

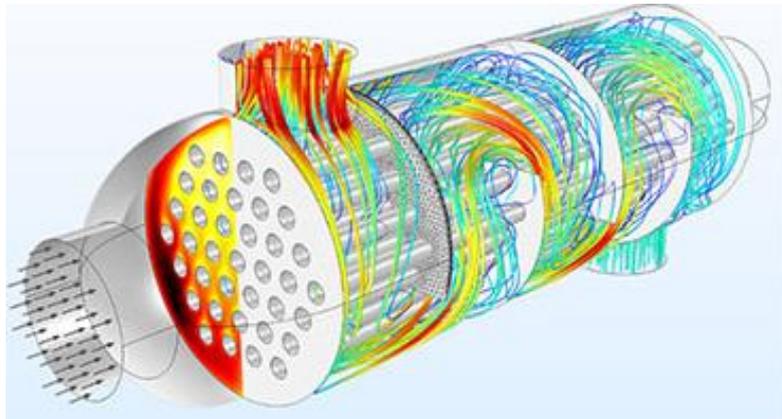
Université de Relizane
Faculté des Sciences et Technologie
Département de Physique



Polycopié
1^{er} année Master (LMD)

METHODE DES ELEMENTS FINIS COURS ET APPLICATIONS

Préparé par
Dr. FARES Redouane (M.C.A)



Dans ce cours de la méthode des éléments finis, on présente les principes de base de cette méthode. Ce cours est destiné aux étudiants en Master 1.

Contenu	
Chapitre 1 (Introduction)	1
1.1 Qu'est-ce que la méthode des éléments finis	1
1.2 Description de la MEF	1
1.3 Formulation des équations d'élément fini	2
1.3.1 Méthode Galerkin	2
1.3.2 Formulation variationnelle	5
Chapitre 2 (Équations Élément Fini pour Transfert de Chaleur)	8
2.1. Déclaration du problème	9
2.2. Discrétisation des équations de transfert de Chaleur par élément Fini	10
2.3. Différents types de problèmes	11
Chapitre 3 (MEF pour les Problèmes de Mécanique du Solide)	12
3.1. Déclaration du problème	12
3.2. Les équations d'élément Fini	13
3.3. Assemblage de l'équation du système global	15
Chapitre 4 (Fini Éléments)	18
4.1. Élément triangulaire Bidimensionnel	18
4.2. Éléments Bidimensionnel iso-paramétrique	19
4.2.1. Fonctions de forme	19
4.2.2. Matrice déformation-déplacement	20
4.2.3. Propriétés des éléments	22
4.2.4. Intégration dans des éléments quadrilatéraux	22
4.2.5. Calcul des déformations et des contraintes	24
4.3. Éléments isoparamétriques tridimensionnels	26
4.3.1 Fonctions de formes	26
4.3.2 Matrice déformation-déplacement	27
4.3.3 Propriétés des éléments	28
4.3.4 Calcul efficace de la matrice de rigidité	29
4.3.5 Intégration de la matrice de rigidité	30
4.3.6 Calcul des déformations et des contraintes	30
4.3.7 Extrapolation des déformations et contraintes	30
Chapitre 5 (Discrétisation)	32
5.1 Modèle discret du problème	32
5.2 Génération de maillage	33
5.2.1 Générateurs de maillage	33
5.2.2 Technique de cartographie (Mapping technique)	33
5.2.3 Triangulation de Delaunay	33
Chapitre 6 (Assemblage)	35
6.1 Assemblage et solution	36
6.2 Algorithme de démontage	36
6.3 Assemblage	36
6.3.1 Algorithme d'assemblage pour les vecteurs	37
6.3.2 Algorithme d'assemblage pour les matrices	37
6.4 Conditions aux limites de déplacement	37
6.4.1 Spécification explicite du déplacement BC	38
6.4.2 Méthode des grands nombres	38
6.5 Solution des équations aux éléments finis	39
6.5.1 Méthodes de résolution	40
6.5.2 Méthode LDU directe avec matrice de profil	40

Chapitre 1

Introduction

1.1 Qu'est-ce que la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis (FEM) est une technique numérique pour résoudre des problèmes qui sont décrits par des équations aux dérivées partielles ou qui peuvent être formulés comme une minimisation fonctionnelle. Un domaine d'intérêt est représenté comme un assemblage d'éléments finis. Les fonctions d'approximation en éléments finis sont déterminées en termes de valeurs nodales d'un champ physique recherché. Un problème physique continu est transformé en un problème d'éléments finis discrétisé avec des valeurs nodales inconnues. Pour un problème linéaire, un système d'équations algébriques linéaires doit être résolu. Les valeurs à l'intérieur des éléments finis peuvent être récupérées à l'aide de valeurs nodales.

Deux caractéristiques du FEM méritent d'être mentionnées :

- 1) L'approximation par morceaux des champs physiques sur les éléments finis fournit une bonne précision même avec des fonctions d'approximation simples (en augmentant le nombre d'éléments, nous pouvons atteindre n'importe quelle précision).
- 2) La localité d'approximation conduit à des systèmes d'équations creux pour un problème discrétisé. Cela aide à résoudre des problèmes avec un très grand nombre d'inconnues nodales.

1.2 Description de la MEF

Pour résumer le fonctionnement de la méthode des éléments finis, nous énumérons les principales étapes de la méthode des éléments finis.

1. *Discrétiser le continuum.* La première étape consiste à diviser une région de solution en éléments finis. L'élément fini engendré est typiquement généré par un programme préprocesseur. La description consiste de plusieurs tableaux principale (les coordonnées nodales et les connectivités des éléments).
2. *Sélection des fonctions d'interpolation.* Les fonctions d'interpolation sont utilisées pour interpoler les variables sur l'élément. Souvent, les polynômes sont sélectionnés comme fonctions d'interpolation. Le degré du polynôme dépend aux nombres de nœuds attribué à l'élément.
3. *Recherche des propriétés de l'élément.* L'équation matricielle pour l'élément fini doit être établie qui relie les valeurs nodales de la fonction inconnue à d'autres paramètres. Pour cette tâche différente approches peut être utilisé; le plus pratique sommes: l'approche variationnel et la méthode de Galerkin.
4. *Assemblage des équations des éléments.* Pour trouver le système d'équation global pour toute la solution, nous devons assembler toutes les équations élémentaires. En d'autres termes, nous devons combiner les équations locales d'élément pour tous les éléments utilisés pour la discrétisation. Les connectivités des éléments sont utilisées pour l'assemblage traité. Avant l'exécution des calculs, les conditions aux limites (qui ne sont pas prises en compte dans les équations des éléments) doivent être imposées.

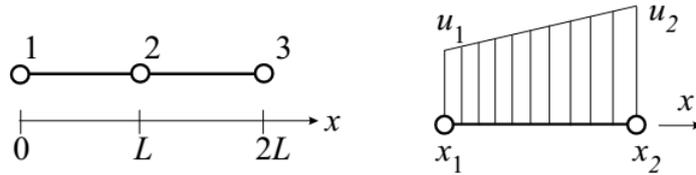


Fig 1.1 : Deux éléments linéaires unidimensionnels et une fonction d'interpolation à l'intérieur de l'élément.

5. *Résoudre l'équation du système global.* L'équation global du système est typiquement symétrique et définie positive. Des méthodes directes et itératives peuvent être utilisées pour la solution.

6. *Calcule des résultats supplémentaires.* Dans de nombreux cas, nous pouvons calculer des paramètres supplémentaires.

1.3 Formulation des équations d'élément fini

Plusieurs approches peuvent être utilisées pour transformer la formulation physique du problème en son analogue discret par élément fini. Si la formulation physique du problème est connue sous le nom d'équation différentielle, alors la méthode la plus populaire de sa formulation par éléments finis est la *méthode Galerkin*. Si le problème physique peut être formulé comme la minimisation d'une *formulation fonctionnelle puis variationnelle* des équations aux éléments finis est généralement utilisée.

Méthode Galerkin

Nous allons utiliser l'exemple unidimensionnel pour l'explication de la formulation élément fini en utilisant la méthode Galerkin. Supposant que nous avons besoin de résoudre numériquement l'équation différentiel suivante:

$$a \frac{d^2 u}{dx^2} + b = 0, \quad 0 \leq x \leq 2L \quad (1.1)$$

Avec les conditions aux limites suivantes

$$\begin{aligned} u|_{x=0} &= 0 \\ a \frac{du}{dx} |_{x=2L} &= R \end{aligned} \quad (1.2)$$

Où u est une solution inconnue. Nous allons résoudre le problème en utilisant deux éléments fini unidimensionnels, comme indiquée dans Figure. 1.1.

D'abord, considérons un élément fini présenté à droite de la figure. L'élément à deux nœuds et l'approximation de la fonction $u(x)$ peut se faire comme suit :

$$\begin{aligned}
u &= N_1 u_1 + N_2 u_2 = [N]\{u\} \\
[N] &= [N_1 \quad N_2] \\
\{u\} &= \{u_1 \quad u_2\}
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Où N_i sont appelées *fonctions de formes*

$$\begin{aligned}
N_1 &= 1 - \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \\
N_2 &= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Lequel sont utilisées pour l'interpolation de $u(x)$ en utilisant ses valeurs nodal. Les valeurs Nodales u_1 et u_2 sont inconnues, ou ils devraient être déterminés par la discrétisation global de l'équation du système.

