expressions données par Eqs. 4.2 à 4.4 dans le code informatique que nous présentons dans ce chapitre. La matrice jacobienne est de taille 2×2 , et est obtenue comme :

$$[J] = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} = [\partial N] \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}.$$

L'inverse de la matrice jacobienne peut s'écrire :

$$[J]^{-1} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} J_{11} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{22} \end{bmatrix},$$

où J_{ij} , avec $i, j = 1, 2$, sont les éléments de la matrice jacobienne. La quantité $|J|$ est le déterminant de la matrice jacobienne (connu sous le nom de Jacobien et noté J), et est obtenu comme :

$$J = |J| = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}.$$

Avant on présente un code informatique simple utilisant des éléments quadrilatères isoparamétriques à quatre nœuds pour l'analyse de problèmes d'élasticité plans.

5. Code Informatique À Éléments Quadrilatéraux Isoparamétriques

Le code informatique qui utilise des éléments quadrilatères isoparamétriques à 4 nœuds pour les problèmes élastostatiques est donné ci-dessous.

FILE NAME: femQuad4.cpp

```
// Program for FE Analysis of Elastostatic Problems
// Using Isoparametric 4-noded Quadrilateral Element;
// Non-zero displacement d.o.f. can be prescribed;
// Uses dynamic memory allocation
#include <fstream.h>
#include <iostream.h>
#include <iomanip.h>
#include <math.h>
#include "Mat.h"
#include "Vec.h"
void quad4(int, double, double D[4][4]);
void shape_fun(double, double);
void quad4_stress(int, double, double D[4][4], double, double,
double[], int);
double eStiff[9][9];
double eLoad[9], xl[5], yl[5];
int nGauss, nEq, semiband;
double B[4][9], Jac[3][3], detJac, stress[4], strain[4];
// Gaussian coordinates and weights
const long double place[5][5] =
{
{0., 0., 0., 0., 0.},
```

```

{0, 0, -0.577350269189626, -0.774596669241483,
-0.861136311594053},
{0, 0, 0.577350269189626, 0, -0.339981043584856},
{0, 0, 0, 0.774596669241483, 0.339981043584856},
{0, 0, 0, 0, 0.861136311594053}
};
const long double wgt[5][5] =
{
{0, 0, 0, 0, 0},
{0, 2., 1., 0.5555555555555555, 0.347854845137454},
{0, 0, 1., 0.8888888888888888, 0.652145154862546},
{0, 0, 0, 0.5555555555555555, 0.652145154862546},
{0, 0, 0, 0, 0.347854845137454}
};
void main(void)
{
ifstream fin ("femQuad4.inp");
ofstream fout("femQuad4.out");
fout.setf(ios::showpoint);
fout.setf(ios::floatfield, ios::fixed);
fout.precision(4);
int probType, nElems, nNodes, nRestNodes, nLoadedNodes;
int i, j, k;
// Input data::
fin >> nGauss >> probType;
fin >> nNodes >> nElems;
dMatrix X(2,nNodes);
for (i=1; i<=nNodes; ++i)
{
fin >> k;
for (j=1; j<=2; ++j)
fin >> X(j, k);
}
fout << "\n*****\n";
fout << "\n FINITE ELEMENT ANALYSIS PROGRAM\n";
fout << "\n*****\n\n";

if (probType == 0)
fout << "Problem Type: Plane Stress\n";
else
fout << "Problem Type: Plane Strain\n";
fout << "\nNumber of nodes = " << nNodes;
fout << "\nNumber of elements = " << nElems;
fout << "\n\nNodal Coordinates";
fout << "\n~~~~~\n";
fout << "\nNode X-coord. Y-coord.\n";
fout << "=====";

```

```

for (i=1; i<=nNodes; ++i)
{
fout << "\n" << setw(4) << i << setw(12);
for (j=1; j<=2; ++j)
fout << X(j, i) << setw(12);
}
iMatrix elemConn(4, nElems);
fout << "\n\nElement Connectivity";
fout << "\n~~~~~\n";
fout << "\n Elem Nod1 Nod2 Nod3 Nod4 Thick E\n";
fout << "=====\n";
dVector thick(nElems), nu(nElems), E(nElems);
for (i=1; i<=nElems; ++i)
{
fin >> k;
for (j=1; j<=4; ++j)
fin >> elemConn(j, k);
fin >> thick[k] >> E[k] >> nu[k];
}
for (i=1; i<=nElems; ++i)
{
fout << "\n" << setw(4) << i << setw(5);
for (j=1; j<=4; ++j)
fout << elemConn(j, i) << setw(7);
fout << setw(10) << thick[i] << setw(15) << E[i];
}
dVector U(2*nNodes);
iMatrix destn(2, nNodes);
int dof;
fin >> nRestNodes;
fout << "\n\nNumber of nodes at which";
fout << " displacement is prescribed = " << nRestNodes;
for (i=1; i<=nRestNodes; ++i)
{
fin >> k;
for (j=1; j<=2; ++j)
{
dof = 2*(k-1) + j;
fin >> destn(j, k) >> U[dof];
}
}
nEq = 0;
for (j=1; j<=nNodes; ++j)
for (i=1; i<=2; ++i)
{
if (destn(i, j) == 0)
{

```

```

nEq++;
destn(i, j) = nEq;
continue;
}
else
destn(i, j) = 0;
}
fout << "\n\nThe Destination Array:";
fout << "\n~~~~~\n";
fout << "\nNode X-dof Y-dof\n";
fout << "=====";
for (i=1; i<=nNodes; ++i)
{
fout << "\n" << setw(4) << i << setw(9);
for (j=1; j<=2; ++j)
fout << destn(j,i) << setw(9);
}
fout << "\n\nNo. of Degrees of Freedom = " << nEq;
dVector gLoad(nEq);
dVector gDisp(nEq);
double load;
fin >> nLoadedNodes;
for (i=1; i<=nLoadedNodes; ++i)
{
fin >> k;
for (j=1; j<=2; ++j)
{
dof = destn(j, k);
fin >> load;
if (dof != 0)
gLoad[dof] += load;
}
}
int node;
// Bandwidth calculation
int small, large, diff;
int n, l, kk[9];
semiband = 0;
for (i=1; i<=nElems; ++i) // scan over each element
{
small = nEq;
large = 1;
for (j=1; j<=4; ++j) // scan over each node
{
node = elemConn(j, i);
for (k=1; k<=2; ++k) // scan over each dof
{

```

```

dof = destn(k, node);
if (dof == 0) continue;
if (dof < small) small = dof;
if (dof > large) large = dof;
}
}
diff = large - small; // diff gives the semi-bandwidth
if (diff > semiband) // pick up the largest of diff
semiband = diff;
}
semiband = semiband + 1;
fout << "\nSemi-band width = " << semiband;
int dof1, tot_dof;
dMatrix gStiff(nEq, semiband);
fout << "\n\nGlobal Load Vector:";
fout << "\n~~~~~\n";
fout << "\n Node Load-X Load-Y";
fout << "\n===== ";
int dof2;
for (i=1; i<=nNodes; ++i)
{
dof1 = destn(1, i);
dof2 = destn(2, i);
double zero = 0.0;
fout << "\n" << setw(4) << i;
if (dof1 != 0)
fout << setw(15) << gLoad[dof1];
else
fout << setw(15) << zero;
if (dof2 != 0)
fout << setw(15) << gLoad[dof2];
else
fout << setw(15) << zero;
}
// Assembly of element matrices
double thickness, D[4][4], pres_disp[9], eLoad_disp[9];
for (n=1; n<=nElems; ++n)
{
for (i=1; i<=4; i++)
{
node = elemConn(i,n);
xl[i] = X(1,node);
yl[i] = X(2,node);
}
if (probType == 0)
{
// plane stress

```

```

D[1][1] = D[2][2] = E[n]/(1 - nu[n]*nu[n]);
D[1][2] = D[2][1] = D[1][1] * nu[n];
D[3][3] = D[1][1] * (1 - nu[n])/2.0;
}
else
{
// plane strain
double c;
c = E[n]/(1 + nu[n])/(1 - 2*nu[n]);
D[1][1] = D[2][2] = c*(1 - nu[n]);
D[1][2] = D[2][1] = c * nu[n];
D[3][3] = c * (1 - 2*nu[n])/2.0;
}
D[1][3] = D[2][3] = D[3][1] = D[3][2] = 0;
thickness = thick[n];
quad4(n, thickness, D);
dof = 0;
for (i=1; i<=4; ++i)
{
for (j=1; j<=2; ++j)
{
dof ++;
node = elemConn(i, n);
kk[dof] = destn(j, node);
}
}
tot_dof = 8;
dof1 = 0;
for (i=1; i<=4; ++i)
{
node = elemConn(i, n);
for (j=1; j<=2; ++j)
{
dof1 ++;
dof = 2*(node - 1) + j;
pres_disp[dof1] = U[dof];
}
}
for (i=1; i<=tot_dof; ++i)
{
eLoad_disp[i] = 0.;
for (j=1; j<=tot_dof; ++j)
{
eLoad_disp[i] += eStiff[i][j]*pres_disp[j];
}
}
for (i=1; i<=tot_dof; ++i)

