

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Ahmed Zabanna de Relizane

Faculté des Sciences et technologie

Département de Génie Mécanique



# THÈSE

Présentée pour l'obtention du diplôme de

## DOCTORAT

Domaine : Sciences et Technologie

Filière : Génie Mécanique

Spécialité : Matériaux et Energétique

Par

**AIT ATMANE Redhwane**

Thème :

---

## ÉTUDE DE L'EFFET DE LA POROSITE SUR LE COMPORTEMENT MÉCANIQUE DES STRUCTURES FONCTIONNELLEMENT GRADUÉES

---

Soutenue le 31/01/2022 devant le jury composé de :

HADJ MOSTEFA Adda	MCA	Université de Relizane	Président
KACI Abdelhakim	Professeur	Université de Saida	Examineur
DJILALI BEIDA Mamar	MCA	Université de Relizane	Examineur
ZAHY Rachid	MCA	Université de Relizane	Examineur
MAHMOUDI Nouredine	Professeur	Université de Saida	Rapporteur
AIT ATMANE Hassen	Professeur	Université de Chlef	Co- Rapporteur

# Dédicace

---

# Dédicace

---

*To my mother, you are my beautiful world,*

*To my father.*

*All the respect and love for both of you.*

# Remerciements

---

# Remerciements

---

Tout d'abord, j'adresse mes sincères remerciements à mon directeur de thèse, Professeur *MAHMOUDI NOUREDDINE*, pour son soutien qu'il n'a cessé de m'apporter, sa disponibilité et ses précieux conseils qui ont permis de mener à bien ce travail, Ses qualités humaines et ses nombreuses connaissances et plus largement scientifiques m'ont permis de progresser et de prendre confiance.

Je remercie également *AIT ATMANE Hassen*, professeur à l'université de Chlef, co-directeur de la thèse de m'avoir aidé, sa collaboration est également efficace tout au long de ce travail.

Je tiens à remercier mes chers Professeurs *TOUNSI Abdelouahed* et *BOURADA Mohamed* de l'Université de Sidi-Bel-Abbès, pour leurs Conseils déterminants dans mon sujet de recherche.

Je n'oublie d'adresser mes plus sincères remerciements au Docteur *BERNARD Fabrice* pour toute l'aide qu'il a pu m'apporter durant mon stage à sein de l'INSA de Rennes, son aide et son soutien étaient d'un grand intérêt.

M. *HADJ MOSTEFA Adda*, Maitre de conférences à l'Université de RELIZANE, pour m'avoir fait l'honneur d'accepter la présidence du Jury.

M. *ZAHY Rachid*, Maitre de conférences à l'université RELIZANE, qui a accepté d'examiner cette thèse et de faire partie du jury.

M. Kaci Abdelhakim, Professeur à l'Université de Saida, pour m'avoir fait l'honneur d'accepter la présidence du Jury.

M. *DJILALI BEIDA Maamar*, Maitre de conférences à l'université RELIZANE, qui a accepté d'examiner cette thèse et de faire partie du jury.

Je remercie tous les enseignants et mes collègues qui ont contribué directement ou indirectement à ma formation de 3<sup>ème</sup> cycle, et aussi mes parents qui mon soutenu et aidé du premier jour de la classe primaire jusqu'à ce jour

# Résumé

---

## ***Résumé***

Dans le cadre des travaux de cette thèse, nous avons proposé d'étudier l'effet de la porosité sur le comportement mécanique des structures en matériaux composites avancés avec des propriétés graduellement variables suivant l'épaisseur de la structure. La distribution de propriétés des matériaux varient selon des lois de distribution. L'étude a été menée en utilisant une théorie du cisaillement d'ordre supérieur qui n'a que trois variables inconnues en utilisant l'intégrale indéfinie pour réduire le nombre d'équations de mouvement, donnant un nombre d'inconnues réduit par rapport aux théories classiques et du premier ordre.

En premier lieu, le comportement à la vibration et au flambement des poutres à gradient de propriétés a été étudié en intégrant un matériau imparfait avec une nouvelle formulation de la distribution de la porosité; deux types de distributions matérielles ont été choisis à savoir la variation matérielle en puissance et la variation sigmoïdale. Une étude paramétrique a été faite en vue de mettre en valeur l'effet de la porosité sur le comportement au flambement et à la vibration des poutres imparfaites.

En deuxième lieu, le comportement dynamique des poutres poreuses à gradient de propriétés reposant sur des fondations élastiques variables a été étudié. Les poutres FGM étaient supposées être reposées sur des assises de type Winkler-Pasternak dans laquelle le module de Winkler est supposé variable suivant la longueur de la poutre.

La résolution de ce problème nécessite de solutionner les équations d'équilibre ou de mouvement issues du principe de Hamilton en utilisant des solutions analytiques de Navier. Les résultats numériques et la validation montrent la précision de la présente méthode pour la prédiction des effets doubles de la porosité et de la variation de la raideur de l'assise sur le comportement statique et dynamique des poutres poreuses en FGM.

**Mots clés :** vibration libre, flambement, porosité, poutre, FGM, fondation élastique

# Abstract

---



## ***Abstract***

As part of the work of this thesis, we proposed to study the effect of porosity on the mechanical behavior of structures in advanced composite materials with gradually varying properties depending on the thickness of the structure. The distribution of material properties vary according to distribution laws. The study was conducted using a higher order shear theory which has only three unknown variables using the indefinite integral to reduce the number of equations of motion, giving a reduced number of unknowns compared to classical first-order and higher-order theories.

First, the vibration and buckling behavior of FG beams was studied by integrating an imperfect material with a new formulation of the porosity distribution; two types of material distributions were chosen namely the material variation in power and the sigmoidal variation. A parametric study was made to highlight the effect of porosity on the buckling and vibration behavior of imperfect beams.

Secondly, the dynamic behavior of porous beams with gradient properties resting on variable elastic foundations was studied. FGM beams were supposed to be rested on Winkler-Pasternak type foundations in which the Winkler modulus is assumed to be variable depending on the length of the beam.

The resolution of this problem requires the solution of the equilibrium or motion equations resulting from the principle of Hamilton by using analytical solutions of Navier. Numerical results and validation show the accuracy of the present method for predicting the dual effects of porosity and change in foundation stiffness on the static and dynamic behavior of porous FGM beams.

**Keywords:** Free vibration, Buckling, Porosity, Beam, FGM, elastic foundation

# ملخص

---

## ملخص

كجزء من عمل هذه الرسالة ، اقترحنا دراسة تأثير المسامية على السلوك الميكانيكي للهياكل في المواد المركبة المتقدمة ذات الخصائص المتغيرة تدريجيًا اعتمادًا على سمك الهيكل. يختلف توزيع خصائص المواد وفقًا لقوانين التوزيع. أجريت الدراسة باستخدام نظرية القص ذات الرتبة الأعلى والتي تحتوي على ثلاثة متغيرات غير معروفة فقط باستخدام التكامل غير المحدد لتقليل عدد معادلات الحركة ، مما يعطي عددًا أقل من المجهول مقارنة بالنظريات الكلاسيكية من الدرجة الأولى وذات الرتبة الأعلى.

أولاً ، تمت دراسة سلوك الاهتزاز والالتواء لحزم FGM من خلال دمج مادة غير كاملة مع صيغة جديدة لتوزيع المسامية ؛ تم اختيار نوعين من توزيعات المواد وهما التباين المادي في القوة والاختلاف السيني. أجريت دراسة بارامترية لتسليط الضوء على تأثير المسامية على سلوك الانحناء والاهتزاز للحزم غير الكاملة.

ثانياً ، تمت دراسة السلوك الديناميكي للحزم المسامية ذات الخصائص المتدرجة القائمة على أسس مرنة متغيرة. كان من المفترض أن تستند حزم ختان الإناث على أسس من نوع Winkler-Pasternak حيث يُفترض أن يكون معامل Winkler متغيرًا اعتمادًا على طول الحزمة.

يتطلب حل هذه المشكلة حل معادلات التوازن أو الحركة الناتجة عن مبدأ هاملتون باستخدام الحلول التحليلية ل Navier. تظهر النتائج العددية والتحقق من صحة دقة الطريقة الحالية للتنبؤ بالتأثيرات المزدوجة للمسامية والتغيير في صلابة الأساس على السلوك الثابت والديناميكي لحزم تشويه الأعضاء التناسلية الأنثوية المسامية.

**الكلمات المفتاحية:** اهتزاز حر ، التواء ، مسامية ، عارضة ، ، أساس مرن

# Sommaire

---

## Sommaire

Dédicace.....	III
Remerciements.....	V
Résumé.....	VII
Abstract.....	IX
Sommaire.....	XIII
Listes .....	XVI

Introduction Générale Et Objectifs de la Thèse.....	2
---	---

### **Chapitre I : Généralités Sur Les Matériaux Composites Avancés -FGM**

I.1 Introduction.....	8
I.2 Concept des matériaux FGM.....	9
I.3 Différences entre matériaux FGM et matériaux composites traditionnels.....	10
I.4 Histoire et développement des matériaux FGM .....	11
I.5 Méthodes d'élaboration des matériaux fonctionnellement gradués.....	13
I.5.1 Coulage en bande (Tape Casting).....	13
I.5.2 Compaction sèche des Poudres.....	14
I.5.3 Projection plasma.....	15
I.5.4 Frittage et Infiltration.....	15
I.6 Exemples sur des structures en matériaux à gradient propriété.....	16
I.7 Domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués.....	17
I.8 Évolution de la recherche scientifique autour des FGM.....	18
I.9 Les matériaux impropres (poreux).....	19
I.10 Revue des travaux antérieurs sur le taux volumique de porosité et son effet sur les propriétés mécaniques du matériau.....	21
I.11 Causes possibles d'apparition de la porosité.....	23
I.11.1 Les causes mécaniques.....	23
I.11.2 Les causes thermodynamiques.....	27
I.12 Conclusion.....	30

### **Chapitre II : Revue sur la modélisation des structures reposant sur les fondations élastiques**

II.1 Introduction.....	32
II.2 Les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles.....	33
II.2.1 Propriétés matérielles de la poutre P-FGM.....	33
II.2.2 Propriétés matérielles de la poutre S-FGM.....	34
II.2.3 Propriétés matérielles de la poutre E-FGM.....	35
II.3 Principe général d'équilibre - équations d'équilibre.....	36
II.4 Relations contraintes-efforts.....	37
II.5 Le potentiel interne et ses applications.....	38
II.5.1 Travail des forces extérieures et énergie de déformation.....	38
II.5.1.1 Notions de travail et de travail complémentaire.....	38
II.5.1.2 Énergie et énergie complémentaire de déformation.....	40
II.5.2 Travail et énergie dans le domaine élastique linéaire.....	41
II.5.3 Principe de la conservation de l'énergie.....	43
II.5.4 Travail de déformation des sollicitations simples dans le cas des poutres.....	44
II.5.5 Expression générale de l'énergie potentielle de déformation.....	47

II.5.6	Travail Virtuel Formulation unifiée de carrera (CUF).....	49
II.6	Les poutres composites.....	50
II.6.1	Historique des théories des poutres.....	50
II.6.2	Le comportement des poutres composites.....	51
II.6.3	Les différents types de poutres.....	51
II.7	Théories de la Modélisation des Poutres.....	52
II.7.1	Modèle d'Euler Bernoulli (Classical Beam Theory- CBT).....	52
II.7.2	Modèle de Timoshenko (FSDBT).....	53
II.7.3	Théorie d'Ordre Elevé.....	55
II.8	Introduction du l'effet de déformation normale.....	57
II.9	Conclusion.....	58
<b>Chapitre III : Analyse mécanique des poutres FGM poreuses reposant sur fondations à raideur variable</b>		
III.1	Introduction.....	60
III.2	Propriétés des matériaux constitutifs de la FGM.....	60
III.2.1	loi de mélange de Voigt pour les poutres P-FGM parfaites.....	61
III.2.2	loi de mélange modifiée de Voigt pour les poutres P-FGM poreuses.....	61
III.2.3	loi de mélange de Voigt pour les poutres S-FGM parfaites.....	62
III.2.4	loi de mélange modifiée de Voigt pour les poutres S-FGM poreuses.....	63
III.3	Fondation à raideur élastique variable.....	65
III.4	Équations fondamentales.....	65
III.4.1	Cinématique et déformations.....	65
III.4.2	Équations de mouvement.....	67
III.5	Solution analytique pour les poutres FGM simplement supportées.....	70
III.6	Conclusion.....	72
<b>Chapitre IV : Validation des résultats et étude paramétrique</b>		
IV.1	Introduction.....	74
IV.2	Matériaux choisis pour l'étude numérique.....	74
IV.3	Validation du model analytique.....	75
IV.4	Étude paramétrique des poutres parfaites (sans porosité).....	77
IV.4.1	Étude paramétrique des poutres parfaites de type P-FGM.....	78
IV.4.2	Étude paramétrique des poutres parfaites de type S-FGM.....	80
IV.5	Étude paramétrique des poutres imparfaites (avec porosité).....	83
IV.6	Effet des paramètres d'étude sur la variation de la raideur de Winkler.....	93
IV.6.1	Effet de l'indice matériel « n » sur le paramètre fondation variable.....	93
IV.6.2	Effet du rapport d'épaisseur «L/h» sur le paramètre fondation variable.....	95
IV.6.3	Effet de la variation du model Winkler sur sa raideur $K_w$ .....	97
IV.6.4	Effet de la porosité « n » sur le paramètre fondation variable.....	97
IV.7	Conclusion.....	100
Conclusion générale et perspectives.....		102
Références bibliographiques.....		107

# Listes

---

## Liste des Figures

<b>Figure I.1</b>	Concept des matériaux fonctionnellement gradués [Houari M.S.A., 2011].....	10
<b>Figure I.2</b>	(A) Le nombre annuel de publications sur les matériaux à gradient propriété (FGM), telles que fournies par le moteur de recherche de Scopus. (B) Génération de connaissances dans le domaine des matériaux à FG .....	11
<b>Figure I.3</b>	Conception fonctionnelle lithologique et sédimentologie de la Grotte du Bison à Arcy-sur-Cure.....	11
<b>Figure I.4</b>	Modèle pour une section de FGMs .....	12
<b>Figure I.5</b>	Coulage en bande (Tape Casting).....	14
<b>Figure I.6</b>	Procédé de Compaction sèche des Poudres .....	14
<b>Figure I.7</b>	Procédé de Projection plasma .....	15
<b>Figure I.8</b>	Procédé de Frittage et Infiltration.....	16
<b>Figure I.9</b>	Composition d'une poutre FGM suivant son épaisseur .....	16
<b>Figure I.10</b>	Plaque sandwich FG a géométrie et coordonnées, séquence de couches b .....	17
<b>Figure I.11</b>	(a) Section coquille FGM, (b) Gauche: génération d'un composite métal-carbure avec gradient de composition par gabarit de poutre laser. À droite: tube NiCrBSi gradué avec 0-80 vol.% Cr <sub>3</sub> C <sub>2</sub> .....	17
<b>Figure I.12</b>	Les principaux domaines d'application des FGM .....	18
<b>Figure I.13</b>	(A) Le nombre annuel de publications sur les matériaux à gradient propriété (FGM), telles que fournies par le moteur de recherche de Scopus (à partir de juillet 2016).  (B) Génération de connaissances dans le domaine des matériaux à gradient propriété (FGM), par pays (basé sur les données de Scopus pour la période 1980-2016).....	19
<b>Figure I.14</b>	(a) Micrographie MEB des porosités étudiées, (b) Schématisation des différents types de pores (c) et (d) Nomenclatures relatives à la taille des pores.....	21
<b>Figure I.15</b>	Variation relative de l'ILSS en fonction du taux de porosité pour des matériaux composites carbone/époxy .....	22
<b>Figure I.16</b>	Formation des macros et micros porosités en fonction de la vitesse de déplacement du fluide lors de l'imprégnation d'un renfort : (a) force de capillarité prédominante, (b) force de viscosité prédominante .....	24
<b>Figure I.17</b>	Comparaison des résultats expérimentaux et numériques donnant la position du front d'une huile silicone injectée de manière 'demi-sphérique' dans un renfort anisotrope .....	25



<b>Figure I.18</b>	(a) machine automatique à placement de nappes, (b) Tête de la machine à placement de fibres.....	25
<b>Figure I.19</b>	Enthalpie libre d'activation de nucléation homogène en fonction du rayon du germe	28
<b>Figure II.1</b>	Coordonnées et géométrie d'une poutre poreuse fonctionnellement graduée reposant sur une fondation élastique variable .....	33
<b>Figure II.2</b>	Les dimensions d'une poutre FGM.....	33
<b>Figure II.3</b>	La variation du module de Young dans une poutre P-FGM.....	34
<b>Figure II.4</b>	La variation du module de Young dans une poutre S-FGM.....	35
<b>Figure II.5</b>	La variation du module de Young de la poutre E-FGM.....	36
<b>Figure II.6</b>	Efforts agissant dans le plan .....	37
<b>Figure II.7</b>	Moments agissant sur un élément.....	37
<b>Figure II.8</b>	Efforts tranchants dans un élément .....	38
<b>Figure II.9</b>	Diagramme F- $\delta$ d'une barre prismatique.....	39
<b>Figure II.10</b>	Energie de déformation d'un corps .....	40
<b>Figure II.11</b>	Relation linéaire de contrainte-déformation ( $(\sigma_{ij}-\varepsilon_{ij})$ ) .....	43
<b>Figure II.12</b>	Relation des contraintes-effort normal.....	44
<b>Figure II.13</b>	Relation de moment de flexion .....	46
<b>Figure II.14</b>	Relation de moment de torsion .....	47
<b>Figure II.15</b>	Relation d'énergie potentielle de déformation .....	48
<b>Figure II.16</b>	Système élastique force-déplacement F- $\delta$ .....	49
<b>Figure II.17</b>	Cinématique d'Euler Bernoulli.....	53
<b>Figure II.18</b>	Cinématique de Timoshenko .....	54
<b>Figure II.19</b>	Cinématique de la Théorie d'Ordre Elevé .....	56
<b>Figure III.1</b>	Coordonnées et géométrie de la poutre poreuse fonctionnellement graduée reposant sur une fondation élastique variable .....	61
<b>Figure IV.1</b>	Courbe des fréquences naturelles " $\omega$ " pour une poutre parfaite par rapport au coefficient matérielle n pour différents types de fondations ( $L / h = 5$ ).....	78
<b>Figure IV.2</b>	Courbe des fréquences naturelles " $\omega$ " pour une poutre parfaite par rapport au coefficient matérielle n pour différents types de fondations ( $L / h = 20$ ).....	79
<b>Figure IV.3</b>	Courbe des fréquences naturelles " $\omega$ " pour une poutre parfaite par rapport au rapport d'épaisseur L/h pour différents types de fondations ( $n = 2$ , $k_w = 100$ , $k_s = 10$ and $\zeta = 1$ ).....	79
<b>Figure IV.4</b>	Courbe des fréquences naturelles " $\omega$ " pour une poutre parfaite par rapport au rapport d'épaisseur L/h pour différents types de fondations ( $n = 10$ , $k_w = 100$ , $k_s =$	

	10 and $\zeta=1$ ).....	80
<b>Figure IV.5</b>	Fréquence non dimensionnelle d'une poutre SFGM parfaite en fonction de l'indice de fraction volumique « n », (L/h=5).....	81
<b>Figure IV.6</b>	Flambement critique non dimensionnel d'une poutre S-FGM parfaite en fonction de l'indice de fraction volumique « n », (L/h=5).....	81
<b>Figure IV.7</b>	Fréquence non dimensionnelle d'une poutre S-FGM parfaite par rapport à l'indice de fraction volumique (TSDT).....	82
<b>Figure IV.8</b>	Flambement critique non dimensionnel d'une poutre S.FGM parfaite en fonction de l'indice de fraction volumique « n », (TSDT).....	82
<b>Figure IV.9</b>	Fréquence non dimensionnelle de la poutre P.FGM non parfaite en fonction de l'indice n. L/h=10, $\alpha=0.2$ .....	90
<b>Figure IV.10</b>	Fréquence non dimensionnelle de la poutre S.FGM non parfaite en fonction de l'indice n. L/h=10, $\alpha=0.2$ .....	91
<b>Figure IV.11</b>	Charge critique de flambement non dimensionnelle d'une poutre P.FGM parfaite et poreuse en fonction de l'indice n .L/h=10, $\alpha=0.2$ .....	92
<b>Figure IV.12</b>	Charge critique de flambement non dimensionnelle d'une poutre S.FGM parfaite et poreuse en fonction de l'indice n .L/h=10, $\alpha=0.2$ .....	92
<b>Figure IV.13</b>	Effet du paramètre de fondation variable sur la fréquence adimensionnelle d'une poutre P.FGM (L/h=10, $k_w = 100$ et $k_s = 10$ .....	93
<b>Figure IV.14</b>	Effet du paramètre de fondation variable sur la fréquence adimensionnelle d'une poutre P.FGM (n = 2, $k_w = 100$ et $k_s = 10$ ).....	95
<b>Figure IV.15</b>	Variation des fréquences adimensionnelles d'une poutre P.FGM par rapport au paramètre de Winkler pour différents types de fondations élastiques.....	97

## Liste des Tableaux

<b>Tableau I.1</b>	Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal .....	9
<b>Tableau III.1</b>	Les fonctions de distribution de porosité non uniforme $\Omega$ .....	64
<b>Tableau III.2</b>	Diverses théories de déformation de cisaillement .....	66
<b>Tableau IV.1</b>	Comparaison des fréquences fondamentales sans dimension ( $\bar{\omega}_1$ ) pour une poutre P-FGM parfaite sur appuis simples.....	75
<b>Tableau IV.2</b>	Comparaison de la charge critique de flambement sans dimension ( $\bar{N}$ ) d'une poutre P-FGM parfaite sur appuis simples.....	76
<b>Tableau IV.3</b>	Comparaison des fréquences adimensionnelles " $\beta$ " d'une poutre parfaite et isotrope sur fondation élastique, $n=0$ .....	77
<b>Tableau IV.4</b>	Effets de la porosité sur les fréquences non dimensionnelles d'une poutre FGM, $n=2$ .....	85
<b>Tableau IV.5</b>	Effets de la porosité sur la charge critique de flambement non dimensionnelle de la poutre FGM, $n=2$ .....	86
<b>Tableau IV.6</b>	<b>Tableau.IV.6:</b> Effets de la porosité sur les fréquences non dimensionnelles d'une poutre FGM ( $\frac{L}{h} = 10$ ) .....	88
<b>Tableau IV.7</b>	Effets de la porosité $N_{cr}$ de flambement non dimensionnelles d'une poutre FGM ( $\frac{L}{h} = 10$ ).....	89
<b>Tableau IV.8</b>	Effet du facteur de la porosité, l'indice matériel et le paramètre de la fondation sur les fréquences non-dimensionnelles d'une poutre poreuse .....	98

## Liste des notations

$G$	Module de cisaillement dans le plan (x, z)
$E$	Module de Young suivant x
$E_c$	Module de Young de la céramique
$E_m$	Module de Young du métal
$\nu$	Coefficient de Poisson
$V(z)$	Fraction volumique
$n$	Paramètre du matériau
$L$	Longueur de la poutre
$h$	Epaisseur de la poutre
$u_0, w_0$	Les composantes du champ de déplacement sur le l'axe moyen de la poutre
$u, w$	Les déplacements dans les directions x, z.
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Les éléments de contraintes normales
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$	Les éléments de contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	les éléments de déformations normales
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$	les éléments de déformations de cisaillement
$x, z$	les coordonnées cartésiennes rectangulaires
$\delta U$	la variation de l'énergie de déformation virtuelle
$\delta U_{ef}$	la variation de l'énergie de déformation de fondation élastique
$\delta V$	la variation du travail virtuel externe
$\delta K$	la variation de l'énergie cinétique
$\delta u, \delta w, \delta \theta$	Champ virtuel de déplacement
$N_x$	Effort normal
$M_{xy}^b, M_x^s$	Moments de flexion
$S_{xz}^s$	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
$\partial$	Dérivée partielle

$C_{ij}$	Coefficient de rigidité
$P_m, P_c$	les propriétés correspondantes du métal et la céramique
$f(z)$	La fonction de forme
$\rho_i$	densité matérielle de la structure FGM
$I_i, J_i, K_i$	Inerties massiques
$\{\dots\}$	Vecteur colonne
$[\dots]$	Matrice
$A_{ij}, A_{ij}^s, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s$	Les composantes de rigidité
$U_m, V_m, X_m$	les coefficients de déplacement maximum inconnus
$\omega$	fréquence naturelle
$A$	Charge critique de flambement
FGM	Matériau à gradient de propriétés
Al	L'aluminium
$Al_2O_3$	Oxyde d'aluminium
CLT	La théorie classique de la poutre
FSDT	Théorie de déformation de cisaillement du premier ordre
HSDT	Théorie de déformation de cisaillement d'ordre hyperbolique
CSDT	Théorie de déformation de cisaillement d'ordre cosinus
SSDT	Théorie de déformation de cisaillement d'ordre sinus
ESDT	Théorie de déformation de cisaillement d'ordre exponentiel

# Introduction Générale et Objectifs de la Thèse

---

## **Introduction Générale et Objectifs de la Thèse**

### **Introduction**

Le développement technologique est lié à l'amélioration continue des caractéristiques des matériaux tout en leur donnant un nouvel élan concernant leur composition. Habituellement, ce qui donne naissance à de nouvelles gammes de matériaux émergent en raison de la nécessité d'améliorer l'efficacité structurelle et les performances. De plus, en règle générale, les nouveaux matériaux eux-mêmes offrent à leur tour de nouvelles opportunités pour développer des structures et des technologies mises à jour, ce qui pose un défi à la science des matériaux avec de nouveaux problèmes. L'une des meilleures manifestations de ce processus interdépendant dans le développement des matériaux, des structures et de la technologie est associée aux matériaux composites avancés et aux éléments structurels.

Les matériaux à gradient de propriétés en tant que composite avancé ont été initialement conçus comme matériaux de barrière thermique pour les structures aérospatiales et les réacteurs à fusion et maintenant ils sont également considérés comme des matériaux structurels potentiels et récemment, ils sont de plus en plus pris en compte dans diverses applications. pour maximiser les forces et les intégrités de nombreuses structures d'ingénierie.

L'augmentation spectaculaire de l'utilisation des matériaux et structures à gradient de propriétés dans tous les types de structures d'ingénierie (par exemple, le génie civil, l'aérospatiale, l'automobile et les structures sous-marines, ainsi que dans les prothèses médicales, les cartes de circuits électroniques et les équipements sportifs) et le nombre de revues et les documents de recherche publiés au cours des deux dernières décennies attestent qu'il y a eu un effort majeur pour développer des systèmes de matériaux composites et pour analyser et concevoir des composants structuraux fabriqués à partir de matériaux composites.

Les fondations sont des éléments ou des systèmes physiques importants en raison de leur large éventail d'application dans différents domaines scientifiques et techniques, y compris la mécanique, le civil, l'électricité, la nanotechnologie. En fonction des applications du système structural considéré, les chercheurs ont proposé plusieurs types de modélisation pour les fondations. Ils sont très attractifs pour les chercheurs en raison de leurs applications cruciales dans différents systèmes. L'un des principaux objectifs des chercheurs est d'étudier le comportement dynamique et statique de l'interaction structures-fondations.

La première et la plus simple présentation d'une fondation a été proposée par Winkler. Ce modèle est connu sous le nom de modèle élastique linéaire de Winkler . Les modèles à deux paramètres sont appelés mécanismes selon lesquels une couche relie les extrémités supérieures de l'élément de la fondation entre elles. En conséquence, les fonctions force-déplacement pour ce type de fondation sont continuées car les extrémités supérieures des éléments sont reliées par une couche de cisaillement.

### **Quelques travaux antérieurs**

Le concept de structures composites avancées, telles que les structures à gradient de propriétés, a été proposé comme matériau de barrière thermique et mécanique à plus haute résistance. Ce type de matériau est connu sous le nom de matériau gradué fonctionnellement (FGM). Ce matériau hybride est obtenu en mélangeant deux matériaux (céramique et métal) avec un certain pourcentage de volume. (Fourn et al. 2018; Ait Atmane et al. 2015). Les métaux sont utilisés depuis longtemps dans la plupart des secteurs technologiques, en raison de leur excellente résistance mécanique et rigidité. Cependant, dans des conditions de température élevée, la résistance mécanique du métal devient faible, comme avec les matériaux composites traditionnels. Les structures en céramique ont d'excellentes caractéristiques de résistance thermique. Cependant, les applications céramiques sont généralement limitées en raison de leur faible dureté. C'est pourquoi une combinaison de deux matériaux nous donne des matériaux avec une meilleure résistance mécanique et thermique. Le rapport de mélange des composants varie régulièrement et les propriétés du matériau changent de manière constante et continue dans toute l'épaisseur (Ait Yahia et al. 2015 ; Nebab et al. 2019). Cette philosophie a été initiée au début des années 1980 par les Japonais afin de créer un matériau servant de barrière thermique. (Koizumi M. 1997).

De nombreuses études ont été menées pour prédire et évaluer le comportement mécanique des structures à gradient de propriétés en utilisant diverses théories de modélisation. Reddy et Cheng 2001 a présenté la formulation théorique et les modèles d'éléments finis pour les plaques FGM par le biais de la théorie de la déformation de cisaillement du troisième ordre. Les formulations tiennent compte du thermo-couplage, de la dépendance temporelle et de la non-linéarité géométrique des plaques FGM de type Von Karman. En divisant le déplacement transversal en parties flexionnelle, de cisaillement et d'étirement d'épaisseur. Bennai et al. [2015] ont étudié la vibration libre et le flambage des poutres sandwich à gradient de propriétés en tenant compte d'une nouvelle théorie du cisaillement d'ordre supérieur en quasi-3D. Le



comportement dynamique des plaques et des poutres FGM a été étudié, en utilisant diverses théories de déformation de cisaillement, par Ait Yahia et al. [2015], Ayache et al. [2018], Fourn et al. [2018], Ait Atmane et al. [2015].

Benadouda et al (2017) utilisent une approche de déplacement basée sur une théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur pour analyser le comportement mécanique des poutres fonctionnellement graduées. L'analyse de stabilité thermique des coques cylindriques, tronquées et coniques complètes en matériau fonctionnellement gradué soumises à des charges combinées et reposant sur des fondations élastiques pour deux conditions aux limites est étudiée par Sofiyev (2011). Un modèle tridimensionnel pour une plaque FGM soumise à des contraintes mécaniques et charges thermiques est présenté par Reddy et Cheng (2001). Şimşek, (2010) a effectué une analyse dynamique non linéaire d'une poutre graduée fonctionnellement avec des supports articulés-articulés en raison d'une charge harmonique mobile en utilisant la théorie des poutres de Timoshenko avec les relations déformation-déplacement non linéaires de von-Kármán. Sobhy (2013) étudie le comportement de vibration et de flambement d'une plaque sandwich en matériau à gradient exponentiel (FGM) reposant sur une fondation élastique Pasternak dans différentes conditions aux limites. De nouvelles fonctions pour les déplacements dans le plan médian sont suggérées pour satisfaire les différentes conditions aux limites. Yaghoobi et al (2014) ont étudié la vibration libre non linéaire et le comportement post-flambement d'une poutre à gradation fonctionnelle reposant sur une fondation élastique non linéaire sous chargement thermomécanique ; le problème a été résolu en utilisant la méthode d'itération de variation (VIM). Chakraverty et Pradhan (2014) analysent le comportement dynamique de plaques rectangulaires exponentielles fonctionnellement graduées dans des environnements thermiques dans des conditions aux limites générales. Vo et son équipe ont étudié les réponses statiques, vibratoires et de flambement de poutres sandwich à greffage fonctionnel en utilisant une théorie quasi-3D ; ces recherches sont données dans Vo et al (2014). Une théorie non polynomiale méthode a été utilisée par Gupta et al. (2018) pour résoudre un problème statique et dynamique de plaque FGM ; ce dernier travail a été développé par Gupta et Talha (2017a) pour étudier les comportements en flexion et dynamique non linéaires d'une plaque en matériau gradué fonctionnellement (FGM) géométriquement imparfait. L'effet fondation Pasternak est étudié dans cette recherche. L'effet variable du facteur Winkler élastique a été étudié, récemment, par Nebab et al (2019), en utilisant une théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé.

Reddy et Cheng (2001) ont proposé un modèle tridimensionnel pour une plaque FG soumise à des charges mécaniques et thermiques. Le comportement vibrationnel non linéaire des plaques FGM a été étudié par Woo et al. (2006) en utilisant la théorie de Von Karman pour une grande déflexion transversale. Sobhy (2013) a étudié le comportement aux vibrations et au flambement d'une plaque sandwich en matériau à gradation exponentielle reposant sur des fondations élastiques dans diverses conditions aux limites. a présenté une théorie de déformation de cisaillement efficace pour la vibration libre de plaques FG rectangulaires épaisses basée sur une fondation élastique. Benferhat et al. (2016) ont analysé la réponse de flexion de la plaque FG avec des porosités. Zhang et al (2016) ont étudié le comportement dynamique de plaques quadrilatérales composites renforcées de nanotubes de carbone à grade fonctionnel mince à modérément épaisses reposant sur des fondations élastiques en utilisant la méthode des moindres carrés mobiles améliorée de Ritz.

### **Objectifs principaux**

L'objectif principal de cette thèse est d'étudier l'effet de la porosité sur le comportement statique et dynamique des structures non homogènes sur assises à raideurs variables. Pour une fondation élastique, nous cherchons à utiliser les différentes approches et la précision de la modélisation du comportement des sols. Dans la plupart des recherches, la fondation élastique est censée avoir une réponse uniforme, cependant, en fait, les couches de sol sont hétérogènes ; nous nous concentrons sur ce point et son effet sur le comportement mécanique des structures. Cette théorie actuelle n'a que quatre inconnues contre d'autres théories qui ont cinq inconnues ou plus. Les propriétés des matériaux des poutres fonctionnellement graduées sont supposées varier continuellement à travers l'épaisseur selon différents modèles de distribution. Les équations d'équilibre des plaques, reposant sur la fondation élastique, sont dérivées en utilisant le principe des travaux virtuels appelé, aussi, principe d'Hamilton.

Les structures composites avancées considérées dans ce travail sont des structures bidimensionnelles continuellement variables suivant la plus petite direction de la structure, intégrant plusieurs couches, par alternance, aux propriétés mécanique différentes. En tant que structures bidimensionnelles, nous considérons celles dont la dimension, généralement l'épaisseur, est négligeable par rapport aux deux autres dans les directions planes. Les structures bidimensionnelles typiques sont les plaques et les coques. Dans notre étude actuelle, nous nous concentrerons sur les plaques de différentes épaisseurs, c'est-à-dire les plaques minces, les plaques moyennement épaisses et les plaques épaisses. Les plaques sont supposées sans

courbure suivant les deux directions dans leur plan. Dans le cas des plaques, un système de référence cartésien est utilisé.