Après avoir remplacé u exprimé par ses valeurs nodales et les fonctions de formes, dans l'équation différentielle, nous aurons la formulation approximative suivante:

$$a \frac{d^2}{dx^2} [N]\{u\} + b = \psi \tag{1.5}$$

Où ψ est un résidu non nul en raison de la représentation approximative d'une fonction à l'intérieur d'un élément fini. La méthode Galerkin fournit un résiduel minimiser en multipliant les termes de l'équation (1.5) par les fonctions de forme, en intégrant dans l'élément:

$$\int_{x_1}^{x_2} [N]^T a \frac{d^2}{dx^2} [N]\{u\} dx + \int_{x_1}^{x_2} [N]^T b dx = 0 \tag{1.6}$$

Utilisation de l'intégration par partie permet d'avoir une formulation discrète de l'équation différentielle pour l'élément fini:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{dN}{dx} \right]^T a \left[\frac{dN}{dx} \right] dx \{u\} - \int_{x_1}^{x_2} [N]^T b dx - \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right\} a \frac{du}{dx} \Big|_{x=x_2} + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\} a \frac{du}{dx} \Big|_{x=x_1} = 0 \tag{1.7}$$

D'habitude tel relation pour un élément fini est présentée comme suite:

$$\begin{aligned}
[k]\{u\} &= \{f\} \\
[k] &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{dN}{dx} \right]^T a \left[\frac{dN}{dx} \right] dx \\
\{f\} &= \int_{x_1}^{x_2} [N]^T b dx + \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right\} a \frac{du}{dx} \Big|_{x=x_2} - \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\} a \frac{du}{dx} \Big|_{x=x_1}
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Dans la mécanique des solide $[k]$ est appelé *matrice de raideur* et F est appelé *vecteur de charge*. Dans le Cas de deux éléments fini de longueur L , les matrices de raideur et de vecteurs de charges peut être calculé comme suite:

$$\begin{aligned}
[k_1] = [k_2] &= \frac{a}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
\{f_1\} &= \frac{bL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \{f_2\} = \frac{bL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ R \end{Bmatrix}
\end{aligned}
\tag{1.9}$$

Les relations ci-dessus fournissent des équations d'éléments finis pour les deux éléments finis séparés. L'équation globale du système pour le domaine avec 2 éléments et 3 nœuds peut être obtenue par un Assemblée des équations des éléments. Dans notre cas simple, il est clair que les éléments interagissent les uns avec les autres au nœud avec le nœud numéro 2. L'assemblage global des équations du système est:

$$\frac{a}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{bL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{Bmatrix}
\tag{1.10}$$

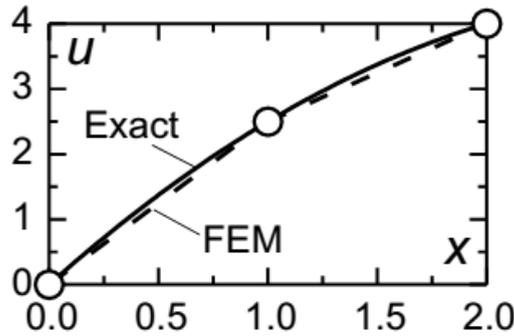


Fig 1.2 : Comparaison de la solution élément fini et la solution exact.

Après application de la condition initial $u(x=0)=0$ l'apparence final de l'équation global du système est:

$$\frac{a}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{bL}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{Bmatrix}
\tag{1.11}$$

Les valeurs Nodal u_i sont obtenues comme sommes des résultats de la solution de système d'équation algébrique linéaire. L'évaluation de u en tout point à l'intérieur d'un élément fini peut être calculée à l'aide des fonctions de forme. La solution élément fini de l'équation différentiel est montrée dans Figure. 1.2 pour $a = 1, b = 1, L = 1$ et $R = 1$.

La solution exacte est une fonction quadratique. La solution par éléments finis avec l'utilisation de l'élément le plus simple est par morceaux linéaire. Pour une solution élément fini précis peut être obtenu en augmentant le nombre des éléments ou alors avec l'utilisation d'éléments avec suite compliqué des fonctions de formes. Notant que la méthode des éléments finis fournit des valeurs exactes de u (juste pour ce problème particulier). La MEF avec des fonctions de forme linéaires produisent des valeurs nodales exactes si la solution recherchée est quadratique.

Formulation variationnelle

L'équation différentielle

$$\begin{aligned} a \frac{d^2 u}{dx^2} + b &= 0, & 0 \leq x \leq 2L \\ u|_{x=0} &= 0 \\ a \frac{du}{dx}|_{x=2L} &= R \end{aligned} \quad (1.12)$$

avec $a = EA$ a la signification physique suivante en mécanique des solides. Il décrit la tension d'un bar unidimensionnel avec une surface A transversale de Matériel ou le module d'élasticité E et soumis à une charge b distribué et une charge concentré R à son extrémité droite comme montré dans Figure 1.3.

Le problème peut être formulé en termes suivantes pour minimiser le potentiel d'énergie fonctionnelle Π :

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_L \frac{1}{2} a \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx - \int_L b u dx - R u|_{x=2L} \\ u|_{x=0} &= 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

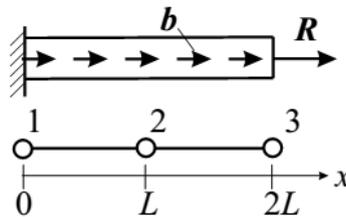


Fig 1.3 : Tension d'une bar unidimensionnel soumis à une charge distribué et une charge concentré.

En utilisant représentation de $\{u\}$ avec les fonctions de formes (1.3)-(1.4) nous pouvons évaluer l'énergie potentielle pour le deuxième élément fini comme:

$$\begin{aligned} \Pi_e &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} a \{u\}^T \left[\frac{dN}{dx} \right]^T \left[\frac{dN}{dx} \right] \{u\} dx \\ &\quad - \int_{x_1}^{x_2} \{u\}^T [N]^T b dx - \{u\}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ R \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (1.14)$$

La condition pour minimiser Π est:

$$\delta \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial u_1} \delta u_1 + \dots + \frac{\partial \Pi}{\partial u_n} \delta u_n = 0 \quad (1.15)$$

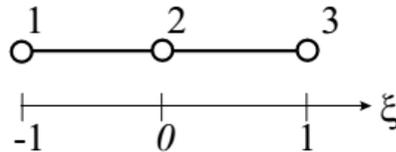
Ainsi que (1.15) est équivalent à

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_i} = 0, \quad i = 1 \dots n \quad (1.16)$$

Il est facile à vérifier que la différenciation de Π avec u_i respecté donne l'élément fini et coïncide avec l'équation obtenu par la méthode de Galerkin:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{dN}{dx} \right]^T EA \left[\frac{dN}{dx} \right] dx \{u\} - \int_{x_1}^{x_2} [N]^T b dx - \begin{Bmatrix} 0 \\ R \end{Bmatrix} = 0 \quad (1.17)$$

Exemple. Donner les fonctions de formes pour l'élément quadratique unidimensionnel avec Trois nœuds. Utiliser le système de coordonnées local $-1 \leq \xi \leq 1$.



La solution. Avec les fonctions de formes, tout domaine à l'intérieur de élément est présenté comme suite:

$$u(\xi) = \sum N_i u_i, \quad i = 1, 2, 3$$

Aux nœuds l'approximation d'une fonction devraient être égal à sa valeur nodal:

$$u(-1) = u_1$$

$$u(0) = u_2$$

$$u(1) = u_3$$

Depuis l'élément a Trois nœuds les fonctions de formes peut être un polynômes quadratique (avec Trois coefficient). La fonction de forme N_1 peut être écrit comme:

$$N_1 = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \xi^2$$

Les coefficients inconnus α_i sont définis à partir du système d'équations suivant :

$$N_1(-1) = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 1$$

$$N_1(0) = \alpha_1 = 0$$

$$N_1(1) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

Les solutions sont: $\alpha_1=0$, $\alpha_2 = -1/2$, $\alpha_3 = 1/2$. Ainsi le façonner une fonction N_1 est égal à:

$$N_1 = -\frac{1}{2}\xi(1 - \xi)$$

De la même manière il est possible d'obtenir les fonctions de formes N_2 et N_3 :

$$N_2 = 1 - \xi^2$$

$$N_3 = \frac{1}{2}\xi(1 + \xi)$$

Chapitre 2

Équations Élément Fini pour Transfert de Chaleur

2.1. Déclaration du problème

Considérant un corps isotrope avec une température dépendante. L'équation de base de transfert de chaleur est donnée comme suite:

$$-\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) + Q = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.1)$$

Où q_x , q_y et q_z sont des composants du flux de chaleur à travers la surface unitaire ;

$Q=Q(x, y, z, t)$ le taux de chaleur générer par unité de volume ; ρ est la densité du matériau ; c est la capacité calorifique ; T est la température et t est le temps. Selon la loi de Fourier les Composants de flux de Chaleurs peut être exprimé comme suit :

$$\begin{aligned} q_x &= -k \frac{\partial T}{\partial x} \\ q_y &= -k \frac{\partial T}{\partial y} \\ q_z &= -k \frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Où k est le coefficient conductivité thermique. Substitution des relations de Fourier donnent les équations de transfert de chaleur:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.3)$$

Les conditions de frontière peut être assumé comme suite:

1. Température Spécifié

$$T_s = T(x, y, z, t) \text{ on } S_1$$

2. Flux de chaleur Spécifié

$$q_x n_x + q_y n_y + q_z n_z = -q_s \text{ on } S_2$$

3. les conditions aux limites de la Convection

$$q_x n_x + q_y n_y + q_z n_z = h(T_s - T_e) \text{ on } S_3$$

Où h est le coefficient de convection, T_s est une température de surface inconnue et T_e est Température environnementale inconnue.

4. Radiation

$$q_x n_x + q_y n_y + q_z n_z = \sigma \varepsilon T_s^4 - \alpha q_r \text{ on } S_4$$

où σ est la constante de Stefan-Boltzmann ; ε est le coefficient d'émission surfacique ; α est la coefficient d'absorption surfacique absorbée et q_r est le flux de chaleur entrant par unité surface.

Pour les problèmes transitoires, il est nécessaire à spécifier une Température au temps $t=0$:

$$T(x, y, z, 0) = T_0(x, y, z) \quad (2.4)$$

2.2. Discrétisation des équations de transfert de Chaleur par élément Fini

Un domaine V est divisé en éléments finis connectés aux nœuds. Nous allons écrire toutes les relations pour un élément fini. Les équations globales pour le domaine peuvent être assemblées à partir d'équations d'éléments finis en utilisant la connectivité.

Les fonctions de formes N_i sont utilisés pour l'interpolation de température à l'intérieur un fini élément:

$$\begin{aligned} T &= [N]\{T\} \\ [N] &= [N_1 \quad N_2 \quad \dots] \\ \{T\} &= \{ T_1 \quad T_2 \quad \dots \} \end{aligned} \quad (2.5)$$

La différentiel des équations d'interpolation de la Température donnent les relations l'interpolation Suivante pour la température dégradés :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial T / \partial x \\ \partial T / \partial y \\ \partial T / \partial z \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} \partial N_1 / \partial x & \partial N_2 / \partial x & \dots \\ \partial N_1 / \partial y & \partial N_2 / \partial y & \dots \\ \partial N_1 / \partial z & \partial N_2 / \partial z & \dots \end{array} \right] \{T\} = [B]\{T\} \quad (2.6)$$

Ici T est une vecteur de températures aux nœuds ; $[N]$ est une matrice des fonctions de formes et $[B]$ est une matrice pour les gradient d'interpolation de température.

