جامعة غليزان
RELIZANE UNIVERSITY

جامعة غليزان
كلية العلوم الإقتصادية، التجارية وعلوم التسيير
قسم العلوم الإقتصادية

مطبوعة بيذاغوجية بعنوان :

رياضيات 2
محاضرات وتمارين محلولة

موجهة لطلبة السنة الأولى جذع مشترك العلوم الإقتصادية، التجارية وعلوم التسير

من إعداد

د.غوال نادية

السنة الجامعية:2023 -2024

ورقة بيضاء

جاءت هذه المطبوعة المعنوية ب " محاضرات وتمارين محلولة في رياضيات-2-" موجهة إلى طلبة جذع مشترك السنة الأولى لكلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسير، الذين يدرسون مقياس رياضيات-2- خلال السداسي الثاني، وفق مقرر الوزارة وتكونت من 01 صفحة إلى صفحة 81، حيث يهدف المقياس إلى فهم الطالب كيفية حل المعادلات التفاصلية، ومعرفة الإشتقاق الجزئي من الرتبة الأولى والثانية، ومختلف العمليات الخاصة بالمصفوفات وكيفية حساب المحدد والمعكوس المصفوفة بطريفة" المصفوفة المرافقة "وطريقة "غوس"، بالإضافة الإلمام بجميع الطرق لحل أنطمة المعادلات بما فيها طريقة كرامر وطريقة غوس وطريقة معكوس، مما يتوجب على الطالب إتقان الأساسيات والخطوات المتبعة في حلها. وسنقوم بتوصيف المقياس كمايلي:

1-التعريف بأستاذة المقياس: الدكتورة غوال نادية، ماستر تحليل إقتصادي دفعة 2014، دكتوراه LMD في العلوم الاقتصادية، تخصص تحليل إقتصادي وتقنيات كمية عام 2019، تدريس المقياس منذ 2021 إلى يومنا هذا.

2- هدف المقياس: تهدف هذه المحاضرات إلى تقديم مادة علمية بسيطة ومنهجية في مقياس رياضيات-2- من أجل إزالة صعوبات التعلم للطلبة بتقديم المقياس بطريقة علمية واضحة وسهلة، متبعين البرنامج المقرر، ومحاولين تبسيط لأقصى قدر ممكن ، لكي يتم فهمه من طرف الطلبة، وذلك من خلال حل أكبر قدر من الأمثلة والتمارين وكانت الموجهة إلى طلبة سنة جذع مشترك السنة الأولى لكلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسير.

3- متطلبات المقياس: أن تكون لطالب مكتسبات قبلية حول جميع الأساسيات متعلقة بالرياضيات لاسيما المعادلات، الإشتقاق، وخواص الدوال اللوغارتمية والأسية .

الفهرس العام

قائمـة المختصـرات

Désignation complète en langue étrangère	التسمية باللغة العربية	المختصرات
	A	
Matrice auxiliaire	المصفوفة المساعدة	adj
	D	
Matrix determinant	محدد المصفوفة	det

مقدمة:

يعتبر مقياس الرياضيات من المقاييس الكمية في دراسة الظواهر الاقتصادية وتحليلها، ويعد ميزة من مزايا الاقتصاد المعاصر، وأفضل وسيلة لإعطاء صورة شاملة وسهلة الفهم للأسس النظرية وكيفية تحويلها إلى تطبيقات عملية حيث يعتبر من أهم المقايس التي تعتمد عليه مختلف المقايس، مثل الاقتصاد الجزئي والكلي والإحصاء ...إلخ، فهو من يساهم في نمو قدرات الطالب الذهنية، وإكتساب مهاراته، لذلك أعدت هذه المطبوعة الخاصة بمقياس الرياضيات للسنة الأولى جذع مشترك لكلية العلوم الاقتصادية، العلوم التجارية وعلوم التسيير استجابة لمتطلبات البرنامج الوزاري الجديد الخاص بالسنة الأولى جذع مشترك ، وذلك مراعاة جميع الصعوبات التي يواجهها الطالب في استيعاب هذا المقرر، بحيث قمنا بوضع جميع المحاضرات والتمارين وحلوله الخاصة بسلاسل الأعمال الموجهة للسداسي الثاني.

المعادلات التفاضلية

Differential Equations

1- تعريف المعادلة التفاضلية :

لتكن y دالة للمتغير قابلة للإشتقاق n مرة، نسمي معادلة تفاضلية من الرتبة n كل معادلة من الشكل :

$$f(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots\ldots\ldots y^{n}(x))=0 \ldots\ldots(1)$$

حيث : y^n هي المشتقة النونية ل y.

يسمى الشكل العام ل $y(x)$ الذي يحقق المعادلة (1) بالحل العام للمعادلة التفاضلية.

ونسمي حل خاص للمعادلة التفاضلية كل حل يحقق بعض الشروط الخاصة وتسمى هذه الشروط بالشروط الإبتدائية (هادية مسعودان، فارح حناشي، 2021، ص122).

مثال :

المعادلة التفاضلية $x^2y + y' = 0$ هي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى .

المعادلة التفاضلية $xy'' + 4y' = 0$ هي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية .

2- أنواع المعادلات التفاضلية:

توجد سبعة انواع من المعادلات التفاضلية لكننا سنكتفي بعرض الأنواع الآتية:

2-1 -المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى:

المعادلات التفاضلية وهي علاقة بين دالة وبين مشتقتها الأولى أي المتغير x للدالة y وتكون من الشكل (سعود محمود، بن عيسى لحضر، 2012،ص69.): $f(x, y, y') = 0$ وعليه يمكن إستخراج y' من هذه المعادلة فتكتب :

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

مثال :

حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$y' = (y-4)(y-5)$$

الحل :

$$y' = (y-4)(y-5) \Rightarrow \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = (y-4)(y-5)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{(y-4)(y-5)} = dx \Rightarrow \left(\frac{dy}{(y-4)} - \frac{dy}{(y-5)}\right) = dx$$

$$\Rightarrow ln(y-4) - \ln(y-5) = x + c \Rightarrow\ ln\frac{(y-4)}{(y-5)} = x + c$$

$$\Rightarrow \frac{(y-4)}{(y-5)} = e^{x+c} \Rightarrow (y-5)e^{x+c} = (y-4)$$

$$=(y-4) \Rightarrow y(e^{x+c}-1) = (5e^{x+c}-4) \qquad \Rightarrow (ye^{x+c} - 5e^{x+c})$$

$$\Rightarrow y = \frac{(5e^{x+c}-4)}{(e^{x+c}-1)}$$

2-1-1- حل المعادلات من الشكل $y' = a + by$ مع $a\neq 0$:

a و b عددان حقيقان مع aغير معدوم، الحلول على R للمعادلة التفاضلية $y' = a + by$ هي الدوال $y = ce^{ax} - \frac{b}{a}$، حيث C عدد حقيقي كيفي (محمد قداري، 2016، ص145) .

أمثلة: حل المعادلات التفاضلية التالية:

1) $y' = -4y + 7 \Rightarrow y = ce^{-4x} + \frac{7}{4}$

2) $y = 5y' + 3 \Rightarrow y' = \frac{1}{5}y - \frac{3}{5} \Rightarrow y = ce^{\frac{1}{5}x} + 3$

3) $3y' - y = 0 \Rightarrow y' = \frac{1}{3}\ y \Rightarrow y = ce^{\frac{1}{3}x}$

4) $2y + 9y' - 1 = 0 \Rightarrow 9y' = -2y + 1 \Rightarrow y' = \frac{-2}{9}y + \frac{1}{9}$

$$\Rightarrow y = ce^{\frac{-2}{9}x} + \frac{1}{2}$$

2-1-2-حل المعادلات من الرتبة الأولى بطريقة فصل المتغيرات:

لتكن المعادلة من الرتبة الأولى المعطاة على الشكل الأتي :

$$(\mathbf{M}(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathbf{dx} + \mathbf{N}(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathbf{dy}=0)$$

ولحل مثل هذه المعادلات نتبع الطريقة التالية:

نكتب المعادلة على الشكل:

$$\mathbf{h}(\mathbf{x})\mathbf{dx} + \mathbf{g}(\mathbf{y})\mathbf{dy} = 0$$

حيث h دالة للمتغير x فقط و g داله للمتغير y فقط وبذلك فإن عملية فصل المتغيرات تكون تحققت ولحل المعادلة بعد عملية الفصل , ثم نجعل كل عبارة لنفس المتغير في احد طرفي المعادلة ثم نجري التكامل المباشر فيكون الحل العام:

$$= \mathbf{C} \int \mathbf{h}(\mathbf{x})\mathbf{dx} + \int \mathbf{g}(\mathbf{y})\mathbf{dy}$$

حيث C ثابت اختياري ويسمى ذلك الحل بالحل العام ، ويمكن وضع الثابت الاختياري على أي صورة حسب متطلبات تبسيط شكل الحل العام. (هادية مسعودان، فارح حناشي، 2021، ص124).

مثال01: حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$xy^2dx + (5 - x^2)dy = 0$$

نقسم طرفي المعادلة على $\boldsymbol{y^2\ (5 - x^2)}$

ثم نقوم بالتكامل نجد :

$$\Rightarrow \frac{\boldsymbol{xdx}}{(\boldsymbol{5 - x^2})} + \frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{y^2}} = 0 \Rightarrow \int \frac{\boldsymbol{xdx}}{(\boldsymbol{5 - x^2})} + \int \frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{y^2}} = c \Rightarrow \frac{-1}{2}\ln(\boldsymbol{5 - x^2}) + \frac{-1}{\boldsymbol{y}} = c$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{y^{-1}} = \ln(\boldsymbol{5 - x^2})^{\frac{-1}{2}} - \boldsymbol{c} \Rightarrow \boldsymbol{y} = (\ln(\boldsymbol{5 - x^2})^{\frac{-1}{2}} - \boldsymbol{c})^{-\boldsymbol{1}}$$

مثال02: حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$0(1 + x)dy - ydx =$$

الحل :

نقسم طرفي المعادلة على $(1 + x)\ (y)$

ثم نقوم بالتكامل نجد :

$$\Rightarrow \frac{dy}{\mathrm{y}} - \frac{dx}{(x+1)} = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{\mathrm{y}} - \int \frac{dx}{(x+1)} = c \Rightarrow \ln(\mathrm{y}) - \ln(x + 1) = c$$

$$\Rightarrow \ln(\mathrm{y}) = \ln(x + 1) + \ln c \Rightarrow e^{\ln(\mathrm{y})} = e^{\ln((x+1).c)}$$

$$\Rightarrow\ y = c(x + 1)$$

2-2-المعادلات التفاضلية المتجانسة:

تكون الدالة $f\,(x, y)$ متجانسة من الدرجة n إذا كان (زغيب شهرزاد، بن ديب رشيد، 2014، ص 155-157):

$$f\ (\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

حيث : λ عدد ما

نقول عن المعادلة العادية من الرتبة الأولى

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = f(x, y)$$

إنها معادلة تفاضلية متجانسة إذا أمكن كتابتها بالشكل التالي:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

حيث : $x \neq 0$

إن حل المعادلة التفاضلية المتجانسة يكون بفرض $z = \frac{y}{x}$ حيث يكون :

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}x + zy = zx \Rightarrow$$

وعند التعويض $\frac{dz}{dx}x + z = f(z)$ في المعادلة المتجانسة نجد أن:

$$\Rightarrow f(z) - z = \frac{dz}{dx}x \Rightarrow \frac{dz}{f(z)-z} = \frac{dx}{x}$$

بتكامل الطرفين نحصل على:

$$g(z) = lnx + c$$

حيث $g(z)$ هي دالة أصلية للدالة $\frac{1}{f(z)-z}$

نعوض الأن قيمة z نحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة المفروضة:

$$g\left(\frac{y}{x}\right) = lnx + c$$

مثال :

حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$x^2y' = xy - y^2$$

الحل:

نقسم طرفين المعادلة على x^2 نجد:

$$\Rightarrow y' = \frac{xy}{x^2} - \frac{y^2}{x^2} \Rightarrow y' = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2 \ldots\ldots\ldots.(01)$$

بما أن هذه معادلة تفاضلية متجانسة لأنها من الشكل :

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad , \quad x \neq 0$$

إذن نعوض عن الدالة (y)بدالة جديدة z

$$z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = zx \Rightarrow y' = z'x + z$$

نعوض كل من $(y', \frac{y}{x})$ في العلاقة (01) نجد:

$$z'x + z = z - z^2 \Rightarrow \frac{dz}{dx}x = -z^2$$

نفصل المتغيرات ثم نقوم بالتكامل نجد:

$$\Rightarrow \frac{x}{dx} = -\frac{z^2}{dz} \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = -\int \frac{dz}{z^2} \Rightarrow \ln(x) = \frac{1}{z} + c \Rightarrow z = \frac{1}{\ln(x)+c}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{1}{\ln(x)+c} \Rightarrow y = \frac{x}{\ln(x)+c}$$

2-3- المعادلات التفاضلية غير المتجانسة:

تكون المعادلة التفاضلية غير متجانسة إذا كان (هادية مسعودان، فارح حناشي، 2021، ص127):

$$f\ (x,y) \neq f(\lambda x,\lambda y)$$

مثال: حل المعادلة التفاضلية التالية: $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-4}{2x-y+1}$

الحل:

نلاحظ أن الشرط $f(x,y)=f(\lambda x,\lambda y)$ غيرمحقق لأن:

$$f(x,y) = \frac{x+y-4}{2x-y+1} \neq \frac{\lambda x+\lambda y-4}{2\lambda x-\lambda y+1}$$

وهي المعادلة ليست معادلة متجانسة ولايمكن أبدا فصل الثابت λ.

نلاحظ في هذه الحالة أن الدالة تمثل معادلتي خطين مستقيمين متقاطعين، لنجد نقطة التقاطع للمستقيمين

ثمنضيف النقطة إلى x,y ثم بالتعويض عنهم في المعادلة تتحول المعادلة إلى معادلة متجانسة وتحل بنفس الطريقة.

نقطة التقاطع هي (1،3) ثم نعوض عن كل $x = x+1$ ، وكذلك بالنسبة ل $y = y+1$ في المعادلة

الأصلية نحصل على معادلة متجانسة $\frac{\mathrm{dy}}{dx} = \frac{x+y}{2x-y}$

وبقسمة المعادلة علىx ثم نقوم بوضع $\mathrm{z} = \frac{\mathrm{y}}{x}$ نتحصل على:

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{dy}}{dx} = \frac{1+\frac{y}{x}}{2-\frac{y}{x}} \Rightarrow \frac{\mathrm{dy}}{dx} = \frac{1+z}{2-z}$$

ثم بالتعويض عن $\frac{\mathrm{dy}}{dx}$ من المعادلة $y = xz$

ثم بالتفاضل بالنسبة ل x وبتعويض في المعادلة نتحصل على:

$$\frac{\mathrm{dy}}{dx} = x\frac{\mathrm{dz}}{dx} + z \Rightarrow \frac{\mathrm{dy}}{dx} = \frac{1+\mathrm{z}}{2-\mathrm{z}} = x\frac{\mathrm{dz}}{dx} + z$$

بتبسيط المعادلة نجد:

$$\frac{dx}{x} = \frac{(2-z)dz}{1-z-z^2}$$

وبهذا تم فصل المتغيرات ونقوم بإجراء التكامل لكي نتحصل على الحل.

3– المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية (المميز موجب او معدوم):

3–1– تعريف : نسمي كل معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية من الشكل (سعود محمود، بن عيسى لخضر، ص85، 2012):

$$y'' + ay' + by = h(x)$$

حيث : a و b ثوابت و a≠0

- في حالة الدالة تساوي الصفر أي: $h(x) = 0$ تسمى المعادلة بمعادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة متجانسة.

3–2– الحالات الخاصة لحل المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية:

لتكن المعادلة التفاضلية $y'' + ay' + by = 0$

نفرض أن : $y = e^{rx}$

المشتقة الأولى: $y' = re^{rx}$

المشتقة الثانية: $y'' = r^2e^{rx}$

وبتعويض يمكن حل المعادلة التالية : $r^2e^{rx} + are^{rx} + be^{rx} = 0$

ومنه : $e^{rx}(r^2 + ar + b) = 0$

إذن: $(r^2 + ar + b) = 0$

الحالة الأول (المميز موجب):

إذا كانت المعادلة المميزة لها جذرين مختلفين حقيقين $r_1 \neq r_2$ حلان مستقلان خطيا للمعادلة التفاضلية المتجانسة وبالتالي فالحل العام للمعادلة التفاضلية هو :

$$y\,(x) = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$$

الحالة الثانية (المميز معدوم):

إذا كانت المعادلة المميزة لها جذر مضاعف r_0 وبالتالي فالحل العام للمعادلة التفاضلية هو :

$$y\,(x) = (\alpha x + \beta)e^{r_0x}$$

مثال01: حل المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية التالية:

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

الحل:

نضع : $y = e^{rx}$

المشتقة الأولى: $y' = re^{rx}$

المشتقة الثانية: $y'' = r^2 e^{rx}$

نعوض في المعادلة الأصلية:

$$e^{rx}(r^2 + 5r + 6) = 0$$

بعد حل المعادلة التربيعية نجد :

$$e^{rx}(r + 2)(r + 3) = 0$$

إذن : حل المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية هو :

$$y\,(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}$$

مثال02: حل المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية التالية:

$$y'' - 2\sqrt{2}y' + 2y = 0$$

الحل:

نضع : $y = e^{rx}$

المشتقة الأولى: $y' = re^{rx}$

المشتقة الثانية: $y'' = r^2 e^{rx}$

نعوض في المعادلة الأصلية:

$$e^{rx}(r^2 - 2\sqrt{2}r + 2) = 0$$

بعد حل المعادلة التربيعية نجد أن المعادلة المميزة لها جذر مضاعف r_0 حيث :

$$r_0 = \sqrt{2}$$

إذن : حل المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية هو :

$$y\,(x) = (\alpha x + \beta)e^{\sqrt{2}x}$$

سلسلة تمارين حول المعادلات التفاضلية

التمرين الأول :

حل المعادلات التفاضلية التالية:

1) $y' = 2y + \sqrt{7}$

2) $y = -5y' + 2$

3) $-3y' - 2y = 0$

4) $5y + 6y' - 1 = 0$

التمرين الثاني :

حل المعادلات من الرتبة الأولى بطريقة فصل المتغيرات:

1) $y' = 3x^2y$

2) $y' = \frac{1+x}{x^2}$

3) $y' - xy^2 = y^2$

4) $(x+1)\frac{dy}{dx} = 2y$

التمرين الثالث:

لتكن المعادلة التفاضلية (E) التالية:

$$y'ln3 + y = ln27$$

1)- حل المعادلة التفاضلية (E).

2)- حدد الحل المعادلة التفاضلية (E) الذي يحقق الشرط:

$$fln3 = \frac{1}{e}$$

التمرين الرابع:

حل المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية التالية:

1) $y'' - y' - 2y = 0$

2) $y'' + 6y' + 9y = 0$

3) $y'' - 3y' + 2y = 0$

4) $y'' = 2y' - y$

التمرين الخامس:

1)- حل المعادلة التفاضلية (E) التالية:

$$y'' - 4y = 0$$

2)- حدد الحل المعادلة التفاضلية (E) الذي يحقق الشرطين:

$$y(0) = 1، y'(0) = 2$$

تمارين محلولة حول المعادلات التفاضلية

حل التمرين الأول :

1) $y' = 2y + \sqrt{7} \Rightarrow y = ce^{2x} - \frac{\sqrt{7}}{2}$

2) $y = -5y' + 2 \Rightarrow -5y' = y - 2 \Rightarrow y' = \frac{-1}{5}y + \frac{2}{5}$

$\Rightarrow y = ce^{\frac{-1}{5}x} - 2$

3) $-3y' - 2y = 0 \Rightarrow -3y' = 2y \Rightarrow y' = \frac{-2}{3}y \Rightarrow y = ce^{\frac{-2}{3}x}$

4) $5y + 6y' - 1 = 0 \Rightarrow 6y' = -5y + 1 \Rightarrow y' = \frac{-5}{6}y + \frac{1}{6} \Rightarrow y = ce^{\frac{-5}{6}x} - \frac{1}{5}$

حل التمرين الثاني :

حل المعادلات من الرتبة الأولى بطريقة فصل المتغيرات:

1) $\boldsymbol{xy\,dx + (1 + x^2)dy = 0}$

نقسم طرفي المعادلة على $y(1 + x^2)$

ثم نقوم بالتكامل نجد :

$\frac{(1+x^2)dy}{y\,(1+x^2)} = 0 \Rightarrow \int \frac{xdx}{(1+x^2)} + \int \frac{dy}{\text{y}} = c \Rightarrow \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + \ln\,(y) =$

$\Rightarrow \frac{xy\,dx}{y(1+x^2)} + c$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) = \ln\,(c) - \ln\,(y) \Rightarrow \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) = \ln(\frac{c}{y})$

$e^{\ln(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} = e^{\ln(\frac{c}{y})} \Rightarrow \sqrt{1 + x^2} = \frac{c}{y} \Rightarrow y = \frac{c}{\sqrt{1+x^2}}$

2) $\boldsymbol{y' = \frac{1+x}{x^2}}$

$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x} = \frac{1+x}{x^2} \Rightarrow dy = \frac{1+x}{x^2}\ \mathrm{d}x$

نقوم بالتكامل نجد :

$\Rightarrow \int dy = \int \frac{1+x}{x^2}\ \mathrm{d}x \Rightarrow\ \int dy = \int \frac{1}{x^2}\ \mathrm{d}x + \int \frac{1}{x} \mathrm{d}x \Rightarrow\ \ y = \frac{-1}{x}\ + \ln(x) + c$

3) $\boldsymbol{y' - xy^2 = y^2}$

$y' = y^2 + xy^2 \Rightarrow y' = y^2(1+x) \Rightarrow \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x} = y^2(1+x)$

نقسم طرفي المعادلة على y^2

ثم نقوم بالتكامل نجد :

$\Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int (1+\mathrm{x})\ \mathrm{d}x \Rightarrow \frac{-1}{y} = \frac{1}{2}\ x^2 + x + c \Rightarrow y^{-1} = -\frac{1}{2}\ x^2 - x - c$

$\Rightarrow = (-\frac{1}{2}\ x^2 - x - c)^{-1}\ \ y$

4) $\boldsymbol{(x+1)\frac{dy}{dx} = 2y}$

نقسم طرفي المعادلة على $\mathrm{y}(x+1)$

ثم نقوم بالتكامل نجد :

$\Rightarrow \frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{y}} + \frac{\boldsymbol{2dx}}{(x+1)} = 0 \Rightarrow \int \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{y}} dy = 2\int \frac{\boldsymbol{1}}{(x+1)} dx \Rightarrow \ln(\,y) = 2\ln(x+1) + c$

$\Rightarrow\ \ \ln(\,y) - \ln(x+1)^2 = c \Rightarrow \frac{y}{(x+1)^2} = e^c \Rightarrow y = \pm e^c\ (x+1)^2$

حل التمرين الثالث:

1)- حل المعادلة التفاضلية (E):

$y'ln3 + y = ln27 \Rightarrow y' = -\frac{1}{ln3}y + \frac{3ln3}{ln3} \Rightarrow y' = -\frac{1}{ln3}y + 3$

ومنه: الحل العام للمعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى هو من الشكل التالي: $y' = ay + b$

إذن : $y = ce^{\frac{-1}{ln3}x} + 3ln3$

2)- حدد الحل المعادلة التفاضلية (E) الذي يحقق الشرط:

$$fln3 = \frac{1}{e}$$

$$f(ln3) = ce^{\frac{-1}{ln3}ln3} + 3ln3 = \frac{1}{e} \Rightarrow \frac{1}{e} = ce^{-1} + 3ln3 \Rightarrow 1 = c + 3eln3$$

$$\Rightarrow c = -3eln3 + 1$$

إذن:

$$f(x) = (-3eln3 + 1)\, e^{\frac{-1}{ln3}x} + 3ln3$$

حل التمرين الرابع:

1) $y'' - y' - 2y = 0$

نضع : $y = e^{rx}$

المشتقة الأولى: $y' = re^{rx}$

المشتقة الثانية: $y'' = r^2e^{rx}$

نعوض في المعادلة الأصلية:

$$e^{rx}(r^2 - r - 2) = 0$$

بعد حل المعادلة التربيعية نجد :

$$e^{rx}(r-2)(r+1) = 0$$

إذن : حل المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية هو :

$$y\,(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-x}$$

2) $y'' + 6y' + 9y = 0$

نضع : $y = e^{rx}$

المشتقة الأولى: $y' = re^{rx}$

المشتقة الثانية: $y'' = r^2e^{rx}$

نعوض في المعادلة الأصلية:

$$e^{rx}(r^2 + 6r + 9) = 0$$

بعد حل المعادلة التربيعية نجد أن المعادلة المميزة لها جذر مضاعف r_0 حيث :

$$r_0 = -3$$

إذن : حل المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية هو :

$$y\,(x) = (\alpha x + \beta)e^{-3x}$$

3) $y'' - 3y' + 2y = 0$

نضع : $y = e^{rx}$

المشتقة الأولى: $y' = re^{rx}$

المشتقة الثانية: $y'' = r^2 e^{rx}$

نعوض في المعادلة الأصلية:

$$e^{rx}(r^2 - 3r + 2) = 0$$

بعد حل المعادلة التربيعية نجد :

$$e^{rx}(r - 2)(r - 1) = 0$$

إذن : حل المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية هو :

$$y\,(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x}$$

4) $y'' = 2y' - y$

نضع : $y = e^{rx}$

المشتقة الأولى: $y' = re^{rx}$

المشتقة الثانية: $y'' = r^2 e^{rx}$

نعوض في المعادلة الأصلية:

$$e^{rx}(r^2 - 2r + 1) = 0$$

بعد حل المعادلة التربيعية نجد أن المعادلة المميزة لها جذر مضاعف r_0 حيث :

$$r_0 = 1$$

إذن : حل المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية هو :

$$y\,(x) = (\alpha x + \beta)e^{x}$$

حل التمرين الخامس:

1)- حل المعادلة التفاضلية (E) التالية:

$$y'' - 4y = 0$$

نضع : $y = e^{rx}$

المشتقة الأولى: $y' = re^{rx}$

المشتقة الثانية: $y'' = r^2e^{rx}$

نعوض في المعادلة الأصلية:

$$e^{rx}(r^2 - 4) = 0$$

بعد حل المعادلة التربيعية نجد :

$$e^{rx}(r-2)(r+2) = 0$$

إذن : حل المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية هو :

$$y\,(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$$

2)- حدد الحل المعادلة التفاضلية (E) الذي يحقق الشرطين:

$$y(0) = 0، y'(0) = 2$$

$$y'(x) = 2c_1e^{2x} - 2c_2e^{-2x}$$

$$y'(0) = 2 \;\Rightarrow\; 2c_1e^{2(0)} - 2c_2e^{-2(0)} = 2 \Rightarrow 2c_1 - 2c_2 = 2$$

$$\Rightarrow c_1 - c_2 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (01)$$

$$c_1e^{2(0)} + c_2e^{-2(0)} = 1 \;\Rightarrow c_1 + c_2 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (02) y(0) = 1 \Rightarrow$$

بجمع المعادلتين (01)و(02) نجد:

$$2c_1 = 2 \Rightarrow c_1 = 1$$

بتعويض قيمة في المعادلة (02) نجد:

$$c_2 = 0$$

ومنه الحل الخاص للمعادلة التفاضلية هو:

$$y\,(x) = e^{2x}$$

الدوال ذات متغيرين

Functions with two variables

1- منطقة تعريف دالة ذات متغيرين:

1-1- تعريف:

لتكن D مجموعة من الأزواج المرتبة أي أن $D\epsilon R^2$، تسمى دالة ذات متغيرتين إذا كانت f تعين لكل زوج مرتب (x,y) في D، حيث تابع ذو متغيريين حقيقيان يرفق لكل (x,y) العدد z ونكتب (الصديق جابي، حكيم ملياني، 2016، ص 21):

$$(x,y)\epsilon R^2 \longrightarrow z=f(x,y)\epsilon R^2$$

1-2-أنواع الدوال الجبرية:

- دالة كثير الحدود: وتكتب على الشكل التالي :

$$z=x^3+y^2+2x+6y+5$$

- الدالة الكسرية: وتكتب على الشكل التالي :

$$z=\frac{-y+x+4}{x^2+3y}$$

- الدالة الجذرية: وتكتب على الشكل التالي :

$$z=\sqrt{\frac{2y+x}{6x+y}}$$

مثال: أوجد مجال تعريف الدوال ذات متغيريين التالية:

1)- $f(x,y)=3x+6y-5$

-كل دالة كثير الحدود مجال تعريفها هو : $D_f=R^2$

2)- $f(x,y)=\frac{3}{5x-y}$

-كل دالة كسرية مجال تعريفها هو : R^2 ماعدا القيم التي تجعل المقام لايساوي الصفر.

$$D_f=\{(x,y)\epsilon R^2: 5x-y\neq 0\}$$

3)- $f(x,y)=\sqrt{x+6y^2}$

كل دالة جذرية مجال تعريفها هو المقدار ماتحت الجذريكون أكبر أو يساوي الصفر.

$$D_f=\{(x,y)\epsilon R^2: x+6y^2\geq 0\}$$

2- الاشتقاق الجزئي من الرتبة الأولى:

– المشتقة الجزئية الأولى للدالة $z = f(x,y)$ هي الإشتقاق الدالة بالنسبة للمتغير x ، مع بقاء y ثابتا ويكتب كالتالي:

$$\frac{\delta z}{\delta x} \text{ أو } \frac{\delta f}{\delta x} \text{ أو } f_x$$

–المشتقة الجزئية الأولى للدالة $z = f(x,y)$ هي الإشتقاق الدالة بالنسبة للمتغير y ، مع بقاء x ثابتا ويكتب كالتالي:

$$\frac{\delta z}{\delta y} \text{ أو } \frac{\delta f}{\delta y} \text{ أو } f_y$$

مثال: أوجد المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية:

1) $f(x,y) = 4x^3 + 2y^2$

2) $f(x,y) = x^3 + x^2y + y^2x + 2xy$

الحل:

1)

$$f_x = 12x^2 \frac{\delta f}{\delta x} =$$

$$f_y = 4 \frac{\delta f}{\delta y} =$$

2)

$$f_x = 3x^2 + 2xy + y^2 + 2y \frac{\delta f}{\delta x} =$$

$$f_y = x^2 + 2xy + 2x \frac{\delta f}{\delta y} =$$

3- الاشتقاق الجزئي من الرتبة الثانية:

يتم إستخراج المشتقات الجزئية الثانية بإعادة إشتقاق المشتقات الجزئية الأولى مرة ثانية ولنفس المتغير المستقل مع بقاء الإفتراض الخاص بثبات المتغيرات المستقلة الأخرى، وتستخدم المشتقات الجزئية الثانية في قياس معدل الأتي الذي

يحصل في المشتقات الجزئية الأولى عند حدوث تغير طفيف جدا في نفس المتغير المستقل الذي استخرجت منه المشتقات الجزئية الأولى مع ثبات قيم باقي المتغيرات المستقلة (عدنان كريم نجم الدين، 2003،ص165).