```

```

{
if (kk[i] <= 0)
continue;
k = kk[i];
gLoad[k] += eLoad[i] - eLoad_disp[i];
for (j=1; j<=tot_dof; ++j)
{
if (kk[j] < k)
continue;
l = kk[j] - k + 1;
gStiff(k, l) += eStiff[i][j];
}
}
}
fout <<"\n";
gDisp = gStiff^gLoad;
fout << "\n\nGlobal Displacement Vector";
fout << "\n~~~~~";
fout << "\n\n Node Disp-X Disp-Y";
fout << "\n=====";
for (j=1; j<=nNodes; ++j)
{
for (i=1; i<=2; ++i)
{
dof = 2*(j-1) + i;
if (destn(i, j) != 0)
U[dof] = gDisp[destn(i, j)];
}
}
for (j=1; j<=nNodes; ++j)
{
fout << "\n" << setw(4) << j << setw(15);
for (i=1; i<=2; ++i)
{
dof = 2*(j-1) + i;
fout << U[dof] << setw(15);
}
}
// Compute stresses at element Guassian points
fout << "\n\nAverage Stresses and Strains";
fout << " at Element Centroid";
fout << "\n~~~~~";
fout << "\n\n Elem Sig_x Sig_y Sig_xy ";
fout << "\n=====";
double pxi, pet;
for (n=1; n<=nElems; ++n)
{

```

```

thickness = thick[n];
if (probType == 0)
{
// plane stress
D[1][1] = D[2][2] = E[n]/(1 - nu[n]*nu[n]);
D[1][2] = D[2][1] = D[1][1] * nu[n];
D[3][3] = D[1][1] * (1 - nu[n])/2.0;
}
else
{
// plane strain
double c;
c = E[n]/(1 + nu[n])/(1 - 2*nu[n]);
D[1][1] = D[2][2] = c*(1 - nu[n]);
D[1][2] = D[2][1] = c * nu[n];
D[3][3] = c * (1 - 2*nu[n])/2.0;
}
D[1][3] = D[2][3] = D[3][1] = D[3][2] = 0;
for (int ii=1; ii<=4; ++ii)
{
node = elemConn(ii, n);
xl[ii] = X(1, node);
yl[ii] = X(2, node);
}
pxi = pet = 0; //at place[1][1]-i.e., element-centroid
// Get element displacement vector
int dof, dof1, node;
double u[9];
dof1 = 0;
for (ii=1; ii<=4; ++ii)
{
node = elemConn(ii, n);
for (j=1; j<=2; ++j)
{
dof1 ++;
dof = 2*(node - 1) + j;
u[dof1] = U[dof];
}
}
quad4_stress(n, thickness, D, pxi, pet, u, 8);
fout << "\n" << setw(4) << n ;
for (i=1; i<=3; i++)
fout << setw(15) << stress[i];
}
}
void quad4(int elem, double thick, double D[4][4])
{

```

```

int j, k, l, n, na, nb, nrow, ncol;
double dv, dum, pxi, pet;
double BtD[9][4];
// Clear load vector and upper triangle of stiffness matrix
for (k=1; k<=8; ++k)
{
eLoad[k] = 0.;
for (l=k; l<=8; ++l)
eStiff [k][l] = 0.;
}
// Start Gauss quadrature loop. Use nGauss by nGauss rule
for (na=1; na<=nGauss; ++na)
{
pxi = place[na][nGauss];
for (nb=1; nb<=nGauss; ++nb)
{
pet = place[nb][nGauss];
shape_fun(pxi,pet);
dv = wgt[na][nGauss]*wgt[nb][nGauss] * thick * detJac;
// Store [B] trans. times [D] in 8 by 3 work array [BtD]
for (j=1; j<=4; ++j)
{
l = 2 * j;
k = l - 1;
// Multiplication that gives a nonzero product only
// considered
for (n=1; n<=3; ++n)
{
BtD[k][n] = B[1][k] * D[1][n] + B[3][k] * D[3][n];
BtD[l][n] = B[2][l] * D[2][n] + B[3][l] * D[3][n];
}
// Loop on rows of [k]
for (nrow=1; nrow<=8; ++nrow)
{
for (ncol=nrow; ncol<=8; ncol++)
{
dum = 0.;
// Loop for product [B]t[D][B].
// Zeros in [B] not skipped
for (j=1; j<=3; ++j)
dum += BtD[nrow][j] * B[j][ncol];
eStiff[nrow][ncol] += dum * dv;
}
}
}
}
// Fill in lower triangle of element stiffness matrix

```

```

// by symmetry
for (k=1; k<=7; ++k)
for (l=k; l<=8; ++l)
eStiff[l][k] = eStiff[k][l];
}
void shape_fun(double pxi, double pet)
{
double N[5], Nxi[5], Net[5], dum;
int i, l, j, k;
int xii[5] = {0, -1, 1, 1, -1};
int eti[5] = {0, -1, -1, 1, 1};
// Shape functions and their derivatives
for (i=1; i<=4; ++i)
{
double pX = 0.25 * (1 + pxi*xii[i]);
double pT = 0.25 * (1 + pet*eti[i]);
N[i] = 4 * pX * pT;
Nxi[i] = xii[i] * pT;
Net[i] = eti[i] * pX;
}
// Clear array Jac and B
for (i=1; i<=2; ++i)
for (j=1; j<=2; ++j)
Jac[i][j] = 0.;
for (i=1; i<=3; ++i)
for (j=1; j<=8; ++j)
B[i][j] = 0.;
// Find Jacobian and its determinant.
for (i=1; i<=4; ++i)
{
Jac[1][1] += Nxi[i]*xl[i];
Jac[1][2] += Nxi[i]*yl[i];
Jac[2][1] += Net[i]*xl[i];
Jac[2][2] += Net[i]*yl[i];
}
detJac = Jac[1][1]*Jac[2][2] - Jac[1][2]*Jac[2][1];
// Replace Jac by its inverse.
dum = Jac[1][1]/detJac;
Jac[1][1] = Jac[2][2]/detJac;
Jac[1][2] = - Jac[1][2]/detJac;
Jac[2][1] = - Jac[2][1]/detJac;
Jac[2][2] = dum;
// Form [B] matrix (zero entries already set)
for (j=1; j<=4; ++j)
{
l = 2 * j;
k = l - 1;

```

```

B[1][k] = Jac[1][1]*Nxi[j] + Jac[1][2]*Net[j];
B[2][1] = Jac[2][1]*Nxi[j] + Jac[2][2]*Net[j];
B[3][k] = B[2][1];
B[3][1] = B[1][k];
}
}
void quad4_stress(int elem, double thick, double D[4][4], double
pxi, double pet, double
u[], int ndof)
{
// to get stresses and strains
int i, j, k;
double DB[4][9];
// Get B matrix
shape_fun(pxi, pet);
// [D]*[B]
for (i=1; i<=3; ++i)
{
for (j=1; j<=8; ++j)
{
DB[i][j] = 0;
for (k=1; k<=3; ++k)
DB[i][j] += D[i][k] * B[k][j];
}
}
// Compute stress as DB * u and strains as B * u
for (i=1; i<=3; ++i)
{
stress[i] = 0;
strain[i] = 0;
for (j=1; j<=8; ++j)
{
stress[i] += DB[i][j] * u[j];
strain[i] += B[i][j] * u[j];
}
}
}
}

```

ÉCHANTILLON D'ENTRÉE/SORTIE :

Ce qui suit est l'impression d'un exemple d'entrée et les fichiers de sortie qui en résultent. Ils correspondent à l'exemple présenté sur la figure 6.1.

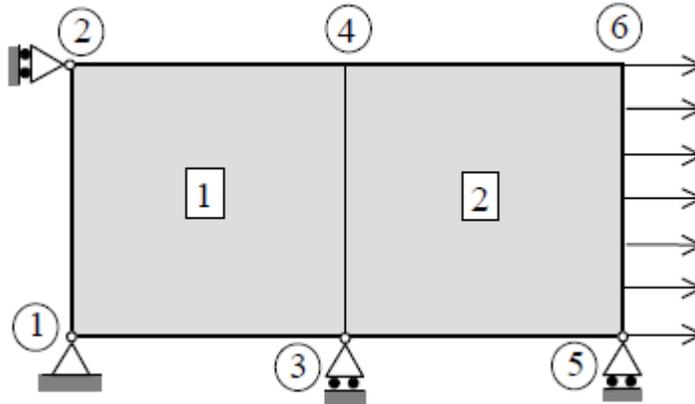


Figure 5.1 La discrétisation et la numérotation des éléments et des nœuds du problème de la plaque rectangulaire.