En utilisant la méthode de Galerkin, nous pouvons récrire l'équation basique de transfert de chaleur sous la forme suivante:

$$\int_V \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} - Q + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \right) N_i dV = 0 \quad (2.7)$$

Appliquant le théorème de divergence au trois premier termes, nous arrivons aux relations suivantes:

$$\begin{aligned}
& \int_V \rho c \frac{\partial T}{\partial t} N_i dV - \int_V \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \quad \frac{\partial N_i}{\partial y} \quad \frac{\partial N_i}{\partial z} \right] \{q\} dV \\
& = \int_V Q N_i dV - \int_S \{q\}^T \{n\} N_i dS \\
& \{q\}^T = [q_x \quad q_y \quad q_z] \\
& \{n\}^T = [n_x \quad n_y \quad n_z]
\end{aligned} \tag{2.8}$$

où $\{n\}$ est la normal sur la surface du corps. Après insertion des conditions initiales et aux limites dans l'équation (2.8), les équations discrétisés sont comme suites :

$$\begin{aligned}
& \int_V \rho c \frac{\partial T}{\partial t} N_i dV - \int_V \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \quad \frac{\partial N_i}{\partial y} \quad \frac{\partial N_i}{\partial z} \right] \{q\} dV \\
& = \int_V Q N_i dV - \int_{S_1} \{q\}^T \{n\} N_i dS \\
& + \int_{S_2} q_s N_i dS - \int_{S_3} h(T - T_e) N_i dS - \int_{S_4} (\sigma \varepsilon T^4 - \alpha q_r) N_i dS
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Nous pouvons écrire comme ça

$$\{q\} = -k[B]\{T\} \tag{2.10}$$

Les équations des éléments finis discrétisées pour les problèmes de transfert de chaleur ont les formulations finales suivantes:

$$\begin{aligned}
& [C]\{\dot{T}\} + ([K_c] + [K_h] + [K_r])\{T\} \\
& = \{R_T\} + \{R_Q\} + \{R_q\} + \{R_h\} + \{R_r\}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}
[C] &= \int_V \rho c [N]^T [N] dV \\
[K_c] &= \int_V k [B]^T [B] dV \\
[K_h] &= \int_{S_3} h [N]^T [N] dS \\
[K_r] \{T\} &= \int_{S_4} \sigma \varepsilon T^4 [N] dS \\
[R_T] &= - \int_{S_1} \{q\}^T \{n\} [N]^T dS \\
[R_Q] &= \int_V Q [N]^T dV \\
[R_q] &= - \int_{S_2} q_s [N]^T dS \\
[R_h] &= - \int_{S_3} h T_e [N]^T dS \\
[R_r] &= - \int_{S_4} \alpha q_r [N]^T dS
\end{aligned} \tag{2.12}$$

2.3. Différents types de problèmes

Des équations pour différents types de problèmes peuvent être déduites de l'équation générale ci-dessus :

Problème linéaire stationnaire

$$([K_c] + [K_h])\{T\} = \{R_Q\} + \{R_q\} + \{R_h\} \quad (2.13)$$

Problème nonlinéaire stationnaire

$$\begin{aligned} & ([K_c] + [K_h] + [K_r])\{T\} \\ & = \{R_Q(T)\} + \{R_q(T)\} + \{R_h(T)\} + \{R_r(T)\} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Problème linéaire transitoire

$$\begin{aligned} & [C]\{\dot{T}(t)\} + ([K_c] + [K_h(t)])\{T(t)\} \\ & = \{R_Q(t)\} + \{R_q(t)\} + \{R_h(t)\} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Problème non linéaire transitoire

$$\begin{aligned} & [C(T)]\{\dot{T}\} + ([K_c(T)] + [K_h(T, t)] + [K_r(T)])\{T\} \\ & = \{R_Q(T, t)\} + \{R_q(T, t)\} + \{R_h(T, t)\} + \{R_r(T, t)\} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Chapitre 3

MEF pour les Problèmes de Mécanique du Solide

3.1. Déclaration du problème

Considérons un corps élastique tridimensionnel soumis à des forces de surface et de corps et à la température domaine. De plus, les déplacements sont spécifiés sur certaines surfaces. Pour une géométrie donnée du corps, charges appliquées, conditions aux limites de déplacement, champ de température et loi contrainte-déformation du matériau, il est nécessaire pour déterminer le champ de déplacement du corps. Les déformations et contraintes correspondantes sont aussi intéressées.

Le déplacements sur coordonner axes x , y et z sommes défini par le vecteur déplacement $\{u\}$:

$$\{u\} = \{u \ v \ w\} \quad (3.1)$$

Six composants de déformation différents peuvent être placés dans le vecteur de déformation $\{\varepsilon\}$:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}\} \quad (3.2)$$

Pour les petites déformations, la relation entre les déformations et les déplacements est :

$$\{\varepsilon\} = [D] \{u\} \quad (3.3)$$

où $[D]$ est l'opérateur de la matrice différentielle:

$$[D] = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Six composants de stress différents forment le vecteur de stress $\{\sigma\}$:

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}\} \quad (3.5)$$

Qui sont liées aux déformations des corps élastiques par la loi de Hook :

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= [E]\{\varepsilon^e\} = [E](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon^t\}) \\ \{\varepsilon^t\} &= \{\alpha T \ \alpha T \ \alpha T \ 0 \ 0 \ 0\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ici $\{\varepsilon^e\}$ est la partie élastique des déformations ; $\{\varepsilon^t\}$ est la partie thermique des déformations ; α est le coefficient d'expansion thermique ; T est la Température. La matrice d'élasticité $[E]$ a l'apparence Suivante:

$$[E] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

où λ et μ sont des constantes élastiques de Lamé qui peuvent être exprimées par le module d'élasticité E et Coefficient de Poisson ν :

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \\ \mu &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Le but de la solution par éléments finis du problème élastique est de trouver un tel champ de déplacement qui fournit un minimum à la fonctionnelle de l'énergie potentielle totale Π :

$$\Pi = \int_V \frac{1}{2} \{\varepsilon^e\}^T \{\sigma\} dv - \int_V \{u\}^T \{p^V\} dV - \int_S \{u\}^T \{p^S\} dS \quad (3.9)$$

Ici $\{p^V\} = \{p_x^V \ p_y^V \ p_z^V\}$ est le vecteur de la force corporelle et $\{p^S\} = \{p_x^S \ p_y^S \ p_z^S\}$ le vecteur de force superficielle. Les déplacements prescrits sont spécifiés sur la partie de la surface du corps où les forces de surface sont absentes.

Les conditions aux limites de déplacement ne sont pas présentes dans la fonctionnelle de Π . Pour cette raison, les conditions aux limites de déplacement doivent être mises en œuvre après l'assemblage des équations aux éléments finis.

3.2. Les équations d'élément Fini

Considérons un élément fini tridimensionnel abstrait ayant le vecteur des déplacements nodaux $\{q\}$:

$$\{q\} = \{u_1 \ v_1 \ w_1 \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ \dots\} \quad (3.10)$$

Les déplacements en un point à l'intérieur d'un élément fini $\{u\}$ peuvent être déterminés à l'aide des déplacements nodaux $\{q\}$ et des fonctions de forme N_i :

$$\begin{aligned}
u &= \sum N_i u_i \\
v &= \sum N_i v_i \\
w &= \sum N_i w_i
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Ces relations peuvent être réécrites sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{aligned}
\{u\} &= [N]\{q\} \\
[N] &= \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & \dots \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Les déformations peuvent également être déterminées par des déplacements aux points nodaux :

$$\begin{aligned}
\{\varepsilon\} &= [B]\{q\} \\
[B] &= [D][N] = [B_1 \ B_2 \ B_3 \ \dots]
\end{aligned} \tag{3.13}$$

La matrice [B] est appelée matrice des déplacements différentielles. Il peut être obtenu par les déplacements différentiels exprimés par des fonctions de forme et des déplacements nodaux :

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial N_i / \partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial N_i / \partial z \\ \partial N_i / \partial y & \partial N_i / \partial x & 0 \\ 0 & \partial N_i / \partial z & \partial N_i / \partial y \\ \partial N_i / \partial z & 0 & \partial N_i / \partial x \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

Maintenant, en utilisant les relations pour les contraintes et les déformations, nous sommes en mesure d'exprimer l'énergie potentielle totale à travers les déplacements nodaux :

$$\begin{aligned}
\Pi &= \int_V \frac{1}{2} ([B]\{q\} - \{\varepsilon^t\})^T [E] ([B]\{q\} - \{\varepsilon^t\}) dV \\
&\quad - \int_V ([N]\{q\})^T \{p^V\} dV - \int_S ([N]\{q\})^T \{p^S\} dS
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Les déplacements nodaux $\{q\}$ qui correspondent au minimum de la fonctionnelle Π sont déterminés par les conditions:

$$\left\{ \frac{\partial \Pi}{\partial q} \right\} = 0 \tag{3.16}$$

La différenciation de Π par rapport aux déplacements nodaux $\{q\}$ produit les équations d'équilibre suivantes pour un élément fini :

$$\begin{aligned}
&\int_V [B]^T [E] [B] dV \{q\} - \int_V [B]^T [E] \{\varepsilon^t\} dV \\
&\quad - \int_V [N]^T \{p^V\} dV - \int_S [N]^T \{p^S\} dS = 0
\end{aligned} \tag{3.17}$$

qui se présente généralement sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 [k]\{q\} &= \{f\} \\
 \{f\} &= \{p\} + \{h\} \\
 [k] &= \int_V [B]^T [E] [B] dV \\
 \{p\} &= \int_V [N]^T \{p^V\} dV + \int_S [N]^T \{p^S\} dS \\
 \{h\} &= \int_V [B]^T [E] \{\varepsilon^t\} dV
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Ici $[k]$ est la matrice de rigidité de l'élément ; $\{f\}$ est le vecteur de charge ; $\{p\}$ est le vecteur des forces réelles et $\{h\}$ est le vecteur thermique qui représente les forces fictives pour modéliser la dilatation thermique.

3.3. Assemblage de l'équation du système global

Le but de l'assemblage est de former le système d'équation global

$$[K]\{Q\} = \{F\} \tag{3.19}$$

Utilisant les équations d'éléments

$$[k_i]\{q_i\} = \{f_i\} \tag{3.20}$$

Ici $[k_i]$, $\{q_i\}$ et $\{f_i\}$ sont la matrice de rigidité, le vecteur de déplacement et le vecteur de charge du i ème élément fini; $[K]$, $\{Q\}$ et $\{F\}$ sont la matrice de rigidité globale, le vecteur de déplacement et le vecteur de charge.