إذا أن هناك أربعة مشتقات جزئية ثانية ناتجة عن المشتقتين الجزئيتين السابقين(f_x و f_y) وهي تكتب كالتالي (زكية أحمد مشعل، وليد إسماعيل السيفو، 2004،،ص 273-274.):

-المشتقة الجزئية الثانية بالنسبة للمتغير x ، وهي تكتب كالتالي:

$$f_{xx} \text{ أو } \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \text{ أو } \frac{\delta^2 z}{\delta x^2}$$

-المشتقة الجزئية الثانية بالنسبة للمتغير y ، وهي تكتب كالتالي:

$$f_{yy} \text{ أو } \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} \text{ أو } \frac{\delta^2 z}{\delta y^2}$$

-المشتقة الجزئية الثانية المتقاطعة، وذلك بالإشتقاق أولا بالنسبة للمتغير x ثم الإشتقاق الثاني بالنسبة للمتغير y مع بقاء x ثابتة، وهي تكتب كالتالي:

$$f_{yx} \text{ أو } \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} \text{ أو } \frac{\delta^2 z}{\delta y \delta x}$$

-المشتقة الجزئية الثانية المتقاطعة، وذلك بالإشتقاق أولا بالنسبة للمتغير y ثم الإشتقاق الثاني بالنسبة للمتغير x مع بقاء y ثابتة، وهي تكتب كالتالي:

$$f_{xy} \text{ أو } \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} \text{ أو } \frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}$$

مثال : لتكن الدوال التالية:

1) $\mathrm{f(x,y) = ln\,(2x - 5y)}$

2) $l(\mathrm{x,y}) = \mathrm{2x^3 + 4y^2 + xy}$

-أوجد $\mathrm{f_{xx}}$ ، $\mathrm{f_{yy}}$

الحل:

1) $f_x = \frac{2}{2x-5y}$, $f_{xx} = \frac{-4}{(2x-5y)^2}$

$f_y = \frac{-5}{2x-5y}$, $f_{yy} = \frac{-25}{(2x-5y)^2}$

2) $l_x = 6x^2 + y$, $l_{xx} = 12x$

$l_y = 8y + x$, $l_{yy} = 8$

سلسلة تمارين حول الدوال ذات متغيرين

التمرين الأول :

لتكن الدوال التالية:

1) $f(x,y) = 5x^4 - 2y^3$

2) $f(x,y) = e^{-3x} \cos(4y)$

3) $f(x,y) = \sqrt{3x^2 + 5y^2}$

-أوجد المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى f_y و f_x .

التمرين الثاني :

لتكن الدالة التالية:

$$f(x,y) = \ln(3 + x^2 y)$$

1- أوجد المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى f_y و f_x .

2-أحسب $f_y(2,-3)$ و $f_x(-1,2)$

التمرين الثالث:

لتكن الدوال التالية:

1) $f(x,y) = (8x^3 + 17)(5x + 9y)$

2) $f(x,y) = \frac{(3x+2y)^2}{2x+5y}$

-أوجد المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى f_y و f_x

التمرين الرابع:

لتكن الدالة التالية:

$$f(x,y) = -3x^2 + xy^2$$

– أوجد المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية f_{yx} و f_{xy} و f_{yy} و f_{xx}

التمرين الخامس:

لتكن الدالة التالية:

$$f(x,y) = x^3 y^2 - e^y$$

– أوجد المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية f_{yx} و f_{xy} و f_{yy} و f_{xx}

تمارين محلولة حول الدوال ذات متغيرين

حل التمرين الأول :

-إيجاد المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى f_y و f_x للدوال التالية:

1)$f(x,y) = 5x^4 - 2y^3$

$f_x = 20x^3$

-6$y^2 f_y =$

2) $f(x,y) = e^{-3x}\cos(4y)$

-3$e^{-3x}\cos(4y)\ f_x =$

-4$e^{-3x}\sin(4y) f_y =$

3) $f(x,y) = \sqrt{3x^2 + 5y^2}$

$$f_x = \frac{6x}{2\sqrt{3x^2 + 5y^2}}$$

$$f_y = \frac{10y}{2\sqrt{3x^2 + 5y^2}}$$

حل التمرين الثاني :

1-إيجاد المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى f_y و f_x للدالة التالية:

$f(x,y) = \ln(3 + x^2 y)$

$$f_x = \frac{2xy}{(3 + x^2 y)}$$

$$f_y = \frac{x^2}{(3 + x^2 y)}$$

2-حساب $f_y(2,-3)$ و$f_x(-1,2)$:

$$f_x(-1,2) = \frac{2(-1)(2)}{(3+(-1)^2 2)} = \frac{-4}{5}$$

$$f_y(2,-3) = \frac{x^2}{(3 + x^2 y)} = \frac{2^2}{(3 + 2^2(-3))} = \frac{-4}{9}$$

حل التمرين الثالث:

-إيجاد المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى f_y و f_x للدالة التالية

1)$f(x,y) = (8x^3 + 17)(5x + 9y)$

$f_x = 24x^2(5x + 9y) + 5(8x^3 + 17) \Rightarrow f_x = 160x^3 + 216x^2 y + 85$

$9(8x^3+17) \Rightarrow f_y = 72x^3 + 153 f_y = 0\ (5x+9y) +$

2) $f(x,y) = \frac{(3x+2y)^2}{2x+5y}$

$$f_x = \frac{(2x+5y)\big(2(3x+2y)(3)\big) - (2)(3x+2y)^2}{(2x+5y)^2}$$

$$= \frac{(2x+5y)(18x+12y) - (2)(3x+2y)^2}{(2x+5y)^2}$$

$$f_y = \frac{(2x+5y)(2(3x+2y)(2)) - (5)(3x+2y)^2}{(2x+5y)^2}$$

$$= \frac{(2x+5y)(12x+8y) - (5)(3x+2y)^2}{(2x+5y)^2}$$

حل التمرين الرابع:

– إيجاد المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية f_{yx} و f_{xy} وf_{yy} و f_{xx} :

$f(x,y) = -3x^2 + xy^2$

1) $f_x = -6x + y^2$

$-6 f_{xx} =$

$f_{xy} = 2y$

2) $f_y = 2xy$

$f_{yy} = 2x$

$2y f_{yx} =$

حل التمرين الخامس:

– إيجاد المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية f_{yx} و f_{xy} وf_{yy} و f_{xx} :

$f(x,y) = x^3y^2 - e^y$

1) $f_x = 3x^2y^2$

$6xy^2 f_{xx} =$

$f_{xy} = 6x^2y$

2) $f_y = 2x^3y - e^y$

$f_{yy} = 2x^3 - e^y$

$f_{yx} = 6x^2y$

المصفوفات والعمليات عليها

Arrays And Operations On Them

تعتبر المصفوفات من الأساليب الرياضية التي تستخدم كثيرا في حل النماذج الرياضية، وبصفة خاصة تلك التي تعتمد عليها الإدارة العليا في المشروع في إتخاذ القرارات الإدارية مثل تخطيط الإنتاج أو تحديد عدد الوحدات الواجب إنتاجها في الضوء الإمكانيات أو الطاقة المتاحة.

1- تعريف المصفوفة:

المصفوفة هي عبارة عن مجموعة من الأعداد أو العناصر مرتبة في تنظيم، مكونة بذلك عددا من الأسطر وعدد الأعمدة، فإن كان عدد الأسطر i وعدد الأعمدة j، فإن المصفوفة تكون من الرتبة (i.j)، وشكلها العام كالتالي (أنمار أمين البرواري، عربية عبد الرحمن داؤد،، 2011،ص 89):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & .....a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ......a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & a_{ij} \end{bmatrix} A_{i.j} =$$

2- أشكال المصفوفات :

يتم هنا تصنيف المصفوفات على أساس شكل المصفوفة المعتمدة أساسا على رتبة المصفوفة حيث تقسم على :

2-1- المصفوفة المربعة Square matrix :

هي المصفوفة التي يكون فيها عدد الأسطر مساويا لعدد الأعمدة أي i=j.

مثال: $B_{2.2} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ ، $A_{3.3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 2 & 2 & 7 \\ -3 & 6 & -2 \end{bmatrix}$

2-2- المصفوفة المستطيلة Rectangular array :

هي المصفوفة التي يكون فيها عدد الأسطر لايساوي لعدد الأعمدة أي i≠j.

مثال:

$$C_{2.3} = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 1 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

2-3- المصفوفة الصف(متجه أفقي) Row matrix :

فهي المصفوفة التي تتكون سطر واحد وعدة أعمدة فيطلق عليه متجه أفقي من الرتبة (1.j).

مثال:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} D_{1.4} =$$

2-4- المصفوفة العمود(متجه عمودي)Column matrix :

فهي المصفوفة التي تتكون عمود واحد وعدة أسطر فيطلق عليه متجه عمودي من الرتبة (i.1).

مثال:

$$E_{3.1}=\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}$$

2-5- المفردة Single :

هي المصفوفة التي تتكون من سطر واحد وعمود واحد، أي عنصر واحد سواءا كان هذا العنصر رمزا أو رقما، وتكون من الرتبة (1.1) .

مثال: $F_{1.1}=[32]$

3-أنواع المصفوفات: تتميز المصفوفات بعدة أنواع من بينها (شمعون شمعون، 2005،ص23-24):

3-1-المصفوفة القطرية Diagonal matrix:

هي المصفوفة المربعة جميع عناصرها معدومة ماعدا العناصر الواقعة على القطر الرئيسي فيها.

مثال: $\begin{bmatrix}2&0&0\\0&5&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

3-2-المصفوفة المتناظرة Symmetric matrix :

هي المصفوفة المربعة والتي جميع العناصر المتناظرة فيها بالنسبة للقطر الرئيسي متساوية.

مثال: $\begin{bmatrix}1&3&7\\3&6&2\\7&2&5\end{bmatrix}$

3-3-المصفوفة الأحادي Single matrix :

هي المصفوفة القطرية وعناصرها قطرها الرئيسي تساوي الواحد.

مثال: $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

3-4-المصفوفة الشادة:

هي المصفوفة المربعة التي يكون فيها المحدد يساوي الصفر.

5-3-المصفوفة المثلثية Triangular matrix:

هي المصفوفة المربعة جميع عناصرها $a_{ij} = 0$، فإذا كانت $i > j$ سميت بالمصفوفة العليا، وفي حالة العكس إذا كانت $i < j$ سميت بالمصفوفة السفلى (عمران قوبا، 2017، ص 126.).

عمران قوبا، الجبر الخطي،الجزء الثاني، منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا،سوريا، 2017، ص 126.

مثال:

$$E = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad ، \quad F = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4- منقول المصفوفة Transferred matrix وخصائصه:

يقصد بمنقول المصفوفة A المصفوفة الناتجة عن التبديل بين مواضع الأعمدة ومواضع الأسطر ونرمز لها بالشكل A^T، حيث أول سطر يصبح أول عمود، ثاني سطر يصبح عمود ....وهكذا، فإذا كانت المصفوفة A من الرتبة m×n فإن منقولها A^T من الرتبة n×m (طلال عبود، 2020، ص 234.) .

مثال: منقول المصفوفة H هي المصفوفة H^T

$$\mathrm{H} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad ، \quad H^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ومن بين خصائص منقول المصفوفة تتمثل في (زغيب شهرزاد، بن ديب رشيد، 2014 ،ص 223.):

-منقول المصفوفة هو عبارة عن المصفوفة الأصلية $(A^T)^T = A$.

- $(A+B)^T = A^T + B^T$.
- $(AB)^T = \mathrm{B}^T . \mathrm{A}^T$.
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.
- إذا كانت المصفوفة متناظرة فإن $\mathrm{A} = A^T$

5- العمليات الأساسية على المصفوفات:

نقصد بالعمليات على المصفوفات تلك العمليات التي يمكن إجراءها على المصفوفات وهي: الجمع والطرح والضرب ....إلخ

5-1- التساوي بين المصفوفات:

يقال عن مصفوفتين متساوتيين إذا كانت عناصرها المتقابلة متساوية (شمعون شمعون، 2008،ص 25).

مثال:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow a = 3, b = 1, c = 2, d = 6.$$

5-2- جمع وطرح المصفوفات:

إذا كانت المصفوفتان (A)و(B) لهما نفس الرتبة (i.j)، فإن حاصل جمعهما أو طرحهما يكون المصفوفة (C) بحيث تكون درجتها مساوية إلى (i.j)، إن كل عنصر من عناصر المصفوفة (C) هو عبارة عن حاصل جمع وطرح العنصرين المتناظرين من المصفوفتين (زكية أحمد مشعل، وليد إسماعيل السيفو، 2004،ص334)، بمعنى أخر عدد أسطر المصفوفة الأولى يساوي عدد أسطر المصفوفة الثانية، وعدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوي عدد أعمدة المصفوفة الثانية.

مثال: ليكن لدينا:

$$\mathrm{A}_{2.2} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \quad , \mathrm{B}_{2.2} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{A+B}=\begin{bmatrix} -2+3 & 3+1 \\ 1+4 & -5+0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} =$$

$$\mathrm{B+A}=\begin{bmatrix} 3-2 & 1+3 \\ 4+1 & 0-5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} =$$

ومنه الجمع المصفوفات تبديلي A+B=B+A.

ليكن لدينا : $\mathrm{C}_{2.2} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

$$\mathrm{A-C} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2-5 & 3-(-3) \\ 1-(-1) & -5-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 6 \\ 2 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{C}-A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-(-2) & -3-3 \\ -1-1 & 4-(-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}$$

إذن: $\mathrm{A-C}= (-1)(\mathrm{C} - \mathrm{A})$

ومنه طرح المصفوفات غير تبديلي.

من خلال المثال نستخلص مجموعة من خواص الجمع والطرح المصفوفات

خواص الجمع والطرح المصفوفات:

إذا كان لكل من المصفوفات A و B وC نفس الرتبة (i.j)، فإن خواص جمع وطرح هذه المصفوفات هي:

1) $A+B=B+A$

2) $A+(B+C) = (A+B)+C$

3) $A+(B-C) = (A+B)-C$

4) $K(A+B)= KA+ KB$

5) $A-C= (-1)(C - A)$

5-3-ضرب مصفوفة في عدد ثابت:

ضرب مصفوفة بعدد λ هو مصفوفة أخرى تنتج عناصرها من عناصر المصفوفة Aبعد ضربها بالعددλ (شمعون شمعون، 2005،ص 26.)