THE INPUT FILE "FEMQUAD4.INP"

```
-----
2 0
6 2
1 0 0
3 100 0
5 200 0
2 0 100
4 100 100
6 200 100
1 1 3 4 2 10 10000 0.25
2 3 5 6 4 10 10000 0.25
2
1 1 0 1 0
2 1 0 0 0
2
5 300 0
6 300 0
-----
```

THE OUTPUT FILE "FEMQUAD4.OUT"

```
-----
*****
FINITE ELEMENT ANALYSIS PROGRAM
*****
Problem Type: Plane Stress
Number of nodes = 6
Number of elements = 2
Nodal Coordinates
~~~~~
Node X-coord. Y-coord.
=====
1 0.0000 0.0000
2 0.0000 100.0000
3 100.0000 0.0000
4 100.0000 100.0000
```

FORMULATION ISOPARAMÉTRIQUE

```

5 200.0000 0.0000
6 200.0000 100.0000
Element Connectivity
~~~~~
Elem Nod1 Nod2 Nod3 Nod4 Thickness E
=====
1 1 3 4 2 10.0000 10000.0000
2 3 5 6 4 10.0000 10000.0000
Number of nodes at which displacement is prescribed = 2
The Destination Array:
~~~~~
Node X-dof Y-dof
=====
1 0 0
2 0 1
3 2 3
4 4 5
5 6 7
6 8 9
No. of Degrees of Freedom = 9
Semi-band width = 8

Global Load Vector:
~~~~~
Node Load-X Load-Y
=====
1 0.0000 0.0000
2 0.0000 0.0000
3 0.0000 0.0000
4 0.0000 0.0000
5 300.0000 0.0000
6 300.0000 0.0000
Global Displacement Vector
~~~~~
Node Disp-X Disp-Y
=====
1 0.0000 0.0000
2 0.0000 -0.0015
3 0.0060 0.0000
4 0.0060 -0.0015
5 0.0120 0.0000
6 0.0120 -0.0015
Average Stresses and Strains at Element Centroid
~~~~~
Elem Sig_x Sig_y Sig_xy
=====
1 0.6000 -0.0000 -0.0000
2 0.6000 0.0000 0.0000
*****

```

Comme deuxième exemple, considérons la même poutre encadrée. La géométrie de la poutre, les conditions d'appui et le chargement sont présentés sur la Fig. 5.2. Un programme simple pour générer le maillage est réalisé. Les résultats du programme d'analyse par éléments finis sont présentés dans le tableau 5.1.



Figure 5.2 Géométrie, support et chargement de la poutre encastree.

Les données utilisées pour cet exemple de problème (en unités cohérentes) sont :

- Portée de la poutre = 1000
- Profondeur de la poutre = 100
- Épaisseur = 1
- Module d'élasticité, $E = 2 \cdot 10^5$
- Coefficient de Poisson, $\nu = 0,2$
- Charge, $P = 100$

Les solutions de résistance des matériaux pour la poutre sont obtenues comme suit :

- La déflexion à l'extrémité libre de la poutre, $\Delta^{\max} = Pl^3/3EI = 2,0$
- Contrainte de flexion maximale, $\sigma_x^{\max} = M/Z = 60$

Tableau 5.1 Résultats par éléments finis du problème des poutres encastree pour différentes discrétisations (comparer avec la résistance des solutions matérielles de $\Delta^{\max} = 2,0$ et $\sigma_x^{\max} = 60$).

Discrétisation	Nbr nœuds	Nbr d'éléments	Δ^{\max}	σ_x^{\max}
10x4	55	40	1.4175	30.17
20x6	147	120	1.8208	44.44
40x10	451	400	1.9614	53.36

POINTS DE STRESS OPTIMAUX

Nous avons vu dans ce chapitre qu'une fois connus les déplacements nodaux d'un élément, il est possible d'obtenir les déplacements en tout point de l'élément par interpolation. Ensuite, la déformation en tout point de l'élément est obtenue en utilisant les relations déformation-déplacement, et les contraintes en utilisant les relations constitutives. Comme les relations déformation-déplacement impliquent une différenciation (partielle) et que la différenciation numérique introduit toujours des erreurs supplémentaires.

De manière générale, on peut affirmer que les contraintes calculées aux nœuds sont les moins précises. En revanche, dans la plupart des analyses par éléments finis, il est pratique et important d'obtenir les valeurs nodales des contraintes.

Les contraintes sont évaluées avec un maximum de précision en quelques points de l'élément appelés points optimaux (appelés points de Barlow) qui sont situés à l'intérieur de l'élément. Les valeurs de contrainte aux nœuds d'éléments finis sont obtenues en extrapolant à partir des valeurs aux points d'échantillonnage optimaux après avoir fait la moyenne des valeurs obtenues à chaque nœud à partir des éléments voisins. Pour les éléments isoparamétriques, ces points d'échantillonnage sont situés aux points de Gauss d'un ordre inférieur. Il existe une règle de Gauss standard pour chaque type d'élément. Par exemple, pour un élément quadrilatère plan à quatre nœuds, une règle de Gauss 2x2 est suffisante, et pour un élément quadratique à 8 ou 9 nœuds, une règle 3x3 est nécessaire. Pour ces éléments, les points de Barlow sont situés aux points de Gauss correspondant à la règle 1x1 pour l'élément à quatre nœuds, et Règle 2x2 pour l'élément à 8 ou 9 nœuds.

6. Éléments Lagrangiens Isoparamétriques Pour Les Problèmes Plans

Des éléments lagrangiens isoparamétriques d'ordre supérieur sont disponibles pour les problèmes plans. Cependant, les éléments quadratiques lagrangiens et d'ordre supérieur ont un ou plusieurs nœuds internes. Ces nœuds ne sont connectés ni aux éléments voisins ni aux points limites. C'est la principale raison pour laquelle les éléments lagrangiens d'ordre supérieur ne sont pas aussi populaires que leurs homologues, les éléments dits de hasard (qui seront discutés dans la section suivante). Néanmoins, les éléments lagrangiens présentent certains avantages spécifiques par rapport aux éléments de hasard : (i) il est facile d'obtenir les fonctions de forme pour tout élément d'ordre supérieur, et (ii) ils sont numériquement plus stables sous une forte distorsion de l'élément.

ELEMENT QUADRATIQUE

La **figure 6.1** montre l'élément quadratique lagrangien qui à neuf nœuds. À vrai dire, il s'agit d'un élément bi-quadratique (c'est-à-dire quadratique dans deux directions orthogonales). La numérotation la plus courante des nœuds pour cet élément consiste à numéroter les nœuds d'angle en premier, suivis par les nœuds centraux et le nœud intérieur en dernier (en tant que nœud 9), comme le montre la figure 6.1.

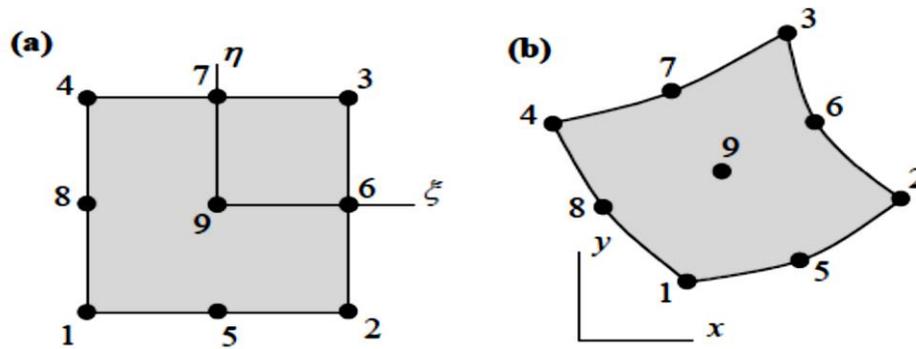


Figure 6.1 Élément quadratique lagrangien isoparamétrique à neuf nœuds : (a) l'élément parent et (b) l'élément physique.

ÉLÉMENT CUBIQUE

L'élément cubique lagrangien a 16 nœuds et est représenté sur la figure 6.2 à la fois dans le système de coordonnées physiques et dans le système de coordonnées naturel. Il existe quatre nœuds internes. Voir l'annexe A pour une discussion plus détaillée sur les polynômes d'interpolation lagrangiens.