Afin de dériver un algorithme d'assemblage, présentons l'énergie potentielle totale pour le corps comme une somme des énergies potentielles des éléments π_i :

$$\Pi = \sum \pi_i = \sum \frac{1}{2} \{q_i\}^T [k_i] \{q_i\} - \sum \{q_i\}^T \{f_i\} + \sum E_i^0 \tag{3.21}$$

où E^0 est la fraction de énergie potentielle en relation à libre dilatation thermique:

$$E_i^0 = \int_{V_i} \frac{1}{2} \{\varepsilon^t\}^T [E] \{\varepsilon^t\} dV \tag{3.22}$$

Introduisons les vecteurs suivants et une matrice où les vecteurs d'éléments et les matrices sont simplement placés :

$$\begin{aligned} \{Q_d\} &= \{\{q_1\} \{q_2\}\} \\ \{F_d\} &= \{\{f_1\} \{f_2\} \dots\} \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$[K_d] = \begin{bmatrix} [k_1] & 0 & 0 \\ 0 & [k_2] & 0 \\ 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Il est évident qu'il est facile de trouver la matrice $[A]$ telle que

$$\begin{aligned} \{Q_d\} &= [A]\{Q\} \\ \{F_d\} &= [A]\{F\} \end{aligned} \quad (3.25)$$

L'énergie potentielle totale du corps peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \{Q_d\}^T [K_d] \{Q_d\} - \{Q_d\}^T \{F_d\} + \sum E_i^0 \\ &= \frac{1}{2} \{Q\}^T [A]^T [K_d] [A] \{Q\} - \{Q\}^T [A]^T \{F_d\} + \sum E_i^0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

En utilisant la condition du minimum de l'énergie potentielle totale

$$\left\{ \frac{\partial \Pi}{\partial Q} \right\} = 0 \quad (3.27)$$

on arrive au système d'équation globale suivant :

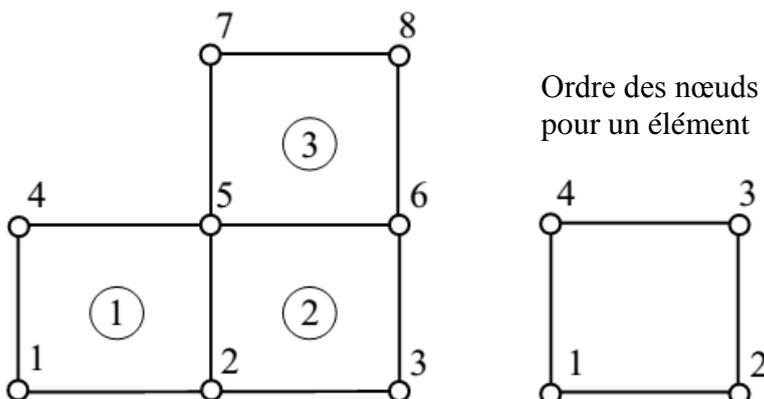
$$[A]^T [K_d] [A] \{Q\} - [A]^T \{F_d\} = 0 \quad (3.28)$$

La dernière équation montre que les algorithmes d'assemblage de la matrice de rigidité globale et le vecteur de charge globale :

$$\begin{aligned} [K] &= [A]^T [K_d] [A] \\ \{F\} &= [A]^T \{F_d\} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Ici $[A]$ est la matrice assurant la transformation de l'énumération globale à l'énumération locale. Fraction non nulle (unité) entrée dans la matrice $[A]$ est très faible. De ce fait, la matrice $[A]$ n'est jamais utilisée explicitement dans codes informatiques réels..

Exemple. Écrivez une matrice $[A]$, qui relie les numéros de nœuds locaux (élément) et globaux (domaine) pour le maillage éléments finis suivant :



La solution.

Pour rendre la représentation matricielle compacte, supposons que chaque nœud a un degré de liberté (notez que dans un problème de mécanique des solides en trois dimensions, il y a trois degrés de liberté à chaque nœud). La matrice [A] relie les valeurs élémentaires et nodales globales de la manière suivante :

$$\{Q_d\} = [A]\{Q\}$$

où {Q} est un vecteur global de valeurs nodales et {Qd} est un vecteur contenant des vecteurs d'éléments. Les la réécriture explicite de la relation ci-dessus se présente comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_5 \\ Q_4 \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} Q_2 \\ Q_3 \\ Q_6 \\ Q_5 \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} Q_5 \\ Q_6 \\ Q_8 \\ Q_7 \end{array} \right\} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{array} \right\}$$

Chapitre 4

Fini Éléments

4.1. Éléments triangulaire Bidimensionnel

L'élément fini triangulaire a été le premier élément fini proposé pour les problèmes continus. À cause de simplicité, il peut être utilisé comme introduction à d'autres éléments. Un élément fini triangulaire dans le système de coordonnées xy est représenté sur la figure 4.1. Puisque l'élément a trois nœuds, l'approximation linéaire de déplacements u et v est choisi :

$$\begin{aligned} u(x, y) &= N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 \\ v(x, y) &= N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 \\ N_i &= \alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y \end{aligned} \quad (4.1)$$

Les fonctions de forme $N_i(x, y)$ peuvent être déterminées à partir du système d'équations suivant :

$$u(x_i, y_i) = u_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.2)$$

Les fonctions de forme pour l'élément triangulaire peuvent être présentées comme suit :

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{2\Delta} (a_i + b_i x + c_i y) \\ a_i &= x_{i+1} y_{i+2} - x_{i+2} y_{i+1} \\ b_i &= y_{i+1} - y_{i+2} \\ c_i &= x_{i+2} - x_{i+1} \\ \Delta &= \frac{1}{2} (x_2 y_3 + x_3 y_1 + x_1 y_2 - x_2 y_1 - x_3 y_2 - x_1 y_3) \end{aligned} \quad (4.3)$$

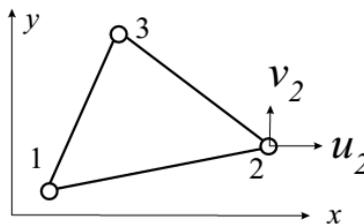


Figure 4.1 : L'élément fini triangulaire est l'élément bidimensionnel le plus simple.

où Δ est la surface de l'élément. La matrice $[B]$ d'interpolation des déformations à l'aide des déplacements nodaux est égale à :

$$[B] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$[E] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

où λ et μ sont des constantes de Lamé :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{1 - \nu^2}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Ici E est le module d'élasticité et ν est le coefficient de Poisson.

La matrice de rigidité pour l'élément triangulaire à trois nœuds peut être calculée comme suit :

$$[k] = \int_V [B]^T [E] [B] dV = [B]^T [E] [B] \Delta \quad (4.7)$$

Ici, il a été pris en compte que les deux matrices $[B]$ et $[E]$ ne dépendent pas des coordonnées. C'était supposé que l'élément a une épaisseur unitaire. Comme la matrice $[B]$ est constante à l'intérieur de l'élément, les déformations et les contraintes sont également constantes à l'intérieur de l'élément triangulaire.

4.2. Éléments Bidimensionnel iso-paramétrique

Les éléments finis iso-paramétriques sont basés sur la définition paramétrique des coordonnées et du déplacement les fonctions. Les mêmes fonctions de forme sont utilisées pour la spécification de la forme de l'élément et pour l'interpolation de le déplacement domaine.

4.2.1. Fonctions de forme

Les éléments finis iso-paramétriques bidimensionnels linéaires et quadratiques sont présentés à la Figure 4.2. Les fonctions de forme N_i sont définies en coordonnées locales ξ, η ($-1 \leq \xi, \eta \leq 1$). Les mêmes fonctions de forme sont utilisées pour les interpolations de déplacements et de coordonnées :

$$\begin{aligned} u &= \sum N_i u_i, & v &= \sum N_i v_i \\ x &= \sum N_i x_i, & y &= \sum N_i y_i \end{aligned} \quad (4.8)$$

où u, v sont des composantes de déplacement au point de coordonnées locales (ξ, η) ; u_i, v_i sont les valeurs de déplacement aux nœuds de l'élément fini ; x, y sont les coordonnées des points et x_i, y_i sont les coordonnées des nœuds des éléments. La forme matricielle des relations ci-dessus est la suivante :

$$\begin{aligned} \{u\} &= [N] \{q\} \\ \{u\} &= \{u \ v\} \\ \{q\} &= \{u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ \dots\} \end{aligned} \quad (4.9)$$

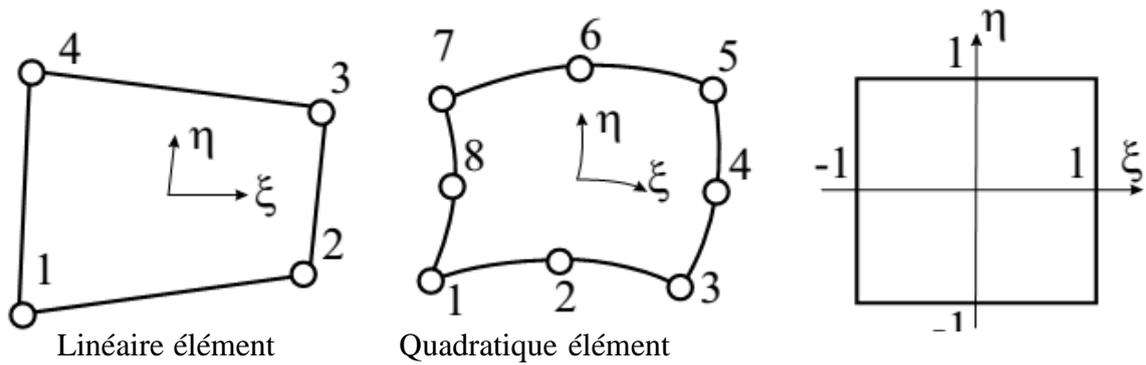


Figure 4.2 : Éléments finis linéaires et quadratiques et leur représentation dans le repère local.

$$\begin{aligned}
 \{x\} &= [N]\{x^e\} \\
 \{x\} &= \{x \ y\} \\
 \{x^e\} &= \{x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2 \ \dots\}
 \end{aligned}
 \tag{4.10}$$

où la matrice d'interpolation pour les valeurs nodales est :

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots \end{bmatrix}
 \tag{4.11}$$

Les fonctions de forme pour les éléments isoparamétriques bidimensionnels linéaires et quadratiques sont données par :

Élément linéaire (4 nœuds) :

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)
 \tag{4.12}$$

Élément quadratique (8 nœuds):

$$\begin{aligned}
 N_i &= \frac{1}{4}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0) - \frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 + \eta_0) \\
 &\quad - \frac{1}{4}(1 + \xi_0)(1 - \eta^2) \quad i = 1, 3, 5, 7 \\
 N_i &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta_0), \quad i = 2, 6 \\
 N_i &= \frac{1}{2}(1 + \xi_0)(1 - \eta^2), \quad i = 4, 8
 \end{aligned}
 \tag{4.13}$$

Dans les équations ci-dessus, la notation suivante est utilisée : $\xi_0 = \xi \xi_i$, $\eta_0 = \eta \eta_i$ où ξ_i , η_i sont les valeurs de coordonnées locales ξ , η aux nœuds.