مثال: ليكن لدينا:

$$A_{3.2} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

- أوجد 4A، -3A

الحل:

$$-3A= \begin{bmatrix} -3(-3) & 1(-3) \\ 6(-3) & 5(-3) \\ 1(-3) & -2(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -18 & -15 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$4A= \begin{bmatrix} -3(4) & 1(4) \\ 6(4) & 5(4) \\ 1(4) & -2(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ 24 & 20 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$$

5-4-ضرب مصفوفتين:

لضرب المصفوفتان A وB يشترط أن تتساوى عدد الأعمدة في المصفوفة الأولىA مع عدد الأسطر المصفوفة الثانية B، فإذا لم يتحقق هذا الشرط نقول أن المصفوفتان غير متوافقتان للضرب وأن الجذاء ABغير معرف (عبد العزيز شرابي، 2016،ص27) .

مثال01:

$$A_{32}\,.\,B_{32} = (\text{لايمكن الحساب})$$

$$A_{52}\,.\,B_{23} = C_{23}$$

مثال02: ليكن لدينا:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}_{23} \quad ، \quad B=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{33}$$

- أحسب A.B

$$A.B=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}_{23} . \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{33} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \end{bmatrix}$$

$(2.2)+(3.0)+(0.2)= 4C_{11} =$

$(2.3)+(3.1)+(0.1)=9C_{12} =$

$(2.1)+(3.3)+(0.0)=11C_{13} =$

$(1.2)+(4.0)+(2.2)=6C_{21} =$

$(1.3)+(4.1)+(2.1)= 9C_{22} =$

$(1.1)+(4.3)+(2.0)=13C_{23} =$

ومنه:

$$A.B=\begin{bmatrix} 4 & 9 & 11 \\ 6 & 9 & 13 \end{bmatrix}$$

مثال03: ليكن لدينا

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{33} \quad ، \quad B=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}_{32}$$

- أحسب A.B و B.A

$$A.B=\begin{bmatrix}3 & 22\\ -13 & -2\\ 2 & 10\end{bmatrix}_{32}$$

$$B.A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -2 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix}_{32}.\begin{bmatrix}3 & 4 & 1\\ -5 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}_{33} = (\text{لايمكن الحساب})$$

ومنه جداء المصفوفات عملية غير تبديلية $A.B \neq B.A$

ملاحظة:

- جداء المصفوفات عملية غير تبديلية $A.B \neq B.A$ ولكنه عملية تجمعية $A.(B.C)=(A.B).C$
- منقول جداء مصفوفتين يساوي جداء منقوليهما مع عكس الترتيب أي: $(A.B)^T = B^T.A^T$

مثال: ليكن لدينا

$$A=\begin{bmatrix}3 & 4 & 1\\ -5 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}_{33} ، \quad B=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -2 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix}_{32}$$

- أحسب $B^T.A^T$ و $(A.B)^T$

$$A.B=\begin{bmatrix}3 & 22\\ -13 & -2\\ 2 & 10\end{bmatrix}_{32} \quad , \quad (A.B)^T=\begin{bmatrix}3 & -13 & 2\\ 22 & -2 & 10\end{bmatrix}$$

$$B^T=\begin{bmatrix}3 & -2 & 2\\ 1 & 4 & 3\end{bmatrix}, \quad A^T=\begin{bmatrix}3 & -5 & 0\\ 4 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3 & -13 & 2\\ 22 & -2 & 10\end{bmatrix} B^T.\ A^T =$$

ومنه: $(A.B)^T = B^T\ .A^T$

5-5-قوى مصفوفة:

من شرط توافق مصفوفتين للضرب نجد أن المصفوفة تكون متوافقة مع نفسها بالنسبة للضرب،إذا وفقط إذا كانت هذه المصفوفة مربعة، تسمى جداء $(A\times A)$ بمربع المصفوفة ويكتب A^2.

خصائص قوى مصفوفة: وتتمثل في (زغيب شهرزاد، بن ديب رشيد، 2014، ص 236-237.):

-إذا رفعت المصفوفة إلى قوة ما ولتكن A^n حيث n عدد صحيح، وكانت $A^n = 0$ نقول أن المصفوفة عديمة القوى من الرتبة n.

مثال01:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

المصفوفة A هي مصفوفة عديمة القوى من الرتبة (3).

-إذا رفعت المصفوفة A إلى قوى وبقيت المصفوفة A على حالها ولم تتغير $A^n = A$ نقول أن المصفوفة مصفوفة عقيمة.

مثال02:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

إذن: المصفوفة مصفوفة عقيمة.

سلسلة تمارين حول المصفوفات والعمليات عليها

التمرين الأول :

ليكن لدينا المصفوفات التالية:

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 1 & 4\\ 5 & -3\end{bmatrix} \text{ ، } B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 5\\ 6 & 0\end{bmatrix}$$

-أحسب 5A−3B,A+B.

التمرين الثاني :

حدد قيم المتغيرات للمصفوفات المتساوية التالية :

$$4\begin{bmatrix}-1 & t & 5\\ z & 6 & -2\\ k & 2 & 2\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}x & 1 & -1\\ 0 & -2 & 3\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-M & 1 & -v\\ 2 & 2u & 3v+5y\\ -1 & 2x+1 & 18\end{bmatrix}$$

التمرين الثالث:

ليكن لدينا المصفوفات التالية :

$$C=\begin{bmatrix}3 & 4 & 1\\ -5 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix} \text{ ، } D=\begin{bmatrix}0 & -2 & 3\\ 5 & 0 & 1\\ 7 & 1 & -2\end{bmatrix}$$

1- أحسب C×D، D×C ، ماذا تستنتج؟

2- أحسب $(C\times D)^T = D^T \times C^T$ ماذا تستنتج؟

التمرين الرابع:

لتكن لدينا المصفوفات التالية:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 7\end{bmatrix} \text{ ، } B=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 5 & 1\end{bmatrix}$$:

- أحسب A×B، A−B+I_2

التمرين الخامس:

ليكن لدينا المصفوفات التالية :

$$A=\begin{bmatrix}2 & -5 & 0\\ 4 & 2 & -1\\ -1 & 0 & 3\end{bmatrix} \text{ ، } B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ 0 & -6 & -1\end{bmatrix}$$

-أحسب A−B، A×B، A^2+B+I_3

تمارين محلولة حول المصفوفات والعمليات عليها

حل التمرين الأول :

-حساب A+B، 5A−3B

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 1 & 4\\ 5 & -3\end{bmatrix} \text{ ، } B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 5\\ 6 & 0\end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 1 & 4\\ 5 & -3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 5\\ 6 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 9\\ 11 & -3\end{bmatrix}$$

$$5A-3B= 5\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 1 & 4\\ 5 & -3\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 5\\ 6 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10 & 0\\ 5 & 20\\ 25 & -15\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & -3\\ 0 & 15\\ 18 & 0\end{bmatrix}$$

$$5A-3B=\begin{bmatrix}-13 & 3\\ 5 & 5\\ 7 & -15\end{bmatrix}$$

حل التمرين الثاني :

-تحديد قيم المتغيرات للمصفوفات المتساوية التالية :

$$4\begin{bmatrix}-1 & t & 5\\ z & 6 & -2\\ k & 2 & 2\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}x & 1 & -1\\ 0 & -2 & 3\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-M & 1 & -v\\ 2 & 2u & 3v+5y\\ -1 & 2x+1 & 18\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}-4 & 4t & 20\\ 4z & 24 & -8\\ 4k & 8 & 8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5x & 5 & -5\\ 0 & -10 & 15\\ 5 & 0 & 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-M & 1 & -v\\ 2 & 2u & 3v+5y\\ -1 & 2x+1 & 18\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}-4+5x & 4t+5 & 15\\ 4z & 14 & 7\\ 4k+5 & 8 & 18\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-M & 1 & -v\\ 2 & 2u & 3v+5y\\ -1 & 2x+1 & 18\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4+5x = 3-M \Rightarrow -4+5\left(\frac{7}{2}\right) = 3-M \Rightarrow M = \frac{-21}{2} \\ 4t+5 = 1 \Rightarrow t = \frac{-4}{4} = -1 \\ 15 = -v \Rightarrow v = -15 \\ 4z = 2 \Rightarrow z = \frac{1}{2} \\ 14 = 2u \Rightarrow u = \frac{14}{2} = 7 \\ 7 = 3v+5y \Rightarrow 5y = 52 \Rightarrow y = \frac{52}{5} \\ 4k+5 = -1 \Rightarrow k = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2} \\ 8 = 2x+1 \Rightarrow 2x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{2} \end{cases}$$

حل التمرين الثالث:

ليكن لدينا المصفوفات التالية :

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} ، \quad D = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

1- حساب $C\times D$، $D\times C$:

$$C\times D = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & -5 & 11 \\ 7 & 11 & -17 \\ 19 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$C_{11} = (3.0)+(4.5)+(1.7) = 27$

$C_{12} = (3.(-2))+(4.0)+(1.1) = -5$

$C_{13} = (3.3)+(4.1)+(1.(-2)) = 11$

$C_{21} = ((-5).0)+(0.5)+(1.7) = 7$

$C_{22} = ((-5).(-2))+(0.0)+(1.1) = 11$

$C_{23} = ((-5).3)+(0.1)+(1.(-2)) = -17$

$C_{31} = (0.0)+(1.5)+(2.7) = 19$

$C_{32} = (0.(-2))+(1.0)+(2.1) = 2$

$C_{33} = (0.3)+(1.1)+(2.(-2)) = -3$

$$D\times C=\begin{bmatrix}0 & -2 & 3\\ 5 & 0 & 1\\ 7 & 1 & -2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3 & 4 & 1\\ -5 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 3 & 4\\ 15 & 21 & 7\\ 16 & 26 & 4\end{bmatrix}$$

$(0.3)+((-2).(-5))+(3.0)=10C_{11}=$

$(0.4)+((-2).0)+(3.1)=3C_{12}=$

$(0.1)+((-2).1)+(3.2)=4C_{13}=$

$(5.3)+(0.(-5))+(1.0)=15C_{21}=$

$(5.4)+(0.0)+(1.1)=21C_{22}=$

$(5.1)+(0.1)+(1.2)=7C_{23}=$

$(7.3)+(1.(-5))+((-2).0)=16C_{31}=$

$(7.4)+(1.0)+((-2).1)=26C_{32}=$

$(7.1)+(1.1)+((-2).2)=4C_{33}=$

نستنج ان: **جداء المصفوفات عملية غير تبديلية** $C.D\neq D.C$

2-أحسب $(C\times D)^T$، $D^T\times C^T$:

$$C\times D=\begin{bmatrix}3 & 4 & 1\\ -5 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0 & -2 & 3\\ 5 & 0 & 1\\ 7 & 1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}27 & -5 & 11\\ 7 & 11 & -17\\ 19 & 2 & -3\end{bmatrix}$$

$$(C\times D)^T=\begin{bmatrix}27 & 7 & 19\\ -5 & 11 & 2\\ 11 & -17 & -3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 5 & 7\\ -2 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3 & -5 & 0\\ 4 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}27 & 7 & 19\\ -5 & 11 & 2\\ 11 & -17 & -3\end{bmatrix}D^T\times C^T=$$

ومنه نستنتج أن $(C\times D)^T=D^T\times C^T$

حل التمرين الرابع:

لتكن لدينا المصفوفات التالية:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 7\end{bmatrix}، B=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 5 & 1\end{bmatrix}$$

- حساب $A\times B$، $A-B+I_2$

A×B= $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 5 \\ 3 & 22 \end{bmatrix}$

$((-3).1)+(2.(-2)) = -7C_{11} =$

$((-3).3)+(2.7) = 5C_{12} =$

$(5.1)+(1.(-2))=3C_{21} =$

$(5.3)+(1.7)= 22C_{22} =$

$A - B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 7 & -6 \end{bmatrix}$

$A-B+I_2 = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 7 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$

حل التمرين الخامس:

ليكن لدينا المصفوفات التالية :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ ، } B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & -1 \end{bmatrix}$$

-حساب المصفوفات التالية :

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -3 \\ 5 & 2 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 6 & 2 & 17 \\ -2 & -17 & -6 \end{bmatrix}$$

$+B+I_3 = A^2$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & -20 & 5 \\ 17 & -16 & -5 \\ -5 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

$$+B= \begin{bmatrix} -16 & -20 & 5 \\ 17 & -16 & -5 \\ -5 & 5 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & -21 & 8 \\ 16 & -16 & -3 \\ -5 & -1 & 8 \end{bmatrix} A^2$$

إذن:

$$+B+I_3 = \begin{bmatrix} -14 & -21 & 8 \\ 16 & -16 & -3 \\ -5 & -1 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -21 & 8 \\ 16 & -15 & -3 \\ -5 & -1 & 9 \end{bmatrix} A^2$$

محدد ومقلوب مصفوفة

Definite And Inverse Matrix

1-المحددات :

1-1- تعريف : المحددات هي عبارة عن أدوات رياضية تسمح لنا بحل معادلات لعدة متغيرات، فهي تأخذ عناصر مرتبة في أسطر وأعمدة بحيث أن عدد الأسطر تساوي عدد الأعمدة (مصفوفة مربعة) ومحصورا بين خطين رئيسين (أنمار أمين البرواري، عربية عبد الرحمن داؤد، 2011، ص 112)، ويرمز لها برمز ب : Δ_A ، detA ، $|\quad|$.

1-2- محددات المصفوفة من الرتبة الثانية: يطلق على المحدد من الرتبة الثانية إذا تكون من سطرين وعمودين، ويحسب قيمة محدد المصفوفة بضرب عناصر القطر الرئيسي مطروحا منه حاصل ضرب عناصر القطر الثانوي (عدنان كريم نجم الدين، 2003،ص69) أي :

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

مثال 01:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$$

مثال 02: أوجد det(A)

$$A = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \text{ ، } \det(A) = (-2)(0) - (3)(1) = -3$$

1-3- خواص المحددات : وتتمثل في مايلي (شمعون شمعون، 2005،ص 14):

- إذا ضربت عناصر أحد السطرين أو العمودين بعدد ما k فإن قيمة المحدد تضرب بهذا العدد.

$$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = k(a_1b_2 - a_2b_1)$$

- تتغير إشارة المحدد إذا تبادل فيه سطرين أو عمودين.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = -(a_2b_1 - a_1b_2) = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$$

-لاتتغير قيمة المحدد إذا بدلنا فيه الأسطر بالأعمدة والعكس بالعكس مع المحافظة على الترتيب.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

-إذا تساوت أو تناسبت عناصر سطرين أو عمودين في محدد ما، فالمحدد يساوي الصفر.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ ka_1 & kb_1 \end{vmatrix} = 0$$

-إذا كان كل عنصر في أحد الأسطر أو أحد الأعمدة عبارة عن مجموع حدين، فالمحدد يتألف من مجموع محددين.