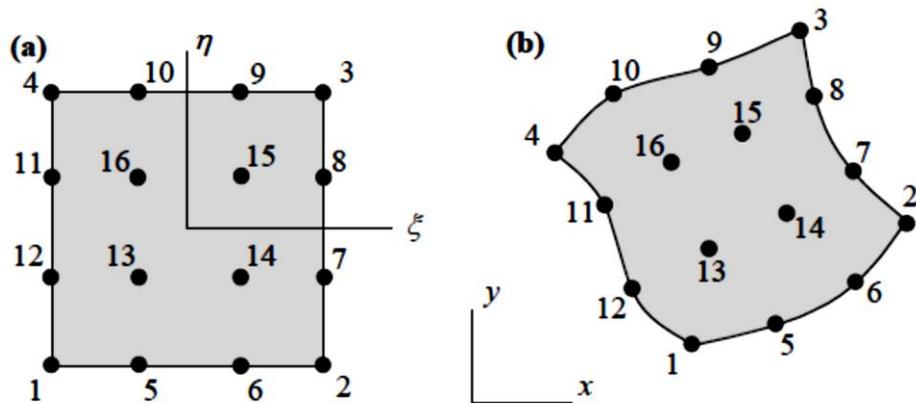


Figure 6.2 Élément cubique lagrangien isoparamétrique à 16 nœuds : (a) l'élément parent et (b) l'élément physique élément.

7. Éléments De Serendipité

Les éléments de sérendipité sont une classe d'éléments finis qui ont très peu ou pas de nœuds intérieurs. L'élément quadratique de cette famille a huit nœuds (limites), comme le

montre la Fig. 7.1. Les fonctions de forme des éléments de hasard sont dérivées par une procédure intéressante décrite ci-dessous.

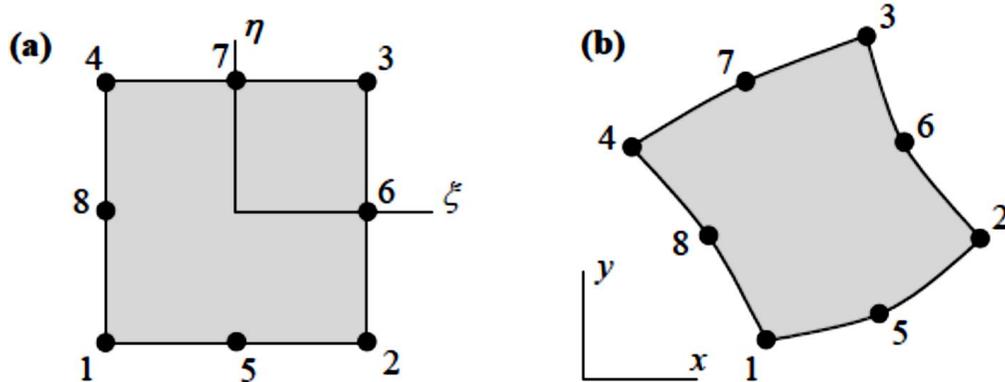


Figure 7.1 Élément quadrilatère isoparamétrique de la famille des sérendipités à huit nœuds : **(a)** l'élément parent et **(b)** l'élément physique.

Les fonctions de forme des nœuds médians se trouvent d'abord comme le produit d'un polynôme d'interpolation quadratique dans la direction du bord (c'est-à-dire x ou h) et d'une interpolation linéaire dans la direction perpendiculaire. Ainsi, le polynôme d'interpolation du nœud 5 s'écrit :

$$N_5 = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)}{(\xi_5 - \xi_1)(\xi_5 - \xi_2)} \frac{(\eta - \eta_7)}{(\eta_5 - \eta_7)} = \frac{(\xi + 1)(\xi - 1)}{(0 + 1)(0 - 1)} \frac{(\eta - 1)}{(-1 - 1)} = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta).$$

De même, nous obtenons les fonctions de forme des nœuds médians restants comme suit :

$$N_6 = \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2),$$

$$N_7 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta)$$

$$N_8 = \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta^2).$$

Les formes de N_5 et N_8 sont représentées sur les **figures 7.2a et b**. Voyons maintenant comment la fonction de forme du nœud de coin, disons le nœud 1, est obtenue. Considérons la fonction de forme bilinéaire pour le nœud 1 (c'est-à-dire en le considérant comme un élément à 4 nœuds). La forme de cette fonction d'interpolation bilinéaire (notée N_1^B) est représentée sur la **figure 7.2c**. La fonction d'interpolation pour le nœud 1 est obtenue en fixant

la forme bilinéaire aux nœuds 5 et 8 (de sorte qu'ils aient des valeurs nulles à ces nœuds) en soustrayant la moitié de chacun de N_5 et N_8 . C'est

$$N_1 = N_1^B - \frac{1}{2}N_5 - \frac{1}{2}N_8.$$

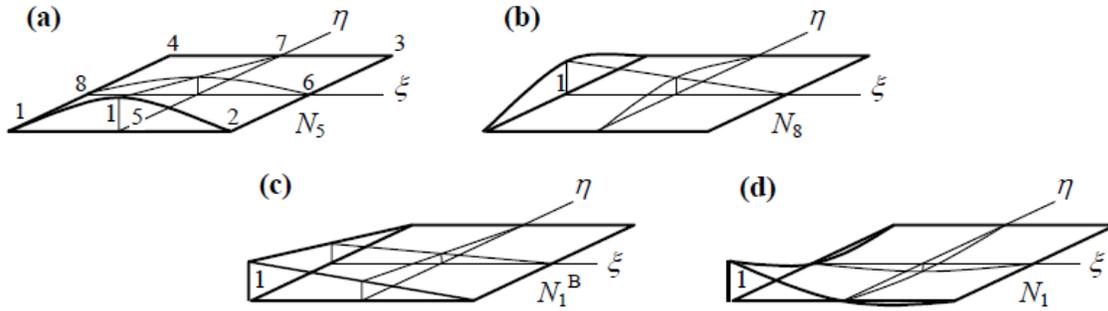


Figure 7.2 Fonctions de forme de sérendipité pour les nœuds médians : **(a)** nœud 5 et **(b)** nœud 8 ; **(c)** la fonction de forme bilinéaire pour le nœud 1 notée N_1^B ; et **(d)** fonction de forme de hasard pour le nœud de coin 1 obtenue comme $N_1^B - \frac{1}{2}N_5 - \frac{1}{2}N_8$.

Les fonctions de forme pour les trois nœuds de coin restants sont obtenues de la même manière. Ainsi, nous avons

$$N_2 = N_2^B - \frac{1}{2}N_5 - \frac{1}{2}N_6,$$

$$N_3 = N_3^B - \frac{1}{2}N_6 - \frac{1}{2}N_7$$

$$N_4 = N_4^B - \frac{1}{2}N_7 - \frac{1}{2}N_8.$$

Les fonctions de forme ci-dessus rassemblées peuvent s'écrire sous la forme :

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) - \frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i) - \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 - \eta^2),$$

pour $i = 1$ à 4,

$$N_i = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i),$$

pour $i = 5$ et 7,

$$N_i = \frac{1}{2}(1 + \xi\xi_i)(1 - \eta^2),$$

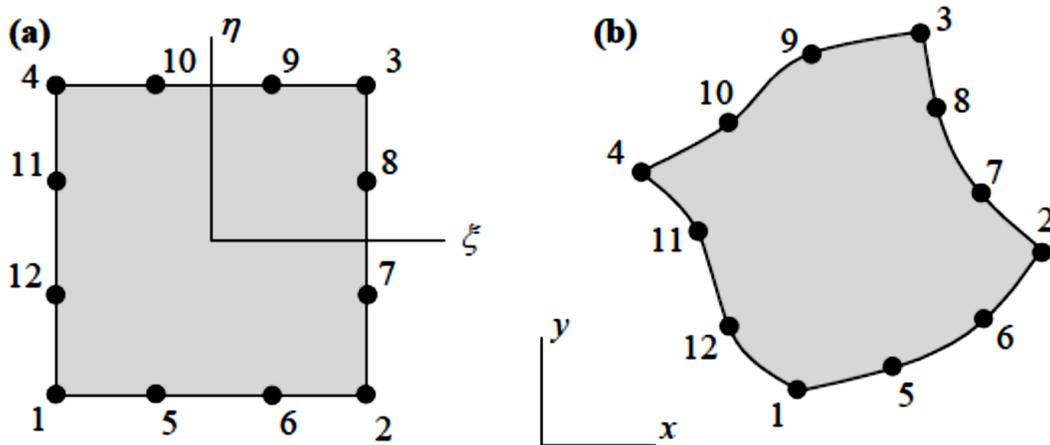


Figure 7.3 Éléments cubiques de la famille sérendipité à 12 nœuds : **(a)** l'élément parent et **(b)** l'élément physique.