4.2.2. Matrice déformation-déplacement

Pour le problème plan, le vecteur de déformation contient trois composantes :

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy}\} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right\} \quad (4.14)$$

La matrice déformation-déplacement utilisée pour calculer les déformations en tout point à l'intérieur de l'élément à l'aide des déplacements nodaux est :

$$[B] = [B_1 \ B_2 \ \dots]$$

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Alors que les fonctions de forme sont exprimées par les coordonnées locales ξ, η , la matrice déformation-déplacement contient des dérivées par rapport aux coordonnées globales x, y . Les dérivées peuvent être facilement converties d'un système de coordonnées à l'autre au moyen de la règle en chaîne de différenciation partielle :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

où $[J]$ est la matrice jacobienne. Les dérivées par rapport aux coordonnées globales sont calculées à l'aide de l'inverse de la matrice jacobienne:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

Les composantes de la matrice jacobienne sont calculées à l'aide des dérivées des fonctions de forme N_i par rapport aux coordonnées locales ξ, η et aux coordonnées globales des nœuds d'élément x_i, y_i :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i, & \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i, & \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{aligned} \quad (4.18)$$

Le déterminant de la matrice jacobienne $|J|$ est utilisé pour la transformation des intégrales du système de coordonnées global vers le système de coordonnées local :

$$dV = dx dy = |J| d\xi d\eta \quad (4.19)$$

4.2.3. Propriétés des éléments

Les matrices et vecteurs d'éléments sont calculés comme suit :

Matrice de rigidité

$$[k] = \int_V [B]^T [E] [B] dV \quad (4.20)$$

Vecteur de force (charges volumiques et surfaciques)

$$\{p\} = \int_V [N]^T \{p^V\} dV + \int_S [N]^T \{p^S\} dS \quad (4.21)$$

Vecteur thermique (forces fictives pour simuler la dilatation thermique)

$$\{h\} = \int_V [B]^T [E] \{\varepsilon^t\} dV \quad (4.22)$$

La matrice d'élasticité $[E]$ est donnée par la relation (4.5).

4.2.4. Intégration dans des éléments quadrilatéraux

L'intégration des expressions pour les matrices de rigidité et les vecteurs de charge ne peut pas être effectuée analytiquement pour le cas général des éléments isoparamétriques. Au lieu de cela, les matrices de rigidité et les vecteurs de charge sont généralement évalués numériquement à l'aide de la quadrature de Gauss sur les régions quadrilatérales. La formule de quadrature de Gauss pour l'intégrale de volume dans le cas bidimensionnel est de la forme :

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(\xi_i, \eta_j) w_i w_j \quad (4.23)$$

où ξ_i, η_j sont des abscisses et w_i sont des coefficients de pondération de la règle d'intégration de Gauss. Les abscisses et les poids de la quadrature de Gauss pour $n = 1, 2, 3$ sont donnés dans le tableau suivant:

Abscisses et poids de Gauss quadrature

n	ξ_i	w_i
1	0	2
2	$\mp 1/\sqrt{3}$	1
3	0 $\mp \sqrt{3/5}$	8/9 5/9

Pour calculer l'équivalent nodal de la charge de surface, l'intégrale de surface est remplacée par l'intégration linéaire le long du côté de l'élément. La fraction de la charge surfacique est évaluée comme suit :

$$\{p\} = \int_S [N]^T \{p^S\} dS = \int_{-1}^1 [N]^T \{p^S\} \frac{ds}{d\xi} d\xi \quad (4.24)$$

$$\frac{ds}{d\xi} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} \quad (4.25)$$

Ici s est une coordonnée globale le long du côté élément et ξ est une coordonnée locale le long du côté élément.

Si la charge de charge répartie est appliquée le long de la normale au côté de l'élément, comme illustré à la Fig. 4.3, l'équivalent nodal d'une telle charge est :

$$\{p\} = \int_S [N]^T p \begin{Bmatrix} \frac{dy}{ds} \\ -\frac{dx}{ds} \end{Bmatrix} \frac{ds}{d\xi} d\xi = \int_{-1}^1 [N]^T p \begin{Bmatrix} \frac{dy}{d\xi} \\ -\frac{dx}{d\xi} \end{Bmatrix} d\xi \quad (4.26)$$

Exemple. Calculez les équivalents nodaux d'une charge répartie d'intensité constante appliquée sur le côté d'un élément quadratique bidimensionnel :

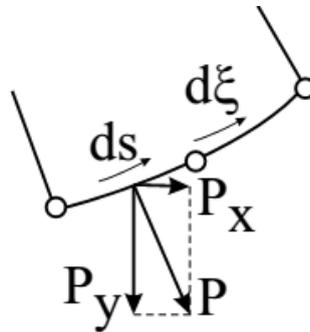
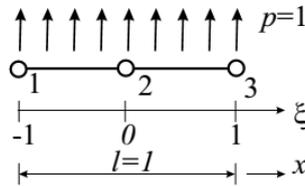


Figure 4.3 : Charge normale répartie sur un côté d'un élément quadratique.



La solution. L'équivalent nodal de la charge répartie est calculé comme suit :

$$\{p\} = \int_{-1}^1 [N]^T p \frac{dx}{d\xi} d\xi$$

ou

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} = \int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} p \frac{dx}{d\xi} d\xi, \quad \frac{dx}{d\xi} = \frac{1}{2}$$

Les fonctions de forme pour l'élément quadratique unidimensionnel sont :

$$N_1 = -\frac{1}{2}\xi(1 - \xi), \quad N_2 = 1 - \xi^2, \quad N_3 = \frac{1}{2}\xi(1 + \xi)$$

Les valeurs des forces nodales au nœud 1, 2 et 3 sont définies par intégration :

$$\begin{aligned} p_1 &= -\int_{-1}^1 \frac{1}{2}\xi(1 - \xi) \frac{1}{2} d\xi = \frac{1}{6} \\ p_2 &= \int_{-1}^1 (1 - \xi^2) \frac{1}{2} d\xi = \frac{2}{3} \\ p_3 &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2}\xi(1 + \xi) \frac{1}{2} d\xi = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

L'exemple montre que l'approche physique ne peut pas être utilisée pour l'estimation des équivalents nodaux d'une charge répartie. Cela fonctionne pour les éléments linéaires; cependant, cela ne fonctionne pas pour les éléments plus compliqués.

4.2.5. Calcul des déformations et des contraintes

Les déformations en tout point d'un élément sont déterminées à l'aide des relations de Cauchy (4.14) avec l'utilisation de la matrice de différenciation des déplacements (4.15) :

$$\{\varepsilon\} = [B]\{q\} \tag{4.27}$$

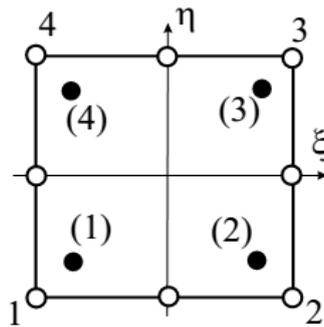


Figure 4.4 : Numérotation des points d'intégration et des sommets pour l'élément isoparamétrique à 8 nœuds.

Les contraintes sont calculées avec la loi de Hook :

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon^e\} = [E](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon^t\}) \tag{4.28}$$

où $\{ \varepsilon^t \}$ est le vecteur de dilatation thermique libre :

La précision des déformations et des contraintes dépend de manière significative de l'emplacement du point où elles sont calculées. La précision la plus élevée pour les gradients de déplacement se situe au centre géométrique pour l'élément linéaire et aux points d'intégration réduits 2×2 pour l'élément quadrilatère quadratique.

Pour les éléments quadratiques à 8 nœuds, les déformations et les contraintes ont la meilleure précision à 2×2 points d'intégration avec les coordonnées locales $\xi, \eta = \pm 1/\sqrt{3}$. Une manière possible de créer un champ de contraintes continu avec une précision raisonnable consiste à :

- 1) extrapoler les contraintes des points d'intégration réduits aux nœuds ;
- 2) faire la moyenne des contributions des éléments finis à tous les nœuds du modèle d'éléments finis. Stress ultérieurs peut être interpolés à partir de nœuds à l'aide de fonctions de forme quadratiques.

Considérons l'élément quadratique dans le système de coordonnées local ξ, η comme le montre la Fig. 4.4 où les points d'intégration sont numérotés comme (1)...(4); les nœuds d'angle ont les numéros 1...4. Pour l'extrapolation (à l'intérieur d'élément quadratique), nous allons utiliser des fonctions de forme linéaires. Sous forme matricielle, la relation d'extrapolation peut être présentée comme suit :

$$\{ \varepsilon^t \} = \{ \alpha T \quad \alpha T \quad 0 \} \quad (4.29)$$

$$f_i = L_{i(m)} f_{(m)} \quad (4.30)$$

où $f_{(m)}$ sont des valeurs de fonction connues aux points d'intégration réduits ; f_i sont les valeurs des fonctions aux nœuds des sommets et $L_{i(m)}$ est la matrice d'extrapolation symétrique

$$L_{i(m)} = \begin{bmatrix} A & B & C & B \\ & A & B & C \\ & & A & B \\ & & & A \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

$$A = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$B = -\frac{1}{2}$$

$$C = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

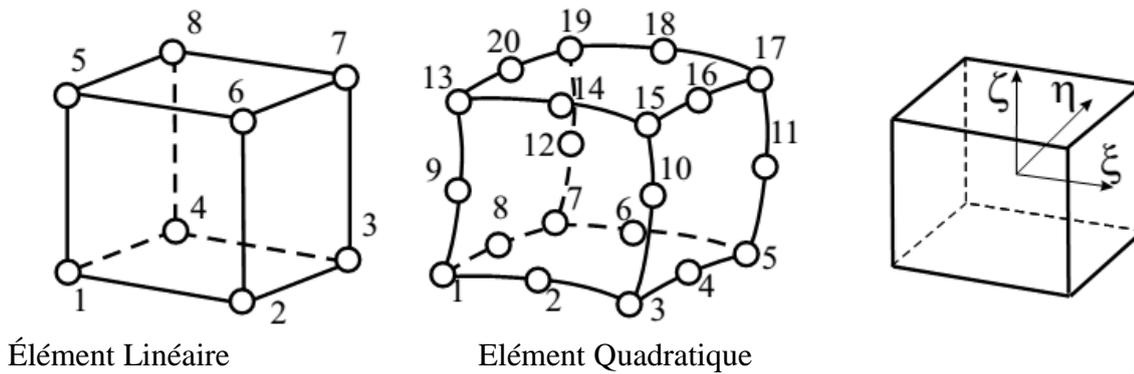


Figure 4.5 : Eléments finis tridimensionnels linéaires et quadratiques et leur représentation dans le repère local.