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_3 & b_1 + b_3 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

1-4- محددات المصفوفة من الدرجة الثالثة (قاعدة سارس، طريقة المحددات الصغرى): يطلق على المحدد من الرتبة الثالثة إذا تكون من ثلاثة أسطر وثلاثة أعمدة، ويحسب قيمة محدد المصفوفة بإحدى الطريقتين (عدنان كريم نجم الدين، 2003،ص69-71):

-الطريقة الأولى (الطريقة العامة): يتم إختيار أحد الأسطر أو الأعمدة ويفضل أن يحتوي على الأعداد الصغيرة ضمن المصفوفة أو أكبر عدد من الأصفار، وذلك بإعطاء قيم هذا السطر أو العمود إشارات الجبرية التبادلية وضرب كل من عناصر السطر أو العمود ب حيث يشيرi إلى رقم السطر ويشير إلى رقم العمود الذي يقع فيه العنصر، ثم يتم ضرب كل عناصر السطر والعمود المختار مع إشارته الجبرية بالمحدد الناتج من حذف السطر والعمود، وأن مجموع هذه القيم هو قيمة المحدد، فإذا كانت لدينا المصفوفة التالية :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}^{+} & a_{12}^{-} & a_{13}^{+} \\ a_{21}^{-} & a_{22}^{+} & a_{23}^{-} \\ a_{31}^{+} & a_{32}^{-} & a_{33}^{+} \end{bmatrix}$$

إذا إخترنا السطر الأول من أجل حساب المحدد فإن الإشارات الجبرية التبادلية هي (+-+)، وإذا إخترنا السطر الثاني تكون الإشارات الجبرية التبادلية هي (-+-)،....وهذا أما قيمة المحدد بإختيار السطر الأول فهي كالتالي :

$$\det(A) = a_{11} \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \quad + a_{13} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

مثال01: حساب المحدد من الرتبة الثالثة بطريقة المربعات الصغرى بإختيار السطر الأول

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{1}^{+} & \mathbf{2}^{-} & \mathbf{3}^{+}\\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1}\\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2}\end{bmatrix}$$

$$\det(A)= +1\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} -2\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix} +3\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix}$$

$$\det(A)= 1[(2)(3)-(1)(1)]-2\,[(2)(2)-(3)(1)]+3\,[(2)(1)-(3)(3)]$$

$$\det(A)= 5-2-21$$

$$\det(A)= -18$$

مثال02: حساب المحدد من الرتبة الثالثة بطريقة المربعات الصغرى بإختيار السطر الثاني

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4}\\ \mathbf{1}^{-} & \mathbf{0}^{+} & \mathbf{1}^{-}\\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{0}\end{bmatrix}$$

$$\det(B)= -1\begin{vmatrix}3 & 4\\ 3 & 0\end{vmatrix} +0\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 0\end{vmatrix} -1\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 3\end{vmatrix}$$

$$\det(B)= -1[(3)(0)-(3)(4)]+0\,[(2)(0)-(1)(4)]-1\,[(2)(3)-(3)(1)]$$

$$\det(B)=12+0-3$$

$$\det(B)= 9$$

- الطريقة الثانية (ساروز):

يتم استخراج المحدد بهذه الطريقة وذلك بإضافة العمودين الأول والثاني إلى يمين العمود الثالث كما هو موضح في الشكل التالي :

$$\det(A)=\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11}^{+} & a_{12}^{-} & a_{13}^{+} & a_{11}^{+} & a_{12}^{-}\\ a_{21}^{-} & a_{22}^{+} & a_{23}^{-} & a_{21}^{-} & a_{22}^{+}\\ a_{31}^{+} & a_{32}^{-} & a_{33}^{+} & a_{31}^{+} & a_{32}^{-}\end{array}\right.$$

ثم نقوم بضرب عناصر كل الأقطار الرئيسية ببعضها وكذلك نضرب عناصر كل الأقطار الثانوي، ثم نطرح مجموع حاصل ضرب عناصر الأقطار الثانوية من مجموع عناصر الأقطار الرئيسية كما يلي :

$$\det(A)= [(a_{11})(a_{22})(a_{33})+(a_{12})(a_{23})(a_{31})+(a_{13})(a_{21})(a_{32})]-[(a_{31})(a_{22})(a_{13})+(a_{32})(a_{23})(a_{11})+(a_{33})(a_{21})(a_{12})]$$

مثال: حساب المحدد من الرتبة الثالثة بطريقة ساروز

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{det(C)} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$\det(C)= [(1)(3)(2) + (0)(1)(2) + (2)(1)(1)] - [(0)(1)(2) + (1)(1)(1) + (2)(3)(2)]$

$\det(C)=8-13$

$\det(C)=-5$

2–مقلوب مصفوفة:

2–1– تعريف مقلوب المصفوفة: يعتمد على إيجاد معكوس المصفوفة A^{-1} وهذه تحتاج إلى توفر شرط أساسي وهو أن تكون المصفوفة A غير منفردة أي أن يكون محددها لايساوي الصفر أي $\det(A) \neq 0$، (السيفو, زكية أحمد مشعل، وليد إسماعيل، 2004، ص 347.)، بحيث يحقق: $A \cdot A^{-1} = I$

2–2– إيجاد المقلوب بطريقة المصفوفة المرافقة:

كيفية إيجاد **معكوس المصفوفة من الرتبة الثانية** (عبد العالي بوحويش الدايخ، خالد خميس الصادق، يحي محمود محمد،، 2022 ص86.):

- إيجاد محدد المصفوفة $\det(A)$.
- إيجاد منقول مصفوفة المساعدة وذلك بعكس عناصر القطر الرئيسي وتغير إشارة عناصر القطرالثانوي .
- يتم ضرب قيمة المحدد في منقول مصفوفة المساعدة فيتم الحصول على معكوس المصفوفة من الرتبة الثانية، وذلك بتطبيق العلاقة الرياضية: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)^T$
- للتحقيق من صحة الحل يتم ضرب المصفوفة في معكوسها فيتم الحصول على مصفوفة الأحادية أي $A \cdot A^{-1} = I$

مثال: أوجد معكوس المصفوفة بطريقة المصفوفة المرافقة :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

الحل :

-إيجاد معكوس المصفوفة **A**:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

- حساب المحدد المصفوفة **A**:

$$\det(A) = (2)(-4) - (3)(-1)$$

$$\det(A) = -5$$

-حساب المصفوفة المساعدة :

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} + & - \\ - & + \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +(-4) & -(3) \\ -(-1) & +(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

-إيجاد منقول المصفوفة المساعدة :

$$\operatorname{adj}(A)^T = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

-حساب معكوس المصفوفة:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)^T$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} \end{bmatrix}$$

يتم إيجاد أما بالنسبة **معكوس المصفوفة من الرتبة الثالثة** يمكن إيجادها بإتباع الخطوات التالية:

- إيجاد قيمة المحدد$\det(A)$.
- إيجاد المصفوفة المساعدة $\operatorname{adj}(A)$.
- إيجاد منقول المصفوفة المساعدة (محولة المصفوفة.
- ضرب قيمة المحدد في منقول مصفوفة المساعدة فيكون الناتج معكوس المصفوفة من الرتبة الثالثة، وذلك بتطبيق العلاقة الرياضية: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)^T$
- وللتأكد من صحة الحل، يتم ضرب المصفوفة في معكوسها للحصول على مصفوفة الأحادية.

مثال: أوجد معكوس المصفوفة بطريقة المصفوفة المرافقة:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-5} & \mathbf{0} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{bmatrix}$$

الحل:

-إيجاد معكوس المصفوفة **A**:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{-5} & \mathbf{0}\\ \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{3}\end{bmatrix}$$

– حساب المحدد:

$$\det(A)=+2\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{vmatrix}-(-5)\begin{vmatrix}4 & -1\\ -1 & 3\end{vmatrix}+0\begin{vmatrix}4 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix}$$

$$\det(A)=2[(2)(3)-(-1)(0)]+5\,[(4)(3)-(-1)(-1)]+0$$

$$\mathbf{det(A)=67}$$

-حساب المصفوفة المساعدة :

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{2}^{+} & \mathbf{-5}^{-} & \mathbf{0}^{+}\\ \mathbf{4}^{-} & \mathbf{2}^{+} & \mathbf{-1}^{-}\\ \mathbf{-1}^{+} & \mathbf{0}^{-} & \mathbf{3}^{+}\end{bmatrix}$$

$$\operatorname{adj}(A)=\begin{bmatrix}+\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}4 & -1\\ -1 & 3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}4 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-5 & 0\\ 0 & 3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & -5\\ -1 & 0\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}-5 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 0\\ 4 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & -5\\ 4 & 2\end{vmatrix}\end{bmatrix}$$

$$\operatorname{adj}(A)=\begin{bmatrix}6 & -11 & 2\\ 15 & 6 & 5\\ 5 & 2 & 24\end{bmatrix}$$

-إيجاد منقول المصفوفة المساعدة :

$$\operatorname{adj}(A)^{T}=\begin{bmatrix}\mathbf{6} & \mathbf{15} & \mathbf{5}\\ \mathbf{-11} & \mathbf{6} & \mathbf{2}\\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{24}\end{bmatrix}$$

-حساب معكوس المصفوفة:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)^{T}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{67}\begin{bmatrix}6 & 15 & 5\\ -11 & 6 & 2\\ 2 & 5 & 24\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{67}} & \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{67}} & \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{67}}\\ \frac{\mathbf{-11}}{\mathbf{67}} & \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{67}} & \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{67}}\\ \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{67}} & \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{67}} & \frac{\mathbf{24}}{\mathbf{67}}\end{bmatrix}$$

2-3- إيجاد المقلوب بطريقة غوس Gauss

ويمكن كذلك استخراج معكوس المصفوفة A بطريقة غوس بشرط محدد المصفوفة A يختلف عن الصفر($det(A)\neq 0$)، حيث يجب إرجاع المصفوفة المعطاة إلى المصفوفة الأحادية أي:

$$[A \vdots I] \Rightarrow [I \vdots A^{-1}]$$

لابد من تطبيق الشروط لإيجاد معكوس المصفوفة بطريقة غوس وتتمثل في (عبد العزيز شرابي، 2016، ص77):

-إستبدال احدى الأسطر أو الأعمدة مع بعضهم البعض $\boldsymbol{L_i = L_j}$

-جمع سطر مع سطر آخر مضروب في العدد λ $\boldsymbol{L_i + \lambda L_j}$

- ضرب أي سطر في العدد λ **بحيث** $\lambda \neq 0$ ، $\boldsymbol{L_i = \lambda L_i}$

مثال 01: أوجد معكوس المصفوفة A بطريقة غوس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) L_2 \Rightarrow L_2 - 2L_1$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) L_2 \Rightarrow \frac{1}{3} L_2$$

إذن : $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

للتأكد من نتيجة نقوم بحساب : $A.A^{-1} = I_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال 02: أوجد معكوس المصفوفة B بطريقة غوس

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) L_2 \Rightarrow -2L_1 + L_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) L_1 \Rightarrow 3L_2 + L_1 \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) L_2 \Rightarrow -1L_2$$

إذن :
$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

مثال03: أوجد معكوس المصفوفة **C** بطريقة غوس

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \begin{matrix} L_2 \Rightarrow 2L_2 + L_1 \\ L_3 \Rightarrow -2L_3 + L_1 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix} L_1 \Rightarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \Rightarrow L_2 + L_3 \end{matrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \begin{matrix} L_1 \Rightarrow \frac{1}{2} L_1 \\ L_2 \Rightarrow \frac{1}{2} L_2 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 8 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$L_3 \Rightarrow L_3 + 4L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 & -6 \end{array}\right) L_1 \Rightarrow L_1 - 4L_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 & -6 \end{array}\right)$$

إذن:

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

2-4-خصائص المقلوب:

وتتمثل في مايلي (زغيب شهرزاد، بن ديب رشيد، 2014 ،ص 244-245.):

- $A \,.\, A^{-1} = A^{-1}.\, A = I$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$
- $|A^{-1}| = \frac{1}{|A^{-1}|}$

– إذا كانت A.B مصفوفات فإن: $(A.B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ولكن $(A.B)^{-1} \neq A^{-1}.B^{-1}$

– إذا كانت A مصفوفة قطرية غير شادة فإن المعكوس لها مصفوفة قطرية عناصر القطر فيها معكوس العناصر الأصلية.

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{b} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{c} \end{bmatrix} \quad ، \quad \mathrm{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{b}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{c}} \end{bmatrix}$$

- $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}\mathrm{A}^{-1}$
- $(\mathrm{A} + \mathrm{B})^{-1} \neq \mathrm{A}^{-1} + \mathrm{B}^{-1}$
- $(\mathrm{A}^2)^{-1} = (\mathrm{A}^{-1})^2$

سلسلة تمارين حول محدد ومقلوب مصفوفة

التمرين الأول :

أحسب محدد المصفوفات التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} ، B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} ، D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & -1 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

التمرين الثاني :

- لتكن لدينا المصفوفات التالية :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} ، B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} ، D = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- أوجد معكوس المصفوفات بطريقة "المصفوفة المرافقة".

التمرين الثالث:

لتكن لدينا المصفوفات التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} ، B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

- أثبت أن $(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$

التمرين الرابع:

- لتكن لدينا المصفوفات التالية :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} ، B = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} ، C = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 6 & -1 & 5 \end{bmatrix} ، \boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- أوجد معكوس المصفوفات بطريقة غوس "Gauss" .