### **Démarche de l'étude et contenu de la thèse**

Le travail est organisé en quatre chapitres :

Le premier chapitre de ce travail consiste à donner une vue générale sur les matériaux non-homogènes FGM. Tout d'abord, l'histoire, le développement et la définition générale des matériaux à propriétés graduellement variables sont présentés.

Le second chapitre présente une étude bibliographique sur la porosité dans les poutres et plaques et les théories de modélisation de structures non-homogènes reposant sur fondations élastiques. Les théories monocouches équivalentes, les théories de Zigzag et formulation unifiée de Carrera (CUF) sont présentées. Nous nous sommes concentrés sur des théories monocouches équivalentes. Pour les approches de modélisation de la fondation élastique visant à représenter le sol, le model « Winkler Pasternak » est utilisé.

Le troisième chapitre s'intéresse au développement d'une formulation mathématique pour étudier l'effet double de la variation de la raideur de la fondation et de la porosité sur le comportement dynamique et statique des poutres FGM basées sur une théorie d'ordre supérieur et considérant l'effet de cisaillement.

Enfin, la formulation actuelle sera validée par une étude paramétrique détaillée.

Le quatrième chapitre consiste à une présentation des résultats pour une validation des modèles analytiques poutres FGM posée sur des fondations élastiques variables. Puis une étude paramétrique concernait l'effet de variabilité de la raideur des fondations et de la porosité suivant l'épaisseur de la poutre sur le comportement statique et vibratoire des poutres confectionnées en FGM.

Nous terminerons la thèse par une conclusion générale reflétant le contenu de la thèse, ainsi que des perspectives pour de futurs chercheurs inspirées au cours de ce travail.

# **Chapitre I : Généralités Sur Les Matériaux Composites Avancés -FGM-**

---

## I.1. Introduction

Dans le domaine de la mécanique des matériaux Les composites ont pris un large éventail d'utilisation dans les différentes disciplines tel que l'aéronautique, le nucléaire ou le domaine médical.

Ces matériaux naissent de la mixture de deux ou plusieurs matériaux ; le choix de ces matériaux est motivé par la recherche de propriétés voulus dans des endroits bien déterminés et pour des sollicitations bien définies offrant des réponses internes plus rassurantes que ceux des matériaux traditionnels.

Les matériaux stratifiés, ou appelés aussi matériaux composites conventionnels, représentent un empilement de patchs à travers une interface nette définie comme point de décollement dû à l'augmentation, à la concentration et à la diffusion des contraintes à cet endroit.

Depuis le début du vingtième siècle, l'utilisation des matériaux composites multicouches dans différentes applications d'ingénierie a largement augmenté. Malgré les avantages que présentent ces matériaux (grande rigidité, résistance mécanique élevée, légèreté, réduction des coûts...), ils apportent aussi des problèmes spécifiques liés principalement à leur hétérogénéité. Il est bien connu dans la littérature que la différence des propriétés mécaniques entre des couches adjacentes peut entraîner des contraintes très élevées aux interfaces. Ces contraintes inter faciales élevées peuvent engendrer des fissurations au niveau des interfaces qu'on appelle délaminage, des fissures, et d'autres mécanismes d'endommagement en raison du changement brutal des propriétés mécaniques et thermiques d'une couche à l'autre. Ce problème a attiré beaucoup d'attention en raison de son influence significative sur la résistance et la rigidité des structures composites multicouches [Saeedi N. 2012]. À la fin des années 80, une équipe de chercheurs japonais a proposé de surmonter ces difficultés par une solution d'une transition continue des propriétés recherchées, en concevant de nouveaux matériaux qui possèdent un gradient de composition permettant de diminuer les fortes concentrations de contrainte par l'utilisation des matériaux fonctionnellement gradués(en anglais : Functionally Graded Materials « FGM ») dont les propriétés mécaniques varient lentement et continuellement dans l'épaisseur de la structure [Baron C. 2008] .

## I.2. Concept des matériaux FGM

Le concept des matériaux fonctionnellement gradués (Functionally Graded Materials: FGM) fut proposé à la fin des années 1980 par un groupe de chercheurs au laboratoire national d'aérospatial (National Aerospace Laboratory. STA) au Japon pour développer des pièces capables de résister aux sollicitations thermiques et mécaniques dans les systèmes de propulsion et le fuselage des navettes spatiales [Niino M. 1988]. Une pièce peut être qualifiée de matériau FGM lorsqu'elle est composée d'au moins deux matériaux ou alliages primaires qui sont distribués continuellement ou dis-continuellement à l'intérieur de la structure. Lorsque la distribution est continue, on parle alors de matériaux à gradient continu [Kawasaki A. 1997].

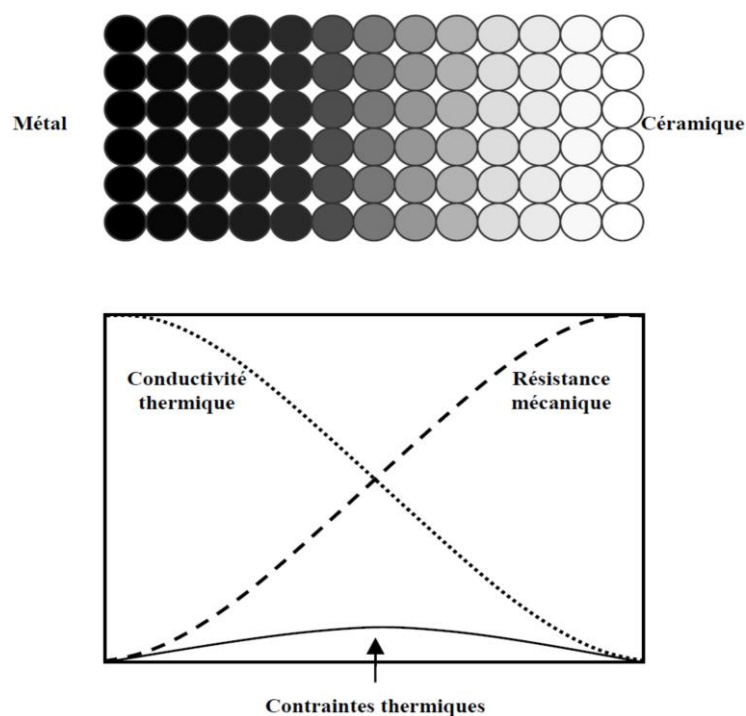
Dans ce cas, la composition et la microstructure du matériau changent graduellement à l'intérieur de la pièce. Cette distribution des matériaux permet de modifier les propriétés à l'intérieur même de la pièce. Des gradients de propriétés peuvent ainsi être réalisés au niveau mécanique, physique, chimique, etc. Le FGM consiste en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux. Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Les vides sont également considérés comme une composante des matériaux FGM [Kokini K. 1990]. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes. La plupart des « FGM » sont constitués des céramiques et des métaux dont les propriétés mécaniques sont comparés dans le tableau I.1.

**Tableau I.1 :** Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

La face à haute température	Céramique	- Bonne résistance thermique ; - Bonne résistance à l'oxydation ; - Faible conductivité thermique.
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique-métal	-Élimination des problèmes de l'interface ; -Relaxer les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	- Bonne résistance mécanique ; - Conductivité thermique élevée, - Très bonne ténacité.

Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure d'un matériau FGM est illustré dans la figure I.1. en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [Boch P. 1989].

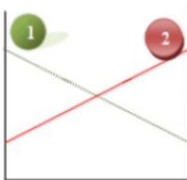
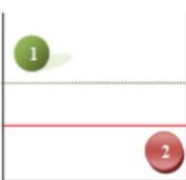
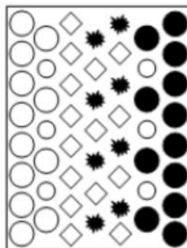
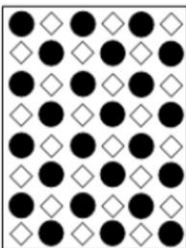
La figure I.2 montre les concentrations de contraintes dans les panneaux de protection thermiques conventionnels au niveau des interfaces (changement brutal de composition). Il montre également comment un FGM peut alléger. Ces concentrations de contraintes en changeant graduellement les propriétés matérielles et assure toujours la protection thermique trouvée dans les barrières thermiques conventionnelles.



**Figure I.1** : Concept des matériaux fonctionnellement gradués [Houari M.S.A., 2011]

### I.3. Différences entre matériaux FGM et matériaux composites traditionnels

Les matériaux fonctionnellement gradués sont donc des matériaux composites avec un caractère au microscope non homogène. Les changements continus de leur microstructure distinguent le FGM des matériaux composites conventionnels. Le changement continu de la composition a comme conséquence les gradients dans les propriétés de FGM. Les différences dans la microstructure et les propriétés entre FGM et matériaux composites conventionnels sont illustrées schématiquement sur la figure I.2

<b>Propriétés</b>	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>		
<b>Structure</b>	<p><b>Éléments constituants:</b></p> <p>Céramique ○</p> <p>Métal ●</p> <p>Microporosité ◊</p> <p>Fibre ◆</p>		
<b>Matériaux</b>	<b>Exemple</b>	<b>FGM</b>	<b>NON-FGM</b>

**Figure I.2 :** Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels [Koizumi M. 1996]

#### I.4. Histoire et développement des matériaux FGM :

L'idée du concept FGM n'est pas nouvelle ; bien que le procédé est innovant, mais la nature nous a montré de tas de matières conçue pas cette composition fonctionnelle. Il y'a plusieurs exemples de matériaux naturelles qui sont montrés dans la Figure. I.3

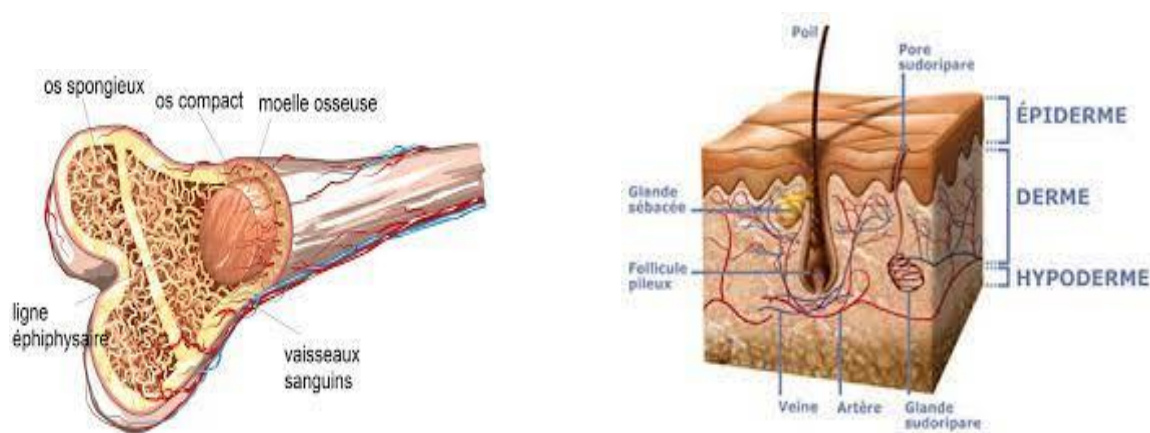


**Figure.I.3 :** Conception fonctionnelle lithologique et sédimentologique de la Grotte du Bison à Arcy-sur-Cure

Les roches montrée dans la Figure I.3 sont inciser par la coulée de la cure qui se trouver sur les granites du Morvan. Le schéma montre une texture graduelle de ce profil géologique ;



tous comme les os ou la peau humaine il ont un profil de conception fonctionnel. La peau est dure dans des endroits et souple dans d'autres, en fonction de son épaisseur et son rôle comme montre la figure I.4 [Jha et al. 2013].



**Figure.I.4** : Quelques exemples de FGM d'origine naturelle et conçu par les humains

Les constituants de FGM conçus par les humains impliquent généralement deux phases de matériau isotrope; bien qu'un nombre quelconque de configurations chimiquement et spatialement compatibles soit possible. Ces composants comprennent souvent les alliages techniques de magnésium, d'aluminium, de cuivre, de titane, de tungstène, d'acier, etc. et les céramiques de structure avancées telles que la zircone, l'alumine, le carbure de silicium et le carbure de tungstène.

Le concept de FGM est né au milieu des années quatre-vingt dans le laboratoire national d'aérospatial au Japon, qui fût suivi par d'autres pays : l'Allemagne, la Suisse, Les Etats- Unis, la Chine et la Russie. En 1984 M. Niino et ses collègues à Sendai ont eu l'idée de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion [Koizumi M. 1992]. Les changements continus dans la composition, dans la microstructure, et même dans la porosité de ces matériaux a comme conséquences des gradients des propriétés matérielles telles que les propriétés mécaniques et la conductivité thermique [Koizumi M. 1997] , Cette nouvelle classe de matériaux composites peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques [Nguyen T. K. 2007] . En 1987, un vaste programme pour le développement des FGM sur la relaxation des contraintes thermiques c'est-à-dire des matériaux constituant les parois des engins spatiaux pouvant travailler à des

températures de surface de 1800°C et à un gradient de température de l'ordre de 1300°C [Koizumi M., 1997] . En 1987-1989, c'est la fabrication de petites pièces expérimentales (1-10

mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures de surfaces maximales de 2000K et à un gradient de température de 1000K.

Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure ; les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes : le système SiC/C par C.V.D., le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres, le système TiB<sub>2</sub>/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température, et enfin le système (Ni-Cr-Al-Y)/ (ZrO<sub>2</sub>-Y<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) par projection plasma à double torches [Okamura H. 1991]. En 1990-1991, c'est la réalisation des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes avec d'autres applications : Biomécaniques, Technologie de capteur, Optiques....etc. [Okamura H. 1991]. En 1992, c'est la période de l'amélioration de l'efficacité des FGM dans la conservation d'énergie photoélectrique, thermoélectrique, thermonucléaire [Kieback B. 2003]. A partir de ces résultats, un nouveau projet national intitulé « recherche sur les matériaux pour la conservation de l'énergie avec le plan fonctionnel gradient de structure », communément dénommé « FGM partie II, a été lancé en 1993, pour la promotion de la science et la technologie.

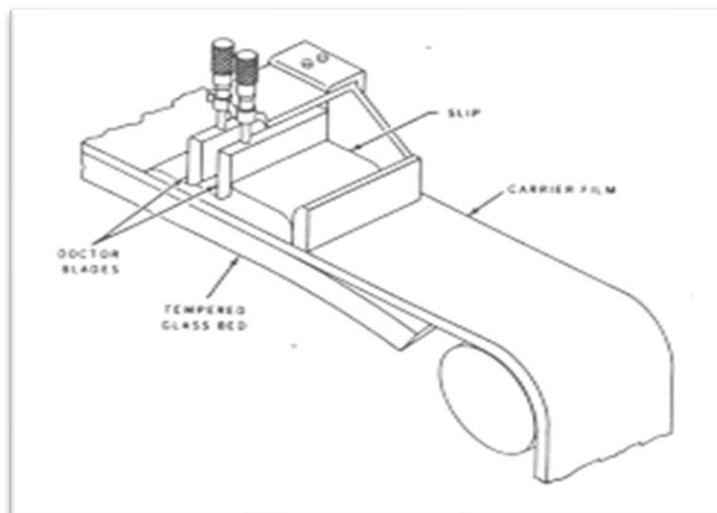
## **I.5. Méthodes d'élaboration des matériaux fonctionnellement gradués**

Depuis plus de vingt ans, une partie importante de la recherche concernant les structures en matériaux fonctionnellement gradués a été consacrée à leur fabrication. Une grande variété de méthodes de production a été mise au point ou adaptée en vue de produire ce type de pièces [Kieback B. 2003].

Les principaux procédés disponibles pour la production des matériaux FGM sont expliqués ci-après :

### **I.5.1 Coulage en bande (Tape Casting)**

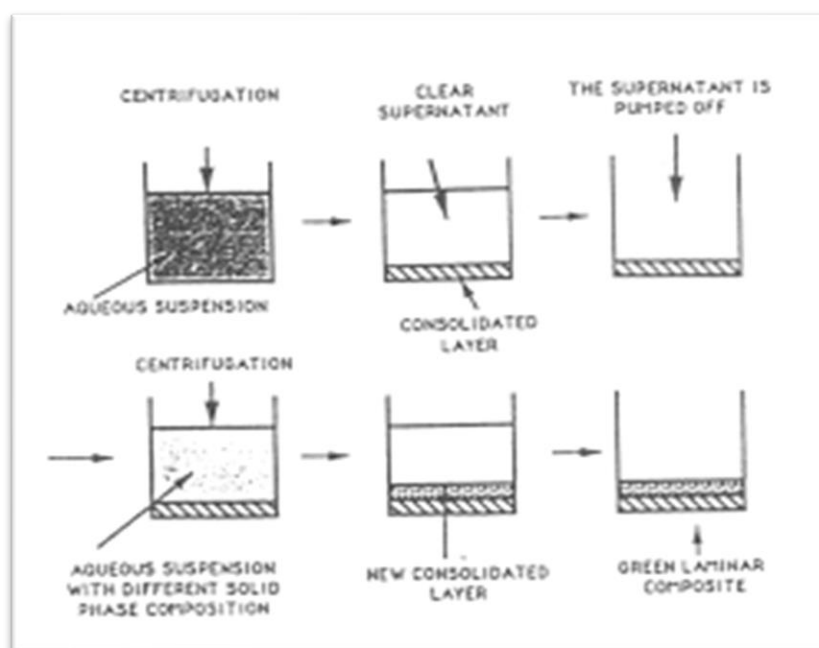
Le processus de coulage en bande connu sous la dénomination anglaise (Tape Casting) a été employé pour préparer les diverses bandes de poudres fines en suspension non aqueuses, dans lequel les matériaux composites laminaires et les matériaux à (FGM Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-TiC) ont été produits en coupant, en empilant, en stratifiant le matériau, ensuite en enlevant la reliure, et en pressant les produits obtenus à chaud. Le coulage en bande est une méthode utile pour modifier les propriétés mécaniques des composés en céramique [Zeng Y. 2000].



**Figure.I.5** : Coulage en bande (Tape Casting)

### I.5.2 Compaction sèche des Poudres

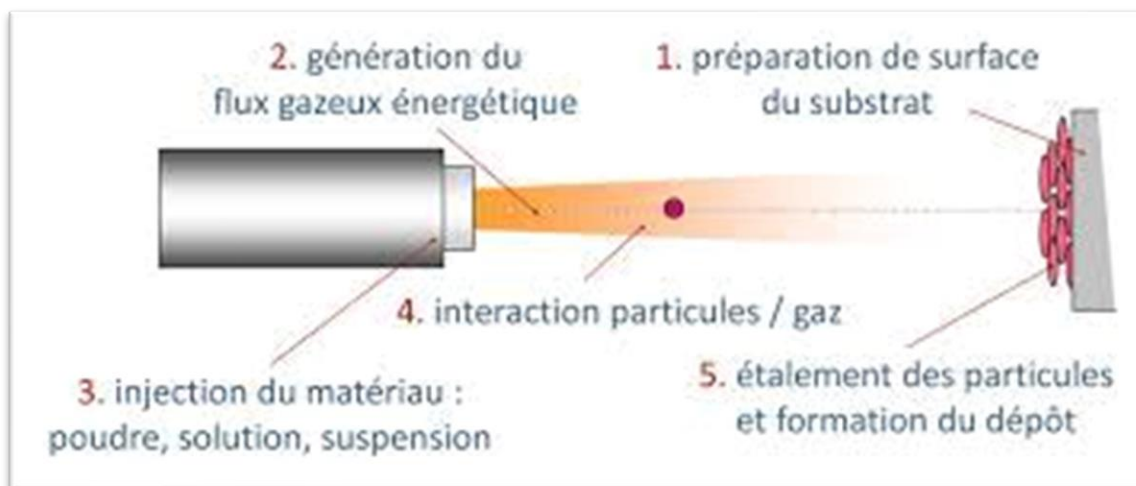
Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite, la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi, généralement, par une pression isostatique et un délitage. La densification sera enfin l'étape finale comme montre la figure I.6 [Bishop A. 1993]. Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication des pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique et de façon industrielle.



**Figure.I.6** : Procédé de Compaction sèche des Poudres

### I.5.3 Projection plasma

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat comme montre la figure I.7.

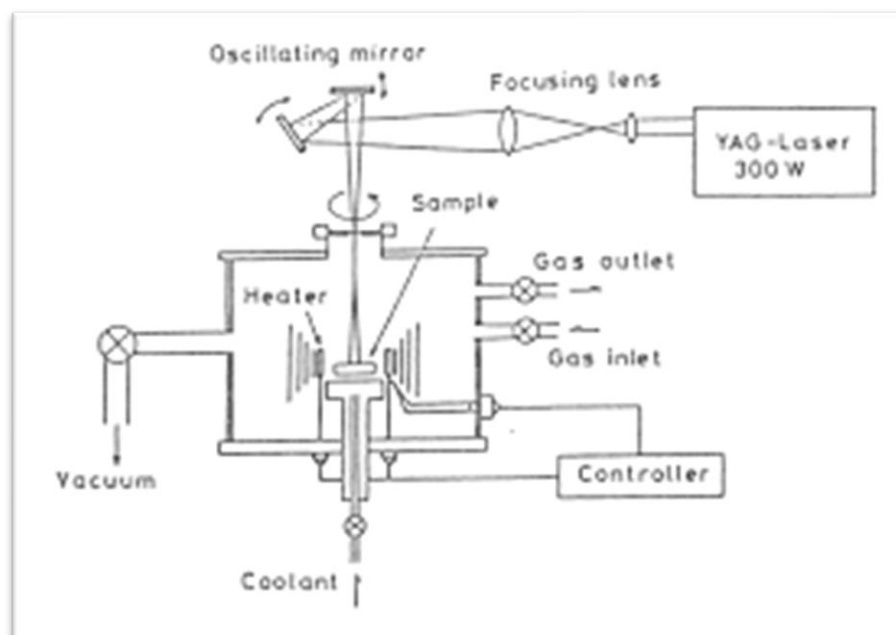


**Figure.I.7** : Procédé de Projection plasma

La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM. L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique [Steffens H.D. 1990].

### I.5.4 Frittage et Infiltration

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique [Takahashi M. 1990].



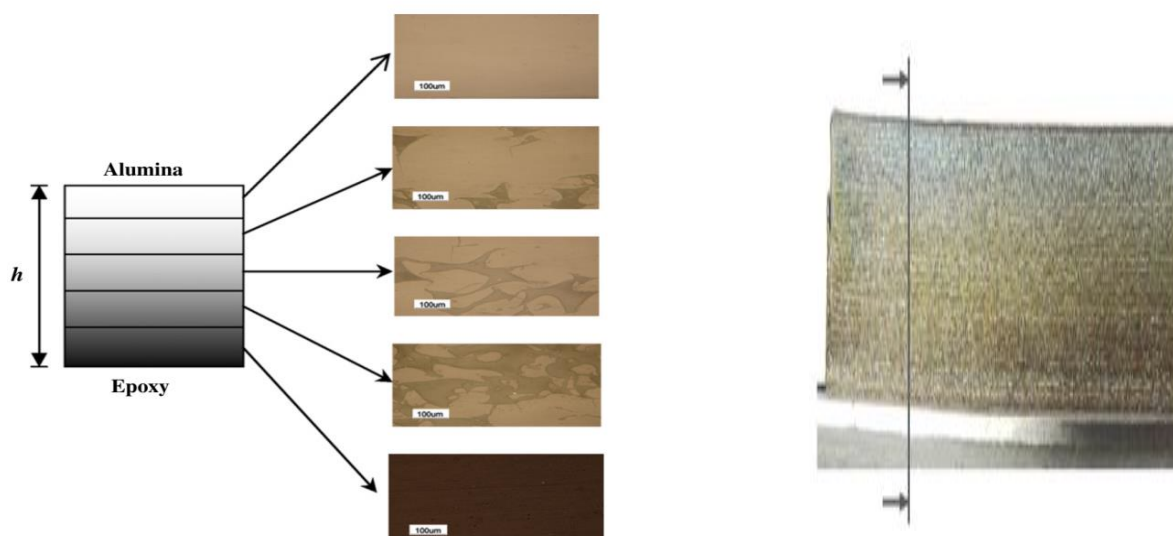
**Figure.I.8:** Procédé de Frittage et Infiltration

Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

### I.6. Exemples sur des structures en matériaux à gradient propriété :

#### a) Poutre :

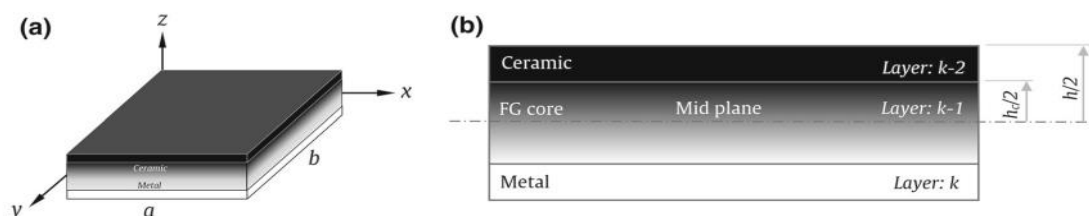
La géométrie d'une poutre FG stratifié en alumine-époxy est représentée sur la figure I.9 Et un exemple de compositions de matériaux dans toute l'épaisseur de la poutre FG.



**Figure.I.9:** Composition d'une poutre FGM suivant son épaisseur.(Wattanasakulpong et al. 2012)

#### b) Plaque :

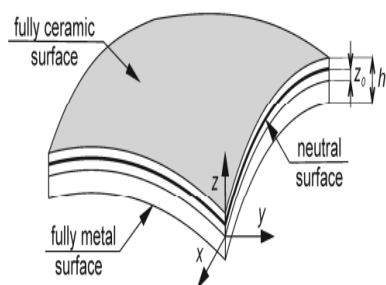
On considère une plaque de rectangulaire gradation fonctionnelle (FG) dans le système cartésien  $(x, y, z)$ , comme représenté sur la Fig.I.10. La longueur, la largeur et l'épaisseur de la plaque sont respectivement  $a$ ,  $b$  et  $h$ , avec une variation de matériaux (métal-céramique) continue à travers l'épaisseur  $z$ .



**Figure.I.10:** Plaque sandwich FG a géométrie et coordonnées, séquence de couches b

### c) Coque :

La section de coquille FGM avec la surface supérieure en céramique (c) et la surface métallique inférieure (m) est supposée, Fig.I.11. La variation continue de la fraction volumique de céramique  $V_c$  et métal  $V_m$  à travers l'épaisseur de coquille est décrite par la loi de puissance.



(a)



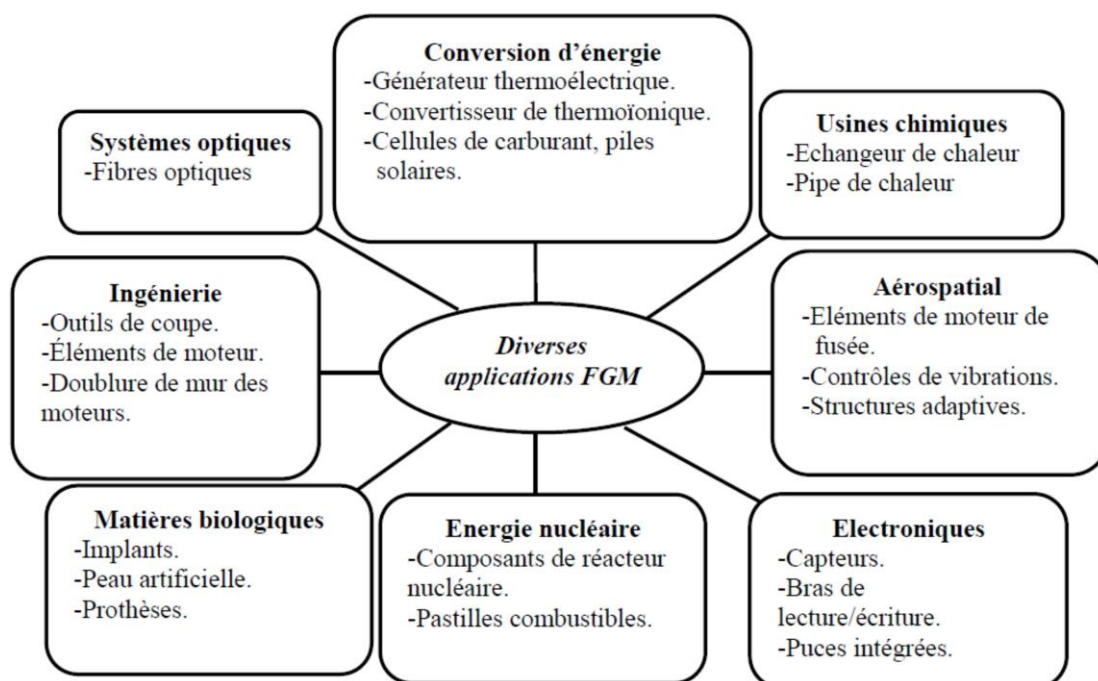
(b)

**Figure.I.11:** (a) Section coquille FGM, (b) Gauche: génération d'un composite métal-carbure avec gradient de composition par gabarit de poutre laser. À droite: tube NiCrBSi gradué avec 0-80 vol.% Cr3C2 [Kieback et al. 2003]

## I.7. Domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués

Le concept des matériaux fonctionnellement gradués est applicable dans des nombreux domaines, comme il est illustré dans la figure I.12. Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont fourni deux propriétés contradictoires telles que la conductivité thermique et d'isolation thermique dans un matériau. Actuellement, elles permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et elles sont applicables dans

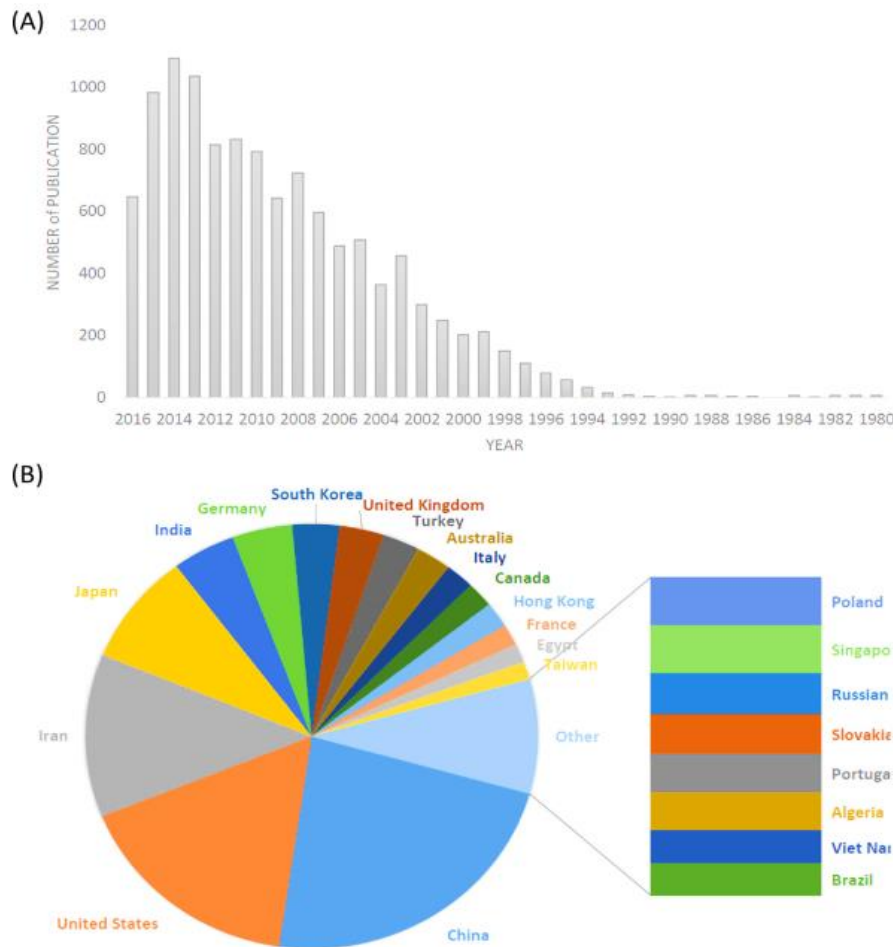
un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, nucléaire et semi-conducteurs.



**Figure.I.12:** Les principaux domaines d'application des FGM

## I.8. Évolution de la recherche scientifique autour des FGM

Des recherches approfondies ont été menées dans le domaine des matériaux à gradient propriété (FGM) en tant que matériaux et structures. Le nombre de publications dans ce domaine de recherche a augmenté d'une manière exponentielle au cours des 20 dernières années. La figure 1.13.A illustre le nombre annuel de publications sur les FGM fournies par le moteur de recherche de Scopus. La figure I.13.B illustre également la contribution de différents pays à la création de connaissances dans ce domaine.



**Figure.I.13:** - (A) Le nombre annuel de publications sur les matériaux à gradient propriété (FGM), telles que fournies par le moteur de recherche de Scopus (à partir de juillet 2016).

- (B) Génération de connaissances dans le domaine des matériaux à gradient propriété (FGM), par pays (basé sur les données de Scopus pour la période 1980-2016).

## I.9. Les matériaux impropres (poreux)

Selon le glossaire international d'hydrologie, la porosité peut être définie comme étant la propriété d'un milieu, d'un sol ou d'une roche de comporter des pores, c'est à dire des vides interstitiels interconnectés ou non. Elle peut être exprimée comme l'ensemble des vides (pores) d'un matériau solide, ces vides sont remplis par des fluides (liquide ou gaz). La porosité est aussi une valeur numérique définie comme le rapport entre le volume des vides et le volume total d'un milieu poreux.

$$\alpha_0 = \frac{V_{pores}}{V_{total}} \quad (I.1)$$

Avec :  $\alpha_0$  c'est la porosité,  $V_{pores}$  le volume des pores et  $V_{total}$  le volume total du matériau, c'est-à-dire la somme du volume de solide et du volume des pores.