4.3 Éléments isoparamétriques tridimensionnels

4.3.1 Fonctions de formes

Les éléments isoparamétriques tridimensionnels linéaires hexaédriques (ou de type brique) à 8 nœuds et quadratiques à 20 nœuds sont représentés à la Fig. 4.5. Le terme "isoparamétrique" signifie que la géométrie et le champ de déplacement sont spécifiés sous forme paramétrique et sont interpolés avec les mêmes fonctions. Les fonctions de forme utilisées pour l'interpolation sont des polynômes des coordonnées locales ξ , η et ζ ($-1 \leq \xi, \eta, \zeta \leq 1$). Les coordonnées et les déplacements sont interpolés avec les mêmes fonctions de forme :

$$\begin{aligned} \{u\} &= [N]\{q\} \\ \{u\} &= \{u \ v \ w\} \\ \{q\} &= \{u_1 \ v_1 \ w_1 \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ \dots\} \end{aligned} \tag{4.32}$$

$$\begin{aligned} \{x\} &= [N]\{x^e\} \\ \{x\} &= \{x \ y \ z\} \\ \{x^e\} &= \{x_1 \ y_1 \ z_1 \ x_2 \ y_2 \ z_2 \ \dots\} \end{aligned} \tag{4.33}$$

Ici u, v, w sont les déplacements au point de coordonnées locales ξ, η, ζ ; u_i, v_i, w_i sont des valeurs de déplacement aux nœuds ; x, y, z sont les coordonnées des points et x_i, y_i, z_i sont les coordonnées des nœuds. La matrice de forme fonctions est :

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots \end{bmatrix} \tag{4.34}$$

Les fonctions de forme de l'élément linéaire sont égales à :

$$\begin{aligned}
N_i &= \frac{1}{8}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \varsigma_0) \\
\xi_0 &= \xi\xi_i, \quad \eta_0 = \eta\eta_i, \quad \varsigma_0 = \varsigma\varsigma_i
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Pour l'élément quadratique à 20 nœuds les fonctions de forme peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
N_i &= \frac{1}{8}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \varsigma_0)(\xi_0 + \eta_0 + \varsigma_0 - 2) \text{ vertices} \\
N_i &= \frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 + \eta_0)(1 + \varsigma_0), \quad i = 2, 6, 14, 18 \\
N_i &= \frac{1}{4}(1 - \eta^2)(1 + \xi_0)(1 + \varsigma_0), \quad i = 4, 8, 16, 20 \\
N_i &= \frac{1}{4}(1 - \varsigma^2)(1 + \xi_0)(1 + \eta_0), \quad i = 9, 10, 11, 12
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Dans les relations ci-dessus $\xi_i, \eta_i, \varsigma_i$ sont les valeurs des coordonnées locales ξ, η, ς aux nœuds.

4.3.2 Matrice déformation-déplacement

Le vecteur de déformation $\{\varepsilon\}$ contient six composantes différentes du tenseur de déformation :

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}\} \tag{4.37}$$

La matrice déformation-déplacement pour les éléments tridimensionnels a l'aspect suivant :

$$[B] = [D][N] = [B_1 \quad B_2 \quad B_3 \quad \dots] \tag{4.38}$$

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial N_i / \partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial N_i / \partial z \\ \partial N_i / \partial y & \partial N_i / \partial x & 0 \\ 0 & \partial N_i / \partial z & \partial N_i / \partial y \\ \partial N_i / \partial z & 0 & \partial N_i / \partial x \end{bmatrix} \tag{4.39}$$

Les dérivées des fonctions de forme par rapport aux coordonnées globales sont obtenues comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \partial N_i / \partial x \\ \partial N_i / \partial y \\ \partial N_i / \partial z \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \partial N_i / \partial \xi \\ \partial N_i / \partial \eta \\ \partial N_i / \partial \varsigma \end{Bmatrix} \tag{4.40}$$

où la matrice jacobienne a l'apparence :

$$[J] = \begin{bmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial y / \partial \xi & \partial z / \partial \xi \\ \partial x / \partial \eta & \partial y / \partial \eta & \partial z / \partial \eta \\ \partial x / \partial \varsigma & \partial y / \partial \varsigma & \partial z / \partial \varsigma \end{bmatrix} \tag{4.41}$$

Les dérivées partielles de x, y, z par rapport à ξ, η, ζ sont trouvées par différenciation des déplacements exprimés par des fonctions de forme et des valeurs de déplacement nodal :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i, & \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i, & \frac{\partial x}{\partial \zeta} &= \sum \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} x_i \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i, & \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i, & \frac{\partial y}{\partial \zeta} &= \sum \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} y_i \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} &= \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i, & \frac{\partial z}{\partial \eta} &= \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i, & \frac{\partial z}{\partial \zeta} &= \sum \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} z_i \end{aligned} \quad (4.42)$$

La transformation des intégrales du système de coordonnées global au système de coordonnées local est effectuée à l'aide du déterminant de la matrice jacobienne :

$$dV = dx dy dz = |J| d\xi d\eta d\zeta \quad (4.43)$$

4.3.3 Propriétés des éléments

L'équation d'équilibre de l'élément a la forme suivante :

$$\begin{aligned} [k]\{q\} &= \{f\} \\ \{f\} &= \{p\} + \{h\} \end{aligned} \quad (4.44)$$

Les matrices et vecteurs d'éléments sont :

Matrice de rigidité

$$[k] = \int_V [B]^T [E] [B] dV \quad (4.45)$$

Vecteur de force (charges volumiques et surfaciques)

$$\{p\} = \int_V [N]^T \{p^V\} dV + \int_S [N]^T \{p^S\} dS \quad (4.46)$$

Vecteur thermique (forces fictives pour simuler la dilatation thermique)

$$\{h\} = \int_V [B]^T [E] \{\varepsilon^t\} dV \quad (4.47)$$

La matrice d'élasticité [E] est :

$$[E] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

où λ et μ sont des constantes élastiques de Lamé qui peuvent être exprimées par le module d'élasticité E et le coefficient de Poisson ν :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (4.49)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

4.3.4 Calcul efficace de la matrice de rigidité

Le calcul de la matrice de rigidité des éléments par multiplication de trois matrices implique de nombreuses opérations arithmétiques avec des zéros. Après avoir effectué des multiplications sous forme fermée, les coefficients de la matrice de rigidité des éléments [k] peuvent être exprimés comme suit :

$$k_{ii}^{mn} = \int_V \left[\beta \frac{\partial N_m}{\partial x_i} \frac{\partial N_n}{\partial x_i} + \mu \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_{i+1}} \frac{\partial N_n}{\partial x_{i+1}} + \frac{\partial N_m}{\partial x_{i+2}} \frac{\partial N_n}{\partial x_{i+2}} \right) \right] dV$$

$$k_{ij}^{mn} = \int_V \left(\lambda \frac{\partial N_m}{\partial x_i} \frac{\partial N_n}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial N_m}{\partial x_j} \frac{\partial N_n}{\partial x_i} \right) dV \quad (4.50)$$

$$\beta = \lambda + 2\mu$$

Ici m, n sont des numéros de nœuds locaux ; i, j sont des indices liés aux axes de coordonnées (x1, x2, x3). La règle cyclique est utilisée dans l'équation ci-dessus si les indices de coordonnées deviennent supérieurs à 3

4.3.5 Intégration de la matrice de rigidité

L'intégration de la matrice de rigidité pour les éléments isoparamétriques tridimensionnels s'effectue dans le repère local ξ, η, ζ :

$$[k] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B(\xi, \eta, \varsigma)]^T [E] [B(\xi, \eta, \varsigma)] |J| d\xi d\eta d\varsigma \quad (4.51)$$

L'application à trois temps de la règle de quadrature de Gauss unidimensionnelle conduit à la procédure d'intégration numérique suivante :

$$\begin{aligned}
 k_{ii}^{mn} &= \int_V \left[\beta \frac{\partial N_m}{\partial x_i} \frac{\partial N_n}{\partial x_i} + \mu \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_{i+1}} \frac{\partial N_n}{\partial x_{i+1}} + \frac{\partial N_m}{\partial x_{i+2}} \frac{\partial N_n}{\partial x_{i+2}} \right) \right] dV \\
 k_{ij}^{mn} &= \int_V \left(\lambda \frac{\partial N_m}{\partial x_i} \frac{\partial N_n}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial N_m}{\partial x_j} \frac{\partial N_n}{\partial x_i} \right) dV \\
 \beta &= \lambda + 2\mu
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \varsigma) d\xi d\eta d\varsigma \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f(\xi_i, \eta_j, \varsigma_k) w_i w_j w_k
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

Habituellement, l'intégration $2 \times 2 \times 2$ est utilisée pour les éléments linéaires et l'intégration $3 \times 3 \times 3$ est appliquée à l'évaluation de la matrice de rigidité pour les éléments quadratiques. Pour une intégration plus efficace, il existe une règle spéciale de type Gauss à 14 points, qui fournit une précision d'intégration suffisante pour les éléments quadratiques tridimensionnels.

4.3.6 Calcul des déformations et des contraintes

Après avoir calculé les matrices d'éléments et les vecteurs, le processus d'assemblage est utilisé pour composer le système d'équation global. La solution du système d'équations globales fournit des déplacements aux nœuds du modèle d'éléments finis. En utilisant le désassemblage, le déplacement nodal pour chaque élément peut être obtenu.

Les déformations à l'intérieur d'un élément sont déterminées à l'aide de la matrice de différenciation des déplacements :

$$\{\varepsilon\} = [B]\{q\} \tag{4.53}$$

Les contraintes sont calculées avec la loi de Hook :

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon^e\} = [E](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon^t\}) \tag{4.54}$$

où $\{\varepsilon^t\}$ est le vecteur de dilatation thermique libre :

$$\{\varepsilon^t\} = \{\alpha T \ \alpha T \ \alpha T \ 0 \ 0 \ 0\} \tag{4.55}$$

Il convient de noter que les gradients de déplacement (et donc les déformations et les contraintes) ont une précision assez différente à différents points à l'intérieur des éléments finis. La précision la plus élevée pour les gradients de déplacement se situe au centre géométrique pour l'élément linéaire et aux points d'intégration réduits $2 \times 2 \times 2$ pour l'élément hexagonal quadratique.

4.3.7 Extrapolation des déformations et contraintes

Pour les éléments quadratiques, les dérivées de déplacement ont la meilleure précision à $2 \times 2 \times 2$ points d'intégration avec les coordonnées locales $\xi, \eta, \zeta = \pm 1/\sqrt{3}$. Afin de construire un champ continu de déformations ou de contraintes, il est nécessaire pour extrapoler les valeurs de résultat de $2 \times 2 \times 2$ points d'intégration aux sommets de l'élément à 20 nœuds (la numérotation des points d'intégration et des sommets est illustrée à la Fig. 4.6).