Les fonctions de forme pour les éléments de hasard d'ordre supérieur (cubiques et supérieurs) sont dérivées de la même manière. L'élément cubique de la famille des hasards à 12 nœuds limites (et aucun nœud intérieur) et est représenté sur la figure 7.3.

8. Éléments De Transition

En utilisant des éléments isoparamétriques d'interpolations à différents degrés, il devient nécessaire d'utiliser des éléments de transition.

Par exemple, considérons le maillage d'éléments finis illustré sur la figure 8.1 où le maillage passe d'un élément bilinéaire dans le coin supérieur gauche (élément 1) à un élément biquadratique dans le coin inférieur droit (éléments 5 et 6). Des éléments de transitions avec des nœuds variant de 5 à 7 deviennent nécessaires pour relier les éléments bilinéaires et quadratiques comme le montre la figure. Les polynômes d'interpolation pour de tels éléments sont développés en suivant la procédure expliquée pour l'élément de hasard. Dans la dernière section

Par exemple, pour l'élément 4 de la figure 8.1, il y a cinq nœuds. La fonction de forme pour le seul nœud médian est d'abord dérivée du produit d'un polynôme linéaire unidimensionnel en ξ et d'un polynôme quadratique en η . Les polynômes d'interpolation aux coins de chaque côté de ce nœud sont obtenus en soustrayant la moitié de cette fonction d'interpolation du nœud médian des fonctions bilinéaires des nœuds de coin. Les deux coins restants auront les fonctions de forme bilinéaires habituelles.

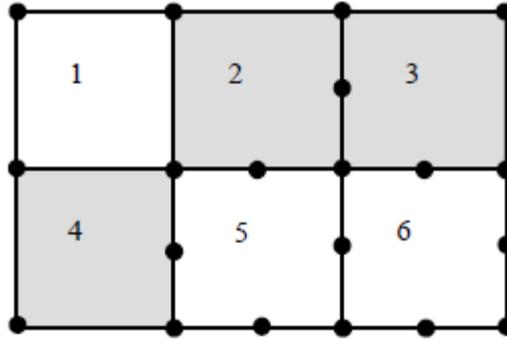


Figure 8.1 L'élément 1 est un élément bilinéaire ; les éléments 5 et 6 sont des éléments de hasard quadratiques à huit nœuds ; et les éléments 2, 3 et 4 sont des éléments de transition comportant respectivement six, six et cinq nœuds.

Intégration numérique

UNE QUADRATURE DE GAUSS STANDARD

Parmi les différents schémas d'intégration numérique, la quadrature de Gauss est la plus populaire. Il utilise moins d'évaluations fonctionnelles pour obtenir une précision maximale. L'avènement de la formulation isoparamétrique par éléments finis a donné une popularité supplémentaire à la quadrature de Gauss. Il s'agit toujours de la règle de quadrature la plus appréciée pour les applications aux éléments finis et aux éléments limites.

Intégration Unidimensionnelle

Une intégrale unidimensionnelle ayant des limites arbitraires a et b est d'abord transformée en une intégrale avec les limites -1 et $+1$, en faisant utilisation de la substitution $x = \frac{1}{2}(b - a)u + \frac{1}{2}(b + a)$. Ainsi, l'intégrale.

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

se transforme en

$$I = \int_{-1}^1 F(u)du,$$

où $F(u)$ inclut également le jacobien de la transformation, $J = dx/du = \frac{1}{2}(b - a)$.

La formule de quadrature de Gauss est donnée par :

$$I = \int_{-1}^1 F(u) du = \sum_{i=1}^n W_i F(u_i),$$

Où n est le nombre de points de Gauss (qui est égal au nombre d'évaluations fonctionnelles). La formule ci-dessus donne l'intégrale comme somme pondérée de la fonction évaluée en un nombre n de points d'échantillonnage u_i , appelés abscisses.

Les quantités W_i sont appelées poids. Le Tableau A.1 fournit les valeurs de u_i et W_i pour plusieurs valeurs de n . Autant de chiffres que l'ordinateur le permet doivent être utilisés dans la programmation de la quadrature de Gauss pour éviter les erreurs d'arrondi.

Avec n nombre de points de Gauss, un polynôme de degré $2n - 1$ est intégré exactement. Si $F(u)$ n'est pas un polynôme, la quadrature de Gauss n'est pas exacte. Cependant, la précision s'améliore avec un plus grand nombre de points gaussiens. Les valeurs des abscisses sont connues pour être les racines du polynôme de Gauss-Legendre et elles sont situées symétriquement par rapport au centre de l'intervalle.

Tableau A.1 Abscisses et poids pour la quadrature de Gauss standard.

Nbr de Points de Gauss	Abscisse, u_i	Poids, W_i
1	0.0	2.0
2	$\pm 0.57735\ 02691\ 89626$	1.0
3	$\pm 0.77459\ 66692\ 41483$ 0.	0.55555 55555 55556 0.88888 88888 88889
4	$\pm 0.86113\ 63115\ 94053$ $\pm 0.33998\ 10435\ 84856$	0.34785 48451 37454 0.65214 51548 62546
6	$\pm 0.93246\ 95142\ 03152$ $\pm 0.66120\ 93864\ 66265$ $\pm 0.23861\ 91860\ 83197$	0.17132 44923 79170 0.36076 15730 48139 0.46791 39345 72691
8	$\pm 0.96028\ 98564\ 97536$ $\pm 0.79666\ 64774\ 13627$ $\pm 0.52553\ 24099\ 16329$ $\pm 0.18343\ 46424\ 95650$	0.10122 85362 90376 0.22238 10344 53374 0.31370 66458 77887 0.36268 37833 78362

9. Exercice d'application

9.1 Exercice 01 :

On considère dans le plan, le cas de la transformation entre les coordonnées cartésiennes (x, y) et polaires (r, θ) .

- 1- Exprimer la matrice Jacobéenne correspondant à cette transformation
- 2- Donner son déterminant
- 3- Soit la fonction $F(x,y)=x^2y$ avec $\partial F(x,y)/\partial x=2xy$. Retrouver ce résultat en passant par des dérivées par rapport aux variables (r, θ) .

9.2 Exercice 02 :

On considère dans l'espace le cas de la transformation entre l'espace de coordonnées cartésiennes (x, y, z) et celui des coordonnées cylindriques (r, θ, z) .

- 1- Exprimer la matrice Jacobéenne correspondant à cette transformation.
- 2- Donner son déterminant
- 3- Donner sa matrice inverse.

9.3 Exercice 03 :

On considère la surface suivante S définie dans le plan (x,y) . S est un quart de disque de rayon égal à 1. On considère ensuite la fonction

$$F(x,y)=x \quad \text{et} \quad \text{l'intégrale } I = \int \partial F(x,y) \partial x dx dy S.$$

- 1- Calculer I dans l'espace des coordonnées polaires en utilisant la matrice jacobéenne, son inverse et son déterminant.
- 2- Vérifier le résultat obtenu en le recalculant directement dans l'espace (x,y)

ELÉMENTS AXISYMÉTRIQUES



1. Modélisation axisymétrique

Lorsqu'une structure a une géométrie, des chargements, des conditions aux limites qui présentent une symétrie de révolution et que la loi constitutive est indépendante du choix du plan contenant l'axe de révolution de la structure, le problème est axisymétrique (cf. chapitre 1). Puisque la structure se comporte de la même manière dans tous les demi-plans contenant l'axe de révolution, elle peut être modélisée simplement dans n'importe lequel de ces demi-plans. Par abus de langage, il porte le nom de plan méridien (on devrait dire le demi-plan méridien) et le modèle est dit axisymétrique. Par convention, l'axe de révolution est l'axe z . Par définition, r étant la direction radiale et z la direction axiale, dans le repère (r, z) attaché au plan méridien, la structure est toujours définie avec $r \geq 0$. Le volume de matière associé à un élément est celui d'un tore dont la trace est la section plane dans le plan méridien. La modélisation est donc topologiquement bidimensionnelle, bien que la structure étudiée soit complètement tridimensionnelle. On parle souvent de calcul $2D^{1/2}$. Ce type de modélisation présente deux avantages appréciables : tout d'abord une grande simplification de la définition du modèle liée à une diminution très sensible des données de calcul, ensuite un gain de temps CPU, d'entrées-sorties et d'espace disque puisque l'on résout un problème tri-dimensionnel par un calcul dans le plan méridien.

D'un point de vue purement mathématique, il existe potentiellement dans un modèle axisymétrique deux modes rigides : la translation axiale et la rotation autour de l'axe de révolution. Le déplacement U_θ dans la direction circonférentielle n'étant pas défini pour les éléments axisymétriques, puisqu'il est nul par hypothèse, seul le mode de translation axiale peut exister selon les conditions aux limites.