تمارين محلولة حول محدد ومقلوب مصفوفة

حل التمرين الأول :

حساب محدد المصفوفات التالية:

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$

det(A)= $(1)(7) - (-2)(3)$

det(A)= 13

2) $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

det(B)= $(-3)(1) - (5)(2)$

det(B)= -13

3) $C = \begin{bmatrix} \mathbf{1}^+ & \mathbf{0}^- & \mathbf{2}^+ \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

det(C)= $+1\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$

det(C)= $+1[(3)(3) - (4)(0)] - 0\,[(1)(3) - (2)(0)] +$

$2\,[(1)(4) - (3)(2)]$

det(C)= 9–0–4

det(C)= 5

4) $D = \begin{bmatrix} \mathbf{2}^+ & -\mathbf{1}^- & \mathbf{3}^+ \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & -1 \end{bmatrix}$

det(D)= $+2\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix}$

det(D)= $+2[(0)(-1) - (-6)(2)] - (-1)\,[(-1)(-1) -$

$(0)(2)] + 3[(-1)(-6) - (0)(0)]$

det(D)=+24+1+18

det(D)= 43

$$5)\ E = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

لحساب المحدد من الرتبة الرابعة يجب الإختيار الأسطر أو الأعمدة التي فيهم عدد أكبر من الأصفار وهنا يمثل العمود الثالث.

$$E = -5\begin{bmatrix} \mathbf{0}^{+} & \mathbf{4}^{-} & \mathbf{-3}^{+} \\ 1 & -2 & 6 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(E) = -5\left(+0\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}\right.$$

$$\det(E) = -5(+0[(-2)(1)-(0)(6)] - 4\,[(1)(1)-(3)(6)] + (-3)[(1)(0)-(3)(-2)]\,)$$

$$\det(E) = -5(0+68-18)$$

$$\det(E) = -250$$

حل التمرين الثاني :

-إيجاد معكوس المصفوفة **A**:

$$1)\ A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

- حساب المحدد المصفوفة **A**:

$$\det(A) = (2)(-4) - (3)(-1)$$

$$\det(A) = -5$$

-حساب المصفوفة المساعدة :

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} + & - \\ - & + \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +(-4) & -(3) \\ -(-1) & +(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

-إيجاد منقول المصفوفة المساعدة :

$$\mathrm{adj}(A)^T = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

-حساب معكوس المصفوفة:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\ \mathrm{adj}\ (A)^T$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-5}\begin{bmatrix}-4 & 1\\ -3 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{4}{5} & \frac{-1}{5}\\ \frac{3}{5} & \frac{-2}{5}\end{bmatrix}$$

-إيجاد معكوس المصفوفة **B**:

$$\mathbf{2)}B = \begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & -4\end{bmatrix}$$

- حساب المحدد المصفوفة **B**:

$\det(B) = (2)(-4) - (3)(-1)$

$\det(B) = -5$

-حساب المصفوفة المساعدة :

$$\operatorname{adj}(B) = \begin{bmatrix}+ & -\\ - & +\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}+(-4) & -(3)\\ -(-1) & +(2)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4 & -3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

-إيجاد منقول المصفوفة المساعدة :

$$\operatorname{adj}(B)^T = \begin{bmatrix}-4 & 1\\ -3 & 2\end{bmatrix}$$

-حساب معكوس المصفوفة:

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)^T$$

$$B^{-1} = \frac{1}{-5}\begin{bmatrix}-4 & 1\\ -3 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{4}{5} & \frac{-1}{5}\\ \frac{3}{5} & \frac{-2}{5}\end{bmatrix}$$

-إيجاد معكوس المصفوفة **C**:

$$\mathbf{4)}\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix}\mathbf{1}^{+} & \mathbf{0}^{-} & \mathbf{2}^{+}\\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{0}\\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{3}\end{bmatrix}$$

- حساب المحدد المصفوفة **C**:

$$\det(\boldsymbol{C}) = +1\begin{vmatrix}3 & 0\\ 4 & 3\end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{vmatrix}$$

$\det(\boldsymbol{C}) = 1[(3)(3) - (4)(0)] + 0\,[(1)(3) - (0)(2)] + 2\,[(1)(4) - (3)(2)]$

$\mathbf{det}(\boldsymbol{C}) = 9 - 0 - 4$

$\mathbf{det}(\boldsymbol{C})= 5$

–حساب المصفوفة المساعدة :

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} \mathbf{1}^{+} & \mathbf{0}^{-} & \mathbf{2}^{+} \\ \mathbf{1}^{-} & \mathbf{3}^{+} & \mathbf{0}^{-} \\ \mathbf{2}^{+} & \mathbf{4}^{-} & \mathbf{3}^{+} \end{bmatrix}$$

$$\text{adj}(\mathbf{C})=\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{adj}(\boldsymbol{C})=\begin{bmatrix} \mathbf{9} & -\mathbf{3} & -\mathbf{2} \\ \mathbf{8} & -\mathbf{1} & -\mathbf{4} \\ -\mathbf{6} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{bmatrix}$$

– إيجاد منقول المصفوفة المساعدة :

$$\text{adj}(\boldsymbol{C})^{T}=\begin{bmatrix} \mathbf{9} & \mathbf{8} & -\mathbf{6} \\ -\mathbf{3} & -\mathbf{1} & \mathbf{2} \\ -\mathbf{2} & -\mathbf{4} & \mathbf{3} \end{bmatrix}$$

–حساب معكوس المصفوفة:

$$\boldsymbol{C}^{-1}=\frac{1}{\det(\boldsymbol{C})}\,\text{adj}\,(\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{C}^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix} \mathbf{9} & \mathbf{8} & -\mathbf{6} \\ -\mathbf{3} & -\mathbf{1} & \mathbf{2} \\ -\mathbf{2} & -\mathbf{4} & \mathbf{3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{5}} & \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{5}} & \frac{-\mathbf{6}}{\mathbf{67}} \\ \frac{-\mathbf{3}}{\mathbf{5}} & \frac{-\mathbf{1}}{\mathbf{5}} & \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}} \\ \frac{-\mathbf{2}}{\mathbf{5}} & \frac{-\mathbf{4}}{\mathbf{5}} & \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}} \end{bmatrix}$$

–إيجاد معكوس المصفوفة **D**:

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix} \mathbf{2} & -\mathbf{5} & \mathbf{0} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} & -\mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{bmatrix}$$

– حساب المحدد:

$$\det(\mathbf{D})= +2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - (-5)\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$\det(\mathbf{D}) = 2[(2)(3)-(-1)(0)] + 5\,[(4)(3)-(-1)(-1)] + 0$

$\mathbf{det(D)=67}$

-حساب المصفوفة المساعدة :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{2}^{+} & \mathbf{-5}^{-} & \mathbf{0}^{+} \\ \mathbf{4}^{-} & \mathbf{2}^{+} & \mathbf{-1}^{-} \\ \mathbf{-1}^{+} & \mathbf{0}^{-} & \mathbf{3}^{+} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{adj(D)} = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{adj(D)} = \begin{bmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{-11} & \mathbf{2} \\ \mathbf{15} & \mathbf{6} & \mathbf{5} \\ \mathbf{5} & \mathbf{2} & \mathbf{24} \end{bmatrix}$$

-إيجاد منقول المصفوفة المساعدة :

$$\mathrm{adj}(\mathbf{D})^{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{15} & \mathbf{5} \\ \mathbf{-11} & \mathbf{6} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{24} \end{bmatrix}$$

-حساب معكوس المصفوفة:

$$\mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{D})}\,\mathrm{adj}\,(\mathbf{D})^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{67}\begin{bmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{15} & \mathbf{5} \\ \mathbf{-11} & \mathbf{6} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{67}} & \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{67}} & \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{67}} \\ \frac{\mathbf{-11}}{\mathbf{67}} & \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{67}} & \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{67}} \\ \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{67}} & \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{67}} & \frac{\mathbf{24}}{\mathbf{67}} \end{bmatrix}$$

حل التمرين الثالث:

-أثبات أن $(\mathrm{A}+\mathrm{B})^{-1} \neq A^{-1}+B^{-1}$

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} ،\ \mathrm{B} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

1-إيجاد معكوس المصفوفة A+B:

$$\mathbf{A+B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

– حساب المحدد المصفوفة **A+B**:

$$\det(A+B) = (-2)(8) - (3)(5)$$

$$\det(A+B) = -31$$

–حساب المصفوفة المساعدة :

$$\operatorname{adj}(A+B) = \begin{bmatrix} + & - \\ - & + \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +(+8) & -(+3) \\ -(+5) & +(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$$

–إيجاد منقول المصفوفة المساعدة :

$$\operatorname{adj}(A+B)^T = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

–حساب معكوس المصفوفة:

$$(A+B)^{-1} = \frac{1}{\det(A+B)} \operatorname{adj}(A+B)^T$$

$$(A+B)^{-1} = \frac{1}{-31} \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-8}{31} & \frac{5}{31} \\ \frac{3}{31} & \frac{2}{31} \end{bmatrix}$$

2–إيجاد معكوس المصفوفة **A**:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$$

– حساب المحدد المصفوفة **A**:

$$\det(A) = (1)(7) - (-2)(3)$$

$$\det(A) = 13$$

–حساب المصفوفة المساعدة :

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} + & - \\ - & + \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +(7) & -(-2) \\ -(3) & +(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

–إيجاد منقول المصفوفة المساعدة :

$$\operatorname{adj}(A)^T = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

–حساب معكوس المصفوفة:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)^T$$

$$A^{-1} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{13} & \frac{-3}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{1}{13} \end{bmatrix}$$

3-إيجاد معكوس المصفوفة B:

$$\mathbf{2})B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

- حساب المحدد المصفوفة **B**:

$\det(B) = (-3)(1) - (5)(2)$

$\det(B) = -13$

-حساب المصفوفة المساعدة :

$$\operatorname{adj}(B) = \begin{bmatrix} + & - \\ - & + \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +(1) & -(5) \\ -(2) & +(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

-إيجاد منقول المصفوفة المساعدة :

$$\operatorname{adj}(B)^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$$

-حساب معكوس المصفوفة:

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)^T$$

$$B^{-1} = \frac{1}{-13}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{13} & \frac{2}{13} \\ \frac{5}{13} & \frac{3}{13} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} + B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{13} & \frac{-3}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{1}{13} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-1}{13} & \frac{2}{13} \\ \frac{5}{13} & \frac{3}{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{13} & \frac{-1}{13} \\ \frac{7}{13} & \frac{4}{13} \end{bmatrix}$$

إذن: $\neq A^{-1} + B^{-1}(A+B)^{-1}$

حل التمرين الرابع:

-إيجاد معكوس المصفوفة بطريقة غوس:

1) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

$$\left(\begin{matrix} 3 & 1 \\ -3 & 2 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right)\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \longrightarrow \left(\begin{matrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 3 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}\right)\begin{matrix} L_1 \Rightarrow \frac{1}{3}L_1 \\ L_2 \Rightarrow L_1 + L_2 \end{matrix} \longrightarrow \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} \frac{2}{9} & \frac{-1}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{matrix}\right)$$

إذن :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\frac{2}{9}} & \boldsymbol{\frac{-1}{9}} \\ \boldsymbol{\frac{1}{3}} & \boldsymbol{\frac{1}{3}} \end{bmatrix}$$

2) $B = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\left(\begin{matrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right)\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \longrightarrow \left(\begin{matrix} 2 & 7 \\ 0 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{matrix}\right) L_2 \Rightarrow -2L_2 + L_1 \longrightarrow \left(\begin{matrix} 1 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -2 \end{matrix}\right) L_1 \Rightarrow \frac{1}{2}L_1$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{matrix}\right) L_1 \Rightarrow \frac{-7}{2}L_2 + L_1$$

إذن : $B^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{7} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} \end{bmatrix}$

3) $C = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$$\left(\begin{matrix} 6 & 0 \\ 3 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right)\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \longrightarrow \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right) L_1 \Rightarrow \frac{1}{6}L_1 \longrightarrow \left(\begin{matrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{matrix}\middle|\begin{matrix} \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{-3}{6} & 1 \end{matrix}\right) L_2 \Rightarrow (-3)L_1 + L_2$$

إذن :
$$C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{-3}{6} & 1 \end{bmatrix}$$

$$4)D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 6 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_1 \Rightarrow \frac{1}{4}L_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_2 \Rightarrow 2L_1 + L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & \frac{2}{4} & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & \frac{2}{4} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & \frac{-6}{4} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_3 \Rightarrow L_3 - 6L_1$$

$$L_2 \Rightarrow \frac{1}{3}L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{12} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 5 & \frac{-6}{4} & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_3 \Rightarrow L_3 + L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{12} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 5 & \frac{-16}{12} & \frac{1}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$L_3 \Rightarrow \frac{1}{5}L_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{12} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-16}{60} & \frac{1}{15} & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

إذن:
$$\mathbf{D^{-1}} = \begin{bmatrix} \mathbf{\frac{1}{4}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{\frac{2}{12}} & \mathbf{\frac{1}{3}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{\frac{-16}{60}} & \mathbf{\frac{1}{15}} & \mathbf{\frac{1}{5}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{5)}\ \boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{} L_1 \Rightarrow \frac{1}{7}L_1 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_2 \Rightarrow L_2 - L_1 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & \frac{-1}{7} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & \frac{-1}{7} & 1 & -4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & \frac{-1}{7} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_3 \Rightarrow L_2 - 4L_3$$

$$\begin{matrix} L_2 \Rightarrow \frac{1}{4}L_2 \\ L_3 \Rightarrow (\frac{-1}{12})L_3 \end{matrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{28} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{84} & \frac{-1}{12} & \frac{4}{12} \end{array}\right)$$

إذن:

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{28} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{84} & \frac{-1}{12} & \frac{4}{12} \end{bmatrix}$$

حل جملة المعادلات الخطية

Solve a Set of Linear Equations

تعتبر المصفوفات من الأساليب الرياضية التي تستخدم كثيرا في حل النماذج الرياضية، وبصفة خاصة تلك التي تعتمد عليها الإدارة العليا في المشروع في إتخاذ القرارات الإدارية مثل تخطيط الإنتاج أو تحديد عدد الوحدات الواجب إنتاجها في الضوء الإمكانيات أو الطاقة المتاحة، فإذا كان لدينا المعادلات الخطية فإن يمكن إستخدام المصفوفات في حلها (عبد أحمد أبو بكر – وليد إسماعيل السيفو، 2022،ص 147.) .

1- كتابة جملة المعادلات على الشكل المصفوفي:

تكون الجملة الخطية ذات n معادلة و n مجهول معرفة كما يلي (محمود مهدي البياتي، دلال القاضي، 2015، ص 246.):

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}\,\mathrm{x}_1 + a_{12}\,\mathrm{x}_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}\,\mathrm{x}_n \le b_1 \\ a_{21}\,\mathrm{x}_1 + a_{22}\,\mathrm{x}_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{2n}\,\mathrm{x}_n \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\,\mathrm{x}_1 + a_{n2}\,\mathrm{x}_{21} + \ldots\ldots\ldots + a_{nn}\,\mathrm{x}_n \le b_n \end{array}\right. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(01)$$

يمكن كتابة الجملة (01) على الشكل :

$$(01) \Leftrightarrow \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \right.$$

$\Leftrightarrow AX = B \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(02)$

حيث :

A تسمى مصفوفة المعاملات عناصرها هي معاملات المجاهيل x_1، x_2 ... ... ، x_n .

B تسمى مصفوفة الثوابت عناصرها هي الأعداد الواقعة في الطرف الثاني للجملة .

X تمثل مصفوفة المجاهيل التي نبحث عنها .

عندئذا حل الجملة (01) يكافئ حل المعادلة المصفوفة (02).

لحل الجملة (01) توجد عدة طرق منها:

- حل جملة معادلات خطية بطريقة كرامر Cramer
- حل جملة معادلات خطية بطريقة مقلوب المصفوفة
- حل جملة معادلات خطية بطريقة غوس Gauss

2-حل جملة معادلات خطية بطريقة كرامر Cramer

تستخدم قاعدة كرامر في حل نظم المعادلات الخطية غير المتجانسة التي يكون فيها عدد المعادلات مساويا لعدد المجاهيل وقيمة محدد مصفوفة المعاملات لا يساوي صفرا ($\det(A) \neq 0$).
وتعرف بقاعدة إستخدام المحددات وتعتبر أكثر الطرق استخداما وشيوعا بين الإقتصاديين لما تمتاز به من سهولة التطبيق (سعيد أحمد حسن، 2012، ص171-174.).

2-1-حل المعادلات الخطية في حالة مجهولين:

بفرض أنه لدينا المعادلات الخطية الأتية:

$$\begin{cases} a_{11}\,\mathrm{x}_1 + a_{12}\,\mathrm{x}_2 = b_1 \\ a_{21}\,\mathrm{x}_1 + a_{22}\,\mathrm{x}_2 = b_2 \end{cases}$$

وتتحدد قيم المجهولين X_1, X_2 كما يلي:

$$\mathrm{X}_1 = \frac{\det(\mathrm{X}_1)}{\det(A)} \qquad , \mathrm{X}_2 = \frac{\det(\mathrm{X}_2)}{\det(A)}$$

حيث :

$\det(A) \neq 0$: قيمة محدد معاملات المجاهيل X_1 ، X_2

$\det(\mathrm{X}_1)$ قيم محدد معاملات المجاهيل بعد إستبدال معاملات (X_1)بعمود الثوابت b_1 ، b_2.