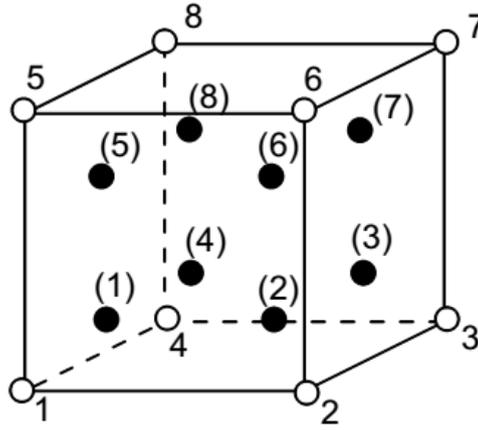


Figure 4.6 : Numérotation des points d'intégration et des sommets pour l'élément isoparamétrique à 20 nœuds.

Les résultats sont calculés à 8 points d'intégration, et une extrapolation trilinéaire dans la coordonnée locale le système ξ, η, ζ est utilisé :

$$f_i = L_{i(m)} f_{(m)} \quad (4.56)$$

où $f_{(m)}$ sont des valeurs de fonction connues aux points d'intégration réduits ; f_i sont les valeurs des fonctions aux nœuds des sommets et $L_{i(m)}$ est la matrice d'extrapolation symétrique :

$$L_{i(m)} = \begin{bmatrix} A & B & C & B & B & C & D & C \\ & A & B & C & C & B & C & D \\ & & A & B & D & C & B & C \\ & & & A & C & D & C & B \\ & & & & A & B & C & B \\ & & & & & A & B & C \\ & & & & & & A & B \\ & & & & & & & A \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

$$A = \frac{5 + \sqrt{3}}{4}, \quad B = -\frac{\sqrt{3} + 1}{4}$$

$$C = \frac{\sqrt{3} - 1}{4}, \quad D = \frac{5 - \sqrt{3}}{4}$$

Les contraintes sont extrapolées des points d'intégration à tous les nœuds des éléments. Les valeurs des nœuds médians peuvent être calculées comme une moyenne entre les valeurs de deux valeurs nodales de sommet. Ensuite, la moyenne des contributions des éléments finis voisins est effectuée pour tous les nœuds du modèle d'éléments finis. Faire la moyenne produit un champ continu de résultats secondaires spécifiés aux nœuds du modèle avec une variation quadratique à l'intérieur des éléments finis. Plus tard, les résultats peuvent être interpolés à n'importe quel point à l'intérieur de l'élément ou sur sa surface en utilisant des fonctions de forme quadratiques.

Chapitre 5

Discrétisation

5.1 Modèle discret du problème

Afin d'appliquer les procédures d'éléments finis, un modèle discret du problème doit être présenté dans la forme numérique. Une description typique du problème peut contenir :

- Paramètres scalaires (nombre de nœuds, nombre d'éléments, etc.) ;
- Propriétés matérielles ;
- Coordonnées des points nodaux ;
- Tableau de connectivité pour les éléments finis ;
- Tableaux de types d'éléments et de matériaux d'éléments ;
- Tableaux pour la description des conditions aux limites de déplacement ;
- Tableaux pour la description des charges de surface et concentrées ;

Champ de température.

Écrivons des informations numériques pour un problème simple décrit à la Fig. 5.1.

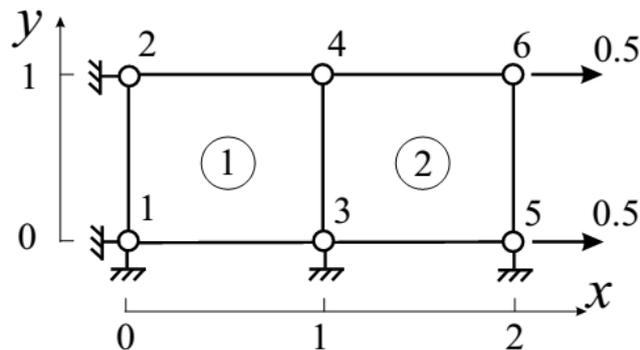


Figure 5.1 : Modèle discret composé de deux éléments finis.

Le modèle par éléments finis peut être décrit comme suit :

1. Paramètres scalaires

Nombre de nœuds = 6

Nombre d'éléments = 2

Nombre de contraintes = 5

Nombre de charges = 2

2. Propriétés des matériaux

Module d'élasticité = 2.0×10^8 MPa

Coefficient de Poisson = 0,3

3. Coordonnées du nœud (x1, y1, x2, y2 etc.)

1) 0 0 2) 0 1 3) 1 0 4) 1 1 5) 2 0 6) 2 1

4. Tableau de connectivité des éléments (sens antihoraire)

1) 1 3 4 2 2) 3 5 6 4

5. Contraintes (nœud, direction : x = 1 ; y = 2)

1 1 2 1 1 2 3 2 5 2

6. Forces nodales (nœud, direction, valeur)

5 1 0,5 6 1 0,5

Alors que pour un exemple simple comme celui démontré ci-dessus, le modèle d'éléments finis peut être codé à la main, ce n'est pas pratique pour les modèles réels. Divers générateurs de maillage automatique sont utilisés pour créer des modèles d'éléments finis pour les formes complexes.

5.2 Génération de maillage

5.2.1 Générateurs de maillage

Les modèles d'éléments finis pour l'analyse pratique peuvent contenir des dizaines de milliers voire des centaines de milliers de degrés de liberté. Il n'est pas possible de créer de tels maillages manuellement. Le générateur de maillage est un outil logiciel, qui divise le domaine de la solution en plusieurs sous-domaines – éléments finis. Les générateurs de maillage peuvent être de différents types.

Pour les problèmes *bidimensionnels*, nous voulons mentionner deux types : les générateurs de maillage par blocs et les triangulateurs..

Les *générateurs de maillage de blocs* nécessitent une forme initiale de partitionnement brut. Le domaine de la solution est partitionné en un nombre relativement petit de blocs. Chaque bloc doit avoir une forme standard.

Le maillage à l'intérieur du bloc est généralement généré par la technique de cartographie.

Les *triangulateurs* génèrent généralement un maillage irrégulier dans des domaines arbitraires. Les polygones de Voronoi et la triangulation de Delaunay sont largement utilisés pour générer un maillage. Plus tard, le maillage triangulaire peut être transformé au maillage constitué d'éléments quadrilatéraux. La triangulation de Delaunay peut être généralisée pour les domaines tridimensionnels.

5.2.2 Technique de cartographie (Mapping technique)

Supposons que nous voulions générer un maillage quadrilatère à l'intérieur d'un domaine qui a la forme d'un quadrilatère curviligne. La technique de cartographie illustrée à la Fig. 5.2 peut être utilisée à cette fin.

Si chaque côté du domaine quadrilatère curviligne peut être approximé par une parabole, le domaine ressemble alors à un élément isoparamétrique à 8 nœuds. Le domaine est mappé sur un carré dans la coordonnée locale

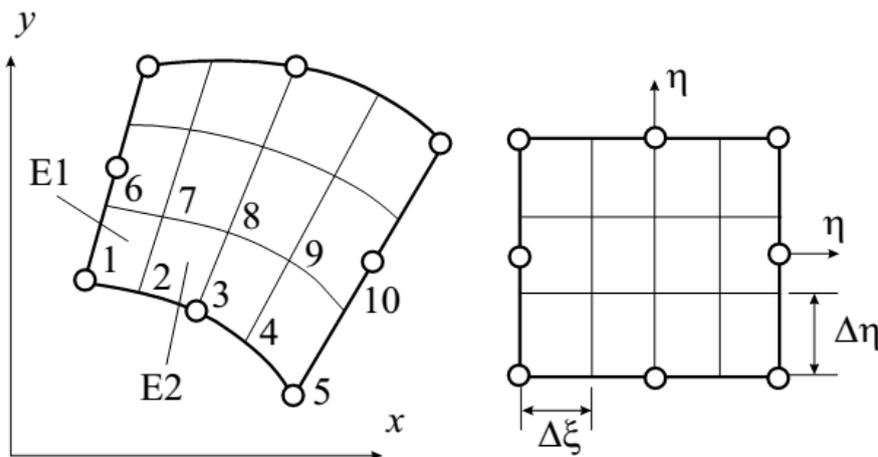


Figure 5.2 : Génération de maillage avec la technique de cartographie.

système ξ, η . Le carré de coordonnées ξ, η est divisé en éléments rectangulaires puis en coordonnées nodales sont reconvertis dans le système de coordonnées global x, y .

Algorithme de calcul des coordonnées pour le nœud i

n_ξ = nombre d'éléments dans la direction ξ

n_η = nombre d'éléments dans la direction η

Ligne : $R = (i - 1)/(n_\xi + 1) + 1$

Colonne : $C = \text{mod}((i - 1), (n_\xi + 1)) + 1$

$$\Delta\xi = 2/n_\xi \quad \Delta\eta = 2/n_\eta$$

$$\xi = -1 + \Delta\xi(C - 1)$$

$$\eta = -1 + \Delta\eta(R - 1)$$

$$x = \sum N_k(\xi, \eta)x_k$$

$$y = \sum N_k(\xi, \eta)y_k$$

Connectivités pour élément e

Élément ligne: $R = (e - 1)/n_\xi + 1$

Élément colonne: $C = \text{mod}((e - 1), n_\xi) + 1$

Connectivités (global nœud Nombres):

$$i_1 = (R - 1)(n_\xi + 1) + C$$

$$i_2 = i_1 + 1$$

$$i_3 = R(n_\xi + 1) + C + 1$$

$$i_4 = i_3 - 1$$

Le déplacement des nœuds médians plus près d'un coin du domaine aide à affiner (créer des éléments plus petits) maille près de ce coin. Si le raffinement est fait du côté de l'élément qui est parallèle à l'axe local ξ et la taille du plus petit élément près du nœud d'angle est Δl alors le nœud médian doit être déplacé vers la position :

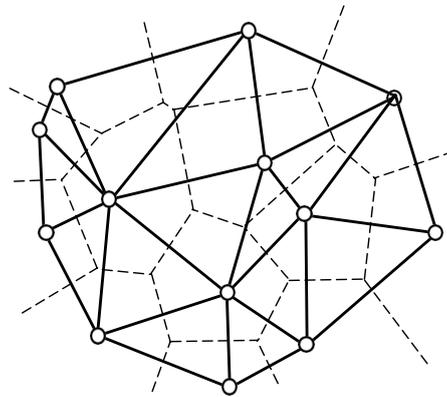


Figure 5.3 : Polygones de Voronoï et triangulation de Delaunay.

$$\alpha = \frac{l_m}{l} = \frac{1 + \frac{\Delta l}{l}n_\xi - \frac{2}{n_\xi}}{4\left(1 - \frac{1}{n_\xi}\right)}$$

Ici n_ξ est le nombre d'éléments dans la direction ξ ; l_m est une distance entre le nœud d'angle et le côté médian node et l est la longueur du côté de l'élément.