Il n'est pas rare de faire, en pré-dimensionnement, des calculs axisymétriques sur des structures qui ne le sont pas tout à fait, de manière à avoir un ordre de grandeur des déplacements et des contraintes. C'est par exemple le cas de brides, où on remplace la couronne localement percée par un matériau homogène axisymétrique équivalent. Cependant, il faut bien admettre que ce type de modélisation est peu fréquent dans l'industrie pour deux raisons principales. Premièrement, si trois des conditions requises sont souvent satisfaites, il est rare que la charge soit complètement axisymétrique.

On peut alors parfois recourir à la technique de Fourier mais elle n'est pas disponible dans tous les logiciels et elle est un peu délicate de mise en œuvre.

Deuxièmement, la tendance étant de tout mailler finement en éléments volumiques, cette technique qui permet de réduire les ressources informatiques nécessaires pour une analyse est parfois considérée comme une perte de temps.

En effet, à partir d'une CAO volumique, il faut définir l'intersection du volume de la structure et du plan méridien, puis l'isoler pour faire le maillage...

2. Éléments finis axisymétriques

Quand on étudie la section d'une structure par le plan méridien, trois situations peuvent se produire :

- la structure est massive,
- la structure est élancée,
- la structure comporte des parties massives et des parties élancées.

Il existe dans la plupart des logiciels de calcul une bibliothèque spécialisée comportant divers éléments axisymétriques pour traiter ces situations. Les meilleurs automatiques bi-dimensionnels de tous types peuvent être utilisés pour mailler les parties massives nécessitant des éléments de volumes axisymétriques, les meilleurs linéiques pour mailler les parties élancées qui peuvent être modélisées par des éléments de coques axisymétriques.

2.1. Volumes axisymétriques

La trace dans le plan méridien d'un volume torique est un triangle ou un quadrangle (Figure 2.1). Ces éléments de volume axisymétrique sont de degré 1 ou 2. Les triangles du premier degré sont trop raides, il est préférable de les utiliser au second degré. Si les éléments quadrangulaires sont intégrés sélectivement ou s'ils comportent des modes incompatibles, il est possible de les utiliser au premier degré, si la géométrie de la structure s'y prête. Les éléments quadrangulaires classiques sont trop raides au premier degré. Les noeuds, qu'ils soient sommets ou milieux, ont deux degrés de liberté de translation dans le plan méridien, notés U_r et U_z : le déplacement radial et le déplacement axial, tous les deux alimentés en raideur. Il n'y a aucune donnée particulière à définir pour ces éléments.

2.2. Coques axisymétriques

Dans le plan méridien, la trace d'une surface de révolution est une ligne. Cette ligne représente le feuillet moyen d'un élément de coque axisymétrique, rectiligne ou curviligne. Les nœuds, qu'ils soient sommets ou milieux, ont trois degrés de liberté notés U_r , U_z et θ respectivement : le déplacement radial, le déplacement axial et la rotation dans le plan méridien, tous les trois alimentés en raideur. Il faut définir l'épaisseur des coques axisymétriques, ce qui correspond à la « largeur du trait » dans le plan méridien.

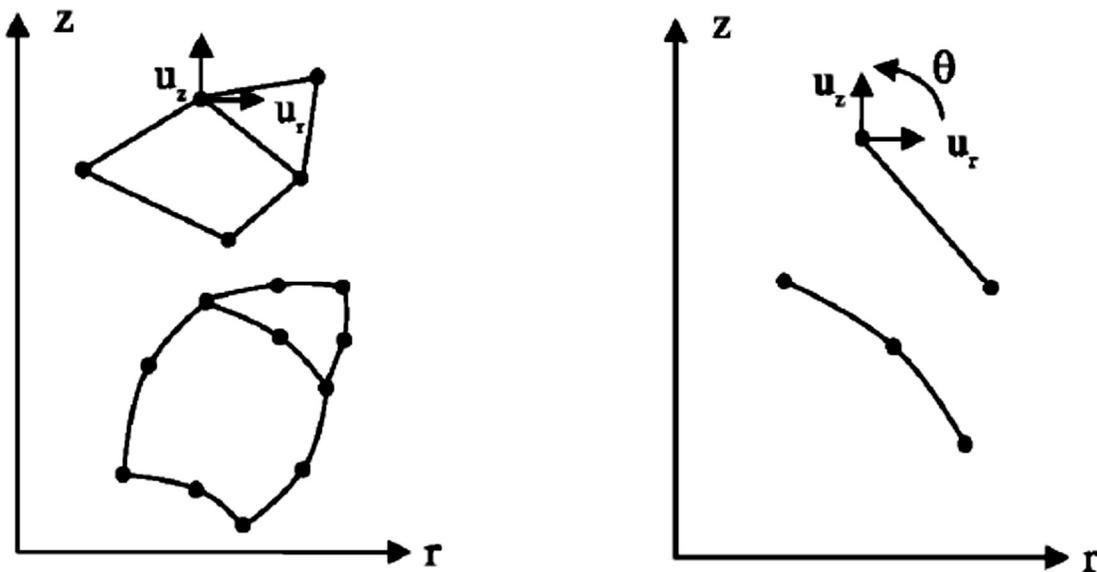


Figure 2.1 : Volumes et coques axisymétriques

2.3. Autres éléments

Il existe d'autres éléments axisymétriques : les membranes axisymétriques, les poutres axisymétriques et les éléments de transition. La membrane axisymétrique ne travaille qu'en traction-compression dans son feuillet moyen (ligne décrite dans le plan méridien). La poutre axisymétrique, dont la trace dans le plan méridien n'est qu'un point, permet la modélisation de raidisseurs circonférentiels. L'élément de transition est un peu particulier car d'un côté, il a des degrés de liberté de coque, de l'autre, des degrés de liberté de volume. Il permet, dans un même modèle, de raccorder des parties massives modélisées en volume sur des parties élancées modélisées en coques. La zone de transition et sa taille dépendent du choix de l'utilisateur (Figure 2.2).

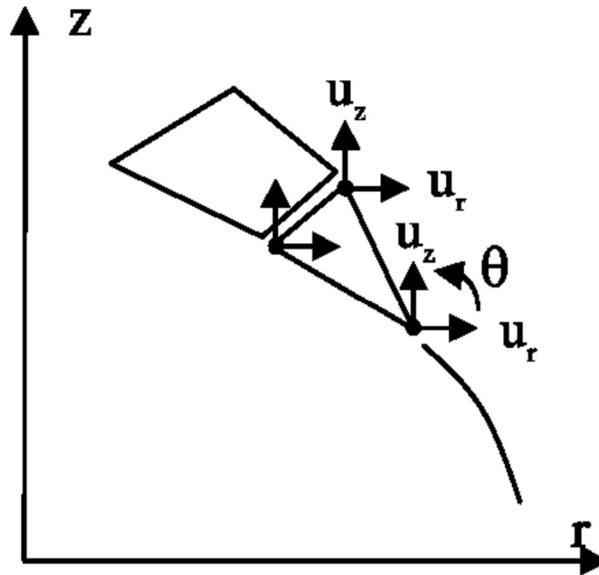


Figure 2.2: Elément de transition coque-volume axisymétrique.

3. Élément triangulaire du premier degré

Soit un élément triangulaire axisymétrique du premier degré dont les nœuds sont numérotés i , j et k avec la convention i inférieur à j inférieur à k . Chaque champ de déplacement dans le plan méridien est de la forme :

$$\begin{cases} u_r(r, z) = a + br + cz \\ u_z(r, z) = d + er + fz \end{cases} \Rightarrow u = PA$$

Tous calculs faits, S étant la surface du triangle, non nulle si les trois points ne sont pas alignés, on obtient la même expression pour le déplacement u , et pour le déplacement Uz :

$$u_r(r, z) = \frac{1}{2S} \begin{Bmatrix} u_1[(r_2 z_3 - r_3 z_2) + r(z_2 - z_3) + z(r_3 - r_2)] \\ -u_2[(r_3 z_1 - r_1 z_3) + r(z_3 - z_1) + z(r_1 - r_3)] \\ +u_3[(r_1 z_2 - r_2 z_1) + r(z_1 - z_2) + z(r_2 - r_1)] \end{Bmatrix}$$

Soit encore $u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3$ avec $N_i = \frac{1}{2S} (a_i + b_i r + c_i z)$

$$\begin{cases} a_i = r_j z_k - r_k z_j \\ b_i = z_j - z_k \\ c_i = r_k - r_j \end{cases} \quad i < j < k$$

En appliquant les formules classiques qui, dans le cadre de la mécanique linéaire, expriment les déformations en fonction des déplacements, on obtient :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ 2\varepsilon_{rz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{u}{r} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \frac{\partial N_3}{\partial r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_3}{\partial z} \\ \frac{N_1}{r} & \frac{N_2}{r} & \frac{N_3}{r} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_3}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \frac{\partial N_3}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = Bq$$