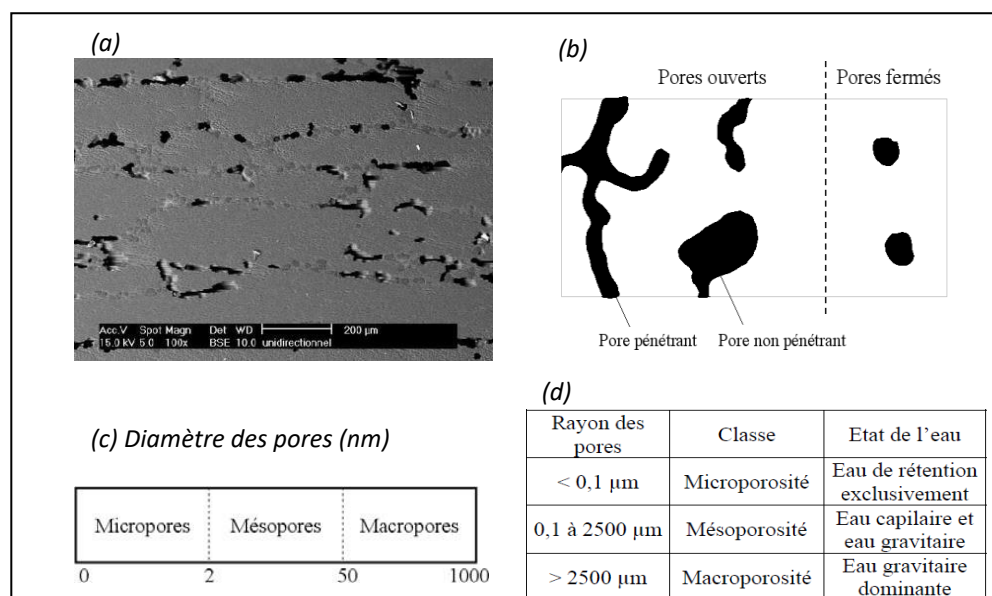


La porosité est donc définie à la fois comme une propriété caractéristique d'un milieu poreux et comme un paramètre qui l'exprime quantitativement (rapport de volumes, sans dimension).

D'après cette définition, il est possible de se représenter le défaut de porosité dans un matériau composite comme étant de très petites cavités emprisonnant à priori de la matière gazeuse (tâches noires sur la Figure I.14 (a)). [Schoeller. 1955], distingue deux catégories de pores représentés sur la Figure I.14 (b) :

- les porosités ouvertes composées de vides inters communicants connectés à la partie extérieure du matériau.- les porosités fermées, isolées à l'intérieur du matériau et ne permettant aucune perméabilité. Les pores pénétrants sont des pores ouverts qui ont la particularité de relier au moins deux faces du matériau poreux.

Les nombreuses applications des matériaux poreux font appel à des tailles de pores qui peuvent varier de l'échelle atomique à l'échelle millimétrique. L'IUPAC (International Union of Pure and Applied Chemistry) a recommandé la nomenclature relative à la taille des pores présentée à la Figure I.14 (c) [Schaefer. 1994]. En se référant à la gamme des tailles moyennes des interstices d'un milieu poreux et aux états physiques de l'eau contenue en leur sein, une seconde classification des porosités avait préalablement été proposée [Schoeller. 1955]. Celle-ci définit une micropore (ou pore matricielle) comme une cavité de diamètre inférieur à  $0,1 \mu\text{m}$  et une macropore (ou porosité structurale) comme une cavité de diamètre supérieur à  $2,5\text{mm}$ . Les méso porosités (ou porosité texturale ou capillaire) sont donc les interstices de diamètre intermédiaire compris entre  $0,1 \mu\text{m}$  et  $2,5 \text{mm}$  (Figure I.14 (d)).



**Figure.I.14:** (a) Micrographie MEB des porosités étudiées, (b) Schématisation des différents types de pores (c) et (d) Nomenclatures relatives à la taille des pores. [Ledru. 2009]

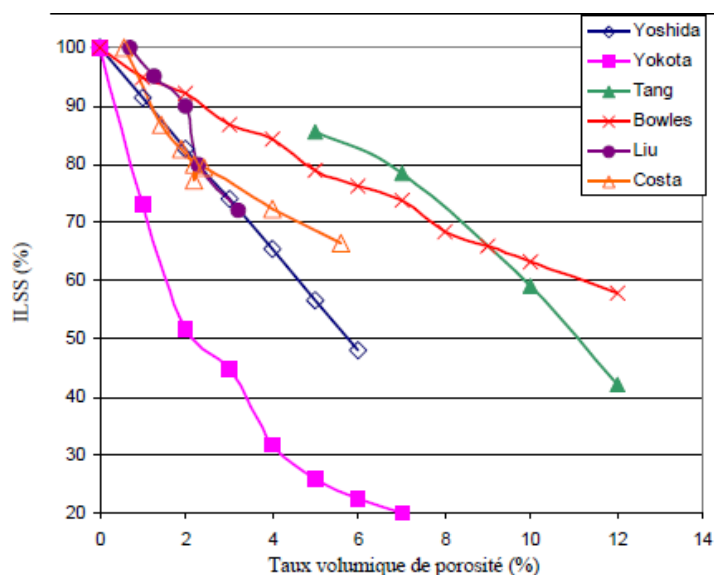
La porosité est donc un concept indépendant de la forme et des connexions entre les pores. Seuls les volumes sont considérés. Néanmoins, il est important de signaler que pour les matériaux composites, le concept de porosité correspond à des interstices de petites tailles (ordre millimétrique et inférieur) par rapport aux fissures, diaclases ou délaminages.

### **I.10. Revue des travaux antérieurs sur le taux volumique de porosité et son effet sur les propriétés mécaniques du matériau**

Très recherchée dans la fabrication des mousses ou des membranes filtrantes, la porosité est en revanche néfaste aux matériaux composites à hauts performances. L'impact de ce défaut a fait l'objet de beaucoup d'attention, comme en atteste le nombre important d'études sur ce sujet. Tous les auteurs sont d'accord pour affirmer qu'en dessous d'un certain pourcentage volumique, compris entre 0.5% et 1% suivant le matériau étudié, la porosité n'a pas d'influence sur le comportement de la pièce si elle est iso répartie.

En revanche, pour des taux de porosité plus élevés, les propriétés mécaniques de la pièce sont affectées de manière significative et en particulier le cisaillement interlaminaire. En effet, la résistance au cisaillement inter laminaire, notée ILSS (InterLaminar Shear Stress), est très sensible à la présence de ces inclusions gazeuses. Sa diminution représentée à la (Figure- I.15), a été mesurée en fonction du taux de porosité par plusieurs chercheurs [Yokota. 1978], [Yoshida et al. 1986], [Tang et al. 1987], [Bowles et al. 1992], [Costa et al. 2001], [Liu et al. 2006 (a)].

La diminution moyenne de l'ILSS a été estimée en moyenne à 6% par unité volumique de taux de porosité pour des stratifiés carbone/époxy. On peut remarquer de grandes disparités suivant les études considérées. Celles-ci sont dues essentiellement à la nature des matériaux des différentes études (tissu pré imprégné (Costa), ou nappes avec différents types de fibres (T300 (Bowles), T700 (Liu)...), et différents types de résine de classe 120°C (Yoshida) ou 180°C (autres).



**Figure.I.15:** Variation relative de l'ILSS en fonction du taux de porosité pour des matériaux composites carbone/époxy [Wisnom et al. 1996]

L'étude la plus réaliste permettant d'expliquer la diminution de l'ILSS en fonction de l'augmentation du taux volumique de porosité est proposée par [Wisnom et al. 1996]. Ces travaux mettent en évidence l'initiation des fissures à partir des porosités dès que ces dernières sont suffisamment grandes (diamètre équivalent  $> 0.2$  mm). Les résultats présentés montrent aussi que la présence de porosité diminue la surface de contact entre les fibres et la matrice, ce qui favorise la rupture de la pièce en cisaillement inter laminaire.

Plusieurs modèles sont proposés afin de prévoir numériquement la valeur de la contrainte à rupture en cisaillement inter laminaire d'une pièce en fonction de son pourcentage volumique de porosité [Bowles et al. 1992], [Yoshida et al. 1986]. Cependant, quel que soit le modèle considéré, les résultats théoriques diffèrent sensiblement des résultats expérimentaux. Ceci est dû aux nombreuses hypothèses simplificatrices utilisées pour l'élaboration de certaines équations, notamment concernant la forme des porosités (sphérique ou cylindrique), et de leur répartition supposée homogène au sein de la pièce. Une telle répartition est en réalité rarement constatée. De plus, il est signalé que la dispersion des résultats augmente avec le taux

volumique de porosité, ce qui rend difficile la comparaison des données expérimentales et théoriques pour des taux de porosité supérieurs à 10%.

D'après toutes ces études, il est indéniable que la porosité affecte le comportement en cisaillement inter laminaire du matériau composite, dès que le pourcentage volumique de ce défaut est supérieur à 1%. Les autres caractéristiques mécaniques (traction, compression, cisaillement plan) sont également affectées par la présence de porosité, mais de façon moindre, bien que non négligeable [Harper et al. 1987], [Liu et al. 2004].

De manière générale, une augmentation du taux volumique de porosité entraîne une diminution des propriétés mécaniques du matériau. L'une des raisons invoquée [Olivier.1994], [Olivier et al. 1995] notamment pour expliquer la chute de la contrainte à rupture en traction et en compression, concerne la déformation locale des fibres due essentiellement à l'apparition de ces porosités et à leurs mouvements au sein de la matrice durant le cycle de cuisson. On peut aussi raisonnablement penser que la présence de porosité au sein du stratifié modifie à la fois le transfert d'effort entre la résine et le renfort mais aussi la cohésion de celui-ci. Cette hypothèse reste cependant encore à démontrer.

Dans le milieu industriel aéronautique, il est admis qu'une pièce structurale comportant un taux volumique de porosité supérieur à 2% doit être rebutée. On comprend dès lors l'intérêt de cette étude pour minimiser au maximum l'apparition de ces défauts, apparition qui peut être due à plusieurs causes détaillées ci-après.

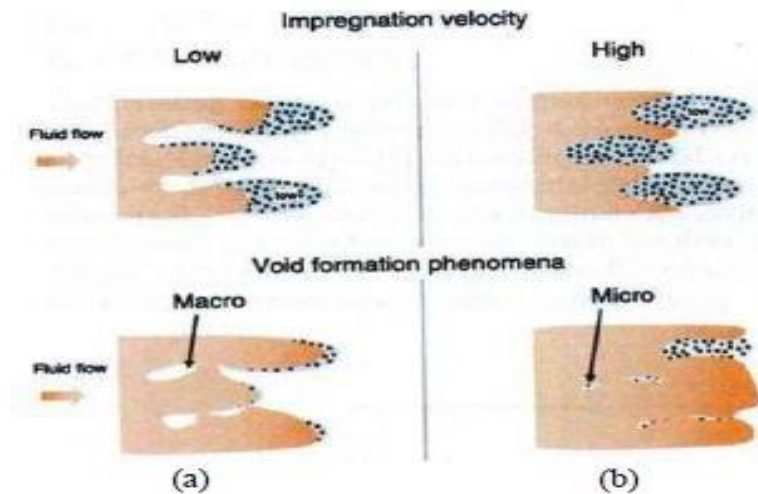
## **I.11. Causes possibles d'apparition de la porosité**

### **I.11.1. Les causes mécaniques :**

La création de porosité par emprisonnement mécanique d'air lors de la conception de la pièce est la cause la plus facile à comprendre intuitivement.

Les deux exemples suivants illustrent ce type de création :

Le premier concerne l'emprisonnement de poches d'air dans la résine durant sa phase de fabrication (malaxage, etc....) ou durant l'imprégnation du renfort. Ce deuxième point est largement développé par de nombreux auteurs travaillant sur la mise en œuvre des composites par RTM ou par infusion (RLI, RFI...). L'intégralité de ces travaux explique la formation lors du moulage par LCM de deux types de porosités : les macros porosités observées entre les mèches et les micros porosités, observées au sein même des mèches (figure I.16).



**Figure.I.16:** Formation des macros et micros porosités en fonction de la vitesse de déplacement du fluide lors de l'imprégnation d'un renfort : (a) force de capillarité prédominante, (b) force de viscosité prédominante [Trochu et al. 2006].

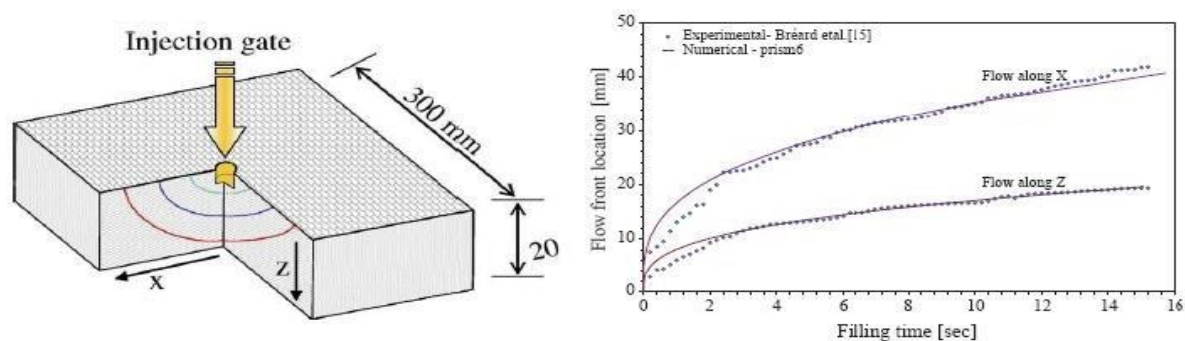
Les macros porosités sont principalement présentes dans la pièce lorsque l'écoulement de la résine, lors de l'imprégnation du renfort, est gouverné par la pression visqueuse (viscosité faible) contrairement aux micros porosités qui sont majoritaires lorsque l'écoulement est gouverné par la capillarité (viscosité importante) [Binétruy. 2004], [Lundström. 1996], [Bréard et al. 2003]. La vitesse d'écoulement de la résine étant régie par la loi de Darcy (I.2) [Trochu et al. 2006], il est important d'ajuster la différence de pression imposée au système en fonction de la perméabilité du renfort et de la viscosité de la résine afin d'obtenir une vitesse d'écoulement intra-mèche et inter-mèche la plus uniforme possible.

$$V = - \frac{[K]}{\mu} \nabla P \quad (I.2)$$

Avec :  $v$  ( $m.s^{-1}$ ) la vitesse moyenne du fluide (Darcy),  $[K]$  ( $m^2$ ) le tenseur de perméabilité du renfort,  $\mu$  (Pa.s) la viscosité de la résine et  $\nabla P$  (Pa.m-1) le gradient de pression

L'objectif majeur de ces recherches consiste à développer un modèle numérique permettant de simuler l'imprégnation du renfort en fonction de la forme de la pièce. Les variables prises en compte sont la pression ou dépression appliquée au système, la perméabilité du renfort et la viscosité de la résine directement liée à la température de l'outillage (moule,...), ainsi que le nombre de point d'injection. Une fois développés, ces modèles ont servi à l'optimisation des paramètres précédemment cités pour limiter la création des macros et micros porosités [Pillai et al. 2004], [Pillai. 2007], [Kang et al. 2001], [Patel et al. 1996], [Yang et al.

2006], [Yamaleev et al. 2006], [Frishfelds et al. 2008]. Malgré la difficulté rencontrée dans l'expression du tenseur de perméabilité du renfort, les résultats numériques sont en bon accord avec les résultats expérimentaux. La figure I.9, représente en fonction du temps, la position du front de résine injectée dans un renfort tridimensionnel. La courbe continue, représentative des résultats numériques obtenus par Trochu [Trochu et al. 2006], concorde presque parfaitement les résultats expérimentaux obtenus par [Bréard. 1997].



**Figure.I.17:** Comparaison des résultats expérimentaux et numériques donnant la position du front d'une huile silicone injectée de manière 'demi-sphérique' dans un renfort anisotrope [Trochu et al. 2006].

Ces modèles ne sont pas développés plus en détail car relativement éloignés de la situation correspondant à cette étude. Les procédés de mis en œuvre ne sont pas les mêmes et les viscosités des résines utilisées lors de l'injection sont environ mille fois plus faible que celles des résines utilisées au sein des prés imprégnés. Les phénomènes de création de la porosité sont donc différents en fonction du procédé de mis en œuvre considéré.

Le second exemple de création de porosité par voie mécanique concerne directement l'étape de drapage qui se fait de plus en plus à l'aide de machine automatique à placement de nappes ou de fibres (figure I.16). Des microcavités gazeuses sont observées lorsqu'une fibre est rompue ou lors d'une pliure, d'un chevauchement de plis ou d'un décalage entre deux nappes au sein du composite.



**Figure.I.18:** (a) machine automatique à placement de nappes, (b) Tête de la machine à placement de fibres.

Bien que très largement mentionnée dans la littérature, la création de porosité par voie mécanique n'a fait l'objet que d'un très petit nombre d'études. Seuls Ranganathan et Pitchumani [Ranganathan et al. 1995], [Pitchumani. 1996] se sont intéressés à la modélisation du comportement des porosités créées lors du drapage automatisé d'une pièce en composite thermoplastique AS-4/PEEK. A la différence du pré imprégné therm durcissable, le drapage de nappe carbone/thermoplastique nécessite l'application de température élevée afin de favoriser l'adhésion des plis entre eux et d'assurer la consolidation de la pièce. La vitesse de dépose de la nappe, la pression d'application et la température imposée par la machine de dépose, ainsi que la configuration du rouleau sont les paramètres principaux à contrôler pour minimiser la présence de porosité dans la pièce finale.

Hormis l'effet de la température, cette étude pourrait être extrapolée à la dépose de nappe pré-imprégnée à fibre carbone / résine époxyde. Il serait alors nécessaire de contrôler la vitesse de dépose, la configuration du rouleau ainsi que la pression de compactage imposé par le galet de la tête de dépose lors de l'étape de drapage. Une fois optimisé, ce procédé de drapage permet d'obtenir une très bonne adhésion homogène des plis entre eux, ce qui est beaucoup plus difficile à garantir sur le drapage manuel.

Enfin, la porosité pourrait aussi provenir de grosses particules ou d'un amas de celles-ci présentes dans le pré imprégné (particules volant dans l'air, poussières, cheveux....). Cette cause de création mécanique de la porosité peut cependant être partiellement écartée, car le drapage en milieu industriel s'effectue dans une pièce confinée appelée 'salle blanche', à température et taux d'hygrométrie contrôlés, et surtout avec un taux de particules de poussière présentes dans l'air ambiant contrôlé, inférieur à 100 000 particules par m<sup>3</sup>.

En plus des causes mécaniques, la présence de porosité peut aussi être expliquée en considérant certains phénomènes thermodynamiques.

### I.11.2 Les causes thermodynamiques

L'observation du diagramme de phase de l'eau montre qu'une bulle de vapeur dans la phase liquide se forme soit en augmentant la température localement dans le liquide [Divinis et al. 2005], soit en provoquant une rapide décompression [Payvar. 1987]. Ces deux paramètres favorisent en effet les nucléations homogène et hétérogène des germes initiateurs de bulle. Seul un aperçu des théories relatives à la nucléation, présentées par [Kardos et al. 1983], [Kardos et al. 1986], [Kwak et al. 1998], [Lee et al. 1996] sont abordées dans cette partie.

Au sein de la résine, les molécules de gaz diffusent au hasard et finissent par se rencontrer d'autant plus facilement que leur concentration est élevée. Les molécules diffusantes, à l'état de monomère s'additionnent donc successivement pour former des agglomérats qui ont une taille suffisante pour être qualifiés de germes (entre 50 et 100 molécules pour une espèce chimique à faible masse molaire comme l'eau [Kingery et al. 1975]). Le processus de formation de tels germes met en jeu l'enthalpie libre,  $\Delta G$ , de Gibbs. La création d'un germe nécessite la création d'un volume et d'une surface, qui met en jeu deux énergies antagonistes : L'énergie de volume, apportée par la sursaturation de la solution, et l'énergie de surface résistant à la croissance du germe. Si le germe est supposé sphérique de rayon  $R_p$  (m), l'enthalpie libre  $\Delta G$  (J.mol<sup>-1</sup>) est donnée par :

$$\Delta G = - \frac{4\pi R_p^3}{3V_m} kT \ln (\beta) + 4\pi R_p^2 \gamma_{lv} \quad (I.3)$$

Avec :  $k$  (J.K<sup>-1</sup>) la constante de Boltzmann;  $T$ (K) la température du milieu,  $V_m$  (m<sup>3</sup>) le volume d'une molécule dans le germe,  $\gamma$  (Pa.m) ou ( J.m<sup>-2</sup>) l'énergie de surface entre la porosité et la matrice et  $\beta$  le degré de saturation.

Le premier terme correspondant à l'énergie de volume est le produit du nombre de molécules contenues dans le germe, par la différence de potentiel chimique. Le terme  $\beta$ , représentatif du degré de saturation, peut être exprimé dans le cas de la cavitation, c'est-à-dire d'une création de bulle gazeuse, par le rapport entre la pression de gaz  $P_{gaz}$  et la pression du liquide  $P_s$  [Fletcher. 1993].

Dans le cas d'une rapide dépression,  $V_m$  augmente et  $\Delta G$  diminue, ce qui favorise la création de bulle de gaz. Le second terme de l'expression (I.3) représente l'énergie de surface. La compétition entre ces deux termes est montrée à l'aide de la Figure I.19. La taille du germe critique, c'est à dire le rayon critique  $R_p^*$  (équation (I.4)) dit de Gibbs-Thomson- Freundlich), est obtenu à l'équilibre.

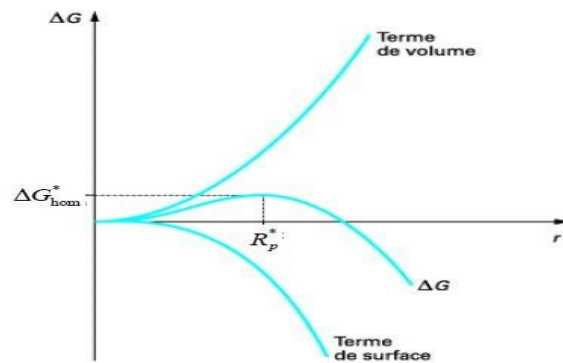


$$R_p^* = \frac{2V_m \gamma LV}{KT \ln(\beta)} \quad (I.4)$$

A la taille critique  $R_p^*$  le germe est en équilibre instable. Il croît ou se dissout selon qu'il gagne ( $R_p > R_p^*$ ) ou qu'il perd ( $R_p < R_p^*$ ) une molécule.

Le calcul de la barrière énergétique à franchir appelée enthalpie libre d'activation critique, pour créer une porosité est donné par l'équation (I.5).

$$\Delta G_{hom}^* = \frac{4}{3} \pi (R_p^*)^2 \gamma_{lv} \quad (I.5)$$



**Figure.I.19:** Enthalpie libre d'activation de nucléation homogène en fonction du rayon du germe.

En combinant les équations précédentes, il est possible de montrer qu'une température élevée du système ainsi qu'une importante sursaturation en molécules génératrices de germe vont favoriser la nucléation: l'augmentation de  $T$  et  $\beta$  entraîne une diminution de  $R_p^*$  et donc  $\Delta G_{hom}^*$ , la vitesse à laquelle apparaissent les germes, appelée fréquence de nucléation, est le nombre de germes formés par unité de temps et de volume de fluide. Cette fréquence  $J_{hom}$  s'écrit dans le cas de la nucléation homogène par une loi similaire à une loi d'Arrhénius (I.6)

$$J_{hom} = A_{hom} \exp\left(-\frac{\Delta G_{hom}^*}{KT}\right) \quad (I.6)$$

Avec :  $A_{hom}$  ( $\text{nb.m}^{-3}.\text{S}^{-1}$ ) le coefficient cinétique

Ce coefficient peut être modifié suivant la viscosité du fluide, pour prendre en compte la diminution de la fréquence de nucléation dans le cas d'un milieu très visqueux. Cette expression confirme le fait que plus la température du système est élevée, plus la fréquence de nucléation est élevée.

Le mécanisme de nucléation homogène décrit précédemment reste très rare en milieu industriel où il est impossible d'éliminer tous les corps étrangers (poussière, etc...). La

nucléation va alors se développer de préférence au contact de ces corps étrangers, appelés substrats. On parlera de nucléation hétérogène. En supposant une géométrie sphérique du germe, la résolution des équations montre que le rayon de courbure du germe critique  $R_p^*$  pour la nucléation hétérogène est le même que celui donné par l'équation (I.4). En revanche, la barrière d'énergie à franchir appelée enthalpie libre d'activation critique de nucléation hétérogène  $\Delta G_{hét}^*$  est fonction de l'angle de contact  $\theta$  entre le germe et le substrat. Sa valeur est décrite par l'équation (I.7).

$$\Delta G_{hét}^* = f \Delta G_{hom}^* \quad \text{avec} \quad f = \frac{1}{2} - \frac{3 \cos \theta}{4} + \frac{1}{4} \cos^3 \theta \quad (I.7)$$

$\cos \theta$  étant inférieur à 1, la barrière énergétique à franchir pour la création d'un germe est plus faible pour une nucléation hétérogène qu'une nucléation homogène. La nucléation hétérogène se fera donc plus facilement que la nucléation homogène et ce d'autant plus que le germe présentera une affinité avec le substrat ( $\theta$  décroissant, meilleur mouillabilité).

Cette conclusion est confirmée par l'expression de la fréquence de nucléation Hétérogène  $J_{hét}$  (I.8) :

$$J_{hét} = A_{hét} \exp \left( - \frac{\Delta G_{hét}^*}{KT} \right) \quad (I.8)$$

Pour cette nucléation hétérogène, nous retrouvons les mêmes influences des paramètres opératoires (température, pression...) que pour la nucléation homogène.

La création de porosité par nucléation est une hypothèse très réaliste, notamment lors de la polymérisation. Le système subit alors une dépression, une augmentation de la température jusqu'à 180°C et les concentrations en espèces diffusantes peuvent considérablement augmenter, en particulier si le pré imprégné contient quelques résidus de solvant ou d'humidité, absorbés lors de sa phase de fabrication, ou de stockage. En revanche, la détermination expérimentale de certains paramètres développés dans ce paragraphe, tel que le coefficient cinétique  $A_{hét}$  limite considérablement l'utilisation de ce modèle pour prévoir la fréquence d'apparition des germes en fonction de la température.

Une fois le germe formé sous des conditions thermodynamiques favorables, ou une fois la microcavité créée au sein du matériau par voie mécanique, leur stabilité, leur croissance ou leur dissolution va dépendre de plusieurs facteurs et notamment des paramètres imposés lors de la

polymérisation.

## **I.12 Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons étalé une bibliographie des matériaux non-homogènes, de type matériaux composites avancés nommés, aussi, matériaux à gradient propriété. La définition générale, le développement et l'histoire des matériaux à gradient de propriétés ont été présentés en détail.

La variation spatiale progressive des propriétés des matériaux permet de créer des structures innovantes dans de nombreux domaines d'application. Etant donné que la distribution progressive du matériau suivant l'épaisseur de ce type de structures provoque des changements dans leur comportement.

De plus, nous avons vu de manière générale différentes méthodes de fabrication des matériaux à gradient propriété et leur application dans divers domaines de l'ingénierie. Enfin, on peut conclure que le matériel présenté a attiré les chercheurs dans de nombreux domaines pour leurs caractéristiques qui ne l'ont pas dans les matériaux conventionnels.

L'appropriation de modèles de structures poreuses bien définis pour l'analyse des FGM doit être clarifiée ; plus particulièrement les structures poreuses épaisses, basées sur les théories de gauchissement, c'est ce que nous verrons au chapitre suivant.

# **Chapitre II : Caractérisations géométrique et matérielle des poutres sur fondation élastique**

---

## II.1 Introduction

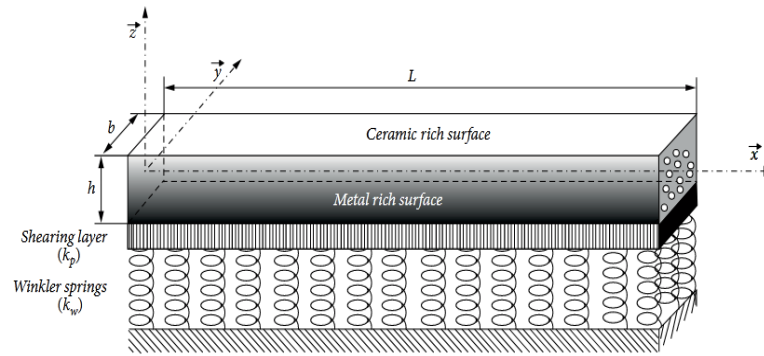
En génie des structures, les matériaux à gradient de propriétés sont principalement utilisés comme matériaux constitutifs des poutres. Ainsi, ce chapitre est consacré à un aperçu des théories sur les poutres élastiques les plus courantes, à partir des théories classiques et d'autres à ordre élevé. Il est bien connu que ces modèles structurels sont basés sur des hypothèses concernant la cinématique de déformation ou la contrainte à travers l'épaisseur de la plaque [Demetris P. 2015].

En général, ces hypothèses permettent de ramener un problème tridimensionnel à un problème bidimensionnel. Ainsi, ces théories conviennent pour décrire le comportement des plaques minces et/ou moyennement épaisses et/ou épaisses [Demetris P. 2015].

Les chercheurs ont utilisé différentes approches pour parvenir à l'équation différentielle régissant une structure. Les modèles d'ordre réduit peuvent être globalement classés en trois catégories en fonction de la variable primaire adoptée pour arriver aux équations différentielles qui régissent leurs cinématiques [Altenbach H. 1998] [Khandan R. 2012] [Caliri Jr MF. 2017].

La première est appelée formulation basée sur le déplacement, dans laquelle les variables primaires sont les déplacements de la surface de référence. Les théories basées sur le déplacement prennent cette appellation car les variables primaires sont liées au champ de déplacement [de Lima AS. 2018]. En partant de leur champ de déplacement et en supposant des relations de déplacement-déplacement et constitutives, les contraintes et les déformations sont déterminées. La seconde est appelée formulation basée sur la contrainte ; ici les variables primaires sont les contraintes membranaires de la surface de référence. La dernière est appelée formulation mixte ; ici les variables primaires sont les déplacements du plan de référence et les contraintes transversales.

Les variables primaires sont définies sur la surface de référence ; cependant, la poutre est une structure physique tridimensionnelle, et donc les variables primaires seront également des fonctions connues dans le sens de l'épaisseur. La direction de l'épaisseur est omise. Les théories disponibles peuvent être davantage divisées en modèles basés sur la présupposition.



**Figure II.1 :** Coordonnées et géométrie d'une poutre poreuse fonctionnellement graduée reposant sur une fondation élastique variable.

## II.2 Les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles suivant l'épaisseur d'une poutre FGM

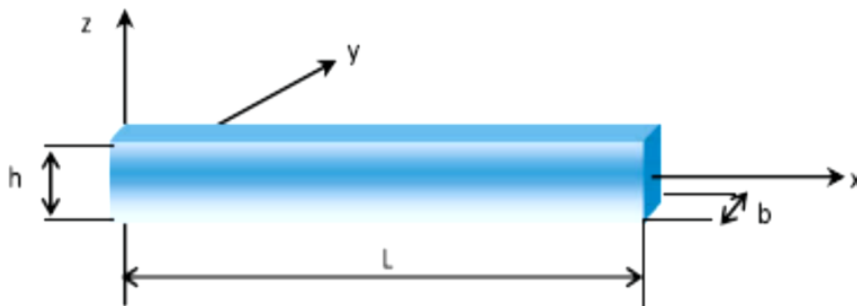
### II.2.1 Propriétés matérielles de la poutre P-FGM

La fraction volumique dans les P-FGM est assurée par une loi de puissance sous la forme :

$$g(z) = \left( \frac{z + \frac{h}{2}}{h} \right)^p \quad (\text{II.1})$$

Où  $p$  est un paramètre du matériau et  $h$  est l'épaisseur de la poutre. Une fois que la fraction de volume local  $g(z)$  est définie, les propriétés matérielles d'une poutre P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges :

$$E(z) = g(z) \cdot E_1 + [1 - g(z)] \cdot E_2 \quad (\text{II.2})$$



**Figure II.2 :** Les dimensions d'une poutre FGM [Ould Larbi, 2014]

Où  $E_1$  et  $E_2$  et sont respectivement les propriétés matérielles (modules de Young ou densité) de la surface inférieure ( $z = -h/2$ ) et de la surface supérieure ( $z = h/2$ ) de la poutre FGM. La

variation de ces propriétés dans la direction de l'épaisseur de la poutre P-FGM est représentée sur la (figureII.2), il apparaît clairement que le module de Young par exemple change rapidement près de la surface inférieure pour  $p > 1$ , et augmente rapidement près de la surface supérieure pour  $p < 1$ . Pour une résolution numérique, par éléments finis par exemples, Les propriétés matérielles effectives  $E$  de la couche de FGM, comme le module de Young  $E$ , et la densité et le coefficient de poisson  $\nu$  peut alors être exprimé comme suit :

$$E = \sum_{j=1} E_j g_j \quad (\text{II.3})$$

Là où le  $E_j$  et le  $g_j$  sont les propriétés matérielles et la fraction volumique de la couche  $jj$  (Figure.II.3.) et la somme des fractions de volume de tous les matériaux constitutifs fait l'unité :

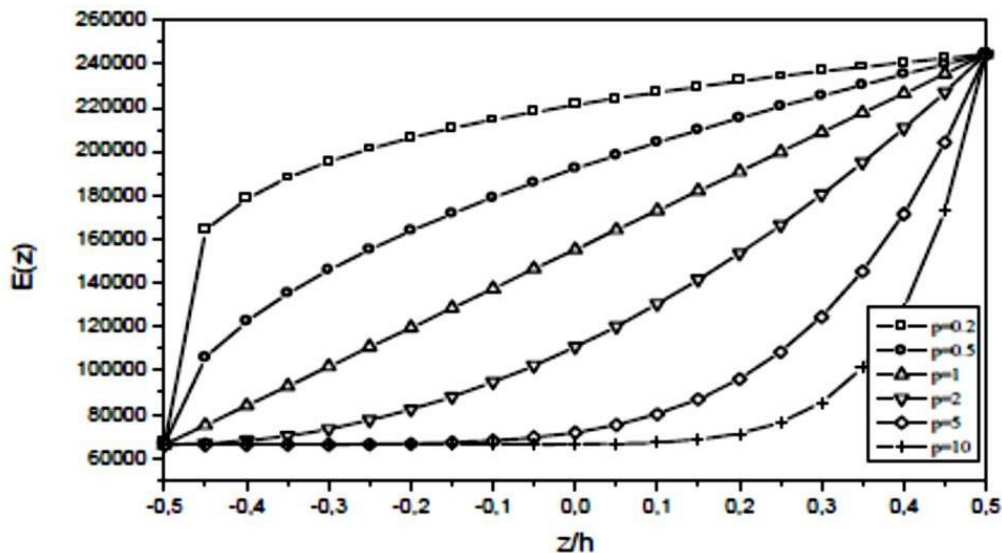


Figure II.3 : La variation du module de Young dans une poutre P-FGM.

## II.2.2. Propriétés matérielles de la poutre S-FGM

Si l'on rajoute une poutre P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une poutre composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interface des deux matériaux. Par conséquent, Chung et Chi ont défini la fraction de volume de la poutre FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces.

Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$g_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\frac{h}{2} - z}{\frac{h}{2}} \right)^p \quad \text{pour} \quad 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (\text{II.4})$$

$$g_2(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{\frac{h}{2} + z}{\frac{h}{2}} \right)^p \quad \text{pour} \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad (\text{II.5})$$

En utilisant la loi des mélanges, la propriété E de la poutre S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = g_1(z). E_1 + [1 - g_1(z)]. E_2 \quad \text{pour} \quad 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (\text{II.6})$$

$$E(z) = g_2(z). E_1 + [1 - g_2(z)]. E_2 \quad \text{Pour} \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad (\text{II.7})$$

La figure II.4 montre que la variation du module de Young selon les équations avec des distributions sigmoïdes, donc la poutre FGM est ainsi appelée (poutre S-FGM).

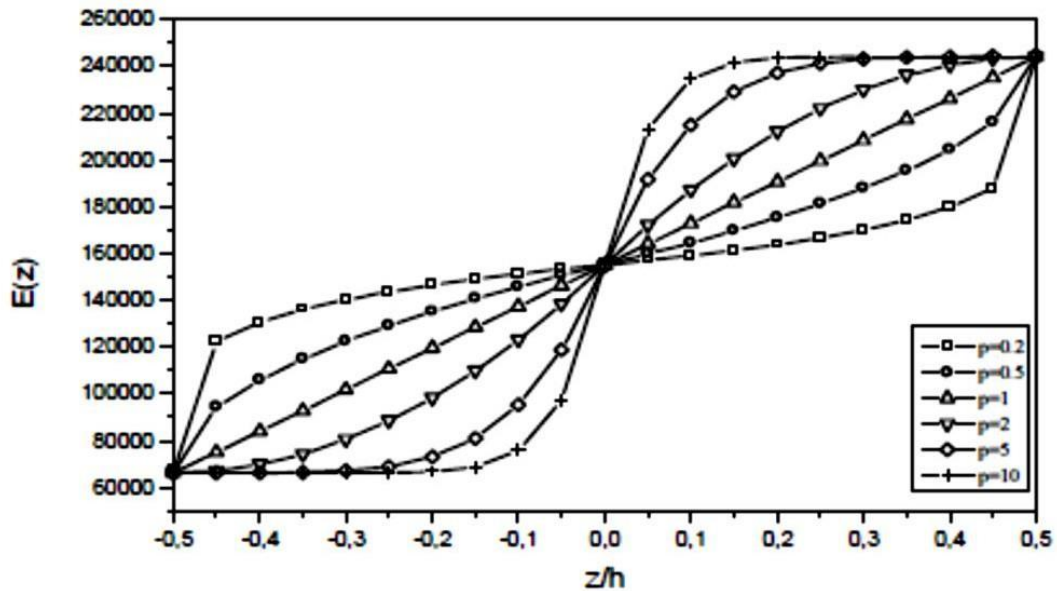


Figure II.4 : La variation du module de Young dans une poutre S-FGM.

### II.2.3. Propriétés matérielles de la poutre E-FGM

Beaucoup de chercheurs utilisent la fonction exponentielle pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la fonction exponentielle est donnée par :

$$E(z) = A e^{\beta(z + \frac{h}{2})} \quad \text{Avec} \quad A = E_2 \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{h} \ln \frac{E_1}{E_2} \quad (\text{II.8})$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la poutre E-FGM est représentée dans la figure II.5.



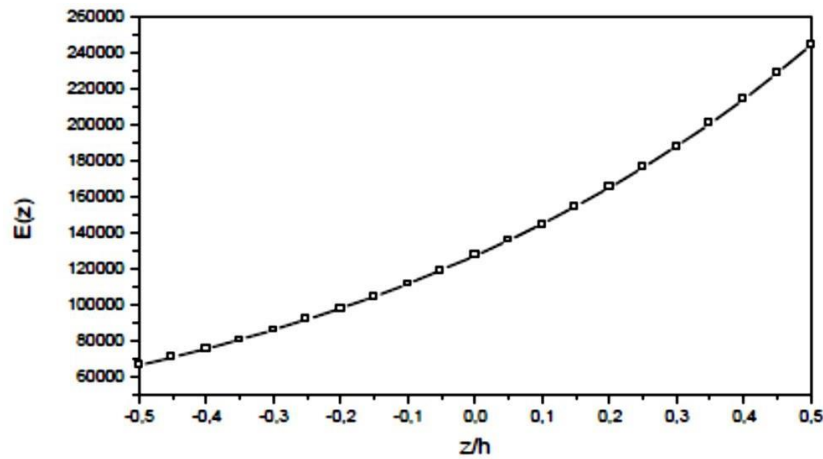


Figure II.5 : La variation du module de Young de la poutre E-FGM.

### II.3 Principe général d'équilibre - équations d'équilibre

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système soit en équilibre sont :

- les sommes des projections de toutes les forces sur 3 axes passant par un point quelconque non situés dans un même plan doivent être nulles,
- les sommes des moments par rapport à chacun des trois axes doivent être nulles.

Pour une construction (structure), la vérification de ces conditions signifie qu'elle ne peut se déplacer comme un tout (corps rigide), autrement dit elle est en équilibre.

Soient  $oxyz$  un repère trirectangle et  $F_x$ ,  $F_y$  et  $F_z$  les projections sur les axes  $ox$ ,  $oy$  et  $oz$  d'une force quelconque. Les conditions d'équilibre (a) et (b) s'écrivent (cas général) :

$$\begin{aligned}
 \sum F_x &= 0 & \sum M / x &= 0 \\
 \sum F_y &= 0 & \sum M / y &= 0 \\
 \sum F_z &= 0 & \sum M / z &= 0
 \end{aligned}
 \tag{II.9}$$

Les équations (II.9) sont appelées équations d'équilibre de la statique ou six équations universelles d'équilibre.

Dans le cas d'un système plan,  $xy$  par exemple, le système d'équations (II.9) se réduit à :

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum M / \Delta = 0
 \tag{II.10}$$

où  $\Delta$  est un axe quelconque perpendiculaire au plan  $xy$ .

Notons que les équations d'équilibre de la statique sont écrites en travaillant sur la configuration initiale du système, c'est-à-dire non déformée ; autrement dit les déformations sont négligées.

### II.4. Relations contraintes-efforts

Les efforts résultants et les moments agissant sur un élément de plaque (Figure II.6, II.7 et II. 8) [Ait yahia. 2015].

$$\{N\} = \{N_i\} = \begin{Bmatrix} N_x(x, y) \\ N_y(x, y) \\ N_{xy}(x, y) \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x(x, y, t) \\ \sigma_y(x, y, t) \\ \tau_{xy}(x, y, t) \end{Bmatrix} dz \quad (II.11)$$

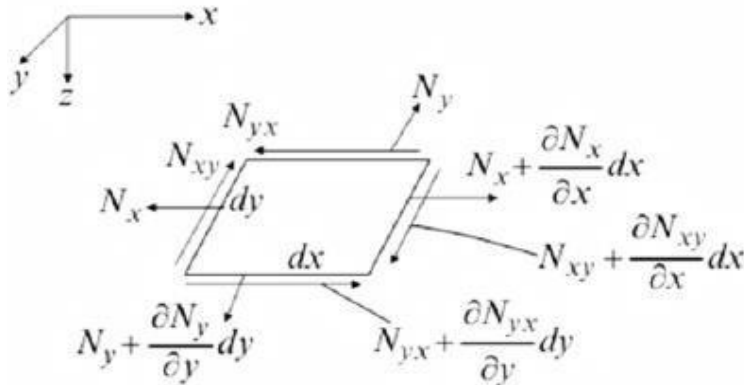


Figure II.6 : Efforts agissant dans le plan.

$$\{M\} = \{M_i\} = \begin{Bmatrix} M_x(x, y) \\ M_y(x, y) \\ M_{xy}(x, y) \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x(x, y, t) \\ \sigma_y(x, y, t) \\ \tau_{xy}(x, y, t) \end{Bmatrix} z dz \quad (II.12)$$

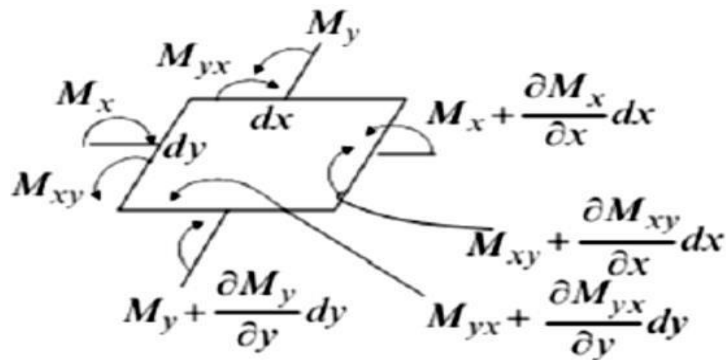


Figure II.7 : Moments agissant sur un élément.

$$\{Q\} = \{Q_i\} = \begin{Bmatrix} Q_x(x, y) \\ Q_y(x, y) \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \tau_{xz}(x, y, t) \\ \tau_{yz}(x, y, t) \end{Bmatrix} dz \quad (II.13)$$

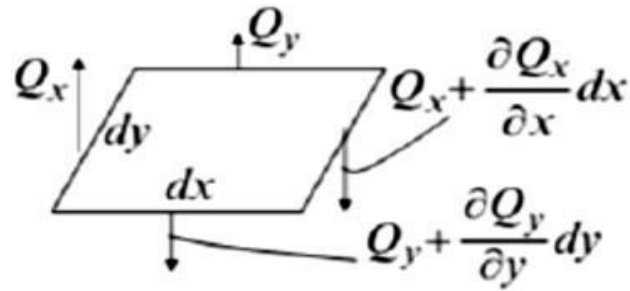


Figure II.8 : Efforts tranchants dans un élément.

## II.5. Le potentiel interne et ses applications

Dans ce chapitre seront examinées les relations qui existent entre les sollicitations agissant sur un système et les déplacements qu'elles produisent.

Les systèmes considérés sont généralement plans (géométrie et chargement) mais les développements théoriques s'appliquent à tous les systèmes, sauf précision contraire [Ait yahia. 2015].

Pour garder à la théorie toute sa généralité, tout en simplifiant autant que possible les notations, nous désignerons une sollicitation par  $F$  (sollicitation généralisée), que ce soit une force  $P$ , un couple  $C$  ou une sollicitation globale  $F$  ( $F_1, F_2, \dots, F_n$ ) et un déplacement par  $\delta$  (déplacement généralisé), que ce soit une translation (déplacement linéaire) ou une rotation  $\gamma$  (déplacement angulaire).

### II.5.1. Travail des forces extérieures et énergie de déformation

#### II.5.1.1. Notions de travail et de travail complémentaire

Pour fixer les idées, nous considérons le cas d'une barre prismatique soumise à une traction axiale  $F_1$  qui produit un allongement  $\delta_1$  (Figure II.9a).

Nous supposons que la force  $F_1$  est appliquée graduellement, d'une manière lente, de façon à ne produire aucune force d'inertie. Dans ces conditions, on dit que le chargement (force  $F_1$  ici) est appliqué statiquement et le déplacement engendré (ici un allongement) est relié à la force appliquée par une relation représentée par le diagramme " $F$ - $\delta$ " de la figure II.9b.

Soit  $F$  une valeur intermédiaire et  $\delta$  l'allongement correspondant. Un accroissement  $dF$  de la charge correspond à un allongement supplémentaire  $d\delta$ . Le travail élémentaire produit par  $F$  au cours de l'accroissement  $d\delta$  est défini par :

$$d\tau_e = F d\delta \quad (\text{II.14})$$

Il est représenté par l'aire hachurée (hachures inclinées) du diagramme  $F-d$  (Figure II.9b).

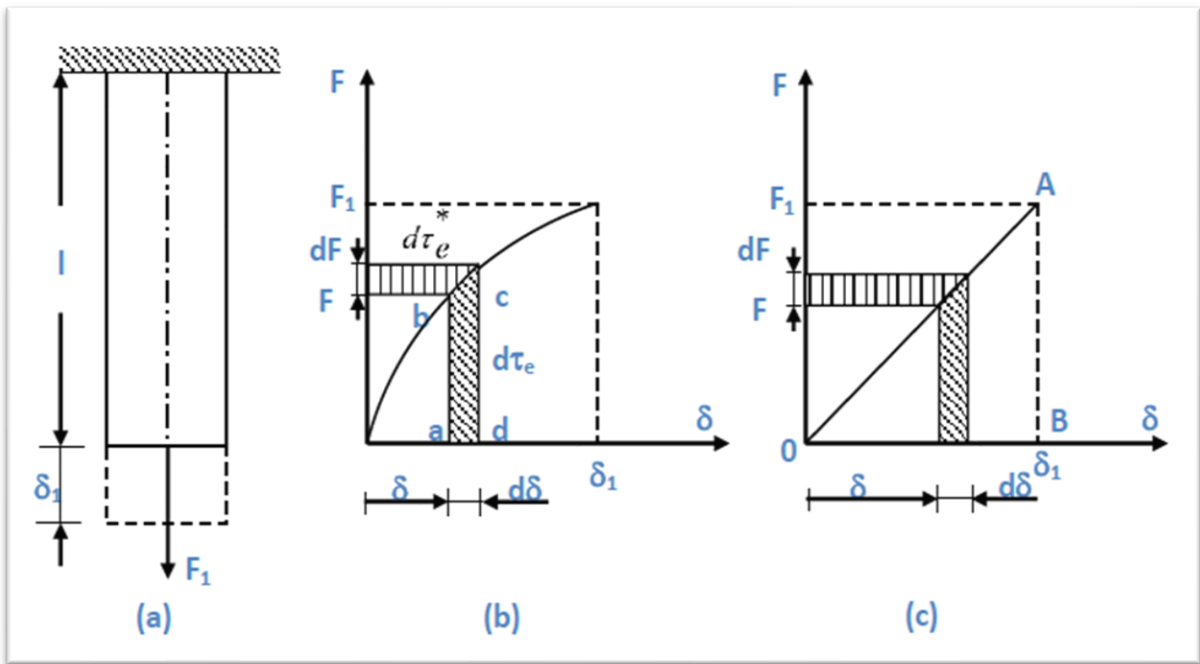


Figure II.9 : Diagramme  $F-\delta$  d'une barre prismatique.

Avec  $Fd\delta$  : représente plus exactement le rectangle "abcd". Autrement dit, le travail effectué par  $dF$  au cours du déplacement  $d\delta$ , qui est un infiniment petit d'ordre supérieur à 1, est négligé.

Le travail total effectué par la force  $F_1$  au cours du déplacement  $\delta_1$  est obtenu par sommation de travaux élémentaires, c'est-à-dire :

$$\tau_e = \int_0^{\delta_1} F d\delta \quad (\text{II.15})$$

Il est représenté par l'aire délimitée par la courbe  $F-\delta$  et l'axe des  $\delta$  jusqu'à  $\delta_1$ .

De même, on appelle travail complémentaire élémentaire du déplacement  $\delta$  au cours de l'accroissement de charge  $dF$  la quantité :

$$d\tau_e^* = \delta dF \quad (\text{II.16})$$

Le déplacement travail complémentaire total effectué par  $F_1$ , appliquée graduellement de 0 à  $F_1$ , au cours du  $\delta_1$  est donné par :

$$\tau_e^* = \int_0^{F_1} \delta dF \quad (\text{II.17})$$

C'est l'aire à gauche de la courbe  $F-\delta$ .

### II.5.1.2. Énergie et énergie complémentaire de déformation

Considérons un corps soumis à des sollicitations extérieures. Sous l'action des charges extérieures, le corps se déforme et les efforts internes (contraintes) effectuent un travail qui s'oppose au travail des sollicitations extérieures [Ait yahia. 2015].

Ce travail interne, changé de signe, est désigné par énergie potentielle de déformation ( $W$ ) ( $-\tau_i = W$ ).

Isolons un élément  $dv = dx dy dz$  du corps considéré. L'énergie élémentaire emmagasinée dans  $dv$  se calcule comme le travail effectué par les forces agissant sur les faces de l'élément  $dv$ . Ainsi, le travail effectué par la force élémentaire  $\sigma_x dy dz$  au cours de la variation  $d\varepsilon_x$  de la déformation  $\varepsilon_x$ , qui produit le déplacement  $\Delta dx = d\varepsilon_x dx$ , vaut :

$$dW = \sigma_x \cdot dy dz \cdot d\varepsilon_x dx = \sigma_x d\varepsilon_x dv \quad (\text{II.18})$$

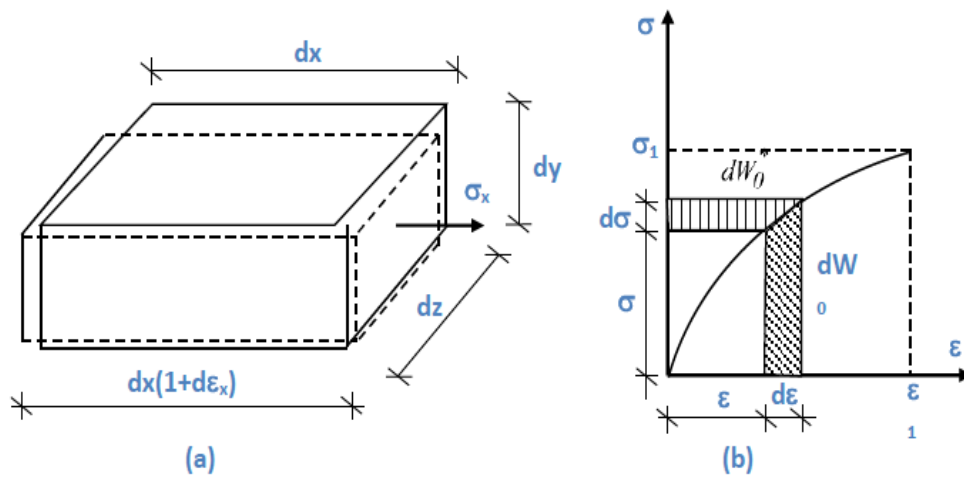


Figure II.10 : Énergie de déformation d'un corps.

En considérant toutes les composantes des contraintes et en utilisant la notation indicielle, on obtient pour l'élément  $dv$  :

$$dW = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} dv \quad (\text{II.19})$$

L'énergie emmagasinée dans tout le volume du corps ( $v$ ) vaut :

$$W = \int_v \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} dv \quad (\text{II.20})$$

Considérons un diagramme contrainte-déformation unidirectionnel (unidimensionnel) (Figure II.10b).

On a :

$$dW_0 = \sigma d\varepsilon \quad (\text{II.21})$$

Cette quantité a l'unité d'une énergie par unité de volume, L'intégrale :

$$W_0 = \int_0^{\varepsilon_1} \sigma d\varepsilon \quad (\text{II.22})$$

$W_0$  est appelée densité de l'énergie de déformation et est représentée par l'aire comprise entre la courbe  $\sigma$ - $\varepsilon$  et l'axe des  $\varepsilon$ . Remarquons qu'on a :

$$W = \int_V dW_0 dv \quad (\text{II.23})$$

De même, l'énergie complémentaire élémentaire produite par un accroissement  $d\sigma_{ij}$  des contraintes au cours des déplacements produits par les déformations  $\varepsilon_{ij}$  correspondantes vaut :

$$dW_{ij}^* = \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} dv \quad (\text{II.24})$$

Et pour la totalité du volume du corps :

$$W^* = \int_V \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} dv \quad (\text{II.25})$$

On a aussi :

$$dW_0^* = \varepsilon d\sigma \quad \text{et} \quad W_0^* = \int_0^{\sigma_1} \varepsilon d\sigma \quad (\text{II.26})$$

## II.5.2. Travail et énergie dans le domaine élastique linéaire

### a) Travail d'une force

Revenons au cas de la traction d'une barre prismatique du paragraphe II.5.2.1 Si la relation entre  $F$  et  $\delta$  est linéaire, domaine d'application de la loi de Hooke (et petits déplacements), c'est-à-dire quand on à tout moment du chargement la relation (Figure II.9c)

$$F = k\delta \quad (k = \text{constante}) \quad (\text{II.27})$$

Le travail total devient :

$$\tau_e = \int_0^{\delta_1} K \delta d\delta = \frac{1}{2} k \delta_1^2 \quad (\text{II.28})$$

et comme :  $F_1 = k\delta_1$  , il vient :

$$\tau_e = \frac{1}{2} F_1 \delta_1 \quad (\text{II.29})$$

Le travail total est représenté par l'aire du triangle  $OAB$  (Figure II.9c).

Remarquons que dans le cas de l'élasticité linéaire, on a :  $\tau_e = \tau_e^*$ .

### b) Généralisation

Si un système en équilibre est soumis à une sollicitation globale  $F$  ( $F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_n$ ) et que les points d'application de ces forces subissent des déplacements, dont les projections sur les directions de ces mêmes sollicitations valent  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ , le travail effectué au cours du chargement du système (passage de l'état d'équilibre initial à l'état d'équilibre final), vaut :

$$\tau_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \delta_i \quad (\text{II.30})$$

Il faut rappeler qu'on suppose que :

- le chargement est statique (les mises en charge sont lentes),
- le matériau a un comportement élastique linéaire (loi de Hooke vérifiée),
- les déplacements n'affectent pas l'action des charges (hypothèse des petits déplacements, pas d'effets du second ordre).

### c) Travail des réactions

Si les appuis sont indéformables, le travail fourni par les réactions au cours de la déformation du système est nul puisque le déplacement d'un appui double ou d'un encastrement dans le sens de la réaction est nul et que le déplacement d'un appui simple est perpendiculaire à la réaction.

Dans le cas d'appuis élastiques, les relations (II.29) et (II.30) restent valables pour les réactions.

### d) Énergie potentielle de déformation

Dans le domaine élastique linéaire, la relation contrainte-déformation ( $\sigma_{ij}-\varepsilon_{ij}$ ) est linéaire et comme dans le travail, le facteur 1/2 apparaît dans l'expression de l'énergie.

Ainsi, le travail fait par la force  $\sigma_x dydz$  au cours de la déformation  $\varepsilon_x$  qui provoque une variation de longueur  $\Delta dx = \varepsilon_x dx$  est :

$$dW = \frac{1}{2} \sigma_x dydz \varepsilon_x dx = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x dv \quad (\text{II.31})$$

Pour toutes les contraintes agissant sur  $dv$  en aura (en notation indicielle)

$$dW = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} dv \quad (\text{II.32})$$

$$W = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv \quad (\text{II.33})$$

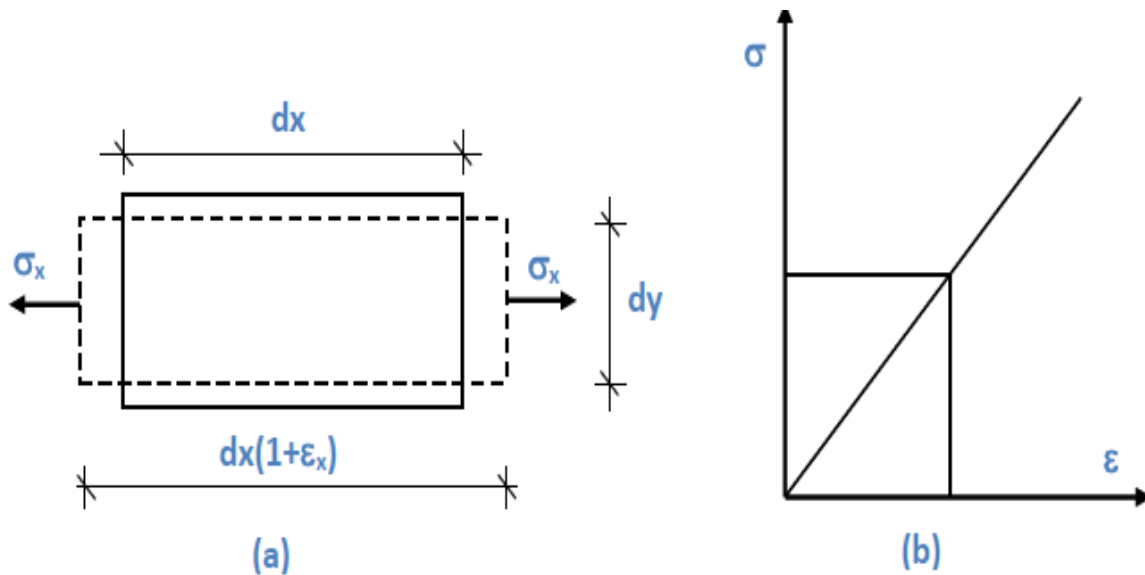


Figure II.11 : Relation linéaire de contrainte-déformation ( $\sigma_{ij}-\epsilon_{ij}$ ).

### II.5.3.Principe de la conservation de l'énergie

De manière générale, quand un corps est soumis à des charges extérieures, ces charges effectuent un travail extérieur qui se transforme en énergie potentielle interne (qui déforme le corps), en énergie cinétique et en chaleur qui se dissipe lors des frottements.

Supposons maintenant que :

- les charges extérieures sont appliquées statiquement (pas d'énergie cinétique),
- les frottements dans le corps sont nuls (pas de dissipation d'énergie sous forme de chaleur)c'est-à-dire que le corps considéré est parfaitement élastique,
- les frottements dans les appuis sont nuls (pas de dissipation d'énergie), alors tout le travail extérieur se transforme en énergie potentielle de déformation, c'est-à-dire qu'on a :

$$\tau_e = W \quad (\text{II.34a})$$

Dans ce cas, on dit que le système (corps + appuis + charges) est conservatif et le travail, ou l'énergie de déformation, puisque  $\tau_e = W$ , ne dépend pas de l'ordre dans lequel les forces sont appliquées mais uniquement de leur intensité finale. Dans le cas contraire, c'est-à-dire si le travail dépendait de l'ordre d'application des forces, on pourrait le charger d'une certaine manière et le décharger d'une autre manière de façon à réaliser un gain. Après plusieurs cycles, l'énergie ainsi gagnée ferait exploser le corps, ce qui est absurde.

Si les charges cessent d'agir, l'énergie emmagasinée dans le corps lors du chargement sera restituée sous forme de travail qui va ramener le corps à son état initial [Ait yahia. 2015].



En plus des hypothèses a), b) et c) ci-dessus nous admettrons dans ce qui suit que :

- d) le matériau vérifie la loi de Hooke (matériau élastique linéaire),
- e) les déplacements sont suffisamment petits et n'affectent pas l'action des charges (pas d'effets du second ordre).

Il arrive quelquefois que le système, dans son état initial, c'est-à-dire avant toute application de charges, soit déjà assujéti à des efforts internes et des déformations élastiques. C'est le cas notamment des systèmes hyperstatiques dont les appuis subissent des déplacements (appuis non concordants), des systèmes hyperstatiques soumis à des effets thermiques, au phénomène de retrait dans les structures en béton, des effets des défauts de montage, etc.

Dans un cas pareil, le système possède déjà à l'état initial une énergie élastique ( $W_i$ ) emprisonnée dans le corps et qui ne peut se libérer que dans des conditions particulières. Les efforts et les déformations qui seront produits par les forces extérieures vont s'ajouter aux efforts et à déformations existantes. Dans ce cas, l'énergie de déformation est égale au travail des forces extérieures qui se transforme en énergie élastique interne plus l'énergie élastique initiale, d'où :

$$\tau_e + W_i = W \quad (\text{II.34b})$$

Les résultats (II.34) sont parfois désignés par théorème de Clapeyron.

#### II.5.4. Travail de déformation des sollicitations simples dans le cas des poutres

Nous allons calculer séparément le travail de déformation (énergie de déformation) en fonction des efforts  $N$ ,  $M$ ,  $T$  et  $Mt$  dans une poutre (droite ou courbe) de longueur  $l$ . Considérons un tronçon de poutre  $dx$  ( $ds$ ) suffisamment petit pour pouvoir admettre que les efforts ne varient pas sur  $dx$ .

##### a) Effort normal

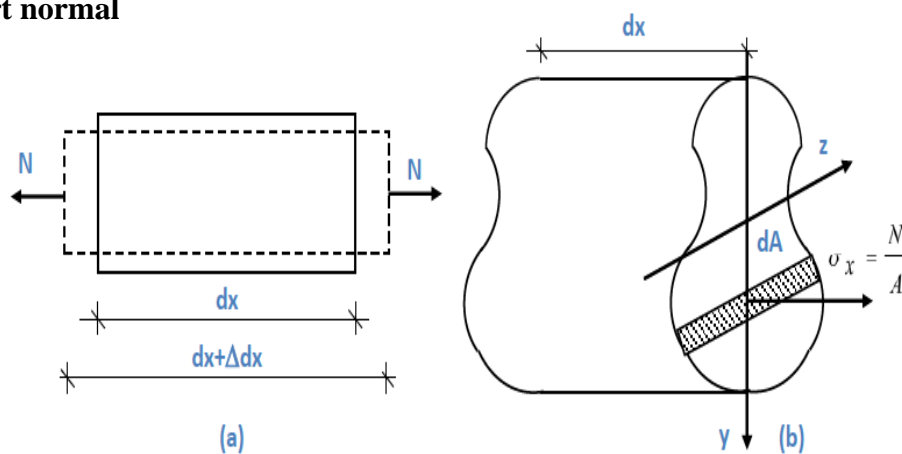


Figure II.12 : Relation des contraintes-effort normal.

Sous l'effet des contraintes d'effort normal, le tronçon  $dx$  subit une variation de longueur  $\Delta dx$

Définie par :

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \varepsilon_x \Rightarrow \Delta dx = \varepsilon_x dx = \frac{\sigma_x}{E} dx \quad (\text{II.35a})$$

Comme dans le cas de l'effort normal on a  $\sigma_x = N/A$ , il vient :

$$\Delta dx = (N/EA) dx \quad (\text{II.35b})$$

$\Delta dx$  représente l'énergie emmagasinée dans la couche  $dA$ .  $\Delta dx$  se calcule comme le travail effectué par la force ( $\sigma_x \cdot dA$ ) au cours du déplacement  $\Delta dx$ , d'où :

$$d^2W = \frac{1}{2} (\sigma_x dA) \Delta dx = \frac{1}{2} \left( \frac{N}{A} dA \right) \frac{N}{EA} dx = \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA^2} dA dx \quad (\text{II.36})$$

La notation  $d^2W$  est utilisée pour désigner une quantité plus petite que l'énergie élémentaire.

L'énergie élémentaire emmagasinée dans le tronçon  $dx$  s'obtient par intégration sur l'aire  $A$  de la section :

$$dW = \frac{dx}{2} \int \frac{N^2}{EA^2} dA = \frac{1}{2} \frac{N^2 dx}{EA^2} \int dA = \frac{N^2}{2EA} dx \quad (\text{II.37})$$

Et pour la totalité de la poutre :

$$W = \frac{1}{2} \int \frac{N^2}{EA} dx \quad (\text{II.38})$$

### b) Moment fléchissant

Considérons la couche  $dA dx$ . Sous l'effet des contraintes de flexion, la couche subit une variation de longueur :  $\Delta dx = \varepsilon_x dx = (\sigma_x/E) dx$ . Compte tenu de la relation de Navier, il vient :

$$\sigma_x = \frac{M_z y}{I_z} \Rightarrow \Delta dx = \frac{M_z y}{EI_z} dx \quad (\text{II.39})$$

L'énergie emmagasinée dans la couche  $dA dx$  vaut :

$$d^2W = \frac{1}{2} (\sigma_x dA) \Delta dx = \frac{1}{2} \left( \frac{M_z y}{I_z} dA \right) \frac{M_z y}{EI_z} dx = \frac{1}{2} \frac{M_z^2 y^2}{EI_z^2} dA dx \quad (\text{II.40})$$

En intégrant sur la surface on obtient l'énergie emmagasinée dans le tronçon  $dx$  :

$$dW = \frac{dx}{2} \int \frac{M_z^2 y^2}{EI_z^2} dA = \frac{1}{2} \frac{M_z^2 dx}{EI_z^2} \int y^2 dA = \frac{M_z^2}{2EI_z} dx \quad (\text{II.41a})$$

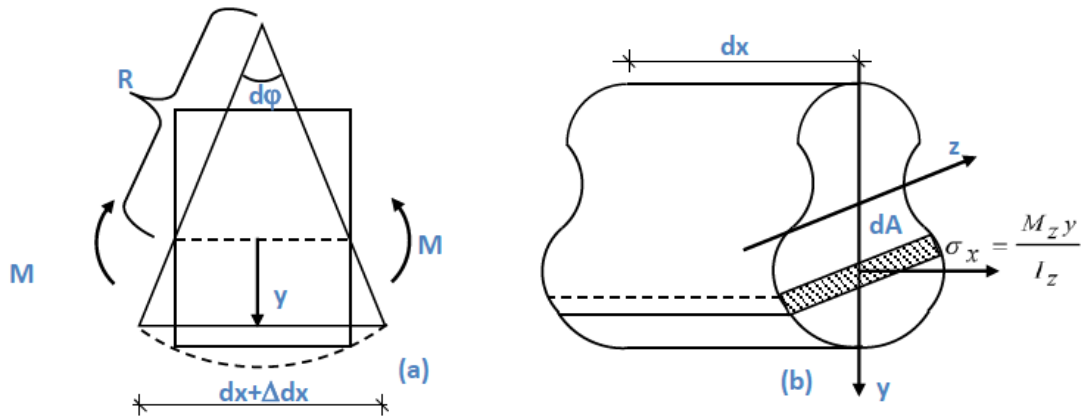


Figure II.13 : Relation de moment de flexion.

D'où l'énergie de déformation de la poutre, qui se calcule par intégration sur  $l$  :

$$W = \frac{1}{2} \int \frac{M_z^2}{EI_z} dx \quad (\text{II.41b})$$

Dans le cas d'une flexion gauche, on a une relation similaire à (II.41a) pour chaque moment fléchissant et pour les deux moments on aura :

$$W = \frac{1}{2} \int \left( \frac{M_z^2}{EI_z} + \frac{M_y^2}{EI_y} \right) dx \quad (\text{II.41c})$$

#### c) Effort tranchant

L'énergie emmagasinée dans un tronçon  $dx$  soumis à un effort tranchant  $T_y$  vaut :

$$dW = \frac{\kappa_y T_y^2}{2GA} dx \quad (\text{II.42a})$$

Et pour toute la poutre :

$$W = \frac{1}{2} \int \frac{\kappa_y T_y^2}{GA} dx \quad (\text{II.42b})$$

Si la poutre est soumise à  $T_y$  et  $T_z$  on aura :

$$W = \frac{1}{2} \int \left( \frac{\kappa_y T_y^2}{GA} + \frac{\kappa_z T_z^2}{GA} \right) dx \quad (\text{II.42c})$$

#### d) Moment de torsion

L'angle dont tourne l'une par rapport à l'autre les sections extrêmes du tronçon  $dx$  soumis à un moment de torsion  $M_t$  est donné par (Figure II.14) :

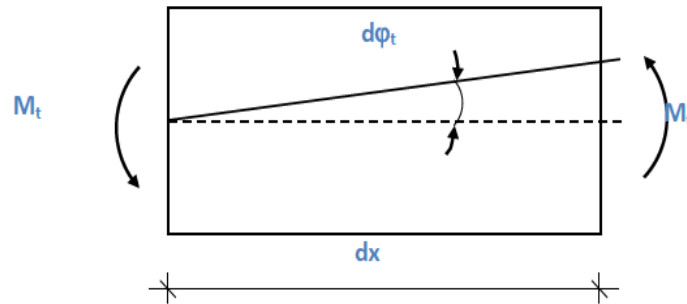


Figure II.14 : Relation de moment de torsion.

$$d\varphi_t = \frac{qM_t}{GI_p} dx \quad (\text{II.43})$$

Où :

-  $q$  est une constante dépendant de la forme et des dimensions de la section, appelée coefficient de torsion ( $q \approx 40I_p^2/A^4$ ). Ce facteur vaut 1 pour la section circulaire et est supérieur à 1 pour les autres cas.