$\det(\mathrm{X}_2)$ قيم محدد معاملات المجاهيل بعد إستبدال معاملات (X_2) بعمود الثوابت b_1 ، b_2.

مثال:

لدينا جملة المعادلات التالية:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2\mathrm{y} - x = 1 \end{cases}$$

حل جملة المعادلات بإستعمال طريقة كرامر

الحل:

- **ترتيب جملة المعادلات كما يلي:**

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$$

-إيجاد حلول الجملة :

$$A.x = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ومنه:

$$= \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{3}{3} = 1x = \frac{det\,(x)}{det\,(A)}$$

$$y = \frac{det\,(y)}{det\,(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{3}{3} = 1$$

إذن حلول هذه الجملة هي:

$\boldsymbol{y = 1}$ و $\boldsymbol{x = 1}$

2-2-حل المعادلات الخطية في حالة ثلاثة مجاهيل:

بفرض أنه لدينا المعادلات الخطية الأتية:

$$\begin{cases} a_{11}\,\mathrm{x}_1 + a_{12}\,\mathrm{x}_2 + a_{13}\,\mathrm{x}_3 = b_1 \\ a_{21}\,\mathrm{x}_1 + a_{22}\,\mathrm{x}_2 + a_{23}\,\mathrm{x}_3 = b_2 \\ a_{31}\,\mathrm{x}_1 + a_{32}\,\mathrm{x}_2 + a_{33}\,\mathrm{x}_3 = b_3 \end{cases}$$

وتتحدد قيم المجهولين X_1, X_2, X_3 كما يلي:

$$\mathrm{X}_1 = \frac{\det(\mathrm{X}_1)}{\det(A)} \quad ، \mathrm{X}_3 = \frac{\det(\mathrm{X}_3)}{\det(A)} \quad , \mathrm{X}_2 = \frac{\det(\mathrm{X}_2)}{\det(A)}$$

حيث :

$\det(\mathrm{A}) \neq 0$: قيمة محدد معاملات المجاهيل X_1 ، X_2

$\det(\mathrm{X}_1)$ قيم محدد معاملات المجاهيل بعد إستبدال معاملات (X_1) بعمود الثوابت b_1، b_2 ، b_3.

$\det(\mathrm{X}_2)$ قيم محدد معاملات المجاهيل بعد إستبدال معاملات (X_2) بعمود الثوابت b_1، b_2 ، b_3

$\det(\mathrm{X}_3)$ قيم محدد معاملات المجاهيل بعد إستبدال معاملات (X_3) بعمود الثوابت b_1، b_2 ، b_3

مثال:

لدينا جملة المعادلات التالية:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

حل جملة المعادلات بإستعمال طريقة كرامر

الحل:

-إيجاد حلول جملة المعادلات بطريقة كرامر:

$$A.x = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ومنه:

أولا نقوم بحساب المحدد من الرتبة الثالثة لكل المتغيرات ثم نحسب قيم المتغيرات

$$\det(A) = +1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 1[(1)(-1) - (3)(1)] + 1[(-1)(-1) - (1)(1)] + 1[(-1)(3) - (1)(1)]$$

$$\det(A) = -4 - 0 - 4$$

$$\det(A) = -8$$

$$X_1 = \frac{\det(X_1)}{\det(A)} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}} = \frac{0}{-8} = 0$$

$$\det(X_1) = +2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\det(X_1) = 2[(1)(-1) - (3)(1)] + 1[(4)(-1) - (0)(1)] + 1[(4)(3) - (0)(1)]$$

$$\det(X_1) = -8 - 4 + 12$$

$$\det(X_1) = 0$$

$$X_2 = \frac{\det(X_2)}{\det(A)} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}} = \frac{-8}{-8} = 1$$

$$\det(X_2) = +1 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$\det(X_2) = 1[(4)(-1)-(0)(1)] - 2[(-1)(-1)-(1)(1)] + 1\,[(-1)(0) - (1)(4)]$

$\det(X_2) = -4 - 0 - 4$

$\det(X_2) = -8$

$$X_3 = \frac{\det(X_3)}{\det(A)} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}} = \frac{-24}{-8} = 3$$

$\det(X_3) = +1\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

$\det(X_3) = 1[(1)(0)-(3)(4)] + 1\,[(-1)(0)-(1)(4)] + 2\,[(-1)(3)-(1)(1)]$

$\det(X_3) = -12 - 4 - 8$

$\det(X_3) = -24$

إذن حلول هذه الجملة هي:

$$\mathbf{x_1 = 0}،\ \mathbf{x_2 = 1}\ ،\ \mathbf{x_3 = 3}$$

3–حل جملة معادلات خطية بطريقة مقلوب المصفوفة

لدينا الشكل العام لجملة المعادلات الخطية كما يلي:

$$A_{n\times n}\,X_{n\times 1} = B_{n\times 1} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

وتتلخص لحل هذه الجملة المعادلات بطريقة معكوس في أن أية مجموعة مثل n من المعادلات الخطية الآنية ذات n من المجاهيل يمكن كتابتها على الشكل التالي (مجيد الكرخي، 2014،ص157):

$$X_{n\times 1} = B_{n\times 1}A_{n\times n}$$

ويستخرج حل المعادلات عن طريق معكوس A وشعاع النتائج ويمكن كتابتها في الشكل التالي :

$$X_{n\times 1} = A^{-1}_{n\times n}B_{n\times 1}$$

بشرط أن يكون محدد المصفوفة A يختلف عن الصفر.

مثال 01: لدينا جملة المعادلات التالية:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - 3\mathrm{y} = -4 \end{cases}$$

حل جملة المعادلات بإستعمال طريقة مقلوب المصفوفة.

الحل :

-إيجاد حلول جملة المعادلات بطريقة مقلوب المصفوفة

$$A.x = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$x = A^{-1}.\mathrm{B} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}. \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

أولا حساب معكوس المصفوفةA

- حساب المحدد المصفوفة A:

$$\det(\mathrm{A}) = (1)(-3) - (2)(2)$$

$$\det(\mathrm{A}) = -7$$

-حساب المصفوفة المساعدة :

$$\mathrm{adj}(\mathrm{A}) = \begin{bmatrix} + & - \\ - & + \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +(-3) & -(2) \\ -(2) & +(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

-إيجاد منقول المصفوفة المساعدة :

$$\mathrm{adj}(\mathrm{A})^T = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

-حساب معكوس المصفوفة:

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathrm{A})} \mathrm{adj}\ (\mathrm{A})^{\mathrm{T}}$$

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{-7} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{-1}{7} \end{bmatrix}$$

ثانيا : إيجاد المتغيرات

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{-1}{7} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

إذن حلول هذه الجملة هي:

$$\boldsymbol{y = 2} \text{ و } \boldsymbol{x = 1}$$

مثال02:

لدينا جملة المعادلات التالية:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

حل جملة المعادلات بإستعمال طريقة مقلوب المصفوفة

الحل:

-إيجاد حلول جملة المعادلات بطريقة مقلوب المصفوفة:

$$A.x = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x = A^{-1}.B \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}. \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

-إيجاد معكوس المصفوفة A:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

- حساب المحدد:

$$\det(A) = +1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 1[(1)(-1) - (3)(1)] + 1[(-1)(-1) - (1)(1)] + 1[(-1)(3) - (1)(1)]$$

$$\det(A) = -4 - 0 - 4$$

$$\det(A) = -8$$

-حساب المصفوفة المساعدة :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{1^{+}} & \boldsymbol{-1^{-}} & \boldsymbol{1^{+}} \\ \boldsymbol{-1^{-}} & \boldsymbol{1^{+}} & \boldsymbol{1^{-}} \\ \boldsymbol{1^{+}} & \boldsymbol{3^{-}} & \boldsymbol{-1^{+}} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{adj(A)}=\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{adj(A)}=\begin{bmatrix}-4 & 0 & -4\\ 2 & -2 & -4\\ -2 & -2 & 0\end{bmatrix}$$

-إيجاد منقول المصفوفة المساعدة :

$$\mathrm{adj(A)}^T=\begin{bmatrix}-4 & 2 & -2\\ 0 & -2 & -2\\ -4 & -4 & 0\end{bmatrix}$$

-حساب معكوس المصفوفة:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\,\mathrm{adj}\,(A)^{T}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-8}\begin{bmatrix}-4 & 2 & -2\\ 0 & -2 & -2\\ -4 & -4 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4}\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4}\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2\\ 4\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 3\end{bmatrix}$$

إذن حلول هذه الجملة هي:

$$x_1=0;\ x_2=1\ ;\ \ x_3=3$$

4-حل جملة معادلات خطية بطريقة" غوس" Gauss Method:

وهي طريقة ذات كفاءة عالية لحل الأنظمة الخطية، وتتلخص هذه الطريقة في تخفيض المصفوفة الممثلة للنظام الخطي، وتبسيطها بإستخدام العمليات المعتادة على الأسطر أو الأعمدة، تعد هذه الطريقة قديمة جدا تاريخيا، فقد إستخدمها الصينيون قديما، وإكتشفها مجددا الألماني كارل فريديريك جاوس، ونشرها 1809م، تتكون هذه الطريقة من خطوتين، تستخدم في الأولى العمليات على الأسطر أو الأعمدة، لتخفيض المصفوفة الموسعة وهي المصفوفة الناتجة عن دمج مصفوفة المعاملات مصفوفة الثوابت العمودية، حيث تحول المصفوفة (A) إلى مصفوفة مثلية صفرية سفلي أو عليا، أما الخطوة الثانية تتمثل في إيجاد حل النظام عن طريق التعويض العكسي (مساعد العبد اللطيف، مسعود بونجل، 2014، ص90.).

ملاحظة :

في حالة إذا كان السطر الأخير للمصفوفة المثلثية الصفرية السفلى معدوما فإن النظام إما لايقبل حلا أو يقبل عدد غير منتهي من الحلول.

مثال 01:

لدينا جملة المعادلات التالية:

$$\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$$

حل جملة المعادلات بإستعمال طريقة غوس

الحل:

-إيجاد حلول جملة المعادلات بطريقة غوس:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & -21 \end{array}\right) \; L_2 \Rightarrow -3L_2 + L_1$$

ومنه:

$$\begin{cases} 3x - y = 3 \\ -7y = -21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y = 3 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

إذن حلول هذه الجملة هي:

$\boldsymbol{y = 3}$ و $\boldsymbol{x = 2}$

مثال02:

لدينا جملة المعادلات التالية:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+y+z=7} \\ \boldsymbol{x-y+2z=3} \\ \boldsymbol{2x+y+z=9} \end{cases}$$

حل جملة المعادلات بإستعمال طريقة غوس

الحل:

-إيجاد حلول جملة المعادلات بطريقة غوس:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{7} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{9} \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{7} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-5} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \Rightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \Rightarrow L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{7} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{6} \end{array}\right) L_3 \Rightarrow -2L_3 + L_2$$

ومنه:

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z=7 \\ -2y+2=-4 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=2 \end{cases} \begin{cases} x+y+z=7 \\ -2y+z=-4 \\ 3z=6 \end{cases}$$

إذن حلول هذه الجملة هي:

$$\boldsymbol{y=3\,, z=2\ x=2,}$$

مثال03:

لدينا جملة المعادلات التالية:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+y-z=9} \\ \boldsymbol{y+3z=3} \\ \boldsymbol{-x-2z=2} \end{cases}$$

حل جملة المعادلات بإستعمال طريقة غوس

الحل:

-إيجاد حلول جملة المعادلات بطريقة غوس:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{9} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{2} \end{array}\right)\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{9} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{11} \end{array}\right) L_3 \Rightarrow L_3+L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{9} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-6} & \mathbf{8} \end{array}\right) L_3 \Rightarrow L_3-L_2$$

ومنه:

$$\begin{cases} x+y-z=9 \\ y+3z=3 \\ -6z=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=9 \\ y+3(\frac{-4}{3})=3 \\ z=\frac{-4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+7-2=9 \\ y=7 \\ z=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=7 \\ z=\frac{-4}{3} \end{cases}$$

إذن حلول هذه الجملة هي:

$$\boldsymbol{y=7\,, z=\frac{-4}{3} x=\frac{2}{3},}$$

سلسلة تمارين حول حل جملة المعادلات الخطية

التمرين الأول :

لتكن جمل المعادلات التالية:

$$1)\begin{cases}2x-3y=0\\3x-y=63\end{cases} \quad ، \quad 2)\begin{cases}5x+3y=15\\2x+4y=8\end{cases}$$

حل أنظمة المعادلات الخطية التالية بطريقة "كرامر" .

التمرين الثاني :

لتكن جمل المعادلات التالية:

$$1)\begin{cases}\mathrm{x}+3\mathrm{y}-\mathrm{z}=4\\2\mathrm{x}+\mathrm{y}+2\mathrm{z}=10\\\mathrm{x}+3\mathrm{y}-\mathrm{z}=4\end{cases} \quad ، \quad 2)\begin{cases}x-y+z=2\\x-y+z=4\\x-y+z=0\end{cases}$$

$$3)\begin{cases}x+y+z=7\\x-y+2z=3\\2x+y+z=9\end{cases} \quad ، \quad 4)\begin{cases}x-2y+3z=8\\2x-y+4z=17\\3x+4y+z=22\end{cases}$$

حل أنظمة المعادلات الخطية التالية بطريقة "كرامر" .

التمرين الثالث:

لتكن جمل المعادلات التالية:

$$1)\begin{cases}3x+5y=-7\\7x+2y=3\end{cases} \quad ، \quad 2)\begin{cases}2x-y=3\\3x+2y=1\end{cases}$$

$$3)\begin{cases}x+y+z=7\\x-y+2z=3\\2x+y+z=9\end{cases} \quad ، \quad 4)\begin{cases}x-2y+z=0\\2x+y-z=1\\3x-y-z=-2\end{cases}$$

حل أنظمة المعادلات الخطية التالية بطريقة "معكوس" .

التمرين الرابع:

لتكن جمل المعادلات التالية:

$$1)\begin{cases}x-2y=-1\\x+y=2\end{cases} \quad ، \quad 2)\begin{cases}2x-y=3\\3x+2y=1\end{cases}$$

$$3)\begin{cases}x+y+z=7\\x-y+2z=3\\2x+y+z=9\end{cases} \quad ، \quad 4)\begin{cases}x-2y+3z=8\\2x-y+4z=17\\3x+4y+z=22\end{cases}$$

حل أنظمة المعادلات الخطية التالية بطريقة "غوس" .