En utilisant les formes compactées utilisées pour l'expression des fonctions d'interpolation, les termes de la matrice des déformations sont:

$$\frac{\partial N_i}{\partial r} = \frac{1}{2S} b_i \quad \frac{\partial N_i}{\partial z} = \frac{1}{2S} c_i \quad \frac{N_i}{r} = \frac{1}{2S} \left(\frac{a_i}{r} + b_i + c_i \frac{z}{r} \right)$$

La matrice des déformations B dépend des coordonnées r et z du point courant. Les déformations et les contraintes dans l'élément triangulaire axisymétrique du premier degré ne sont pas constantes alors qu'elles l'étaient pour l'élément triangulaire du premier degré en EPC ou EPD. L'expression générale de la matrice de raideur s'applique aux éléments axisymétriques, le volume sur lequel l'intégration est réalisée étant alors le volume du tore dont l'élément est la trace dans le plan méridien.

$$K = \int_0^{2\pi} \int_S B^T(r, z) H B(r, z) r dr d\theta dz = 2\pi \int_S B^T(r, z) H B(r, z) r dr dz$$

Pour évaluer cette intégrale, une première technique consiste à réaliser analytiquement l'intégration. On remarque que les termes diagonaux, qui comportent eux-mêmes plusieurs termes, font apparaître les produits $B_{li} B_{li}$ soit :

$$\int_S \left(\frac{a_i}{r} + b_i + c_i \frac{z}{r} \right)^2 r dr = \int_S \frac{\alpha}{r} dr + \dots$$

Certains termes de la matrice de raideur comportent des logarithmes. Cela explique la convention selon laquelle les éléments axisymétriques sont toujours définis dans le demi-plan méridien r positif ou nul. L'intégration analytique donnant les termes en $\text{Log}(ri/rm)$, si l'élément est à grande distance de l'axe de révolution, le rapport des rayons tend vers 1 et le logarithme est imprécis. Lorsqu'un point touche l'axe de révolution, ce qui arrive fréquemment dans les structures axisymétriques qui sont souvent fermées, il faut évaluer le logarithme de zéro. Pour éviter ces problèmes, la matrice de raideur n'est pas calculée analytiquement.

La seconde méthode consiste à évaluer une matrice \bar{B} au centre de gravité d l'élément, de coordonnées, \bar{r} et \bar{z} et à utiliser une formule approchée :

$$K = 2\pi \bar{B}^T H \bar{B} \bar{r} S$$

Cette intégration à 1 point converge vers la solution exacte si la taille d l'élément tend vers zéro. Cette technique simple donne en général de bon résultats et lève les difficultés rencontrées lors de l'intégration analytique.

La troisième méthode consiste à utiliser les règles classiques d'intégration numérique, en fonction de la topologie de l'élément dont on souhaite calculer la matrice de raideur.

Cette intégration à 1 point converge vers la solution exacte si la taille de l'élément tend vers zéro. Cette technique simple donne en général de bons résultats et lève les difficultés rencontrées lors de l'intégration analytique.

La troisième méthode consiste à utiliser les règles classiques d'intégration numérique, en fonction de la topologie de l'élément dont on souhaite calculer la matrice de raideur.

4. Chargement d'un élément axisymétrique

Comme un nœud représente en fait le cercle qui y passe, la charge appliquée sur un nœud dans un modèle axisymétrique est la résultante sur la circonférence. Selon les programmes de calcul, on introduit donc sur un nœud soit la charge linéique par radian, soit la charge linéique par unité de

longueur de circonférence. Les charges surfaciques et les charges de volume (par exemple la pesanteur) s'introduisent classiquement, le programme calculant lui-même la répartition nodale énergétiquement équivalente. Si P est l'intensité volumique de la charge de pesanteur, agissant conventionnellement dans la direction axiale, la charge nodale sur un élément triangulaire axisymétrique du premier degré est:

$$\begin{pmatrix} F_{1z} \\ F_{2z} \\ F_{3z} \end{pmatrix} = F_e = \int_V N^T P \cdot dv = \int_0^{2\pi} \int_S N^T P \cdot r dr d\theta dz = 2\pi P \int_S N^T \cdot r dr dz$$

En choisissant le centre de gravité de l'élément comme origine de ses axes, on peut faire un changement de variable et déterminer les charges nodales :

$$\begin{cases} r = \bar{r} + r' \\ z = \bar{z} + z' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_i = \frac{2S}{3} = a_j = a_k \\ b_i = b_j = b_k = 0 \\ c_i = c_j = c_k = 0 \end{cases} \Rightarrow F_{1z} = 2\pi P \int_S \frac{1}{2S} \frac{2S}{3} \bar{r} dr' dz' = 2\pi \bar{r} P \frac{S}{3}$$

5. Exemple D'application

5.1 PREMIER EXEMPLE

La membrane circulaire, mince, soumise à une pression interne, étudiée dans le chapitre consacré aux éléments de membrane, peut être traitée en axisymétrique. Le modèle est très simple : 3 nœuds, 2 éléments de membrane d'épaisseur 1 mm (Figure 5.1). Il n'y a aucune condition de symétrie à imposer, il faut simplement éliminer le mode rigide de translation axiale en bloquant le déplacement axial de l'un des trois nœuds. Une charge nodale est appliquée sur le nœud intérieur, représentant la charge appliquée sur toute la circonférence.

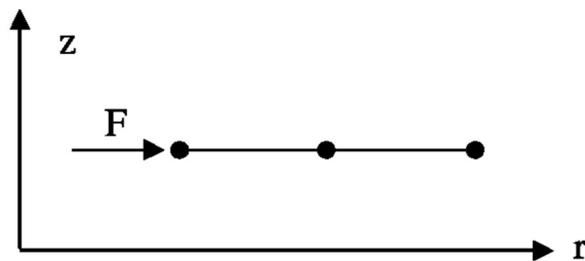


Figure 5.1: Modèle axisymétrique

Le déplacement radial du nœud intérieur est de 0,2808 mm (0,2810 mm pour la référence), celui du nœud extérieur de 0,1904 mm (0,1905 mm pour la référence). On note sur cet exemple l'intérêt de la modélisation axisymétrique : simplicité du maillage, faible nombre d'éléments et de degrés de liberté.

Dans le fichier de résultat, l'équilibre charge-réaction ne semble être respecté ni sur la composante radiale, ni sur la composante de rotation dans le plan méridien, alors qu'il l'est sur la composante axiale. Dans le cas d'un problème axisymétrique, la charge radiale et le moment éventuellement appliqué sur un nœud de coque sont auto-équilibrés, ils ont une intégrale nulle par intégration sur la circonférence. La réaction radiale a également une résultante nulle sur la circonférence, quelle que soit sa valeur qui n'est pas nécessairement opposée à celle de la charge. La relation d'équilibre est vectorielle et elle est vérifiée pour la structure 3D. C'est le seul cas où on peut avoir l'impression que la charge et la réaction ne sont pas opposées, mais elles le sont bien.

5.2 DEUXIÈME EXEMPLE

La structure représentée ci-dessous est une fenêtre d'observation (Figure 5.2a). Ce hublot est en béryllium que l'on considère ici comme isotrope. Le module d'élasticité du matériau est de 303400 MPa, son coefficient de Poisson de 0,02 et sa limite élastique de 400 MPa. La pression dans la chambre d'expérience est de 400 bars. On suppose ici qu'elle est uniforme sur toute la zone en trait épais et nulle au-delà. Le montage du hublot dans la paroi de la chambre est tel que l'on puisse considérer que toute la base du hublot est en appui sur un support indéformable. Toutes les conditions nécessaires pour faire un modèle axisymétrique sont remplies. Le plus grand diamètre du hublot est de 22,2 mm et sa hauteur au centre de 7,35 mm.

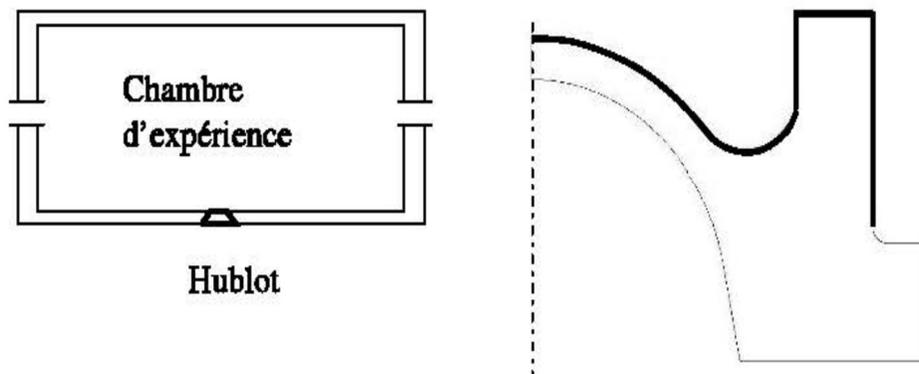


Figure 5.2a: Hublot

La géométrie du hublot dans le plan méridien est découpée: afin de pouvoir utiliser un maillage réglé. Le modèle comporte 1500 éléments de volume axisymétrique de degré 2, soit 9420 degrés de liberté (Figure 5.2b). Toute la base est bloquée en translation axiale, tous les nœuds situés sur l'axe de révolution ont UD déplacement radial nul en raison de l'axisymétrie.