- la quantité  $C = GI_p/q$  est désignée par rigidité à la torsion (ou rigidité torsionnelle).

L'énergie emmagasinée dans le tronçon  $dx$  se calcule comme le travail effectué par  $M_t$  lors du déplacement  $d\varphi_t$  :

$$dW = \frac{1}{2} M_t d\varphi_t = \frac{qM_t^2}{2GI_p} dx \quad (\text{II.44})$$

Et pour l'ensemble de la poutre :

$$W = \frac{1}{2} \int \frac{qM_t^2}{GI_p} dx \quad (\text{II.45})$$

### II.5.5. Expression générale de l'énergie potentielle de déformation

Isolons à l'intérieur d'un corps élastique un élément  $dv = dx dy dz$  suffisamment petit pour pouvoir admettre que les contraintes ne varient pas sur les facettes de l'élément.

Calculons l'énergie emmagasinée dans l'élément  $dv$  lorsqu'il est soumis à l'ensemble des contraintes (Figure II.15a).

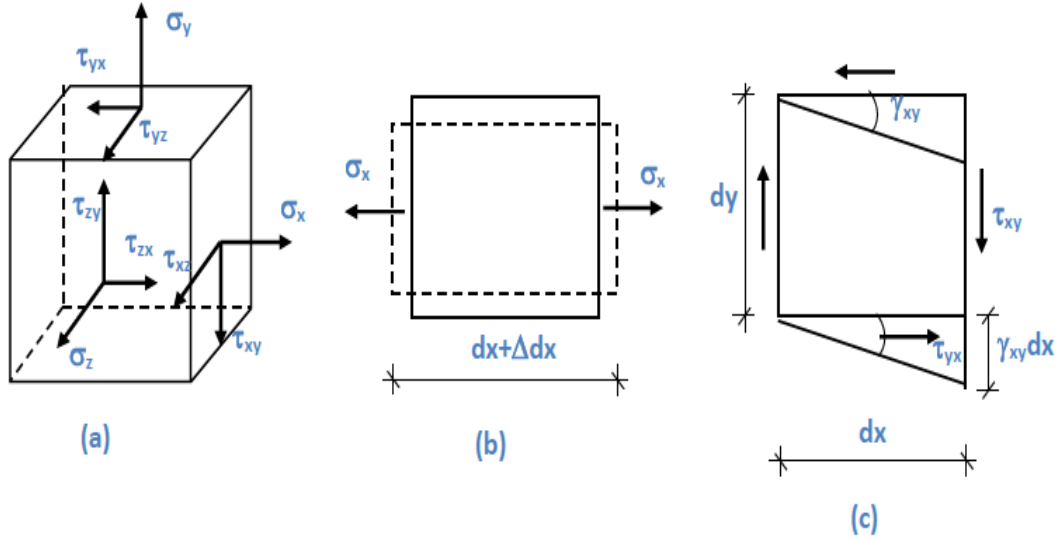


Figure II.15 : Relation d'énergie potentielle de déformation.

Le travail de déformation de la force  $\sigma_x dy dz$  au cours du déplacement  $\Delta dx = \varepsilon_x dx$  (Figure II.15b) vaut :

$$dW = \frac{1}{2} (\sigma_x dy dz) \varepsilon_x dx = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x dx dy dz \quad (\text{II.46})$$

Pour l'ensemble des trois contraintes normales, on applique le résultat (II.47), d'où :

$$dW = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z) dx dy dz \quad (\text{II.47})$$

où

$\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  et  $\varepsilon_z$  sont les déformations longitudinales et peuvent être exprimées en fonction des contraintes normales à partir de la loi de Hooke généralisée.

Les déformations provoquées par les contraintes normales et tangentielles étant indépendantes, si outre les contraintes normales il y a des contraintes tangentielles, il suffit d'ajouter leur effet.

Le travail de la force  $\tau_{xy} dy dz$  lors du déplacement  $\gamma_{xy} dx$  (Figure II.7c) vaut :

$$dW = \frac{1}{2} (\tau_{xy} dy dz) \gamma_{xy} dx = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} dx dy dz \quad (\text{II.48})$$

En présence de toutes les contraintes, il vient :

$$dW = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dx dy dz \quad (\text{II.49})$$

L'énergie potentielle de déformation de tout le corps s'obtient par sommation sur le volume entier :

$$W = \frac{1}{2} \int (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dv \quad (\text{II.50})$$

L'expression de  $W$  peut être exprimée en fonction des contraintes seulement ou des déformations uniquement en utilisant les expressions des contraintes en fonction des déformations données par la loi de Hooke généralisée.

Dans le cas d'une poutre soumise aux sollicitations  $N$ ,  $M$ ,  $T$  et  $M_t$ , l'expression de  $W$  s'obtient en ajoutant les expressions (II.38), (II.41), (II.42) et (II.45) :

$$W = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EI} dx + \frac{1}{2} \int \frac{N^2}{EA} dx + \frac{1}{2} \int \frac{\kappa T^2}{GA} dx + \frac{1}{2} \int \frac{q M_t^2}{GI_p} dx \quad (\text{II.51})$$

Notons que cette dernière expression ne découle pas de l'application du principe de superposition, qui n'est pas applicable puisque l'énergie n'est pas reliée linéairement aux sollicitations. La relation (II.51) s'obtient par sommation des contributions de chaque sollicitation du fait que le déplacement provoqué par une des sollicitations ne provoque pas de travail de la part des autres sollicitations (déplacements indépendants).

Si le système comporte "n" barres, la relation (II.51) s'applique à chacune d'elles.

### II.5.6 Travail Virtuel

Considérons une particule  $m$  soumise à une force  $F$  (Figure II.16). Donnons à  $m$  un déplacement  $\delta$  suivant la direction  $\Delta$ .

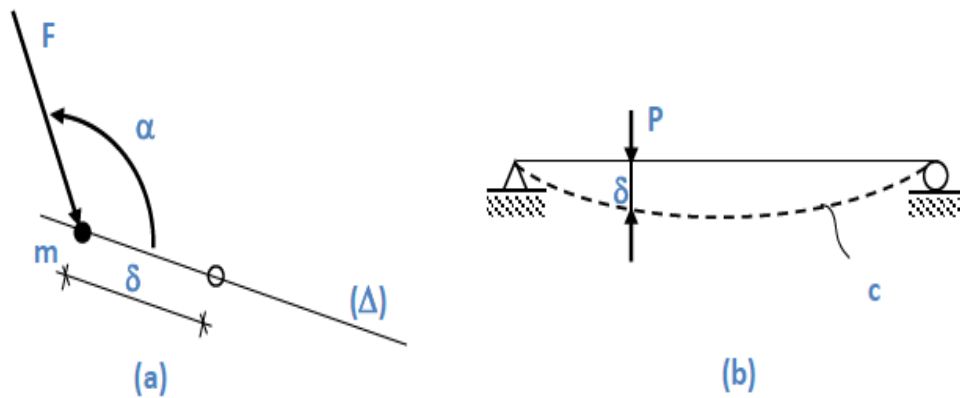


Figure II.16 : Système élastique force-déplacement  $F$ - $\delta$ .

Au cours du déplacement de la particule  $m$ , la force  $F$  effectue un travail égal, en valeur absolue, au produit de la composante de  $F$  agissant dans la direction  $\Delta$  par le déplacement  $\delta$ .

$$\tau_v = F \cos \alpha \cdot \delta \quad (\text{II.52a})$$

Ce travail, d'où le  $1/2$  a naturellement disparu car la force  $F$  avait déjà atteint sa valeur finale au moment de l'application du déplacement  $\delta$ , est appelé travail virtuel de  $F$  dans le déplacement virtuel  $\delta$ . Si les sens du déplacement  $\delta$  et de la composante de  $F$  suivant la direction de  $\delta$  sont concordants, le signe du travail est positif, dans le cas contraire il est négatif.

Considérons maintenant le système élastique simple de la figure II.15b et imposons lui une déformation représentée par la courbe  $c$ . Au cours de la déformation, la force  $P$ , dont le point d'application se déplace de  $\delta$ , effectue un travail virtuel de la forme (II.52), avec  $\alpha = 0$  dans le cas présent.

$$\tau_v = P \cdot \delta \quad (\text{II.52b})$$

Précisons qu'on entend par déplacement virtuel tout petit déplacement possible. Petit par rapport aux dimensions du système, donc comparable aux déplacements réels. Possible, c'est-à-dire compatible avec les liaisons extérieures (appuis) et intérieures du corps. Peu importe la manière utilisée pour produire le déplacement virtuel [Ait Yahia. 2015].

De manière plus générale, si un système supportant la sollicitation  $F$  ( $F_1, F_2, \dots, F_n$ ), subit un déplacement virtuel qui impose à chaque force ( $F_i$ ) un déplacement ( $\delta_i$ ) suivant sa direction, le travail virtuel total effectué au cours du déplacement virtuel s'écrit :

$$\tau_v = \sum_{i=1}^n F_i \delta_i \quad (\text{II.52c})$$

## II.6. Les poutres composites

Le terme «poutre» désigne un objet dont la longueur est grande comparée aux dimensions transverses (section fine). Une poutre est un élément de structure utilisée dans la construction des bâtiments, des navires, autres véhicules et dans la fabrication de machines. Cependant, le modèle des poutres peut être utilisé pour des pièces très diverses à condition qu'elles respectent certaines normes

### II.6.1. Historique des théories des poutres

La paternité de la théorie des poutres est attribuée à Galilée, mais des études récentes indiquent que Léonard De Vinci l'aurait précédé. De Vinci avait supposé que la déformation varie de manière linéaire en s'éloignant de la surface neutre, mais il ne pût finaliser ses calculs car il ne connaissait pas la loi de Hooke. De son côté, Galilée était parti sur une hypothèse

incorrecte (il supposait que la contrainte était répartie uniformément en flexion), et c'est Antoine Parent qui obtint la distribution correcte.

Ce sont Leonard Euler et Jacques Bernoulli qui émirent la première théorie utile vers les années 1750, alors que Daniel Bernoulli, le neveu du précédent, écrivit l'équation différentielle pour l'analyse vibratoire. À cette époque, le génie mécanique n'était pas reconnu comme une science, et on ne considérait pas que les travaux d'une académie des mathématiques puissent avoir des applications pratiques, et on continua à bâtir les ponts et les bâtiments de manière empirique. Ce n'est qu'au XIXe siècle, avec la Tour Eiffel et les grandes roues, qu'on démontra la validité de la théorie à grande échelle.

## II.6.2. Le comportement des poutres composites

L'analyse d'une structure composite est plus complexe que celle d'une structure en matériaux traditionnels, métalliques par exemple. Cela est dû au caractère hautement anisotrope des propriétés mécaniques du matériau de base, tant sur les plans raideur que résistance, et qui sont concentrées dans la direction des fibres [Ould Larbi. 2014]. L'importance de développer une analyse sur le comportement des poutres est liée d'une part à l'utilisation des poutres comme éléments de base dans la réalisation des structures, d'autre part à la caractérisation des propriétés mécaniques des matériaux composites et ceci à partir des différents essais réalisés sur des éprouvettes en forme de poutres.

### II.6.3. Les différents types de poutres

La poutre est l'élément structural le plus répandu, puisqu'elle fait partie intégrante de la plupart des ouvrages de construction ou des pièces machines. En réaction aux charges appliquées, des forces et des moments internes se développent dans la poutre pour maintenir l'équilibre.

#### ➤ *Poutre simple*

C'est une poutre reposant sur deux supports ; l'appui double et l'appui simple. Les points d'appuis sont articulés de façon à ce que les extrémités puissent se mouvoir librement pendant la flexion.

#### ➤ *Poutre console*

C'est une poutre encastrée dans un mur à une extrémité. L'extrémité encastrée ne bouge pas pendant la flexion, tandis que l'autre extrémité est entièrement libre. On appelle aussi cette poutre, poutre en porte-à-faux ou poutre encastrée à une extrémité.

#### ➤ *Poutre avec porte-à-faux*



C'est une poutre sur deux appuis (un simple et l'autre double), elle a une ou deux extrémités qui dépassent de façon appréciable les appuis (porte-à-faux). Les poutres sont classées suivant leurs appuis. Ces trois précédents types de poutres entrent dans la catégorie des poutres statiquement déterminées (poutre isostatique), parce qu'elles possèdent trois inconnues reliées aux trois degrés de liberté et par le fait même des équations d'équilibre.

➤ ***Poutre continue***

C'est une poutre supportée par l'un des deux supports, c'est donc une poutre en équilibre hyperstatique.

➤ ***Poutre à double encastrement***

C'est une poutre supportée par deux encastresments, elle est donc une poutre en équilibre hyperstatique.

➤ ***Poutre supportée à double encastrement***

C'est une poutre supportée par deux encastresments ayant un ou plusieurs supports. C'est donc une poutre en équilibre hyperstatique. Elle a plus de fixation ou support que nécessaire. Cependant, ces supports augmentent la capacité portante de la poutre mais les équations de la statique ne suffisent pas à analyser ces poutres. On aura donc recours à différentes méthodes.

## **II.7. Théories de la Modélisation des Poutres**

Les théories de poutres impliquent essentiellement la réduction d'un problème en trois dimensions de la théorie de l'élasticité à un problème unidimensionnel. Elles s'appliquent sur des solides élancés [les prismes dont la longueur vaut 10 fois la plus grande dimension transversale]. Là où la détermination de la solution exacte pour les champs de contrainte et de déformation n'est pas possible, elle permet d'obtenir une solution approchée, qui donne une bonne idée sur les efforts et les déplacements [Sallai. 2011]

### **II.7.1. Modèle d'Euler Bernoulli (Classical Beam Theory- CBT)**

Il est bien connu que la théorie d'Euler-Bernoulli est basée sur la théorie élémentaire de flexion des poutres qui ne tient pas compte des effets de la déformation de cisaillement. Il est également connu qu'elle n'est applicable qu'aux poutres fines. Dans cette approche, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couches puisque la poutre multicouche est homogénéisée, donc considérée comme une seule couche. Comme hypothèse de cette théorie, les déformations dues au cisaillement transversal sont négligées (pas de cisaillement sur la hauteur de la poutre), La section reste perpendiculaire à la ligne moyenne de la poutre et la section reste plane.

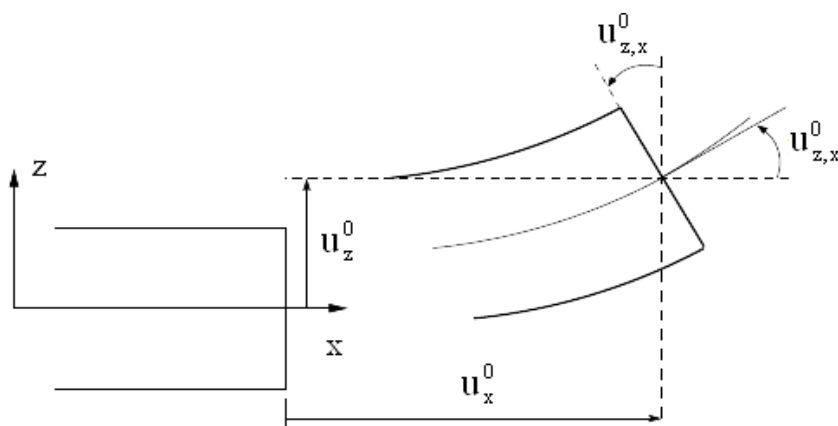


Figure II.17 : Cinématique d'Euler Bernoulli.

La fonction qui décrit la répartition de déplacement suivant l'épaisseur de la poutre est:

$$u_z(x, z) = 0 \quad (\text{II-53})$$

Pour le cas des poutres élancées et d'après la théorie classique des poutres, le déplacement d'un point M est donné par les deux composantes suivantes :

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = U^0(x) - z \cdot W^0(x) \\ w(x, z) = W^0(x) \end{cases} \quad (\text{II.54})$$

$U(x, z)$  : représente le déplacement suivant X et  $w(x, z)$  est le déplacement dans la direction de Z ou bien la flèche.

La rotation autour de l'axe Y, provoquée par la flexion est tel que:

$$W_x^0(x) = \frac{\partial w^0}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.55})$$

$U^0(x)$  et  $w^0(x)$  sont les composantes de déplacement au milieu de la section et sur la ligne moyenne de la poutre, respectivement le long des axes X et Z.

Lorsque cette théorie est utilisée pour l'analyse des fréquences naturelles des poutres, les flèches sont sous-estimées. Ceci est la conséquence de la négligence de la déformation transversale.

## II.7.2 Modèle de Timoshenko (FSDBT)

La théorie de Timoshenko est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire des poutres au prix d'une fonction supplémentaire. Cette solution permet d'affiner les solutions analytiques issues de la théorie classique. Toutefois ces solutions sont entachées d'erreurs au

voisinage des appuis et de la zone indentation où nous pouvons avoir des concentrations de contrainte et des champs de déplacement non homogènes.

Elle s'applique sur des poutres courtes, elle est basée sur le principe; qu'après déformation, la section plane reste plane mais elle perd sa perpendicularité par rapport à la ligne moyenne de la poutre (Figure II.18). Ceci est dû au cisaillement transversal, découvert par Timoshenko, sur l'épaisseur de la poutre. Cette théorie est analogue à la théorie de "Reissner-Mindlin" dans le cas des plaques épaisses. [Timoshenko. 1972]. Dans le cas où nous avons un élancement faible, l'effet du cisaillement devient plus important sur la déformée. Dans ce cas, la fonction s'écrit  $f(z) = z$ . Il existe un cisaillement uniforme et les déformations dues au cisaillement transversal ne sont pas négligées. C'est la théorie de premier ordre (FSDBT).

Le déplacement d'après Timoshenko s'écrit comme suit:

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u^0(x) - Z \cdot W_x^0(z) + Z \cdot \gamma_{xz}^0(x) \\ W(x, z) = W^0(x) \end{cases} \quad (\text{II.56})$$

$\gamma_{xz}^0$  : est la distorsion ou la déformation angulaire mesurée sur la ligne moyenne de la poutre. Tel que :

$$\gamma_{xz}^0(x) = W_x^0(x) - \phi^0(x) \quad (\text{II.57})$$

$\phi^0(x)$  : Etant la rotation totale de la section mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

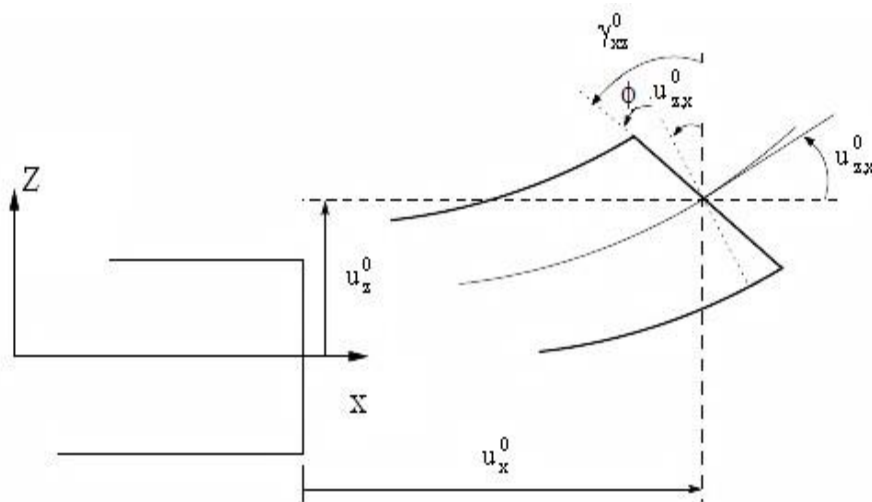


Figure II.18 : Cinématique de Timoshenko.

Par définition, la distorsion est donnée par la relation suivante:

$$\begin{cases} \gamma_{xz}(x) = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -w_x^0(x) + \gamma_{xz}^0(x) + w_x^0(x) \\ \gamma_{xz}(x) = \gamma_{xz}^0(x) \end{cases} \quad (\text{II.58})$$

Sachant que la contrainte de cisaillement est égale:

$$\tau_{xz} = G_{xz} \cdot \gamma_{xz} = G_{xz} \cdot \gamma_{xz}^0 \quad (\text{II.59})$$

$G_{xz}$ : est le module de cisaillement transversal qui est supposé constant.

Avec cette théorie, les contraintes tangentielles de cisaillement sont constantes et uniformes sur toute l'épaisseur de la poutre; cela veut dire qu'elles existent même sur les bords supérieurs et inférieurs de la poutre et pourtant il n'y a aucun chargement qui induit le cisaillement.

Cette contradiction mène à introduire des coefficients pour corriger et maintenir les contraintes et les déformations du cisaillement transversales constantes à travers l'épaisseur de la poutre. Ce facteur a été calculé pour la variété de sections de poutres par [Mindlin et Deresiewicz]. Ont donné de nouvelles expressions de ce coefficient pour différentes sections de la poutre. La théorie de Timoshenko est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire des poutres au prix d'une fonction supplémentaire. Cette solution permet d'affiner les solutions analytiques bien qu'issues de la théorie classique, ces solutions sont toutefois entachées d'erreurs au voisinage des appuis et de la zone indentation où nous pouvons avoir des concentrations de contrainte et des champs de déplacement non homogènes.

Les non nullité des contraintes tangentielles sur les bords extrêmes de la poutre et l'introduction des coefficients de correction de cisaillement ont menés d'autres chercheurs à essayer de trouver une autre théorie pouvant tenir compte de ces facteurs; c'est "la théorie d'ordre élevé".

### II.7.3 Théorie d'Ordre Elevé

Dans cette théorie la distribution des champs de déplacement est non linéaire selon l'épaisseur de la poutre. Elle est plus précise que la théorie du premier ordre puisqu'elle introduit une fonction qui tient compte du phénomène de «gauchissement». Ce phénomène apparaît lorsque la section transversale de la poutre perd sa planéité (figure II.19). La fonction  $f(z)$  représente le gauchissement et sa dérivée  $f'(z)$  représente le cisaillement.

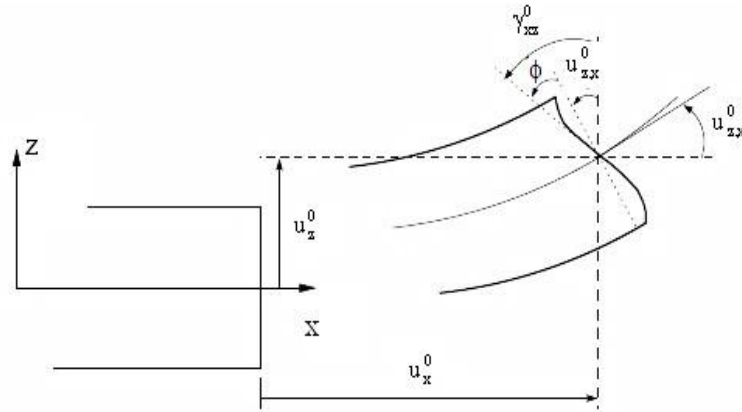


Figure II.19 : Cinématique de la Théorie d'Ordre Elevé.

Dans ce cas, le champ de déplacement devient:

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u^0(x) - zw_x^0(x) + f(z)\gamma_{xz}^0(x) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases} \quad (\text{II.60})$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -w_x^0 + f'(z)\gamma_{xz}^0(x) + w_x^0(x) \quad (\text{II.61})$$

$$\gamma_{xz} = f'(z)\gamma_{xz}^0(x) \quad (\text{II.62})$$

Pour que les contraintes tangentielles soient nulles sur les bords extrêmes de la poutre, on doit avoir :

C'est la condition qui nous permet d'avoir une répartition parabolique des contraintes de cisaillement sur l'épaisseur de la poutre d'une part et de choisir correctement des fonctions cubiques qui répondent à la condition (II.54).

Selon l'expression de la fonction de gauchissement  $f(z)$ , quelques modèles sont présentés dans la littérature des poutres en FGM:

1-) Le modèle Euler-Bernoulli (la théorie des poutres classiques) (CBT):

$$f(z) = 0 \quad (\text{II.63})$$

2-) Le modèle de Timoshenko ou bien la théorie du premier ordre (FSDBT):

$$F(z) = z \quad (\text{II.64})$$

3-) Le modèle de puissance avec l'approche de (PSDBT) [Levinson. 1980], [Murthy. 1981] et [Reddy. 1984] :

$$f(z) = z\left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right) \quad (\text{II.65})$$

4-) Le modèle exponentiel proposé par (ESDBT) [Karama et al. 2003] :

$$f(z) = Z e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{II.66})$$

5-) Le modèle trigonométrique [Touratier 1991] :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin \frac{\pi z}{h} \quad (\text{II.67})$$

6-) Le modèle de Mechab (2009) [Ait Atmane et al. 2010, El Meiche et al. 2011] :

$$f(z) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-1} \left[ z \cos h\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{h}{2} \sin h\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] \quad (\text{II.68})$$

7-) Le modèle de Panc (1975) [Kaczkowski (1968), Reissner (1975), Voyiadjis and Shi (1991), Shi and Voyiadjis (2011)],  $h$  : étant l'épaisseur de la poutre.

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right) \quad (\text{II.69})$$

## II.8 Introduction du l'effet de déformation normale

Dans les différentes théories d'ordre élevé qui comprend les contraintes normales transversales, les termes d'ordre supérieur sont introduits dans les hypothèses cinématiques pour les deux composantes de déplacement.

La deuxième ligne de l'équation (II-52) est modifiée afin d'examiner la déformation normale transversale:

$$(x, z) = (x) + (x) + (x) \quad (\text{II.70})$$

Avec :  $(x)$  est la composante de flexion ;

$(x)$  est la composante de cisaillement ;

$(x)$  est la composante d'effet de déformation.

Les deux premiers composants sont en fonctions la coordonnée  $x$  et uniquement latroisième est en fonction de  $x$  et  $z$ .

## II.9 Conclusion

Dans ce chapitre, une partie de la recherche bibliographique sur la modélisation des structures reposant sur une fondation élastiques a été effectué.

Différentes théories, pour modéliser les plaques, sont présentées ; ce sont des approches monocouches, des théories en zigzag et la formulation unifiée de Carrera.

Nous avons observé que les théories monocouches et valables pour les structures FGM.

Nous avons également présenté une bibliographie de recherche sur différents modèles de fondations pour modéliser le sol. On remarque que peu de recherches et de travaux ont été effectués sur les structures de type FGM reposant sur des modèles de fondation avancés.

Le comportement mécanique des structures faites de matériaux à gradient de propriétés reposant sur des modèles avancés ou améliorés de fondations utilisant une théorie d'ordre supérieur sera clarifié dans les chapitres suivants.

**Chapitre III : Analyse mécanique  
des poutres FGM poreuses  
reposant sur fondations à raideur  
variable**

---



### III.1 Introduction

Dans ce chapitre, on va développer une étude mathématique prédisant la réponse dynamique et les charges critiques de flambement des poutres FGM sur des fondations élastiques variables. Une théorie de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) a été appliquée afin de décrire au mieux le gauchissement de la section de la poutre, surtout pour les poutres épaisses. Contrairement aux théories conventionnelles, la présente utilise un champ de déplacement qui introduit des variables intégrales indéterminées.

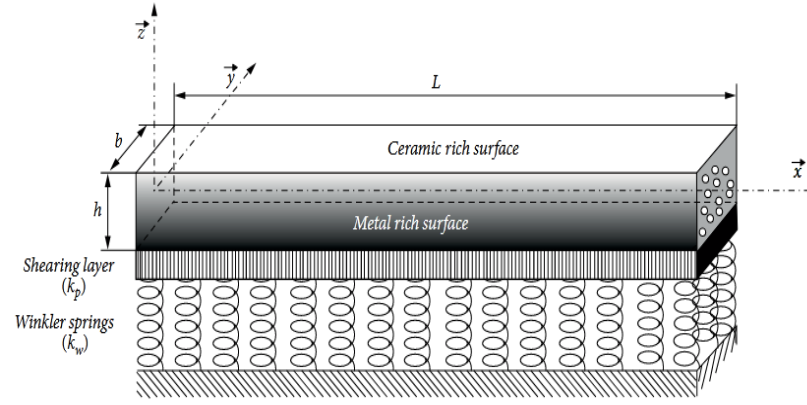
Il a été supposé que notre poutre FGM était supportée par une fondation de type Winkler-Pasternak dans lesquelles le module de Winkler est supposé variable suivant la longueur de la poutre. La variation de cette raideur de Winkler est prise selon trois différentes formes ; linéaire, parabolique et sinusoïdale sur la longueur de la poutre.

Les propriétés du matériau de la poutre poreuse FGM varient selon deux lois différentes ; une loi de distribution de puissance et une autre sigmoïdale en fonction de la fraction volumique de ses constituants qui sont l'aluminium et l'aluminât ; Les équations de mouvement sont déterminées en utilisant le principe des travaux virtuel. La méthode de Navier est utilisée pour résoudre les équations, qui régissent les poutres FG poreuses simplement supportées, par une solution analytique.

Les solutions sont présentes sous forme tensorielle, ou la résolution du système nous amène à chercher les vecteurs propres et les valeurs propres.

### III.2. Propriétés des matériaux constitutifs de la FGM

Une poutre FGM constituée d'un mélange de deux phases matérielles, par exemple du métal et de la céramique. La composition de ce bi matériau à varie graduellement suivant l'épaisseur selon les deux lois en puissance et sigmoïdale, dont les propriétés de matériaux sont supposées changer continuellement en hauteur, notamment dans la direction  $z$ , comme le montre la Fig.III.1. La poutre S-FGM est étudiée dans la direction de sa longueur ( $x$ ). Nous avons supposé dans une partie de notre étude que ce matériau fonctionnel soit imparfait (poreux) en raison de l'inévitable existence de plusieurs sortes de la porosité tel que la distribution uniforme, logarithmiques, exponentielles et une nouvelles distribution proposé qui parait similaire à la distribution décrite par le procédé de fabrication de ces types de matériaux. Les fractions volumiques des constituants sont données en fonction de la structure des poutres S-FGM et P-FGM.



**Figure III. 1 :** Coordonnées et géométrie de la poutre poreuse fonctionnellement graduée reposant sur une fondation élastique variable.

### III.2.1 loi de mélange de Voigt pour les poutres P-FGM parfaites

Considérant une poutre FGM imparfaite avec une fraction volumique de porosité,  $\alpha$  ( $\alpha \ll 1$ ), uniformément répartie entre le métal et la céramique, la règle de mélange est utilisée:

$$P = P_c(V_c - \alpha) + P_m(V_m - \alpha) \quad (\text{III.1})$$

$\alpha$  est appelé fraction volumique de porosité ( $\alpha \ll 1$ ).  $\alpha = 0$  indique la poutre fonctionnellement graduée non poreuse. Maintenant, la fraction volumique totale du métal et de la céramique est  $V_m + V_c = 1$ , et la loi de puissance de la fraction volumique de la céramique est décrite comme:

$$V_c = \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^n \quad (\text{III.2})$$

Où «n» est l'indice de fraction de volume du matériau.

La propriété matérielle effective de la poutre P-FGM parfaite est donnée comme suit:

$$E(z) = [E_c - E_m] \left( \frac{2z+h}{2z} \right)^n - [E_c + E_m] \left[ 1 - \frac{2|z|}{h} \right] + E_m \quad (\text{III.3a})$$

$$\rho(z) = [\rho_c - \rho_m] \left( \frac{2z+h}{2z} \right)^n - [\rho_c + \rho_m] \left[ 1 - \frac{2|z|}{h} \right] + \rho_m \quad (\text{III.3b})$$

### III.2.2 loi de mélange modifiée de Voigt pour les poutres P-FGM poreuses

La propriété matérielle effective de la poutre P-FGM poreuse est donnée comme suit:

$$E(z) = [E_c - E_m] \left( \frac{2z+h}{2z} \right)^n - \Omega [E_c + E_m] \left[ 1 - \frac{2|z|}{h} \right] + E_m \quad (\text{III.4a})$$

$$\rho(z) = [\rho_c - \rho_m] \left( \frac{2z+h}{2z} \right)^n - \Omega [\rho_c + \rho_m] \left[ 1 - \frac{2|z|}{h} \right] + \rho_m \quad (\text{III.4b})$$

Où les formules (III.4) désignent les caractéristiques effectives de matériau tel que le module de Young  $\mathbf{E}$  et les indices de densité  $\rho$  de masse.  $m$  et  $c$  désignent l'appellation de la fraction du matériau tel que métal ou céramique, respectivement. " $\Omega$ " c'est le facteur de la distribution de la porosité en fonction de l'épaisseur de la poutre.

On note que le nombre réel positif  $n$  ( $0 \leq n < \infty$ ) est la loi de puissance ou indice de fraction volumique, et  $z$  est la distance du plan médian de la poutre FGM. Lorsque « $n$ » tend vers zéro ( $n = 0$ ), la poutre devienne entièrement céramique et pour une valeur infinie de « $n$ » une poutre soit entièrement métallique. Le coefficient de Poisson ( $\nu$ ) est considéré comme constant dans ce travail [Kitipornchai et al. 2006]. Les propriétés du matériau d'une poutre FGM parfaite peuvent être évaluées en prenant une valeur nulle de  $\Omega$ .

### III.2.3 loi de mélange de Voigt pour les poutres S-FGM parfaites

La fraction volumique de la phase céramique de ce type de poutres est définie selon la loi de puissance suivante [Batou et al. 2019] :

$$V_c^1 = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{(h/2) - z}{h/2} \right)^n \quad (\text{III.5a})$$

$$V_c^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{(h/2) + z}{h/2} \right)^n \quad (\text{III.5b})$$

Où,  $h$  est la hauteur de la poutre et  $n$  représente l'indice de fraction volumique indiquant la variation du matériau dans la direction de la hauteur de la poutre. Dans le cas où  $n$  soit nul la poutre devienne isotrope.