تمارين محلولة حول حل جملة المعادلات الخطية

حل التمرين الأول :

حل أنظمة المعادلات الخطية التالية بطريقة "كرامر" :

$$1)\begin{cases}2x-3y=0\\3x-y=63\end{cases}$$

-إيجاد حلول الجملة :

$$A.x=B\Rightarrow\begin{pmatrix}2&-3\\3&-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\63\end{pmatrix}$$

ومنه:

$$=\frac{\begin{vmatrix}0&-3\\63&-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&-3\\3&-1\end{vmatrix}}=\frac{189}{7}=27x=\frac{det\ (x)}{det\ (A)}$$

$$y=\frac{det\ (y)}{det\ (A)}=\frac{\begin{vmatrix}2&0\\3&63\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&-3\\3&-1\end{vmatrix}}=\frac{126}{7}=18$$

إذن حلول هذه الجملة هي:

$$y=18x=27و$$

$$2)\begin{cases}5x+3y=15\\2x+4y=8\end{cases}$$

-إيجاد حلول الجملة :

$$A.x=B\Rightarrow\begin{pmatrix}5&3\\2&4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\8\end{pmatrix}$$

ومنه:

$$=\frac{\begin{vmatrix}15&3\\8&4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5&3\\2&4\end{vmatrix}}=\frac{36}{14}=\frac{18}{7}x=\frac{det\ (x)}{det\ (A)}$$

$$y=\frac{det\ (y)}{det\ (A)}=\frac{\begin{vmatrix}5&15\\2&8\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5&3\\2&4\end{vmatrix}}=\frac{10}{14}=\frac{5}{7}$$

إذن حلول هذه الجملة هي:

$$y=\frac{5}{7}x=\frac{18}{7},$$

حل التمرين الثاني :

حل أنظمة المعادلات الخطية التالية بطريقة "كرامر":

$$1)\ \begin{cases} x+3y-z=4 \\ 2x+y+2z=10 \\ x+3y-z=4 \end{cases}$$

هذه الجملة ليس لها حل أو لها عدد غير منتهي من الحلول لأن عدد المعادلات لايساوي عدد المجاهيل (المعادلة الأولى هي نفسها المعادلة الثالثة).

$$2)\ \begin{cases} x-y+z=2 \\ x-y+z=4 \\ x-y+z=0 \end{cases}$$

هذه الجملة ليس لها حل (لأن في هذه الحالة محدد المصفوفة A يساوي (0)).

$$3)\begin{cases} x+y+z=7 \\ x-y+2z=3 \\ 2x+y+z=9 \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$x=\frac{\det(x)}{\det(A)}=\frac{\begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 9 & 1 & 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}}=\frac{6}{3}=2$$

$$y=\frac{\det(y)}{\det(A)}=\frac{\begin{bmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 9 & 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}}=\frac{9}{3}=3$$

$$z = \frac{\det(z)}{\det(A)} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}} = \frac{6}{3} = 2$$

إذن حلول هذه الجملة هي:

$$\boldsymbol{y = 3 \, , z = 2 x = 2,}$$

$$4) \begin{cases} x - 2y + 3z = 8 \\ 2x - y + 4z = 17 \\ 3x + 4y + z = 22 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 8 \\ 17 \\ 22 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = \frac{\det(x)}{\det(A)} = \frac{\begin{bmatrix} 8 & -2 & 3 \\ 17 & -1 & 4 \\ 22 & 4 & 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}} = \frac{-8}{-4} = 2$$

$$\boldsymbol{y} = \frac{\det(y)}{\det(A)} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 2 & 17 & 4 \\ 3 & 22 & 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}} = \frac{-12}{-4} = 3$$

$$\boldsymbol{z} = \frac{\det(z)}{\det(A)} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 2 & -1 & 17 \\ 3 & 4 & 22 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}} = \frac{-16}{-4} = 4$$

إذن حلول هذه الجملة هي:

$$\boldsymbol{y = 3\ , z = 4x = 2,}$$

حل التمرين الثالث:

حل أنظمة المعادلات الخطية التالية بطريقة "معكوس" :

$$1)\ \begin{cases} 3x + 5y = -7 \\ 7x + 2y = 3 \end{cases}$$

-إيجاد حلول جملة المعادلات بطريقة مقلوب المصفوفة

$$A.x = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x = A^{-1}.\mathrm{B} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}.\begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

أولا حساب معكوس المصفوفةA

- حساب المحدد المصفوفة A:

$$\det(\mathrm{A}) = (3)(2) - (7)(5)$$

$$\det(\mathrm{A}) = -29$$

-حساب المصفوفة المساعدة :

$$\mathrm{adj(A)} = \begin{bmatrix} + & - \\ - & + \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +(2) & -(7) \\ -(5) & +(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

-إيجاد منقول المصفوفة المساعدة :

$$\mathrm{adj(A)}^T = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$$

-حساب معكوس المصفوفة:

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathrm{A})}\ \mathrm{adj\ (A)^T}$$

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{-29}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{29} & \frac{5}{29} \\ \frac{7}{29} & \frac{-3}{29} \end{bmatrix}$$

ثانيا : إيجاد المتغيرات

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{29} & \frac{5}{29} \\ \frac{7}{29} & \frac{-3}{29} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

إذن حلول هذه الجملة هي:

و $\boldsymbol{y = -2} \; \boldsymbol{x = 1}$

$$2) \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$$

-إيجاد حلول جملة المعادلات بطريقة مقلوب المصفوفة

$$A.x = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x = A^{-1}.\mathrm{B} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}. \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

أولا حساب معكوس المصفوفةA

- حساب المحدد المصفوفة A:

$$\det(A) = (2)(2) - (3)(-1)$$

$$\det(A) = 7$$

-حساب المصفوفة المساعدة :

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} + & - \\ - & + \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +(2) & -(3) \\ -(-1) & +(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

-إيجاد منقول المصفوفة المساعدة :

$$\mathrm{adj}(A)^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

-حساب معكوس المصفوفة:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{adj}\,(A)^{T}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{-3}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

ثانيا : إيجاد المتغيرات

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{-3}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

إذن حلول هذه الجملة هي:

$$\boldsymbol{y = -1} \text{ و } \boldsymbol{x = 1}$$

$$3) \begin{cases} x + y + z = 7 \\ x - y + 2z = 3 \\ 2x + y + z = 9 \end{cases}$$

-إيجاد حلول جملة المعادلات بطريقة مقلوب المصفوفة:

$$\mathrm{A.x} = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{x} = A^{-1}.\mathrm{B} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}. \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

-إيجاد معكوس المصفوفة A:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- حساب المحدد:

$$\det(\mathrm{A}) = +1 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(\mathrm{A}) = 1[(-1)(1) - (1)(2)] - 1[(1)(1) - (2)(2)] + 1[(1)(1) - (2)(-1)]$$

$$\det(\mathrm{A}) = -3 + 3 + 3$$

$$\det(\mathrm{A}) = 3$$

-حساب المصفوفة المساعدة :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{1}^{+} & \boldsymbol{1}^{-} & \boldsymbol{1}^{+} \\ \boldsymbol{1}^{-} & \boldsymbol{-1}^{+} & \boldsymbol{2}^{-} \\ \boldsymbol{2}^{+} & \boldsymbol{1}^{-} & \boldsymbol{1}^{+} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{adj(A)} = \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{adj}(A)=\begin{bmatrix}-3 & 3 & 3\\ 0 & -1 & 1\\ 3 & -1 & -2\end{bmatrix}$$

-إيجاد منقول المصفوفة المساعدة :

$$\operatorname{adj}(A)^T=\begin{bmatrix}-3 & 0 & 3\\ 3 & -1 & -1\\ 3 & 1 & -2\end{bmatrix}$$

-حساب معكوس المصفوفة:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)^T$$

$$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-3 & 0 & 3\\ 3 & -1 & -1\\ 3 & 1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3}\\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3}\\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\mathbf{7}\\ \mathbf{3}\\ \mathbf{9}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 3\\ 2\end{bmatrix}$$

إذن حلول هذه الجملة هي:

$$\boldsymbol{x=2; y=3\ ;\ z=2}$$

$$4)\ \begin{cases}x-2y+z=0\\ 2x+y-z=1\\ 3x-y-z=-2\end{cases}$$

-إيجاد حلول جملة المعادلات بطريقة مقلوب المصفوفة:

$$A.x=B\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & -1 & -1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$$

$$x=A^{-1}.B\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=A^{-1}.\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$$

-إيجاد معكوس المصفوفة A:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

- حساب المحدد:

$$\det(A)=+1\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & -1\end{vmatrix}-(-2)\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & -1\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}$$

$$\det(A)=1[(1)(-1)-(-1)(-1)]+1[(2)(-1)-(3)(-1)]+1[(2)(-1)-(3)(1)]$$

$$\det(A)=-2+2-5$$

$$\det(A)=-5$$

-حساب المصفوفة المساعدة :

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{1}^{+} & \mathbf{-2}^{-} & \mathbf{1}^{+}\\ \mathbf{2}^{-} & \mathbf{1}^{+} & \mathbf{-1}^{-}\\ \mathbf{3}^{+} & \mathbf{-1}^{-} & \mathbf{-1}^{+}\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{adj}(A)=\begin{bmatrix}+\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -1 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & -1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{adj}(A)=\begin{bmatrix}-2 & -1 & -5\\ -3 & -4 & -5\\ 1 & 3 & 5\end{bmatrix}$$

-إيجاد منقول المصفوفة المساعدة :

$$\mathrm{adj}(A)^{T}=\begin{bmatrix}-2 & -3 & 1\\ -1 & -4 & 3\\ -5 & -5 & 5\end{bmatrix}$$

-حساب معكوس المصفوفة:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\,\mathrm{adj}\,(A)^{T}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-5}\begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -1 & -4 & 3 \\ -5 & -5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}} & \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}} & \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{5}} \\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}} & \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}} & \frac{\mathbf{-3}}{\mathbf{5}} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

إذن حلول هذه الجملة هي:

$$\boldsymbol{x = 1; y = 2\ ;\ z = 3}$$

حل التمرين الرابع:

حل أنظمة المعادلات الخطية التالية بطريقة "غوس" :

$$1)\ \begin{cases} x - 2y = -1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

-إيجاد حلول جملة المعادلات بطريقة غوس:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \ L_2 \Rightarrow L_2 - L_1$$

ومنه:

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 3y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = -1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

إذن حلول هذه الجملة هي:

$\boldsymbol{y = 1}$ و $\boldsymbol{x = 1}$

$$2)\ \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 7 & 0 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1 \Rightarrow 2L_1 + L_2 \\ \end{array}$$

ومنه:

$$\begin{cases} 7x = 7 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

إذن حلول هذه الجملة هي:

$\boldsymbol{x = 1}$ و $\boldsymbol{y = -1}$

$$3)\ \begin{cases} x + y + z = 7 \\ x - y + 2z = 3 \\ 2x + y + z = 9 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ L_2 \Rightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \Rightarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 9 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ L_3 \Rightarrow -2L_3 + L_2 \end{array}$$

ومنه:

$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ -2y + z = -4 \\ 3z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 7 \\ -2y + 2 = -4 \\ z = 2 \end{cases}$$

إذن:

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 3 + 2 = 7 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases}$$

إذن حلول هذه الجملة هي:

$$\boldsymbol{x = 1; y = 2\ ;\ z = 3}$$

4) $\begin{cases} x-2y+3z=8 \\ 2x-y+4z=17 \\ 3x+4y+z=22 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 8 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 22 \end{array}\right) L_2 \Rightarrow L_2 - 2L_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 8 \\ 2 & -1 & 4 & 17 \\ 3 & 4 & 1 & 22 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 8 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 10 & -8 & -2 \end{array}\right) L_3 \Rightarrow \; L_3 - 3L_2 \quad \longrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 8 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 10 & \frac{-4}{3} & \frac{-16}{3} \end{array}\right) L_3 \Rightarrow \; L_3 - \frac{10}{3} L_2$$

$$\begin{cases} x-2y+3z=8 \\ 3y-2z=1 \\ \dfrac{-4}{3}z = \dfrac{-16}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y+3z=8 \\ 3y-8=1 \\ z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-6+12=8 \\ y=3 \\ z=4 \end{cases}$$

إذن:

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=4 \end{cases}$$

إذن حلول هذه الجملة هي:

$$\boldsymbol{x=2; y=3 \; ; \; z=4}$$

قائمة المراجع:

1- السيفو، زكية أحمد مشعل، وليد إسماعيل. (2004) ،الرياضيات في العلوم الاقتصادية والتجارية الأردن، الأهلية للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى.

2-.الصديق جابي، حكيم ملياني. (2016). تطبيقات الرياضيات في فرع الاقتصاد. الجزائر، الطبعة الثانية،ديوان المطبوعات الجامعية.

3-أنمار أمين البرواري، عربية عبد الرحمن داؤد. (2011). الرياضيات والبرمجة الخطية وتطبيقاتها الإدارية والإقتصادية، الأردن،: دار مجدلاوي للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى.

4- زغيب شهرزاد، بن ديب رشيد. (2014)، الاقتصاد الرياضي محاضرات وتمارين محلولة، الجزائر، ديوان المطبوعات الجامعية.

5- زكية أحمد مشعل، وليد إسماعيل السيفو. (2004). الرياضيات في العلوم الاقتصادية والتجارية. الأردن، الأهلية للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى.

6- سعود محمود، بن عيسى لحضر. (2012). التحليل الرياضي. الجزائر: ديوان المطبوعات الجامعية.

7- سعيد أحمد حسن، (2012). *الرياضيات للعلوم الإدارية.* صنعاء ، دار الكتاب الجامعي.

8- شمعون شمعون، (2008). الرياضيات الاقتصادية. الجزائر،: ديوان المطبوعات الجامعية، الطبعة الثالثة.

9- طلال عبود، (2020). الرياضيات الاقتصادية والإدارية، من منشورات الجامعة الإفتراضية السورية.

10- عبد أحمد أبو بكر - وليد إسماعيل السيفو. (2022). مبادئ التحليل الكمي، عمان، دار اليازوري العلمية.

11- عبد العالي بوحويش الدايخ، خالد خميس الصادق، يحي محمود محمد، (2022)، أساسيات الاقتصاد الرياضي. ليبيا ، منشورات جامعة عمر المختار، دار الكتب الوطنية بنغازي .

12- عبد العزيز شرابي، (2016)، الرياضيات الاقتصادية ،الجزائر، ديوان المطبوعات الجامعية.

13- عدنان كريم نجم الدين، (2003) ، الاقتصاد الرياضي مدخل كمي تحليلي، الطبعة الثانية، الأردن، دار وائل للنشر.

14- عمران قوبا، (2017). الجبر الخطي، الجزء الثاني، سوريا، منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا.

15- مجيد الكرخي، (2014)، التحليل الكمي الاقتصادي (العلاقات الخطية)، الأردن : دار المناهج للنشر والتوزيع.

16- محمد قداري، (2016)، المغني في الرياضيات. الجزائر، دار المعاصرة الجديدة.

17- محمود مهدي البياتي، دلال القاضي. (2015)، الرياضيات وتطبيقاتها في العلوم الإدارية والإقتصادية، عمان، دار ومكتبة الحامد للنشر والتوزيع، الطبعة الثانية.

18- مساعد العبد اللطيف، مسعود بونجل (2014)، أساسيات الرياضيات، المملكة العربية السعودية، النشر العلمي والمطابع.

19- هادية مسعودان، فارح حناشي (2021) ، الرياضيات العامة للاقتصاديين، كتاب بيداغوجي موجه لطلبة السنة الأولى علوم اقتصادية وتجارية وعلوم التسيير، الطبعة الأولى، جامعة العربي التبسي- تبسة.

سيرة المؤلف المختصرة

Photo

الدكتورة غوال نادية متحصلة على شهادة الدكتوراه LMD في العلوم الاقتصادية سنة 2019 بجامعة عبد الحميد بن باديس مستغانم، حاليا أستاذة دائمة بجامعة غليزان، مؤلفة لعدة مقالات علمية ومشاركة في ندوات وملتقيات وطنية ودولية.

E-mail: nadia.ghoual@univ-relizane.dz
Google Scholar ; https://scholar.google.com/citations?user=F4du8HQAAAAJ&hl=ar