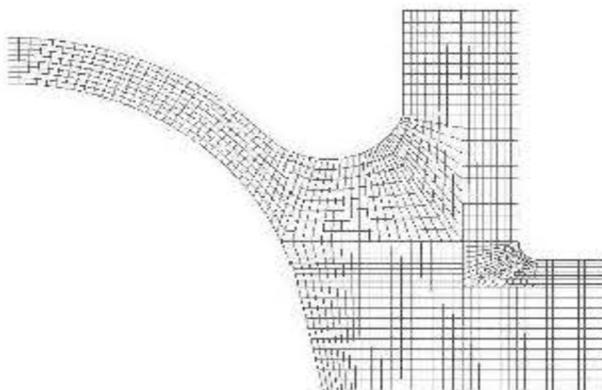


Figure 5.2b : Maillage

L'amplitude maximale du déplacement est de $5,4 \times 10^{-3}$ mm, cohérente avec l'hypothèse de linéarité géométrique (Figure 5.2c). Mais l'examen des réactions fait apparaître que sur certains nœuds, la réaction va du nœud vers la fondation : pour que la condition d'appui (bilatérale en analyse linéaire) soit satisfaite, il faut que la fondation retienne la structure. Or ce n'est qu'un appui: le modèle ne traduit pas la physique. il est donc indispensable d'introduire des conditions de contact pour prendre en compte le décollement. L'amplitude maximale du déplacement reste de l'ordre de $5,4 \times 10^{-3}$ mm, le décollement se produit à partir d'un rayon de 9,2 mm.

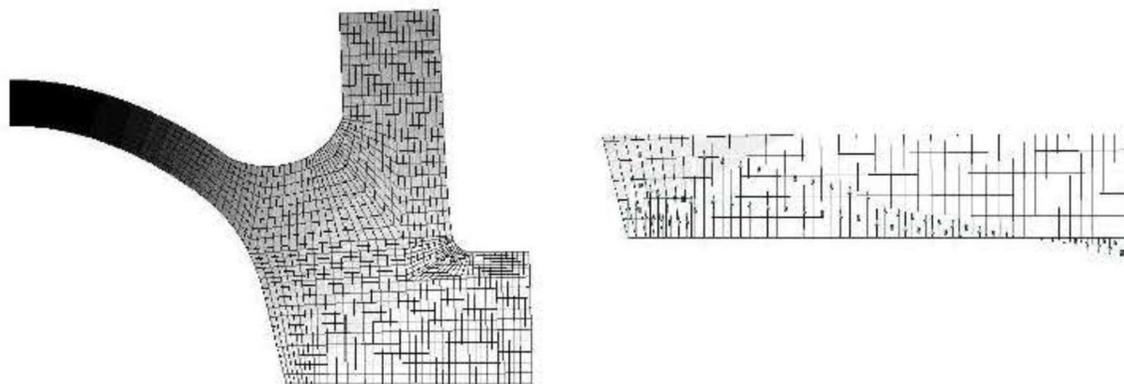


Figure 5.2c: Amplitude des déplacements et zoom sur les réactions

La contrainte équivalente de Von Mises extrapolée aux nœuds a une valeur maximale de 288 MPa (Figure 5.2e), inférieure à la limite élastique du matériau. L'hypothèse de linéarité matérielle est validée. Mais la partie centrale du hublot a tendance à se renverser sous l'effet de la pression : il faut vérifier sa tenue en stabilité (objet du paragraphe 26.4) avant de conclure.

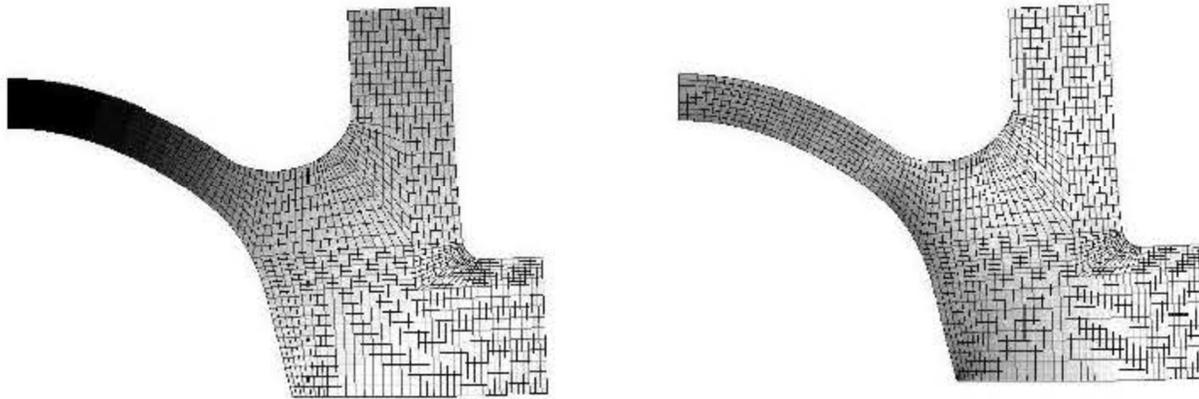


Figure 5.2e: Amplitude des déplacements et contrainte équivalente.

Les éléments de volume axisymétriques ont des arêtes dont la taille moyenne est de l'ordre de 0,15 mm. Pour un modèle 3D, les arêtes des volumes devraient être de cet ordre pour que les éléments respectent les critères d'élançement. Le rayon maximal étant de 11 mm. Sur un périmètre d'environ 70 mm, il faudrait générer de l'ordre de 700000 éléments volumiques du second degré, soit un modèle comportant 16 200 000 degrés de liberté.

VIII. Conclusion



Comme mentionné précédemment, la méthode des éléments finis a été appliquée à de nombreux problèmes, structurels et non structurels. Cette méthode présente un certain nombre d'avantages par rapport aux méthodes approximatives conventionnelles, telles que présentées par les cours traditionnels de mécanique des matériaux, pour la modélisation et la détermination des quantités physiques, telles que les déplacements, les contraintes, les températures, les pressions et les courants électriques,...etc. Ces avantages comprennent la capacité de :

- Modéliser des corps de forme irrégulière assez facilement,
- Gérer sans difficulté les conditions générales de charge,
- Modéliser des corps composés de plusieurs matériaux différents parce que les équations des éléments sont allouées individuellement.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Dhatt G. & Touzot G. Une présentation de la méthode des éléments finis. Deuxième Edition, Maloine S. A., Paris 1984
- Rao S.S. The Finite Element in Engineering. Second Edition Oxford: Pergamon Press Edition, 1989.
- Lewist P.E. & Ward J. P. The Finite Element Method: Principles and Applications. Addison-Wesley Publishers Ltd., 1991.
- Rockey K. C., Evans H. R., Griffiths D. W., Nethercot D.W. The Finite Element Method: A Basic Introduction, William Collin Sons & Publishers, UK 1983.
- Hinton E. & Owen D.R.J. Finite Element Programming. Academic Press, Londre 1977
- Khennane A. Méthode des Eléments Finis : Enoncé des principes de base. Office des publications universitaires, OPU, Alger 1997
- Ern A. Aide-mémoire Eléments Finis. Dunod, Paris 2005
- Herbert Baaser. Development and Application of the Finite Element Method based on MATLAB. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010.
- Jean-Charles Craveur, MODELISATION DES ELEMENTS FINIS - Cours et exercices corrigés, 3^{eme} édition 2008.
- S. S. Quek, G. R. Liu, The Finite Element Method: A Practical Course, Butterworth-Heinemann, Elsevier Science, 2003.
- Liu, G. R. and Quek, S. S. Jerry, A finite element study of the stress and strain fields of InAs quantum dots embedded in GaAs. Semiconductor Science and Technology, Vol. 17, 630–643, 2002.
- J. N. Reddy, An Introduction To The Finite Element Method, Second Edition ed (McGraw-Hill, New York, 1993).
- K. J. Bathe, Finite Element Procedures, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1996.
- O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor, The Finite Element Method, (McGraw-Hill, New York, 2000).
- J.N., Reddy, An Introduction to the Finite Element Method, 3rd Edition, McGraw-Hill, New York , 2015.