La loi de mélange d'un matériau S-FGM parfait est donnée, pour les modules de young  $E(z)$  et la densité  $\rho$  des matériaux comme suit :

$$\begin{aligned} E(z) &= E_c V_c^1 + (1 - V_c^1) E_m - (E_c + E_m) & \text{for } 0 \leq z \leq h/2 \\ E(z) &= E_c V_c^2 + (1 - V_c^2) E_m - (E_c + E_m) & \text{for } -h/2 \leq z \leq 0 \end{aligned} \quad (\text{III.6a})$$

$$\begin{aligned} \rho(z) &= \rho_c V_c^1 + (1 - V_c^1) \rho_m - (\rho_c + \rho_m) & \text{for } 0 \leq z \leq h/2 \\ \rho(z) &= \rho_c V_c^2 + (1 - V_c^2) \rho_m - (\rho_c + \rho_m) & \text{for } -h/2 \leq z \leq 0 \end{aligned} \quad (\text{III.6b})$$

### III.2.4 loi de mélange modifiée de Voigt pour les poutres S-FGM poreuses

La règle modifiée du mélange prenant en compte le défaut microstructural, telle que proposée pour les plaques par [Gupta et Talha. 2018], les modules de young  $E(z)$  et la densité  $\rho$  des matériaux sont donnés par la loi de mélanges suivante :

**i- Type-I**, porosités uniformément réparties sur la section transversale :

$$E(z) = E_c V_c^1 + (1 - V_c^1) E_m - \frac{\alpha}{2} (E_c + E_m) \quad \text{for } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{III.7a})$$

$$E(z) = E_c V_c^2 + (1 - V_c^2) E_m - \frac{\alpha}{2} (E_c + E_m) \quad \text{for } -h/2 \leq z \leq 0$$

$$\rho(z) = \rho_c V_c^1 + (1 - V_c^1) \rho_m - \frac{\alpha}{2} (\rho_c + \rho_m) \quad \text{for } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{III.7b})$$

$$\rho(z) = \rho_c V_c^2 + (1 - V_c^2) \rho_m - \frac{\alpha}{2} (\rho_c + \rho_m) \quad \text{for } -h/2 \leq z \leq 0$$

**ii- Type II**, porosités non uniforme réparties en section transversale et principalement concentrées dans la zone centrale des poutres :

$$E(z) = E_c V_c^1 + (1 - V_c^1) E_m - \Omega \left( 1 - \frac{2|z|}{h} \right) (E_c + E_m) \quad \text{for } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{III.8a})$$

$$E(z) = E_c V_c^2 + (1 - V_c^2) E_m - \Omega \left( 1 - \frac{2|z|}{h} \right) (E_c + E_m) \quad \text{for } -h/2 \leq z \leq 0$$

$$\rho(z) = \rho_c V_c^1 + (1 - V_c^1) \rho_m - \Omega \left( 1 - \frac{2|z|}{h} \right) (\rho_c + \rho_m) \quad \text{for } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{III.8b})$$

$$\rho(z) = \rho_c V_c^2 + (1 - V_c^2) \rho_m - \Omega \left( 1 - \frac{2|z|}{h} \right) (\rho_c + \rho_m) \quad \text{for } -h/2 \leq z \leq 0$$

Dans lequel, les indices  $c$  et  $m$  représentent respectivement la céramique et le métal. De plus,  $p$  est l'indice de loi de puissance qui définit la caractérisation de la variation du matériau à travers la hauteur de la poutre. Le coefficient de Poisson est considéré comme constant.

$(\alpha \ll 1)$  est le coefficient de porosité. L'effet des porosités est proposé comme deux modèles différents. Dans l'équation (III.6), le premier modèle a une distribution uniforme de la porosité dans la section transversale des poutres, comme indiqué dans [Wattanasakulpong et Ungbhakorn. 2014] et [Ait Atmane et al. 2015]. Dans l'équation (III.7), le deuxième modèle de porosité a des distributions inégales concentrées au milieu des poutres avec certains modèles

(linéaire, logarithmique, exponentiel et nouveau), comme indiqué dans les références [Ayache et al. 2018] ; [Gupta et Talha 2018] comme indiqué dans le tableau 1

**Tableau III.1** : les fonctions de distribution de porosité non uniforme  $\Omega$ .

Sources	type de distribution	$\Omega$
(Wattanasakulpong et Ungbhakorn 2014)	Linéaire	$\frac{\alpha}{2}$
(Gupta et Talha 2018)	Logarithmique	$\log\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)$
(Ayache <i>et al.</i> 2018)	Exponentielle	$1 - e^{-\frac{\alpha}{2}}$
<b>Présente étude</b>	Sinus	$0.325 \cdot \sin\left(\frac{3\alpha}{2}\right)$

**iii- Type III** : Une autre formulation compacte et cubique de la porosité est proposée par [Hadji et Bernard. 2020] et adaptée des expressions pour les matériaux à base de ciment développées par [Kendall et al. 1983] et [Hadji et al. 2019] ; les propriétés d'un P-FGM pour cette formulation compacte sont définies comme suit :

$$\begin{aligned}
 E(z) &= \left[ (E_c - E_m) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n + E_m \right] \left[ 1 - \frac{\alpha}{2} \left( 1 - \frac{2|z|}{h} \right) \right]^3 \\
 \rho(z) &= \left[ (\rho_c - \rho_m) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n + \rho_m \right] \left[ 1 - \frac{\alpha}{2} \left( 1 - \frac{2|z|}{h} \right) \right]^3
 \end{aligned} \tag{III.9}$$

Dans ce travail, nous allons adapter cette formulation pour les matériaux de type SFGM dont les propriétés s'expriment comme suit :

$$E(z) = \left[ E_c V_c^1(z) + (1 - V_c^1(z)) E_m \right] \left[ 1 - \frac{\alpha}{2} \left( 1 - \frac{2|z|}{h} \right) \right]^3 \quad \text{for } 0 \leq z \leq h/2 \tag{III.10a}$$

$$E(z) = \left[ E_c V_c^2(z) + (1 - V_c^2(z)) E_m \right] \left[ 1 - \frac{\alpha}{2} \left( 1 - \frac{2|z|}{h} \right) \right]^3 \quad \text{for } -h/2 \leq z \leq 0$$

$$\rho(z) = \left[ \rho_c V_c^1(z) + (1 - V_c^1(z)) \rho_m \right] \left[ 1 - \frac{\alpha}{2} \left( 1 - \frac{2|z|}{h} \right) \right]^3 \quad \text{for } 0 \leq z \leq h/2 \tag{III.10b}$$

$$\rho(z) = \left[ \rho_c V_c^2(z) + (1 - V_c^2(z)) \rho_m \right] \left[ 1 - \frac{\alpha}{2} \left( 1 - \frac{2|z|}{h} \right) \right]^3 \quad \text{for } -h/2 \leq z \leq 0$$

### III.3. Fondation à raideur élastique variable

La poutre FGM repose sur une fondation à deux paramètres: le paramètre de Winkler modélisé par des ressorts et le paramètre de Pasternak qui est représenté par une couche de cisaillement, qui est interconnectée au ressort de Winkler [Nebab et al. 2019], dont la réaction  $R(x)$  de la fondation s'exprime par:

$$R(x) = K_w(x)w - K_s \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (III.11)$$




Où:

$K_s$  est la rigidité de la couche de cisaillement; elle est considérée comme constante.

$K_w(x)$  le paramètre de Winkler qui varie suivant la longueur ( $L$ ) de la poutre FGM selon les formes de distribution suivantes:

$$K_w(x) = \psi \cdot \left( \frac{k_0 \cdot D_i}{L^4} \right) \quad (III.12)$$

Le coefficient  $\psi$  est donné par:

Forme linéaire	Forme parabolique	Forme sinusoidale
$\psi = 1 + \zeta \frac{x}{L}$	$\psi = 1 + \zeta \left( \frac{x}{L} \right)^2$	$\psi = 1 + \zeta \cdot \sin\left( \frac{\pi \cdot x}{L} \right)$
		

$k_0$ : est une constante et un paramètre variable. Lorsque " $\zeta$ " est égal à zéro, la fondation élastique devient une fondation Pasternak uniforme et si la rigidité de la couche de cisaillement est négligée, elle devient une fondation Winkler.

### III.4. Équations fondamentales

#### III.4.1. Cinématique et déformations

Il est proposé que le champ de déplacement actuel ait trois nombres d'inconnues, sur la base de théories de déformation de cisaillement plus élevées pour les poutres ; le champ de déplacement de la théorie conventionnelle est donné par [Ayache et al., 2018] comme suit :

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z)\varphi(x, t) \quad (III.13a)$$

$$w(x, z, t) = w_0(x, t) \quad (III.13b)$$

Où,  $u_0$  est le déplacement dans le plan médian de la poutre dans la direction  $x$ ,  $w_0$  et  $\theta$  sont les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal, respectivement.  $f(z)$  est une fonction de forme déterminant la distribution du cisaillement transversal sont choisis pour satisfaire les conditions aux limites sans contrainte sur les surfaces supérieure et inférieure de la poutre, ainsi un facteur de correction de cisaillement n'est pas nécessaire. En considérant  $\varphi = \int \theta(x) dx$ , le champ de déplacement du présent modèle peut être exprimé sous une forme plus simple comme [Fourn et al. 2018] :

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + K f(z) \int \theta(x, t) dx \quad (\text{III.14a})$$

$$w(x, z, t) = w_0(x, t) \quad (\text{III.14b})$$

Les différentes formes de fonction pour sont présentées dans cette étude actuelle, comme indiqué dans le tableau 2 :

**Tableau III.2 :** Diverses théories de déformation de cisaillement.

Les modèles	La fonction de forme $f(z)$
Théorie de la déformation du troisième ordre (TSDT)	$z \cdot \left( \frac{5}{4} - \frac{5 \cdot z^2}{3 \cdot h^2} \right)$
Théorie de la déformation en cosinus (CSDT)	$\frac{z \left[ \pi + 2 \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right]}{2 + \pi}$
Théorie de la déformation sinusoïdale (SSDT)	$\frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$
Théorie de la déformation exponentielle(ESDT)	$z e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}$
Théorie de la déformation hyperbolique (HSDT)	$h \sinh \frac{z}{h} + z \cosh \frac{1}{2}$

On peut voir que le champ de déplacement dans l'Equation (III.14) n'introduit que deux inconnues ( $u_0, w_0$ ). Les déformations non nulles associées au champ de déplacement dans (III.14) sont :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + z k_x^b + f(z) k_x^s, \quad \gamma_{xz} = g(z) \gamma_{xz}^0 \quad (\text{III.15})$$

Où

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad k_x^b = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \quad k_x^s = k \theta, \quad \gamma_{xz}^0 = k \int \theta dx, \quad (\text{III.16})$$

Et

$$g(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (\text{III.17})$$

Et Les intégrales définies dans les équations ci-dessus doivent être résolues par une méthode de type Navier et peuvent s'écrire comme suit :

$$\int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (\text{III.18})$$

Où les coefficients  $A'$  sont exprimés en fonction du type de solution utilisée, en l'occurrence via Navier. Par conséquent,  $A'$  et  $k$  s'expriment comme suit :

$$A' = -\frac{1}{\kappa^2}, K = \kappa^2, \kappa = \frac{m\pi}{L} \quad (\text{III.19})$$

Où  $\kappa$  est le nombre d'onde de la poutre en vibration libre et transversale le long de la direction de l'axe  $x$ . Les relations générales entre contrainte-déformation pour une poutre sigmoïde linéaire isotrope fonctionnellement graduée sont décrites comme :

$$\sigma_x = C_{11} \varepsilon_x, \quad \tau_{xz} = C_{55} \gamma_{xz} \quad (\text{III.20})$$

Où  $(\sigma_x, \tau_{xz})$  et  $(\varepsilon_x, \gamma_{xz})$  sont respectivement les composantes de contrainte et de déformation. En utilisant les propriétés du matériau définies dans les équations. (III.15) et (III.16), les coefficients de rigidité,  $C_{ij}$ , peuvent être donnés comme :

$$C_{11} = \frac{E(z)}{(1-\nu^2)}, \quad C_{55} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (\text{III.21})$$

### III.4.2 Équations de mouvement

Le principe de Hamilton est utilisé ici pour dériver les équations du mouvement. Le principe peut être énoncé sous forme analytique comme [Benferhat et al. 2016] :

$$\int_0^t (\delta U + \delta U_{ef} + \delta V - \delta K) dt = 0 \quad (\text{III.22})$$

Où  $\delta U$  est la variation de l'énergie de déformation ; est  $\delta U_{ef}$  l'énergie de déformation de la fondation élastique ;  $\delta K$  est la variation de l'énergie cinétique ;  $\delta V$  est la variation du travail externe effectué par une charge axiale de poutre.

La variation de l'énergie de déformation de la poutre est donnée par



$$\begin{aligned}\delta U &= \int_V [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] dV \\ &= \int_A [N_x \delta \varepsilon_x^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_x^s \delta k_x^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^0] dA = 0\end{aligned}\quad (\text{III.23})$$

Où A est la surface supérieure et les résultantes des contraintes  $N$ ,  $M$  et  $S$  sont définies par :

$$(N_x, M_x^b, M_x^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_i dz, \quad S_{xz}^s = \int_{-h/2}^{h/2} g \tau_{xz} dz \quad (\text{III.24})$$

La variation de l'énergie de déformation des fondations élastiques s'exprime par :

$$\delta U_{ef} = \int_A (K_w w_0 \delta w_0 - K_s \left( \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right) \delta w_0) dA \quad (\text{III.25a})$$

$$K_w(x) = \psi \cdot \left( \frac{k_0 \cdot D_i}{L^4} \right) \quad (\text{III.25b}) \quad (4b)$$

Où

$K_s$  : la couche de cisaillement, elle est constante

$K_w$  : le paramètre variable de Winkler.

La variation du travail externe peut être exprimée comme :

$$\delta V = - \int_A \left( N_x^0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} \right) dA \quad (\text{III.26})$$

Où,  $N_x^0$  est la charge axiale appliquée.

La variation de l'énergie cinétique de la poutre peut être exprimée par :

$$\begin{aligned}\delta K &= \int_V [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{w} \delta \dot{w}] \rho(z) dV \\ &= \int_A \left\{ I_0 [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0] - I_1 \left( \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 \right) + \right. \\ &J_1 \left( (kA) \left( \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \delta \dot{u}_0 \right) \right) + I_2 \left( \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right) + \\ &\left. K_2 \left( (kA)^2 \left( \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} \right) \right) - J_2 \left( (kA) \left( \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right) \right) \right\} dA\end{aligned}\quad (\text{III.27})$$

Où la convention point-exposant indique la différenciation par rapport à la variable temps  $\rho(z)$ ; est la masse volumique donnée par les équations de mélanges citées plus haut; et ( $I_i$ ,  $J_i$ ,  $K_i$ ) sont des inerties de masse exprimées par :

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \rho(z) dz$$

$$(J_1, J_2, K_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (f, z f, f^2) \rho(z) dz$$
(III.28)

En substituant les expressions pour  $\delta U$ ,  $\delta U_{ef}$ ,  $\delta K$  et  $\delta V$  des équations (III.23), (III.25), (III.26) et (III.27) dans l'Equation (III.22), et en utilisant l'intégrale par partie, les équations de mouvement de la poutre peuvent s'écrire comme suit :

$$\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + k A' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x}$$

$$\delta w_0 : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + N_x^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + K_w w_0 - K_s \left( \frac{\partial w_0}{\partial x^2} \right) = I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} \right) - I_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2}$$

$$+ J_2 \left( k A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} \right)$$

$$\delta \theta : -k M_x^s + k A' \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} = -J_1 \left( k A' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} \right) - K_2 \left( (k A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} \right) +$$

$$J_2 \left( k A' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} \right)$$
(III.29)

En substituant l'équation (III.18) dans l'équation (III.22) et les résultats ultérieurs dans les équations (III.23), les résultantes des contraintes sont obtenues en termes de déformations sous la forme compacte suivante :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ M_x^b \\ M_x^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ k_x^b \\ k_x^s \end{Bmatrix}, S_{xz}^s = A^s \gamma_{xz}$$
(III.30)

Et les composantes de rigidité sont données comme suit :

$$\{A \ B \ D \ B_{11}^s \ D_{11}^s \ H_{11}^s\} = \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij} (1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) dz$$
(III.31a)

$$A_{55}^s = \int_{-h/2}^{h/2} C_{44} [g(z)]^2 dz,$$
(III.31b)

Présentation de l'équation (III.30) dans l'équation (III.29), les équations de mouvement peuvent être exprimées en termes de déplacements ( $u_0, w_0, \theta$ ) et les équations appropriées prennent la forme :

$$A_{11}d_{11}u_0 - B_{11}d_{111}w_0 + (B_{11}^s k) d_1 \theta = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 d_1 \ddot{w}_0 + J_1 A' k d_1 \ddot{\theta}, \quad (\text{III.32a})$$

$$B_{11} d_{111} u_0 - D_{11} d_{1111} w_0 + N_x^0 d_{11} w_0 + (D_{11}^s k) d_{11} \theta - K_w w_0 + K_s d_{11} w_0 = I_0 \ddot{w}_0 + I_1 (d_1 \ddot{u}_0) - I_2 (d_{11} \ddot{w}_0) + J_2 (k A' d_{11} \ddot{\theta}) \quad (\text{III.32b})$$

$$- (B_{11}^s k) d_1 u_0 + (D_{11}^s k) d_{11} w_0 - H_{11}^s k^2 \theta + A_{55}^s (k A')^2 d_{11} \theta = -J_1 (k A' d_1 \ddot{u}_0) + J_2 (k A' d_{11} \ddot{w}_0) - K_2 ((k A')^2 d_{11} \ddot{\theta}) \quad (\text{III.32c})$$

Où,

$d_{ij}$ ,  $d_{ijl}$  et  $d_{ijlm}$  sont les opérateurs différentiels suivants :

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}$$

$$d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, (i, j, l, m = 1, 2). \quad (\text{III.33})$$

### III.5. Solution analytique pour les poutres FG simplement supportées :

Dans cette étude, une poutre simplement appuyée reposant sur une fondation élastique a été considérée. La longueur de la poutre était "L", la largeur était "b" et la hauteur était "h". La méthode de résolution de Navier est utilisée pour la résolution analytique de l'équation différentielle du problème de la vibration libre de la poutre :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ w_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_m e^{i\omega t} \cos(\kappa x) \\ W_m e^{i\omega t} \sin(\kappa x) \\ X_m e^{i\omega t} \sin(\kappa x) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.34})$$

Où:

$U_m$ ,  $W_m$  et  $X_m$  sont des paramètres arbitraires à déterminer.

$\omega$  est la fréquence de vibration libre de la poutre.

Avec :

$$\kappa = m\pi / L \quad (\text{III.35})$$

Avec : L est la longueur de la poutre

Considérant que la poutre est soumise à une charge de compression axiale de forme : (voici le paramètre de charge non dimensionnelle).

En substituant l'équation (III.34) dans l'équation (III.32), on obtient le problème suivant :

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} + \beta & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_m \\ W_m \\ X_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.36})$$

Ou :

$$\begin{aligned} S_{11} &= -(A_{11}\kappa^2), \quad S_{12} = (B_{11}\kappa^3), \quad S_{13} = \kappa(kB_{11}^s), \quad S_{22} = -(D_{11}\kappa^4) - K_w - K_s \cdot \alpha^2 \\ S_{23} &= -k_1(D_{11}^s\kappa^2), \quad S_{33} = -(H_{11}^s\kappa^2) - (kA')^2 A_{55}^s \kappa^2 \\ \beta &= N_{cr}(\gamma\kappa^2) \end{aligned} \quad (\text{III.37})$$

$$m_{11} = -I_0, \quad m_{12} = \kappa I_1, \quad m_{13} = -J_1 k A' \kappa, \quad m_{22} = -I_0 - (I_2 \kappa^2)$$

$$m_{23} = J_2 (k A' \kappa^2), \quad m_{33} = -K_2 (k A')^2 \kappa^2$$

Pour le cas des vibrations libres on a l'énergie externe 'V' égale à zéro, ce qui donne ; des fréquences de vibration obtenues en résolvant le système d'équations (III.36) en valeurs propres.

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_m \\ W_m \\ X_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.38})$$

Pour les problèmes de flambement, la fréquence propre est nulle et l'équation de flambement peut être exprimée sous la forme du problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{pmatrix} + \Lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_m \\ W_m \\ X_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.39})$$

Pour les solutions non triviales des équations. (III.38), (III.39), les déterminants suivants devraient être nuls :

$$\text{Pour un problème de vibration libre} \rightarrow \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.40a})$$

$$\text{Pour un problème de Flambement} \rightarrow \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix} + \Lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.40b})$$

Ainsi ; les équations (III.40) donnent les fréquences propres et les charges de flambement de la poutre FGM.

### III.6 Conclusion

Le développement mathématique opéré pour l'étude du flambement et de la vibration libre de poutres à gradient de propriétés reposant sur des fondations élastiques à raideur variables a été effectuée en utilisant une théorie de déformation de cisaillement à ordre élevé. La théorie actuelle ne comporte que trois variables, ce qui signifie que le cheminement utilisé nous fait gagner en termes de temps de calcul. Les fondations élastiques sont supposées avoir deux paramètres ; Le module de Winkler est supposé variable dans la présente étude (linéaire, parabolique et sinusoïdale) en fonction de la longueur des poutres FGM et la couche de cisaillement de Pasternak supposée constante.

Dans le suivant chapitre on va procéder à une validation de ce cheminement choisi ainsi qu'une étude paramétrique des différents facteurs qui peuvent influencer le comportement mécanique de la poutre FGM.

# **Chapitre IV : Validation des résultats et étude paramétrique**

---

## IV.1 Introduction

Dans cette étude nous avons considéré une poutre FGM avec une distribution matérielle en puissance et sigmoïdale. L'effet de la porosité a été pris en compte. Pour une poutre en tenant compte de l'effet du gauchissement. La poutre choisie a été sollicitée en vibration libre et en flambement, adossée à une fondation à raideur variable

Les résultats numériques de la présente théorie pour les deux sollicitations, à savoir la vibration libre et le flambement des poutres FGM reposant sur des fondations élastiques, sont présentés et comparés aux solutions antérieures, proposées par d'autres chercheurs. Une étude paramétrique sera exposée pour comprendre la variation des fréquences circulaires et la charge critique de la poutre en fonction de plusieurs paramètres tels que le facteur de puissance matériel, le rapport d'épaisseur  $L/h$ , le facteur de porosité  $\alpha$  et les paramètres de fondation  $K_w$  et  $K_p$ , et bien d'autres paramètres développés dans ce chapitre.

Ces solutions sont trouvées par la résolution numérique en valeurs propres des équations (III.40a) pour le problème vibratoire et (III.40b) pour celui de la charge critique de flambement.

## IV.2 Matériaux choisis pour l'étude numérique

Dans cette partie, une double analyse des vibrations naturelles et du flambement des poutres réalisées avec des matériaux composites avancés est proposée, en utilisant la présente théorie basée sur un champ de déplacement à variables intégrales. Une analyse aux valeurs propres est effectuée pour résoudre ce type de problèmes. Toutes les analyses présentant le présent modèle sont effectuées en utilisant le logiciel MAPLE.

Les poutres en matériaux P-FGM et S-FGM sont étudiées et comparées en termes de vibration ou de flambement. Ces poutres sont constituées d'un mélange de métal (aluminium) et de céramique (alumine) avec les propriétés suivantes :

Céramique : (Alumine,  $Al_2O_3$ )  $E_c = 380$  GPa,  $\nu = 0,3$  et  $\rho_c = 3960$  kg/m<sup>3</sup>.

Métal : (Aluminium, Al)  $E_m = 70$  GPa,  $\nu = 0,3$  et  $\rho_m = 2702$  kg/m<sup>3</sup>.

Le coefficient de Poisson de la poutre est supposé constant sur l'épaisseur et égal à 0,3.

Par souci de simplicité et de comparaison, la fréquence de vibration sans dimension et la charge critique de flambement suivantes pour les poutres P-FGM et S-FGM sont utilisées :

$$D_m = \frac{E_m h^3}{12(1-\nu^2)} \quad ; \quad \bar{K}_s = \frac{K_s D_i}{L^2}, \quad i = m, c \quad ; \quad D_c = \frac{E_c h^3}{12(1-\nu^2)} \quad , \quad \bar{N} = N_{cr} \frac{12L^2}{h^3 E_m} \quad (\text{IV.1})$$

$$\hat{\omega} = \omega \left( \frac{L^2}{h} \right) \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \quad ; \quad \beta = \sqrt[4]{\frac{\rho_c \cdot A \cdot L^4 \cdot \omega^2}{EI}} \quad ; \quad \bar{\omega} = \omega \left( \frac{L^2}{h} \right) \sqrt{\frac{\rho_c}{E_c}}$$

### IV.3 validation du model analytique

Plusieurs fonctions ont été utilisées dans ce travail pour la validation et l'étude paramétrique ; Ces fonctions sont déjà énumérées dans le Tableau III.2.

Dans le Tableau IV.1, les résultats numériques des fréquences non dimensionnelles de la poutre P-FGM sont comparés à ceux d'Ebrahimi et al (2016), Şimşek (2010) et Ibnorachid et al (2019). La fonction de forme utilisée dans ce travail est basée sur la théorie de déformation de poutre du troisième ordre (TSDT), et est définie comme suit :

$$f(z) = z \cdot \left( \frac{5}{4} - \frac{5 \cdot z^2}{3 \cdot h^2} \right) \quad (\text{IV.2})$$

Il est rapporté que dans cette étude le coefficient  $C_{11}$  est égal à  $C_{11} = E(z)$ . De plus, la porosité n'a pas été introduite.

**Tableau IV.1 :** Comparaison des fréquences fondamentales sans dimension ( $\hat{\omega}_1$ ) pour une poutre P-FGM parfaite sur appuis simples.

$\frac{L}{h}$	Méthode de Solution	$n$				
		0	0.2	0.5	1	2
5	Ebrahimi and Jafari (2016)	5.1524	4.8060	4.4106	3.9965	3.6447
	CBT Şimşek (2010)	5.3953	5.0219	4.5936	4.1483	3.7793
	FSDBT Şimşek (2010)	5.1524	4.8065	4.4083	3.9902	3.6343
	TSDBT Şimşek (2010)	5.1531	4.8096	4.4114	3.9907	3.6263
	ESDBT Şimşek (2010)	5.1542	4.8105	4.4122	3.9914	3.6267
	Ibnorachid (2019)	5.1527	4.8080	4.4106	3.9904	3.6264
	Présente étude	5.1527	4.8081	4.4107	3.9904	3.6264
20	Ebrahimi and Jafari (2016)	5.4603	5.0813	4.6511	4.2055	3.8375
	CBT Şimşek (2010)	5.4777	5.0980	4.6646	4.2163	3.8472
	FSDBT Şimşek (2010)	5.4603	5.0826	4.6513	4.2050	3.8367
	TSDBT Şimşek (2010)	5.4604	5.0829	4.6516	4.2051	3.8361
	ESDBT Şimşek (2010)	5.4604	5.0829	4.6516	4.2052	3.8362
	Ibnorachid (2019)	5.4603	5.0815	4.6511	4.2050	3.8361
	Présente étude	5.4603	5.0815	4.6511	4.2051	3.8361



Il est évident que les fréquences fondamentales obtenues dans ce travail sont en bon accord avec les résultats d'autres études  $\left(\frac{L}{h}\right)$  antérieures. Plus particulièrement, dans Ibnorachid (2019) ou la technique de Navier est utilisée comme dans la présente étude, avec un champ cinématique basé sur la fraction du déplacement  $w$  en deux termes, un terme de flexion et un autre de cisaillement. Les résultats de cette étude représentent également la moyenne des deux résultats de FSDBT et TSDBT présentés par Şimşek (2010).

Les similitudes dans les résultats valident la présente approche. Comme premier exemple de vérification, les effets de l'indice de loi de puissance « $n$ » et du rapport d'élanement  $L/h$  sur la fréquence fondamentale non dimensionnelle du P-FGB simplement supporté sont, aussi, étudiés.

On remarque, cependant, que les fréquences prédites par les théories d'ordre supérieur sont plus petites que celles prédites par la théorie classique des poutres ; mais cette différence diminue au fur et à mesure que la valeur  $L/h$  augmente.

Des comparaisons sont fournies dans le Tableau. IV.2 pour les poutres FGM soumises à une charge axiale avec diverses configurations. Un bon accord est mis en évidence entre les résultats de la présente étude et ceux des solutions proposées par Nguyen et al. (2013) et Vo et al. (2014). Une autre fois, le coefficient  $C_{11}$  est pris égal à  $C_{11} = E(z)$  dans cette partie de l'étude.

**Tableau IV.2 :** Comparaison de la charge critique de flambement sans dimension ( $\bar{N}$ ) d'une poutre P-FGM parfaite sur appuis simples.

$\frac{L}{h}$	Méthode de Solution	$N$					
		0	0.5	1	2	5	10
5	Nguyen et al (2013)	48.8350	31.9610	24.6870	19.2450	16.0240	14.4270
	Vo et al (2014)	48.8401	32.0094	24.6911	19.1605	15.7400	14.1468
	Présente étude	48.5959	31.8663	24.5838	19.0709	15.6435	14.0512
10	Nguyen et al. (2013)	52.3080	33.9890	26.1710	20.4160	17.1940	15.6120
	Vo et al (2014)	52.3082	34.0087	26.1727	20.3936	17.1118	15.5291
	Présente étude	52.23778941	33.9673	26.1409	20.3662	17.0817	15.4993
20	Nguyen et al. (2013)	--	--	--	--	--	--
	Vo et al (2014)	53.2546	34.5488	26.5718	20.7275	17.4935	15.9185
	Présente étude	53.2364	34.5371	26.5613	20.7185	17.4842	15.9099

Il est à remarquer, aussi, que les charges critiques de flambage deviennent significantes avec l'augmentation de l'élanement de la poutre.

Une autre remarque nous indique que quand le taux de céramique augmente, en remplacement du métal, la charge critique de flambement diminue ; ceci est logique puisque la céramique est plus rigide que le métal.

Le Tableau.IV.3 présente une étude comparative des fréquences adimensionnelles obtenus par des théories proposées dans cette recherche avec ceux obtenus par d'autres théories : [Ying et al. (2008)]; [Ait Atmane et al. (2015)], pour plusieurs valeurs de rapports d'épaisseurs et pour divers valeurs de paramètres de fondation " $K_w$ " and " $K_s$ ". A partir des résultats présentés dans ce tableau, on peut voir que les fréquences obtenues par la présente méthode.

A partir des résultats présentés dans le tableau, on voit que les fréquences adimensionnelles obtenues par la présente méthode sont en bonne concordance avec ceux des autres recherches ; et montrent aussi que les fréquences augmentent avec l'augmentation des paramètres de fondation d'une part et d'autant plus que la poutre devienne épaisse, d'une autre part.

**Tableau.IV.3 :** Comparaison des fréquences adimensionnelles " $\beta$ " d'une poutre parfaite et isotrope sur fondation élastique,  $n=0$ .

$K_w$	$K_s$	L/h=120			L/h=15			L/h=5		
		Ying et al., (2008)	Ait atmane et al. (2015)	Present	Ying et al. (2008)	Ait atmane et al. (2015)	Present	Ying et al. (2008)	Ait atmane et al. (2015)	Present
0	0	3.14145	3.14214	3.14141	3.13227	3.13093	3.13002	3.06373	3.04842	3.04552
	1	3.73587	3.73629	3.73587	3.72775	3.72700	3.72740	3.66645	3.65989	3.66015
	2,5	4.29689	4.29716	4.29690	4.28886	4.28845	4.28972	4.22319	4.22492	4.22953
$10^2$	0	3.74823	3.74864	3.74823	3.74012	3.73937	3.73981	3.67882	3.67243	3.67987
	1	4.14357	4.14388	4.14358	4.13558	4.13508	4.13615	4.07200	4.07127	4.08394
	2,5	4.58227	4.58249	4.58229	4.57410	4.57383	4.57546	4.50278	4.50972	4.52797
$10^4$	0	10.02403	10.02405	10.02411	9.99583	10.00663	10.01501	7.34081	7.55257	7.37658
	1	10.04812	10.04814	10.04820	10.01971	10.03065	10.03908	7.34095	7.55257	7.37658
	2,5	10.08393	10.08395	10.08401	10.05520	10.06635	10.07486	7.34116	7.55257	7.37658

Dans ce qui suit, une étude comparative sur la variation des fréquences adimensionnelles et des charges critiques de flambement d'une poutre de type P-FGM et S-FGM est accomplie par rapport à plusieurs paramètres tel que le rapport L/h, le facteur n, ainsi que les paramètres de la fondation et la forme de la variation de la raideur de Winkler sous la poutre (Linéaire, sinusoidale et parabolique) sont présentés dans ci-après.

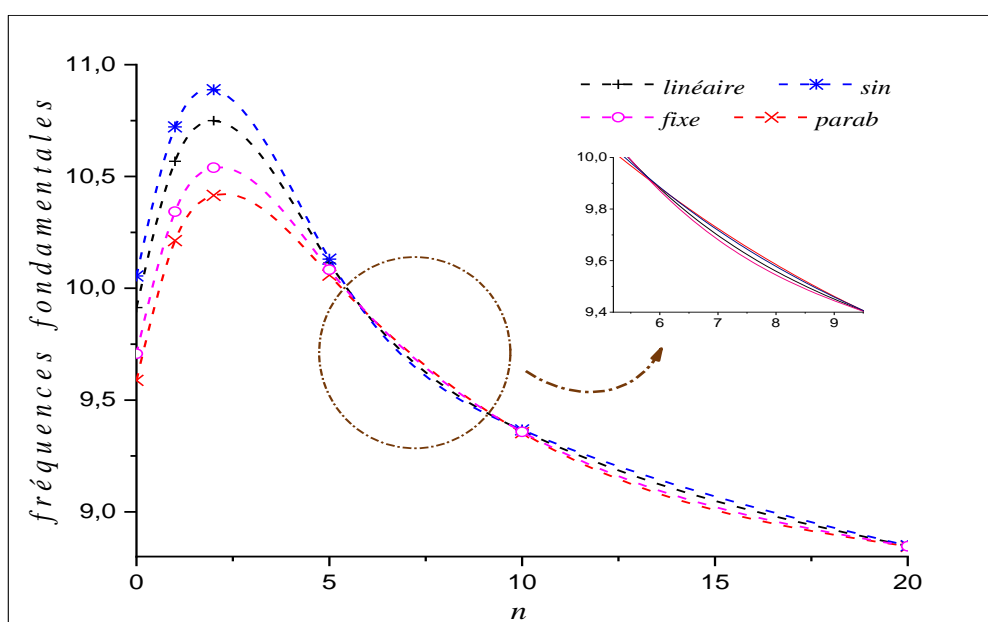
#### IV.4 Etude paramétrique des poutres parfaites (sans porosité) :

Avant d'entamer l'étude de l'effet de la porosité sur le comportement en stabilité et vibration des poutres FGM, on fait une étude paramétrique de ce type de structure sans tenir compte de la porosité. Ce travail est compte comme une étude témoin pour les poutres imparfaites.