Chapitre 6

Assemblage et solution

6.1 Assemblage et solution

Le désassemblage est une création de vecteurs d'éléments à partir d'un vecteur global donné. L'opération de désassemblage est donnée par la relation :

$$\{Q_d\} = [A]\{Q\} \quad (6.1)$$

Ici $[A]$ est la matrice assurant la correspondance entre les nombres globaux et locaux de nœuds (ou degrés de liberté), $\{Q\}$ est le vecteur global et $\{Q_d\}$ est le vecteur composé des vecteurs d'éléments

$$\{Q_d\} = \{\{q_1\} \{q_2\} \dots\} \quad (6.2)$$

Pour les matrices, l'opération de désassemblage n'est pas nécessaire pour la mise en œuvre de la procédure d'éléments finis.

L'*assemblage* est l'opération consistant à joindre des vecteurs d'éléments (matrices) dans un vecteur global (matrice). Pour les vecteurs l'opération d'assemblage est donnée par la relation :

$$\{F\} = [A]^T \{F_d\} \quad (6.3)$$

et pour les matrices l'opération d'assemblage est donnée par la relation :

$$[K] = [A]^T [K_d] [A] \quad (6.4)$$

Ici $[K]$ est la matrice globale et $[K_d]$ est la matrice suivante composée des matrices d'éléments :

$$[K_d] = \begin{bmatrix} [k_1] & 0 & 0 \\ 0 & [k_2] & 0 \\ 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

La fraction d'entrées non nulles (unités) dans la matrice $[A]$ est très petite. Pour cette raison, la matrice $[A]$ n'est jamais utilisée explicitement dans les codes informatiques réels.

6.2 Algorithme de démontage

L'opération de désassemblage comprend la multiplication matricielle avec l'utilisation d'une grande matrice $[A]$, qui donne la correspondance entre les énumérations locales et globales. La matrice $[A]$ est presque entièrement composée de zéros. Il n'a qu'une seule entrée non nulle (= 1) dans chaque ligne. Les entrées non nulles dans $[A]$ fournissent des informations sur les adresses globales où les entrées locales doivent être prises. Au lieu de la multiplication matricielle, il est possible de simplement prendre des éléments vectoriels à partir de leurs positions globales et de les mettre aux positions correspondantes dans le vecteur d'éléments.

Démontage pour un vecteur d'élément

n = nombre de degrés de liberté par élément

N = nombre total de degrés de liberté

E = nombre d'éléments

$C[E, n]$ = tableau de connectivité

$f[n]$ = vecteur de charge de l'élément

$F[N]$ = vecteur de charge global

e = numéro de l'élément pour lequel nous avons besoin du vecteur local

faire $i = 1, n$

$$f[i] = F [C[e, i]]$$

fin faire

Dans l'algorithme ci-dessus, nous avons utilisé des informations de connectivité liées aux degrés de liberté. Si le tableau de connectivité contient des numéros de nœuds globaux et que chaque nœud a plus d'un degré de liberté, alors au lieu d'un numéro, le bloc lié au nœud doit être sélectionné. Par exemple, dans un problème d'élasticité tridimensionnel, chaque nœud est associé à trois déplacements (trois degrés de liberté).

6.3 Assemblage

6.3.1 Algorithme d'assemblage pour les vecteurs

Au lieu de la matrice $[A]$, les procédures d'assemblage sont généralement basées sur une sommation directe avec l'utilisation du tableau de connectivité des éléments.

Supposons que nous ayons besoin d'assembler le vecteur de charge global F en utilisant les vecteurs de charge des éléments f et le tableau de connectivité C . Un pseudocode d'algorithme d'assemblage est le suivant :

Assemblage du vecteur global

n = nombre de degrés de liberté par élément

N = nombre total de degrés de liberté

E = nombre d'éléments

$C[E, n]$ = tableau de connectivité

$f[n]$ = vecteur de charge de l'élément

$F [N]$ = vecteur de charge global

faire $i = 1, N$

$$F [i] = 0$$

fin faire

faire $e = 1, E$

générer f

faire $i = 1, n$

$$F [C[e, i]] = F [C[e, i]] + f[i]$$

fin faire

fin faire

Les vecteurs de charge des éléments sont générés lorsqu'ils sont nécessaires à l'assemblage. On peut voir que l'entrée de connectivité $C[e, i]$ fournit simplement l'adresse dans le vecteur global où va la $i^{\text{ème}}$ entrée du vecteur de charge pour l'élément e . Nous supposons que le tableau de connectivité est écrit en termes de degrés de liberté. Dans les codes réels, le tableau de connectivité contient des numéros de nœud qui sont transformés en degrés de liberté pour l'élément assemblé actuel.

6.3.2 Algorithme d'assemblage pour les matrices

Un algorithme d'assemblage de la matrice de rigidité globale K à partir des contributions des matrices de rigidité élémentaires k peut être exprimé par le pseudo-code suivant :

Assemblage de la matrice globale

```

n = nombre de degrés de liberté par élément
N = nombre total de degrés de liberté dans le domaine
E = nombre d'éléments
C[E, n] = tableau de connectivité
k[n, n] = matrice de rigidité des éléments
K[N, N] = matrice de rigidité globale
faire i = 1, N
    faire j = 1, N
        K[je, j] = 0
    fin faire
fin faire
faire e = 1, E
    générer k
    faire i = 1, n
        faire j = 1, n
            K[C[e, je], C[e, j]] = K[C[e, je], C[e, j]] + k[i, j]
        fin faire
    fin faire
fin faire

```

Ici, pour des raisons de simplicité, les matrices d'éléments sont entièrement assemblées dans la matrice globale carrée complète. Comme la matrice de rigidité globale est symétrique et creuse, ces faits sont utilisés pour économiser de l'espace et du temps dans codes d'éléments finis réels.

6.4 Conditions aux limites de déplacement

Les conditions aux limites de déplacement n'ont pas été prises en compte dans la fonctionnelle de l'énergie potentielle totale.

Ils peuvent être appliqués au système d'équation global après son assemblage.

Considérons l'application de la condition aux limites de déplacement au système d'équations globales. Deux méthodes peuvent être utilisées pour la spécification de la condition aux limites de déplacement.

$$Q_m = d \quad (6.6)$$

6.4.1 Spécification explicite du déplacement BC

Dans la méthode explicite, nous substituons la valeur connue du déplacement $Q_m = d$ dans la m^{eme} colonne et déplaçons cette colonne vers la droite. Ensuite, nous mettons des zéros à la m^{eme} colonne et à la m^{eme} ligne de la matrice sauf l'élément diagonal principal, qui est remplacé par 1.

Méthode explicite:

$$F_i = F_i - K_{im}d, \quad i = 1 \dots N, i \neq m$$

$$F_m = d$$

$$K_{mj} = 0, \quad j = 1 \dots N$$

$$K_{im} = 0, \quad i = 1 \dots N$$

$$K_{mm} = 1$$

6.4.2 Méthode des grands nombres

La méthode des grands nombres utilise le fait que les calculs informatiques ont une précision limitée. Les résultats des calculs en double précision contiennent environ 15 à 16 chiffres. Ainsi, l'addition $1.0 + 1e-17$ produit 1.0 comme résultat..

Méthode des grands nombres ($M \gg K_{ij}$):

$$K_{mm} = M$$

$$F_m = M_d$$

La méthode des grands nombres est plus simple que la méthode explicite de spécification des conditions aux limites de déplacement. La solution du problème des éléments finis est la même pour les deux méthodes.

6.5 Solution des équations aux éléments finis

6.5.1 Méthodes de résolution

Les applications pratiques de la méthode des éléments finis conduisent à de grands systèmes d'équations algébriques linéaires simultanées.

Heureusement, les systèmes d'équations aux éléments finis possèdent certaines propriétés qui permettent de réduire le temps de stockage et de calcul. Les systèmes d'équations aux éléments finis sont : symétriques, définis positifs et creux. La symétrie permet de ne stocker que la moitié de la matrice y compris les entrées diagonales. Les matrices définies positives sont caractérisées par de grandes entrées positives sur la diagonale principale. La solution peut être effectuée sans pivotement. Une matrice creuse contient plus d'entrées nulles que d'entrées non nulles. La parcimonie peut être utilisée pour économiser le stockage et les calculs.

Les méthodes de résolution des systèmes d'équations linéaires peuvent être divisées en deux grands groupes : les méthodes directes et les méthodes itératives. Les méthodes de résolution directe sont généralement utilisées pour les problèmes de taille moyenne. Pour les grands problèmes, les méthodes itératives nécessitent moins de temps de calcul et sont donc préférables.

Les formats de stockage matriciel sont étroitement liés aux méthodes de résolution. Ci-dessous, nous considérons deux méthodes de résolution qui sont largement utilisées dans les codes de calcul par éléments finis. La première méthode est la solution LDU directe avec matrice de rigidité globale du profil. La seconde est la méthode du gradient conjugué préconditionné avec un format de stockage matriciel clairsemé par rangées.

L'algorithme de factorisation à droite d'une matrice de profil symétrique est le suivant :

Factorisation LDU (à droite)

faire $j = 2, N$

Cdivt(j)

faire $i = j, N$

Cmod(j, je)

fin faire

fin faire

faire $j = 2, N$

Div(j)

fin faire

Cdivt(j) =

faire $i = FN(j), j - 1$

$t_i = A_{ij}/A_{ii}$

fin faire

Cmod(j, i) =

faire $k = \max(FN(i), FN(j)), i - 1$

$A_{ji} = A_{ji} - t_k A_{ki}$

fin faire

Cdiv(j) =

faire $i = FN(j), j - 1$

$A_{ij} = A_{ii}$

fin faire

La solution directe avec matrice triangulaire et la rétrosubstitution sont données par le pseudo-code :

Réduction avant et substitution arrière

faire $j = 2, N$

faire $i = FN(j), j - 1$

$b_j = b_j - A_{ij} * b_i$

fin faire

fin faire

faire $j = 1, N$

$b_j = b_j/A_{jj}$

fin faire

faire $i = N, 1, -1$

faire $i = FN(j), j - 1$

$b_i = b_i - A_{ij} * b_j$

fin faire

fin faire