### IV.4.1 Etude paramétrique des poutres parfaites de type P-FGM

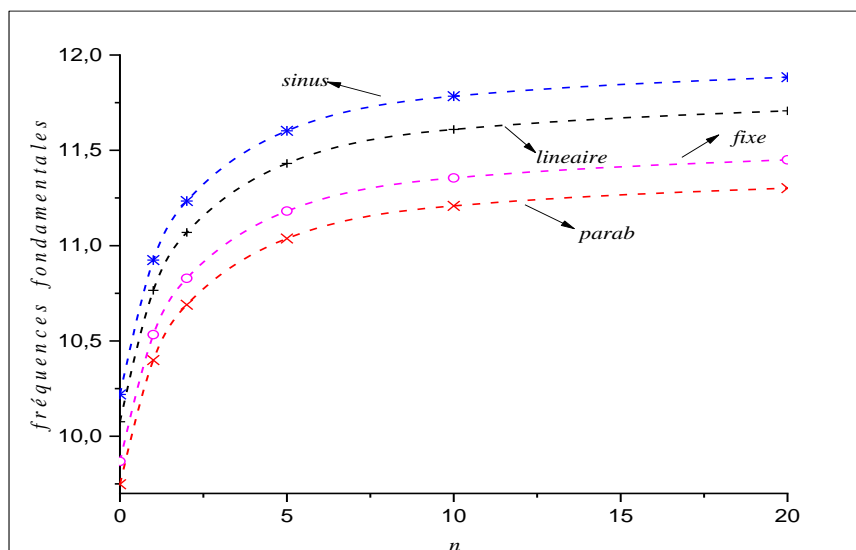
La variation des fréquences fondamentales des poutres parfaites, épaisses et moyennement épaisses en P-FGM pour différents fonctions de variation de la rigidité de Winkler sont illustrés dans les figures IV.1 et IV.2, respectivement. Dans ces figures on a fixé les paramètres de fondation  $k_w = 100$ ,  $k_s = 10$  et  $\zeta = 1$ .

D'un autre côté, l'effet du rapport d'épaisseur ( $L/h$ ) sur la réponse vibratoire d'une poutre parfait en P-FGM sur fondation élastique à raideur variable (linéaire, parabolique, sinusoïdale et non-variable) sont présentés dans les figures IV.3 et IV.4 pour le paramètre matériel  $n=2$  et 10 respectivement.



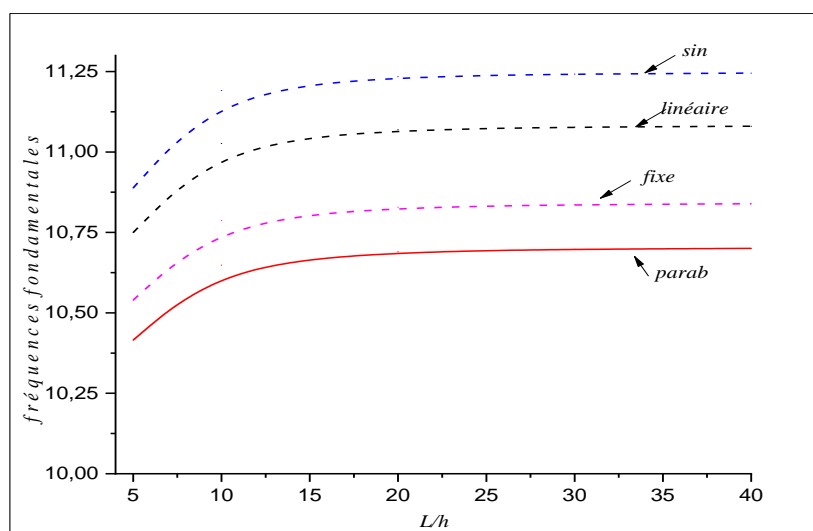
**Figure IV. 1 :** courbe des fréquences naturelles " $\omega$ " pour une poutre parfaite par rapport au coefficient matérielle  $n$  pour différents types de fondations ( $L / h = 5$ ).

À partir des graphes montrés dans la figure IV. 1, il est à observer que les fréquences naturelles non-dimensionnelles augmentent avec l'augmentation du coefficient matériel " $n$ " jusqu'à la valeur de  $n=2.5$ , et à partir de cette valeur une diminution des fréquences est notée ; ceci est pour les poutres courtes ( $L/h=5$ ). La valeur maximale de fréquence est obtenue pour une fondation élastique à raideur sinusoïdalement variable. Comme il peut être noté que pour les poutres élancées ( $L/h=20$ ), la figure IV. 2 montre que les fréquences augmentent avec l'augmentation du paramètre " $n$ " jusqu'à une valeur de  $n=5$  ; au-delà de cette valeur les fréquences tendent à se stabiliser.



**Figure IV. 2 :** courbe des fréquences naturelles " $\omega$ " pour une poutre parfaite par rapport au coefficient matérielle  $n$  pour différents types de fondations ( $L/h = 20$ ).

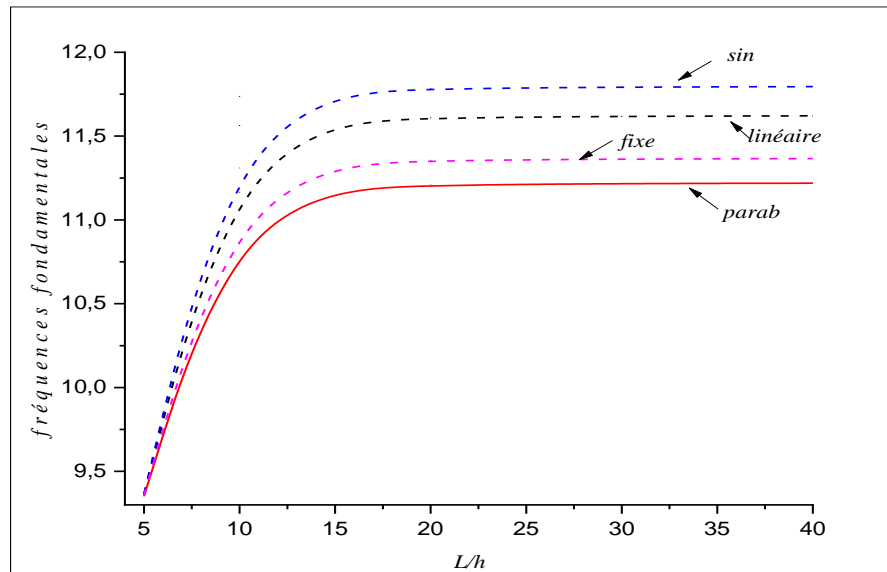
Une remarque très attractive qui met en relief la différence entre les deux figures IV. 1 et IV. 2 ; pour les poutres courtes à  $n=2$  il y'a un pic, tandis que pour les poutres élancées ( $L/h=20$ ) le pic n'est pas visible ; il peut apparaitre à une valeur de «  $n$  » plus grande ; ce qui nous laisse dire qu'il y'a une relation directe entre l'élancement de la poutre et sa rigidité afin de définir sa fréquence propre.



**Figure IV. 3 :** Courbe des fréquences naturelles " $\omega$ " pour une poutre parfaite par rapport au rapport d'épaisseur  $L/h$  pour différents types de fondations ( $n = 2$ ,  $k_w = 100$ ,  $k_s = 10$  and  $\zeta = 1$ ).

Les figures IV.3 et IV.4 indiquent la variation des fréquences adimensionnelles par rapport au rapport d'épaisseur  $L/h$  pour les quatre types de distribution des raideurs élastiques

Des fondations (linéaire, parabolique, sinusoïdale et fixe), avec un index de distribution matérielle  $n=2$  et  $n=10$  respectivement.



**Figure IV. 4** : Courbe des fréquences naturelles " $\omega$ " pour une poutre parfaite par rapport au rapport d'épaisseur  $L/h$  pour différents types de fondations ( $n = 10$ ,  $k_w = 100$ ,  $k_s = 10$  and  $\zeta = 1$ ).

A partir de ces figures, on remarque bien que pour les poutres courtes ( $L/h$  entre 5 et 10) la variation des fréquences sont très importantes ; tandis que pour les poutres moyennement courtes il est à noter qu'il y'a une stabilisation des fréquences propres avec l'augmentation du rapport d'épaisseur.

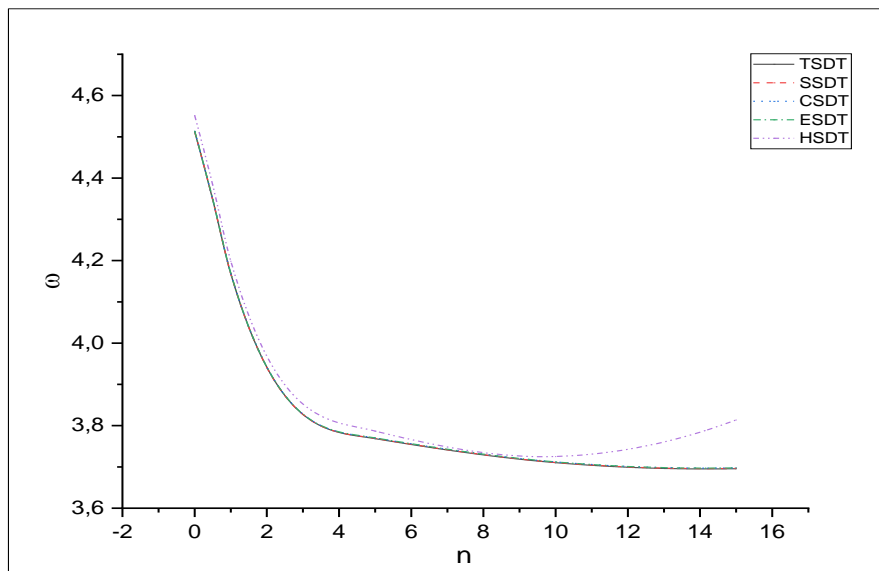
On peut noter aussi que les basses fréquences sont obtenues pour les poutres FGM pour une fondation élastiques à raideurs paraboliquement variable, contrairement à la fondation à variation sinusoïdale qui note les plus grandes valeurs des fréquences fondamentales.

#### IV.4.2 Etude paramétrique des poutres parfaites de type S-FGM

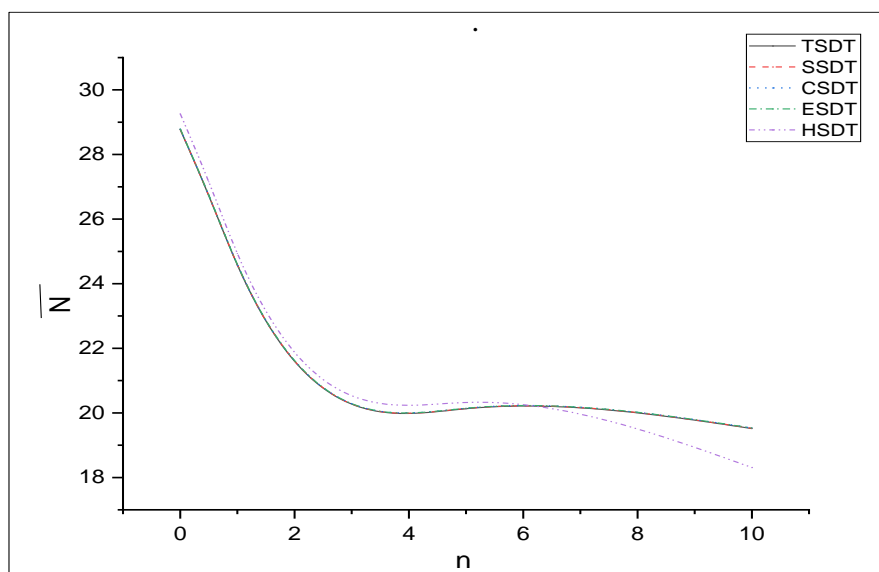
Dans cette étude, nous comparons les résultats obtenus pour diverses fonctions de gauchissement, à savoir la théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre (TSDT), la théorie des sinus (SSDT), la théorie des cosinus (CSDT), la théorie exponentielle (ESDT) et la théorie hyperbolique (HSDT) en termes de vibrations et flambage. Pour cette comparaison, une poutre SFGM parfaite est considérée on change les rapports d'épaisseurs  $L/h$  et les facteurs matériels «  $n$  ».

Les figures IV.5 et IV.6 présentent respectivement la fréquence fondamentale non dimensionnelle et la charge critique de flambement en fonction de l'exposant «  $n$  ».

On peut tout d'abord souligner que les valeurs de la fréquence fondamentale non dimensionnelle et de la charge de flambement de la poutre SFGM diminuent avec l'augmentation de l'exposant « n ».



**Figure IV. 5 :** Fréquence non dimensionnelle d'une poutre SFGM parfaite en fonction de l'indice de fraction volumique « n », ( $L/h=5$ ).



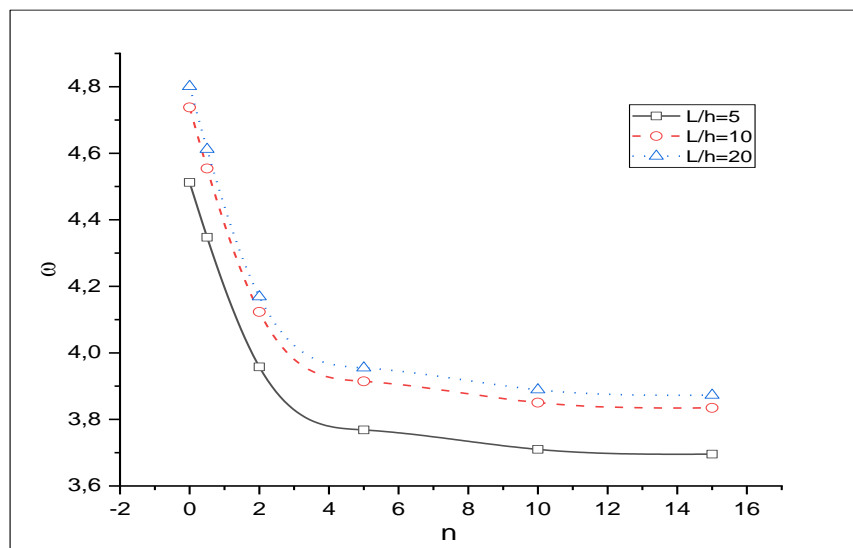
**Figure IV. 6 :** Flambement critique non dimensionnel d'une poutre S-FGM parfaite en fonction de l'indice de fraction volumique « n », ( $L/h=5$ ).

Sur ces figures, les résultats des fréquences fondamentales non dimensionnelles et des charges critiques de flambement obtenues pour toutes les fonctions de gauchissement sont

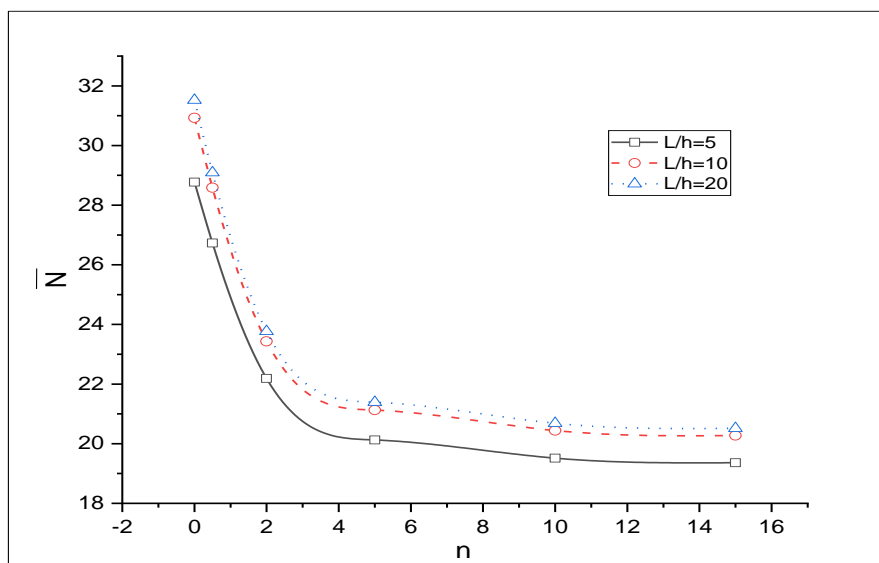
sensiblement les mêmes avec un écart maximal enregistré pour la théorie HSDT lorsque  $n = 10$  pour le flambement et  $n=15$  pour la vibration libre.

Dans la suite de cette section, la théorie du troisième ordre TSDT sera considérée.

Sur les figures IV.7 et IV.8, la fréquence non dimensionnelle et la charge critique de flambement sont tracées en fonction de l'exposant  $P$ , pour différents rapports longueur/épaisseur ( $\frac{L}{h} = 5$ ,  $\frac{L}{h} = 10$  et  $\frac{L}{h} = 20$ ). Pour cette comparaison, une poutre S-FGM sans porosité est considérée.



**Figure IV. 7 :** Fréquence non dimensionnelle d'une poutre S-FGM parfaite par rapport à l'indice de fraction volumique (TSDT).



**Figure IV. 8 :** Flambement critique non dimensionnel d'une poutre S-FGM parfaite en fonction de l'indice de fraction volumique « n », (TSDT).

On rappelle plus particulièrement que l'augmentation du rapport  $L/h$  conduit à une augmentation de la fréquence fondamentale adimensionnelle et de la charge critique de flambement.

Concernant la figure IV.7, on observe que la fréquence fondamentale diminue avec l'augmentation de l'exposant «  $n$  » pour une poutre S-FGM. Et pour la figure IV.8, la charge critique de flambage diminue avec l'augmentation de l'exposant «  $n$  » pour les poutres S-FGM.

Pour les deux figures et au-delà de  $n=10$  la fréquence et la charge critique tendent à se stabiliser pour tous les rapports d'épaisseur ( $L/h$ ).

#### **IV.5 Etude paramétrique des poutres imparfaites (avec porosité)**

Dans cette partie, nous considérons une poutre FGM composée d'un mélange de deux phases de matériaux répartie selon une distribution en puissance et une autre sigmoïdale ; les deux matériaux constituant notre élément de structure est : le métal et la céramique.

La poutre FGM est considérée comme une structure dont les propriétés matérielles varient suivant son épaisseur. En outre dans cette étude une poutre imparfaite qui est supposée avoir une porosité, ce défaut constitutif peut se produire au cours de fabrication.

Le but de cette partie est de présenter et de discuter l'analyse des résultats de l'effet de la porosité sur la vibration et le flambement des poutres FGM. Six cas différents de distribution de porosité sont étudiés.

Dans le Tableau IV.4, l'effet des modèles de distribution de porosité par rapport aux fréquences fondamentales dans les poutres P-FGM et S-FGM est montré en utilisant la théorie du troisième ordre (TSDT).

Cependant, le Tableau IV.5 présente l'effet de la distribution de la porosité par rapport au flambement critique des poutres P-FGM et S-FGM. Le coefficient de porosité est pris  $\alpha = 0.1$ ,  $\alpha = 0.2$  et  $\alpha = 0.3$ . Il est à noter que les fréquences non dimensionnelles et les charges critiques de flambement sont présentées pour différents rapports  $L/h$ , pour les modèles de porosité, et «  $n$  » est pris égal à 2.

On remarque, en général, que pour différents rapports d'épaisseur de  $L/h$ , les charges critiques de flambement obtenues pour des poutres poreuses avec un indice de porosité  $\alpha = 0,3$  sont inférieures à celles de  $\alpha = 0,1$  ; cette observation est valable pour différents modèles de porosité et pour les deux distributions de matériaux P-FGM et S-FGM.



On observe également que pour les différents rapports d'épaisseur choisis, les fréquences sans dimension obtenues pour des poutres imparfaites avec un coefficient de porosité  $\alpha = 0,3$  sont inférieures à celles de  $\alpha = 0,1$  ; en dehors de la formulation de distribution de porosité du troisième ordre qui donne des résultats contraires ; ceci s'explique par le fait que  $n = 2$ , dans la formulation de porosité du troisième ordre les ratios de matériaux affectés par la porosité ne sont pas pris comme les autres théories. Ceci est vrai pour les deux distributions matérielles « n », FGM et S-FGM.

On voit que les résultats des fréquences et des charges critiques de flambement augmentent avec l'augmentation du rapport longueur/épaisseur.

Et, aussi, avec l'augmentation du rapport de la poutre  $L/h$ , la charge critique de flambement augmente quelle que soit la répartition de la porosité. A partir du tableau .IV.5, on constate que la charge critique de flambement maximale sont obtenus avec la distribution ( $\alpha = 0,1$ ) et ceux minimales avec la distribution ( $\alpha = 0,3$ ).

En outre, nous pouvons remarquer qu'il n'y a pas de grande différence entre les valeurs des charges critiques obtenus par les différents modèles de porosité non uniforme.

L'effet de l'indice de fraction volumique « n » et des modèles de porosité sur les fréquences fondamentales et les charges critiques de flambement des poutres P-FGM et S-FGM sont présentés dans les tableaux IV.6 et IV.7. Nous avons utilisé la théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre (TSDT). Le coefficient de porosité  $\alpha$  est pris :  $\alpha = 0,1$ ,  $\alpha = 0,2$  et  $\alpha = 0,3$ .

Les fréquences adimensionnelles et les charges critiques de flambement sont présentées, dans cette étude, par rapport à l'indice de répartition des matériaux « n » pour différents modèles de porosité, et  $L/h$  est pris égal à 10.

Les résultats montrent que les valeurs des fréquences adimensionnelles et des charges critiques de flambement adimensionnel diminuent avec l'augmentation de l'indice de fraction volumique pour les poutres P-FGM et S-FGM parfaites et imparfaites, en raison du pourcentage des phases métalliques qui est inférieur aux phases céramiques qui deviennent plus prononcées.

**Tableau IV.4 :** Effets de la porosité sur les fréquences non dimensionnelles d'une poutre FGM,  $n=2$ .

Type	Model de Porosité	$\alpha$	$\frac{L}{h} = 5$	$\frac{L}{h} = 10$	$\frac{L}{h} = 15$	$\frac{L}{h} = 20$	
P-FGM	Parfait	0.0	3.626439630	3.790476307	3.824094457	3.836134055	
	Uniforme	0.1	3.441833309	3.591823564	3.622480793	3.633452882	
		0.2	3.148874589	3.276952219	3.302998829	3.312309468	
		0.3	2.614207762	2.706008041	2.724473632	2.731057151	
	Non uniforme (linéaire)	0.1	3.606959358	3.775502445	3.810163931	3.822587618	
		0.2	3.578509090	3.751756950	3.787527086	3.800360517	
		0.3	3.537607092	3.715641188	3.752567254	3.765830216	
	Non uniforme (log)	0.1	3.607525160	3.775956560	3.810591990	3.823006068	
		0.2	3.581642700	3.754443319	3.790107046	3.802901069	
		0.3	3.547216782	3.724273444	3.760960540	3.774134467	
	Non uniforme (expo)	0.1	3.607534278	3.775963868	3.810598878	3.823012800	
		0.2	3.581739600	3.754526156	3.790186544	3.802979327	
		0.3	3.547641176	3.724652877	3.761329018	3.774498869	
	Non uniforme (Hadji et Bernard; 2020)	0.1	3.671606995	3.845303256	3.881060283	3.893879777	
		0.2	3.716697493	3.900880403	3.938979026	3.952654099	
		0.3	3.761424010	3.956992190	3.997656245	4.012270804	
	Non uniforme (Présent model)	0.1	3.607628780	3.776039627	3.810670263	3.823082572	
		0.2	3.581159349	3.754029898	3.789710246	3.802510422	
		0.3	3.545759323	3.722969202	3.759693644	3.772881479	
	SFGM	Parfait	0.0	3.957860105	4.123120570	4.156740170	4.168758869
		Uniforme	0.1	3.957860105	3.963985628	3.994756722	4.005747784
0.2			3.595907130	3.729322143	3.756229167	3.765828303	
0.3			3.248246524	3.355839001	3.377366062	3.385031460	
Non uniforme (linéaire)		0.1	3.952999773	4.120925990	4.155150405	4.167390691	
		0.2	3.943607187	4.114148051	4.148973675	4.161434878	
		0.3	3.928147167	4.101153951	4.136557559	4.149232025	
Non uniforme (log)		0.1	3.953165661	4.121027668	4.155237431	4.167472344	
		0.2	3.944718509	4.115018607	4.149788443	4.162229121	
		0.3	3.931900097	4.104420491	4.139708951	4.152340839	
Non uniforme (expo)		0.1	3.953168326	4.121029295	4.155238820	4.167473643	
		0.2	3.944752640	4.115045140	4.149813223	4.162253251	
		0.3	3.932064511	4.104562308	4.139845434	4.152475351	
Non uniforme (Hadji et Bernard; 2020)		0.1	4.003973115	4.178732280	4.214430841	4.227205390	
		0.2	4.049893941	4.234972525	4.272947531	4.286551328	
		0.3	4.095296785	4.291588477	4.332058299	4.346572799	
Non uniforme (Présent model)		0.1	3.953195923	4.121046107	4.155253167	4.167487088	
		0.2	3.944548040	4.114885896	4.149664475	4.162108368	
		0.3	3.931334566	4.103931812	4.139238422	4.151877017	

**Tableau IV.5** : Effets de la porosité sur la charge critique de flambement non dimensionnelle de la poutre FGM, n=2.

Type	Model de Porosité	$\alpha$	$\frac{L}{h} = 5$	$\frac{L}{h} = 10$	$\frac{L}{h} = 15$	$\frac{L}{h} = 20$	
PFGM	Parfait	0.0	19.07094242	20.36623689	20.62599274	20.71850444	
	Uniforme	0.1	15.37418289	16.34329784	16.53658072	16.60533298	
		0.2	11.36631523	11.98712404	12.10976917	12.15330210	
		0.3	6.810458936	7.074192691	7.125358451	7.143446846	
	Non uniforme (linéaire)	0.1	17.88177630	19.13503286	19.38698750	19.47677168	
		0.2	16.63240920	17.83828166	18.08138688	18.16807245	
		0.3	15.30921801	16.46041107	16.69321561	16.77628707	
	Non uniforme (log)	0.1	17.91121329	19.16554370	19.41769815	19.50755224	
		0.2	16.75249364	17.96308497	18.20707447	18.29406994	
		0.3	15.58696838	16.75007396	16.98513134	17.06899394	
	Non uniforme (expo)	0.1	17.91168961	19.16603736	19.41819506	19.50805028	
		0.2	16.75626259	17.96700139	18.21101854	18.29802370	
		0.3	15.59962777	16.76327048	16.99842932	17.08232757	
	Non uniforme (Hadji et Bernard; 2020)	0.1	18.17278901	19.47148058	19.73297305	19.82618877	
		0.2	17.30359896	18.60757217	18.87129434	18.96539982	
		0.3	16.46280628	17.77403436	18.04051710	18.13571355	
	Non uniforme (Présent model)	0.1	17.91662982	19.17115761	19.42334879	19.51321573	
		0.2	16.73374435	17.94360135	18.18745329	18.27440057	
		0.3	15.54375703	16.70502537	16.93973563	17.02347639	
	SFGM	Parfait	0.0	22.18872090	23.43490332	23.68146859	23.76901672
		Uniforme	0.1	18.53764646	19.49647567	19.68523132	19.75217748
0.2			14.67342484	15.34099205	15.47147868	15.51768544	
0.3			10.48989924	10.87136766	10.94515393	10.97122218	
Non uniforme (linéaire)		0.1	21.04995861	22.24653926	22.48348220	22.56762896	
		0.2	19.87111256	21.01387725	21.24034306	21.32078330	
		0.3	18.64539198	19.72918253	19.94412086	20.02047925	
Non uniforme (log)		0.1	21.07796160	22.27578881	22.51297403	22.59720640	
		0.2	19.98356016	21.13157547	21.35906525	21.43986782	
		0.3	18.90057167	19.99691217	20.21430767	20.29153646	
Non uniforme (expo)		0.1	21.07841482	22.27626223	22.51345131	22.59768511	
		0.2	19.98709252	21.13527233	21.36279418	21.44360817	
		0.3	18.91223004	20.00914035	20.22664738	20.30391564	
Non uniforme (Hadji et Bernard; 2020)		0.1	21.09016241	22.33518192	22.58233389	22.67015547	
		0.2	20.02962879	21.27535227	21.52354485	21.61180829	
		0.3	19.00630184	20.25468578	20.50440597	20.59329291	
Non uniforme (Présent model)		0.1	21.08311532	22.28117182	22.51840153	22.60264970	
		0.2	19.96599068	21.11318731	21.34051743	21.42126353	
		0.3	18.86079536	19.95518931	20.17220387	20.24929773	

De plus, l'effet en question devient plus visible pour les poutres imparfaites et obtient les effets les plus élevés de la fréquence, pour les poutres P-FGM avec une distribution uniforme et non uniforme de la porosité avec un ordre logarithmique, exponentiel et sinusoïdale. Tandis que, pour les poutres S-FGM, la distribution de porosité uniforme prévaut.

Pour la charge de flambement critique, les influences les plus élevées pour les poutres P-FGM et SFGM sont observées pour la distribution uniforme de la porosité.

Pour les petites valeurs de l'indice de fraction volumique ( $n < 1$ ), les valeurs des fréquences et des charges critiques non dimensionnelles des poutres P-FGM sont supérieures à celles des poutres S-FGM tandis que les valeurs des fréquences et des charges critiques des poutres S-FGM sont plus élevées que celles des poutres P-FGM pour les valeurs élevées de l'indice de fraction volumique ( $n > 1$ ).

L'effet de la porosité sur les valeurs des fréquences adimensionnelles augmente avec l'augmentation de l'indice de fraction volumique et devient plus prononcé lorsque les valeurs de l'indice de fraction volumique sont supérieures à un ( $n > 1$ ) ; cet effet est d'environ 8 % pour  $n = 1$  et devient d'environ 60 % pour  $n = 10$ . Cet effet est plus dominant pour les poutres P-FGM que pour les poutres S-FGM.

L'effet de la porosité sur les charges critiques non dimensionnelles augmente avec l'augmentation de l'indice de fraction volumique «  $n$  » et devient plus prononcé lorsque les valeurs de l'indice de fraction volumique sont supérieures à un ( $n > 1$ ) ; pour les poutres P-FGM, cet effet est d'environ 5% pour  $n = 1$  et devient d'environ 17% pour  $n = 10$ . Alors que pour les poutres S-FGM cet effet est d'environ 8% pour  $n = 1$  et devient d'environ 14% pour  $n = 10$ .

Tableau IV.6 : Effets de la porosité sur les fréquences non dimensionnelles d'une poutre FGM ( $\frac{L}{h} = 10$ ).

Type	Model de Porosité	$\alpha$	n=0	n=0.5	n=1	n=5	n=10	
PFGM	Parfait	0.0	5.393308164	4.599052700	4.158602298	3.593645893	3.481565465	
	Uniforme	0.1	5.466146445	4.589996024	4.067511271	3.326579952	3.224397554	
		0.2	5.552452110	4.575154069	3.936380770	2.843604540	2.749931807	
		0.3	5.656383407	4.550831358	3.736319420	1.578892604	1.239635484	
	Non uniforme (linéaire)	0.1	5.467385462	4.647694612	4.179643701	3.558523640	3.454203143	
		0.2	5.547014592	4.700009620	4.200344704	3.504558504	3.407597411	
		0.3	5.632872595	4.756438178	4.220202221	3.420881105	3.324880624	
	Non uniform (log)	0.1	5.466146445	4.589996024	4.067511271	3.326579952	3.224397554	
		0.2	5.552452110	4.575154069	3.936380770	2.843604540	2.749931807	
		0.3	5.656383407	4.550831358	3.736319420	1.578892604	1.239635484	
	Non uniforme (expo)	0.1	5.466146445	4.589996024	4.067511271	3.326579952	3.224397554	
		0.2	5.552452110	4.575154069	3.936380770	2.843604540	2.749931807	
		0.3	5.656383407	4.550831358	3.736319420	1.578892604	1.239635484	
	Non uniforme (Hadji et Bernard; 2020)	0.1	5.491283661	4.673081751	4.219520525	3.651444193	3.543370422	
		0.2	5.592295562	4.748904253	4.281402026	3.710188032	3.606238804	
		0.3	5.696109421	4.826275207	4.343989093	3.769677913	3.669944028	
	Non uniforme (Présent model)	0.1	5.466146445	4.589996024	4.067511271	3.326579952	3.224397554	
		0.2	5.552452110	4.575154069	3.936380770	2.843604540	2.749931807	
		0.3	5.656383407	4.550831358	3.736319420	1.578892604	1.239635484	
	SFGM	Parfait	0.0	4.737685621	4.554366148	4.354927157	3.914620717	3.850667654
		Uniforme	0.1	4.737685623	4.510190056	4.259725674	3.692799351	3.608455403
			0.2	4.737685621	4.447632802	4.122655812	3.356581628	3.237655819
			0.3	4.737685621	4.354643206	3.913484430	2.790429408	2.598635996
		Non uniforme (linéaire)	0.1	4.796381744	4.595876010	4.376850235	3.889272510	3.817900269
0.2			4.860452991	4.640167934	4.398403620	3.854890893	3.774578073	
0.3			4.930666614	4.687451501	4.419058297	3.808515067	3.717244358	
Non uniforme (log)		0.1	4.794900863	4.594839617	4.376322398	3.889982503	3.818806108	
		0.2	4.854195172	4.635889576	4.396410447	3.858572059	3.779174458	
		0.3	4.915747388	4.677516167	4.414935621	3.819169544	3.730338213	
Non uniforme (expo)		0.1	4.794876913	4.594822850	4.376313851	3.889993959	3.818820727	
		0.2	4.853999094	4.635755350	4.396347601	3.858686245	3.779317167	
		0.3	4.915069557	4.677063330	4.414744863	3.819643107	3.730921116	
Non uniforme (Hadji et Bernard; 2020)		0.1	4.823397004	4.628138668	4.418480852	3.968528665	3.905917801	
		0.2	4.911722223	4.703570085	4.483011262	4.023226492	3.962102787	
		0.3	5.002446869	4.780400748	4.548244066	4.078507461	4.019027405	
Non uniforme (Présent model)		0.1	4.794628525	4.594648958	4.376225183	3.890112671	3.818972240	
		0.2	4.855170897	4.636557344	4.396722843	3.858002804	3.778463121	
		0.3	4.918062524	4.679061897	4.415584897	3.817545236	3.728339467	

**Tableau IV.7 :** Effets de la porosité sur le flambement  $N_{cr}$  non dimensionnelles d'une poutre FGM ( $\frac{L}{h} = 10$ ).

Type	Model de Porosité	$\alpha$	n=0	n=0.5	n=1	n=5	n=10	
PFGM	Parfait	0.0	52.23778941	33.96725203	26.14085998	17.08170459	15.49932100	
	Uniforme	0.1	49.14476241	30.65138930	22.51071321	12.97375231	11.73036862	
		0.2	46.05173542	27.29182625	18.74404668	8.270264554	7.401828019	
		0.3	42.95870841	23.87427734	14.78076956	2.182331777	1.282174478	
	Non uniforme (linéaire)	0.1	51.43310921	33.06416105	33.06416105	15.79972653	14.36085660	
		0.2	50.62666894	32.15048477	24.01453826	14.40389652	13.10471931	
		0.3	49.81822778	31.22473179	22.90281063	12.84855221	11.64706377	
	Non uniforme (log)	0.1	51.45259971	33.08613238	25.11790109	15.83194688	14.38957639	
		0.2	50.70239110	32.23667253	24.11698051	14.54072700	13.22926563	
		0.3	49.98394125	31.41535545	23.13350842	13.18310309	13.18310309	
	Non uniform (expo)	0.1	51.45291526	33.08648806	25.11831698	15.83246803	14.39004085	
		0.2	50.70477396	32.23938327	24.12019973	14.54501139	13.23315892	
		0.3	49.99154510	31.42409129	23.14405778	13.19823898	11.98369504	
	Non uniforme (Hadji et Bernard; 2020)	0.1	50.23893794	32.51508238	24.96847721	16.40199101	14.92631735	
		0.2	48.31367961	31.11591691	23.83745109	15.74362618	14.36885724	
		0.3	46.45949873	29.76819502	22.74681549	15.10632825	13.82665539	
	Non uniforme (Présent model)	0.1	51.45618847	33.09017736	25.12263115	15.83787256	14.39485739	
		0.2	50.69054290	32.22319233	24.10096934	14.51940443	13.20988381	
		0.3	49.95801977	31.38556790	23.09752215	13.13136647	11.91983703	
	SFGM	Parfait	0.0	30.93027005	28.58653407	26.14085998	21.12663699	20.44247811
		uniforme	0.1	27.83724303	25.23194031	22.51071321	16.92206547	16.15838182
			0.2	24.74421605	21.81143731	18.74404668	12.42947201	11.56476847
			0.3	21.65118902	18.29641483	14.78076955	7.518155763	6.520550642
		Non uniforme (linéaire)	0.1	30.12499173	27.66273552	25.09220282	19.81767470	19.09749507
0.2			29.31645701	26.72327366	24.01453824	18.45088522	17.69057940	
0.3			28.50383534	25.76532634	22.90281063	17.01605437	16.21074336	
Non uniforme (log)		0.1	30.14451237	27.68526317	25.11790104	19.84999320	19.13073089	
		0.2	29.39245361	26.81212894	24.11698047	18.58180171	17.82545357	
		0.3	28.67061135	25.96314235	23.13350842	17.31597135	16.52031743	
Non uniforme (expo)		0.1	30.14482841	27.68562787	25.11831701	19.85051623	19.13126873	
		0.2	29.39484477	26.81492282	24.12019977	18.58591233	17.82968806	
		0.3	28.67826122	25.97220038	23.14405776	17.32965818	16.53444178	
Non uniforme (Hadji et Bernard; 2020)		0.1	29.74673957	27.39075163	24.96847721	20.14647137	19.51623987	
		0.2	28.60678401	26.23723953	23.83745109	19.20275350	18.62410762	
		0.3	27.50891373	25.12477425	22.74681549	18.29489955	17.76553430	
Non uniforme (Présent model)		0.1	30.14810657	27.68941030	25.12263115	19.85594049	19.13684679	
		0.2	29.38056358	26.79823503	24.10096937	18.56135424	17.80438958	
		0.3	28.64453134	25.93225121	23.09752214	17.26926403	16.47211497	

Les figures IV.9, IV.10, IV.11 et IV.12 montrent les fréquences non dimensionnelles et les charges critiques de flambement ( $\alpha=0, 2$  et  $L/h=10$ ) en fonction de l'indice de fraction volumique « n » en utilisant la théorie TSDT. Il est à remarquer que l'augmentation de l'indice de fraction volumique induit une réduction des fréquences et des valeurs de charges critiques de flambement. Cette observation correspond à deux types de poutres FGM (poutre P-FGM et S-FGM). La charge critique de flambement et les fréquences sont presque constantes lorsque « n » devient grand. Notez que les charges critiques de flambement non dimensionnelles pour les poutres parfaites P-FGM et S-FGM sont sensiblement supérieures aux valeurs obtenues pour d'autres poutres FGM ; et, les charges de flambement critiques non dimensionnelles des poutres P-FGM et S-FGM, même poreuses, sont sensiblement inférieures aux valeurs obtenues sur d'autres poutres FGM.

Notez, aussi, que les fréquences non dimensionnelles du troisième schéma de la poutre irrégulière P-FGM sont sensiblement supérieures aux valeurs obtenues sur d'autres poutre FGM ; et, les fréquences non dimensionnelles du schéma des poutres poreuses P-FGM uniforme et non uniforme, sin, log, expo ; sont sensiblement plus petites que les valeurs obtenues sur d'autres poutres FGM.

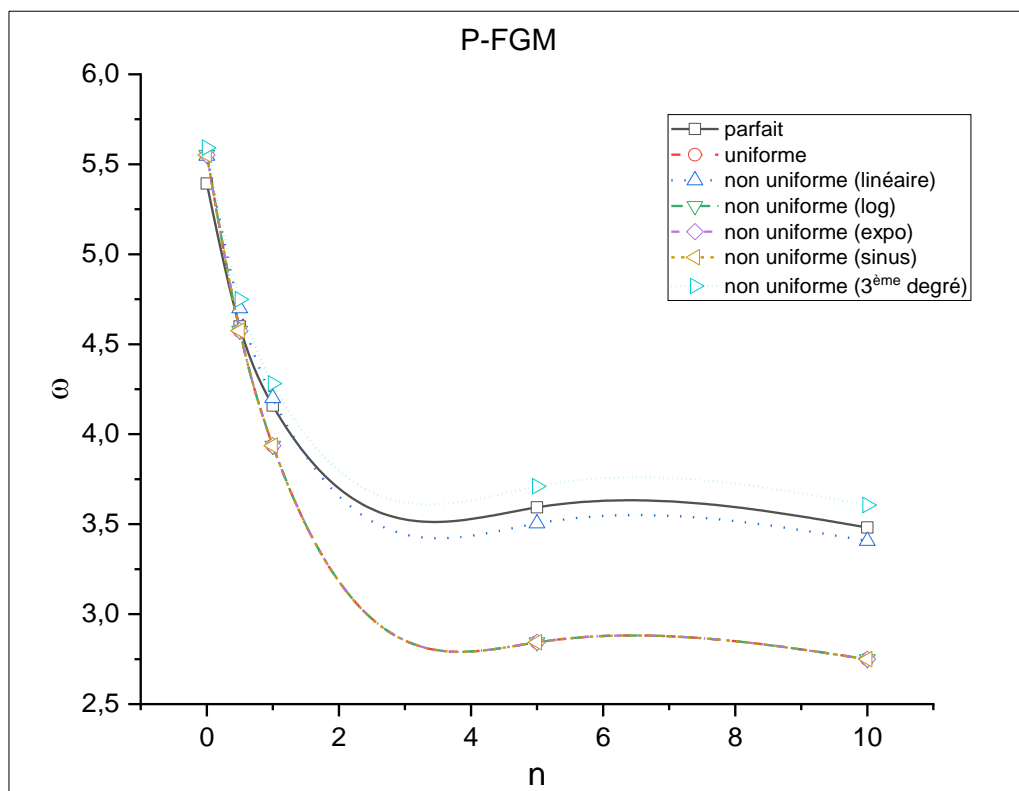
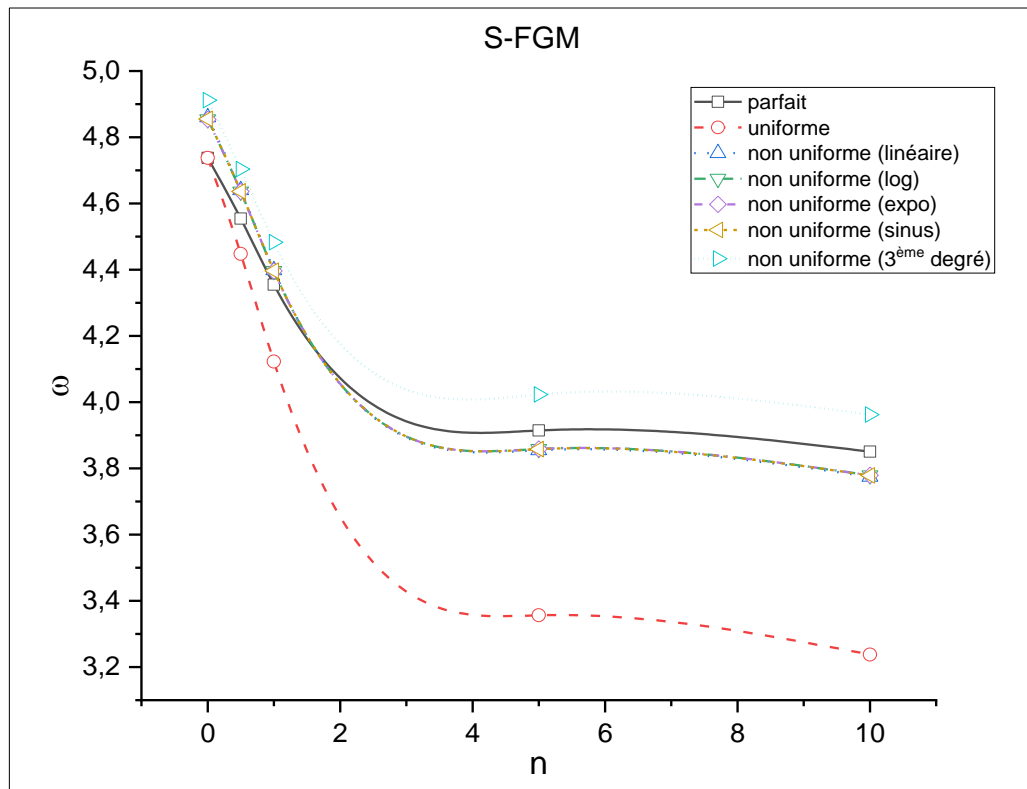


Figure IV. 9 : Fréquence non dimensionnelle de la poutre P.FGM non parfaite en fonction de l'indice n.  $L/h=10$ ,  $\alpha=0.2$



**Figure IV. 10 :** Fréquence non dimensionnelle de la poutre S.FGM non parfaite en fonction de l'indice  $n$ .  $L/h=10$ ,  $\alpha=0.2$ .

Les fréquences non dimensionnelles du troisième schéma de poutres poreuses irrégulières S-FGM sont sensiblement supérieures aux valeurs obtenues sur d'autres poutres FGM ; et, les fréquences non dimensionnelles de même le schéma de poutres S-FGM sont sensiblement plus petites que les valeurs obtenues sur d'autres poutres FGM.

Notez que les fréquences et les résultats des charges critiques de flambement pour le schéma de poutres poreuses irrégulières logarithmiques, exponentielles et sinusoïdales sont sensiblement les mêmes.



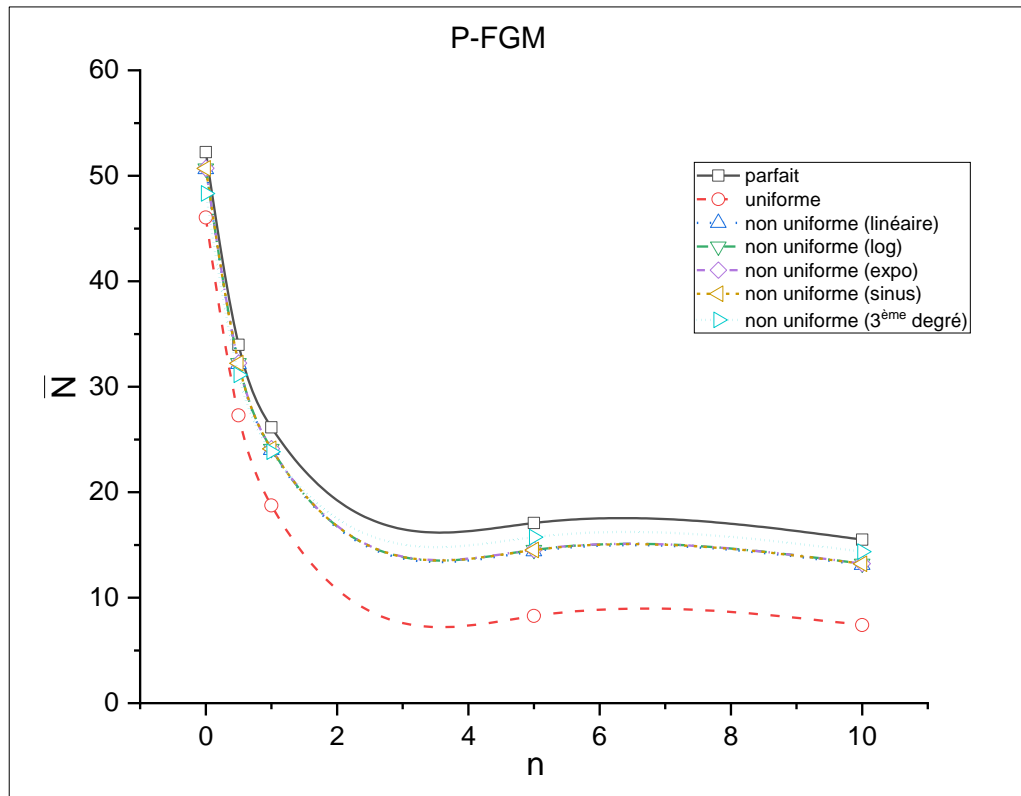


Figure IV. 11 : Charge critique de flambement non dimensionnelle d'une poutre P.FGM parfaite et poreuse en fonction de l'indice  $n$ .  $L/h=10$ ,  $\alpha=0.2$ .

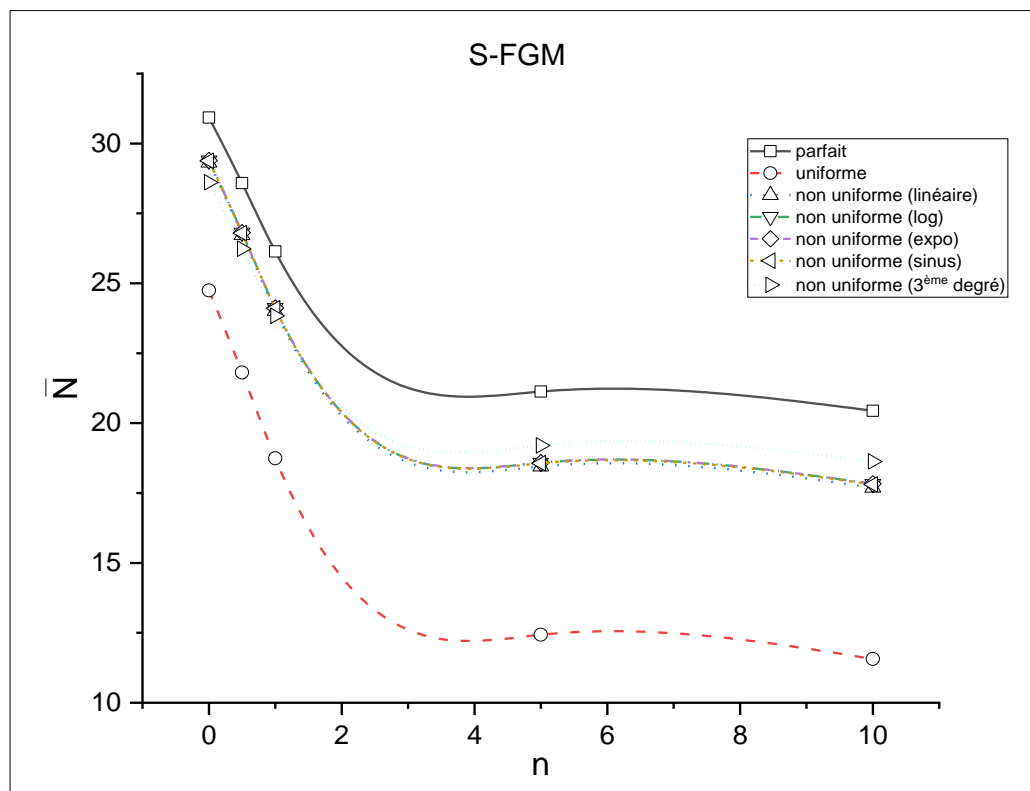


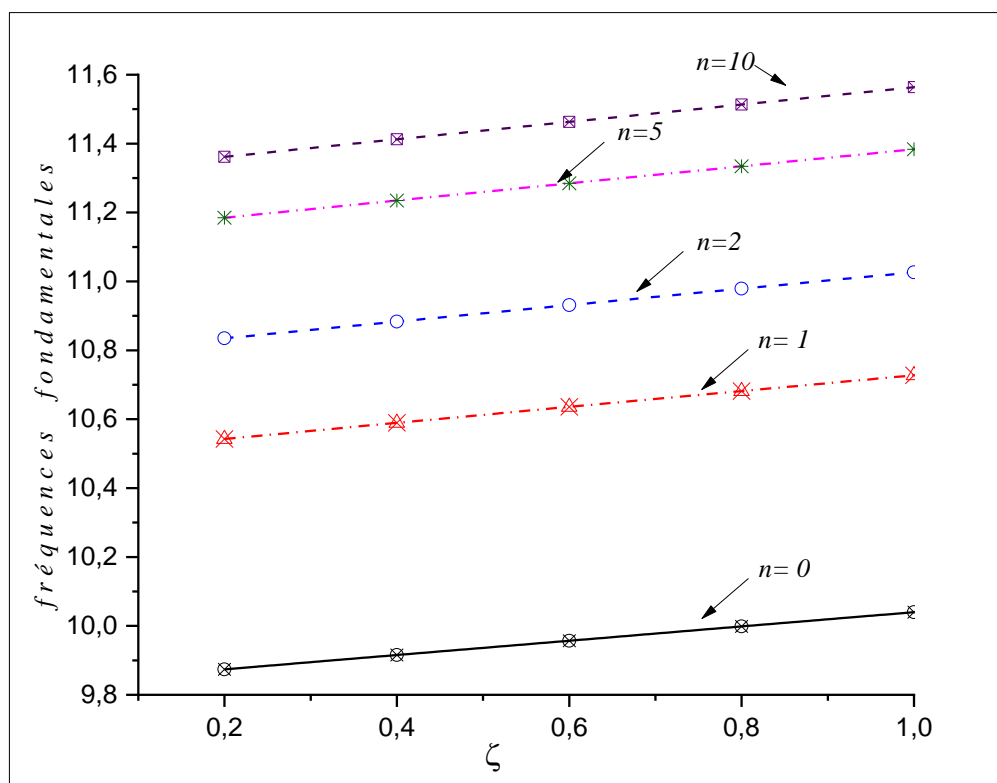
Figure IV. 12 : Charge critique de flambement non dimensionnelle d'une poutre S.FGM parfaite et poreuse en fonction de l'indice  $n$ .  $L/h=10$ ,  $\alpha=0.2$ .

## IV.6 Effet des paramètres d'étude sur la variation de la raideur de Winkler

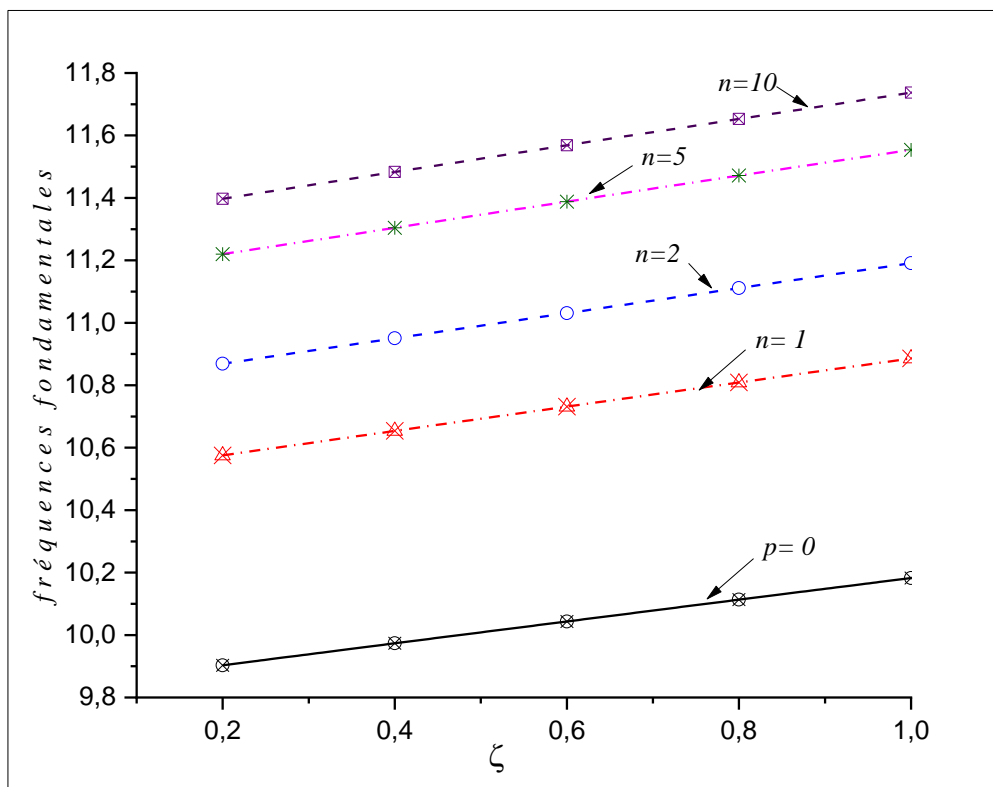
### IV.6.1 Effet de l'indice matériel « n » sur le paramètre fondation variable

Dans la figure IV.13, nous avons examiné l'influence du paramètre de la fondation variable " $\zeta$ " sur les fréquences de la poutre FGM en variant aussi l'indice de puissance « n ». Il a été bien illustré que la croissance du paramètre de la fondation variable " $\zeta$ " implique une augmentation de la fréquence dans le cas des fondations à raideur variable selon la loi linéaire ou sinusoidale. Par contre, pour le cas de la fondation à raideur variable selon la loi logarithmique l'augmentation de ce paramètre implique une diminution de la fréquence. Cette remarque est valable quel que soit la valeur de « n ».

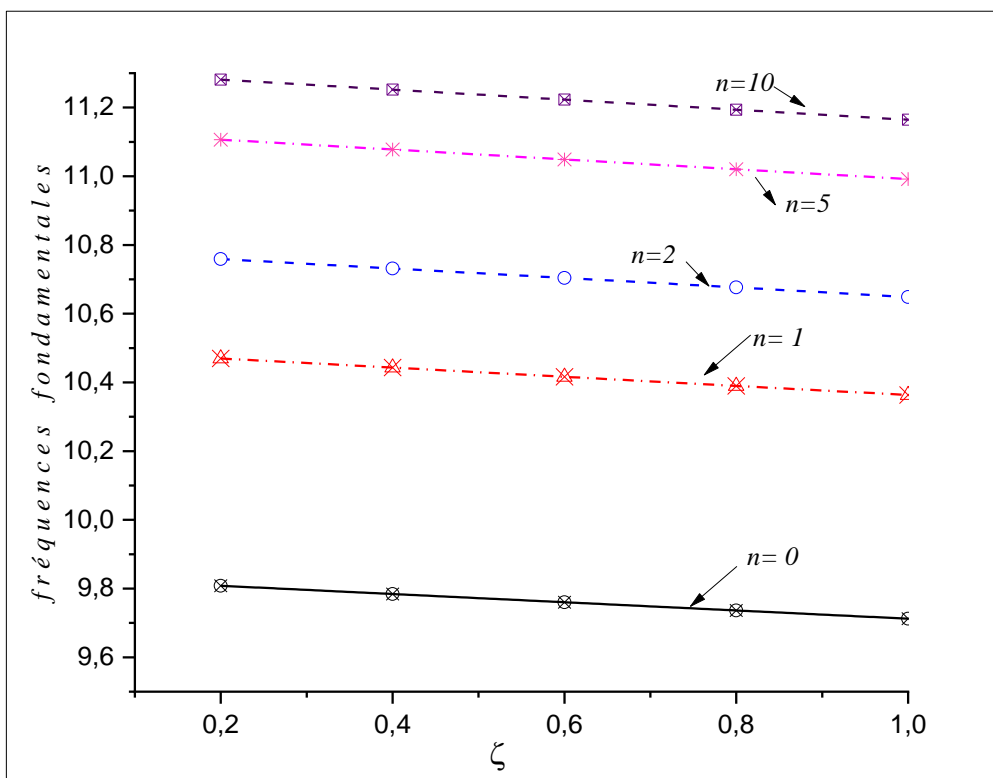
Il est bien entendu et cité auparavant que l'augmentation de l'indice de « n » implique l'augmentation de la fréquence propre de la poutre. Ceci a été prouvé par le fait d'avoir une poutre assez rigide (riche en céramique) qui aura une période assez basse c'est-à-dire une fréquence assez grande.



(a) Variation Linéaire



(b) Variation Sinusoidale



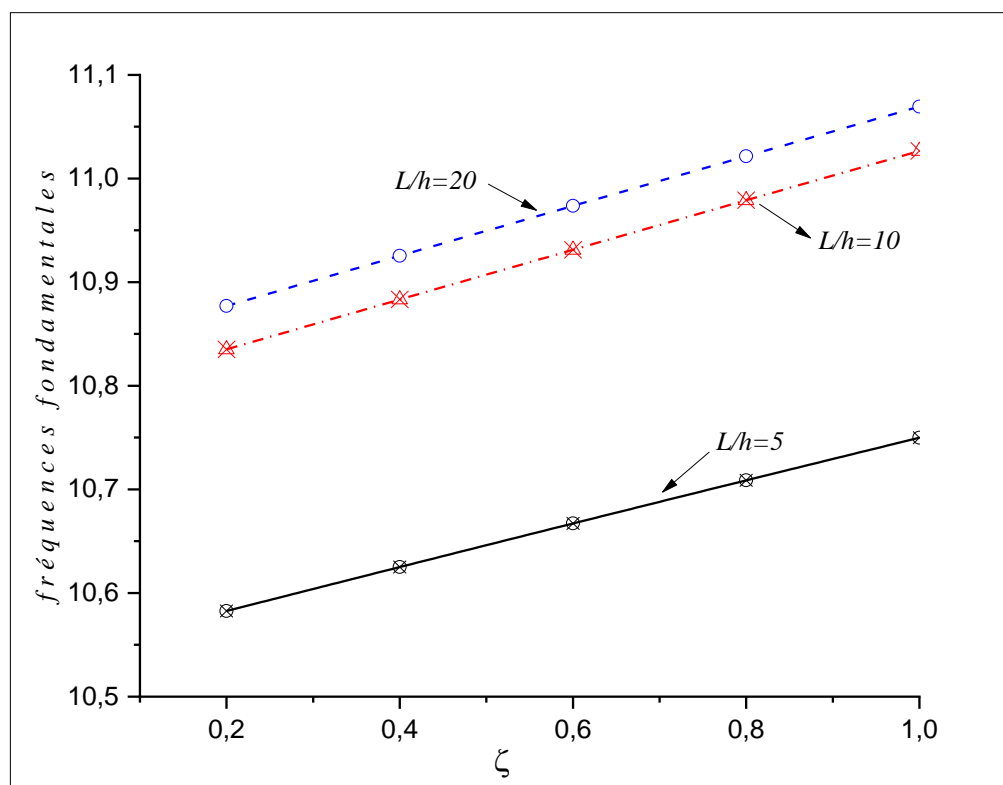
(c) Variation Parabolique

**Figure IV. 13 :** Effet du paramètre de fondation variable sur la fréquence adimensionnelle d'une poutre PFGM ( $L/h = 10$ ,  $k_w = 100$  et  $k_s = 10$ ).

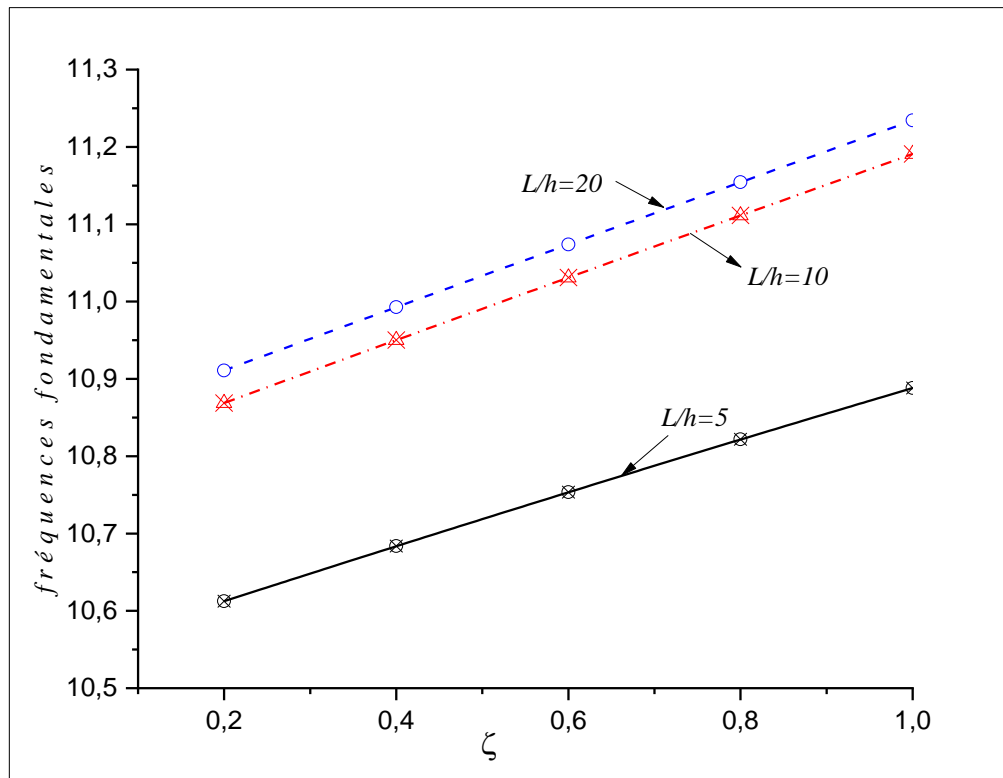
### IV.6.2 Effet du rapport d'épaisseur «L/h» sur le paramètre fondation variable

Dans la figure IV.14, nous avons examiné l'influence du paramètre de la fondation variable " $\zeta$ " sur les fréquences de la poutre FGM en variant aussi le rapport d'épaisseur ( $L/h$ ). Il a été montré, aussi, que la croissance du paramètre de la fondation variable " $\zeta$ " implique une augmentation de la fréquence dans le cas des fondations à raideur variable selon la loi linéaire ou sinusoïdale. Par contre, pour le cas de la fondation à raideur variable selon la loi logarithmique l'augmentation de ce paramètre implique une diminution de la fréquence fondamentale de la poutre. Cette remarque est valable quel que soit l'élançement de la poutre.

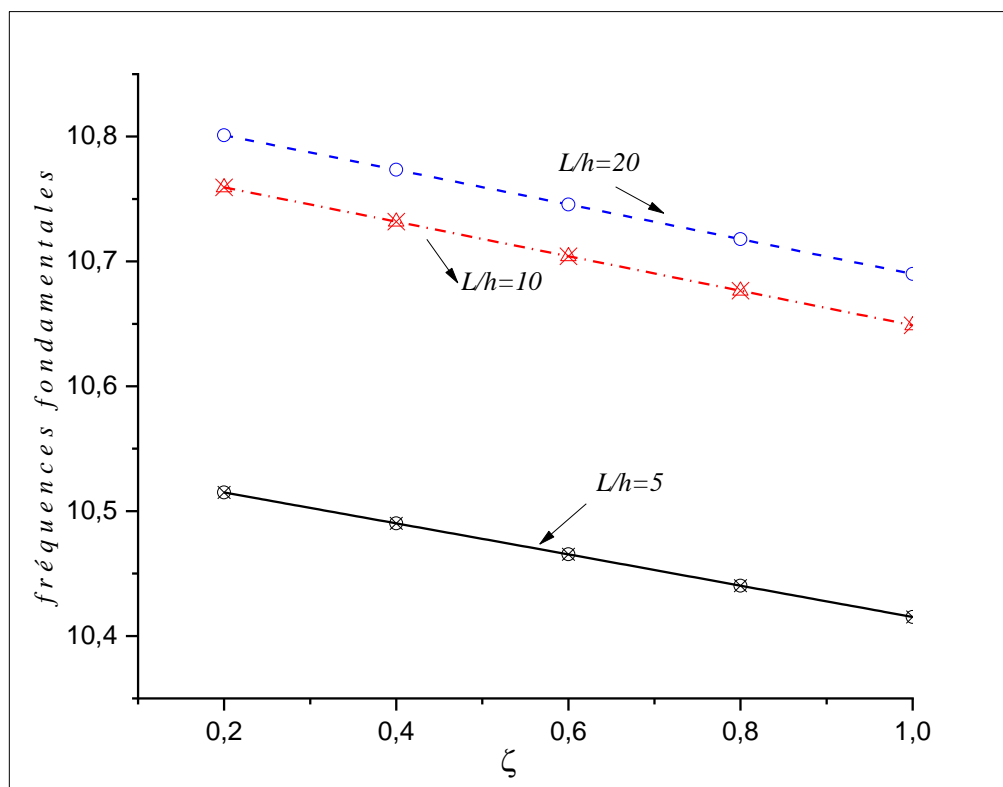
L'élançement de la poutre a été aussi discuté dans cette figure ; ou, plus la poutre soit élançé plus la fréquence augmente ; ceci est valable, quel que soit la valeur de " $\zeta$ ". Mais l'augmentation de la fréquence de la poutre tend à se stabiliser pour les grandes valeurs d'élançement.



(a) Variation Linéaire



(b) Variation Sinusoidale



(c) Variation Parabolique

**Figure IV. 14 :** Effet du paramètre de fondation variable sur la fréquence adimensionnelle d'une poutre P.FGM ( $n = 2$ ,  $k_w = 100$  et  $k_s = 10$ ).

### IV.6.3 Effet de la variation du model Winkler sur sa raideur $K_w$

La variation des fréquences fondamentales non-dimensionnelles comme fonction du paramètre de Winkler pour les quatre types de fondation élastiques déjà cités plus haut, sont montrés dans la figure. IV.15. à partir de ces figures, on peut voir que l'augmentation du paramètre  $K_w$  implique une croissance des fréquences fondamentales de la poutre; sauf que, pour les petites valeurs de  $K_w$  les différents modèles décrivant la variation de la raideur de Winkler donnent pratiquement les mêmes fréquences ; tandis que, pour les grandes valeurs de  $K_w$ , la divergence entre ces modèles est significative. Sachant que le modèle Sinus nous donne la plus grande fréquence tandis que le modèle parabolique donne les fréquences les plus petites.

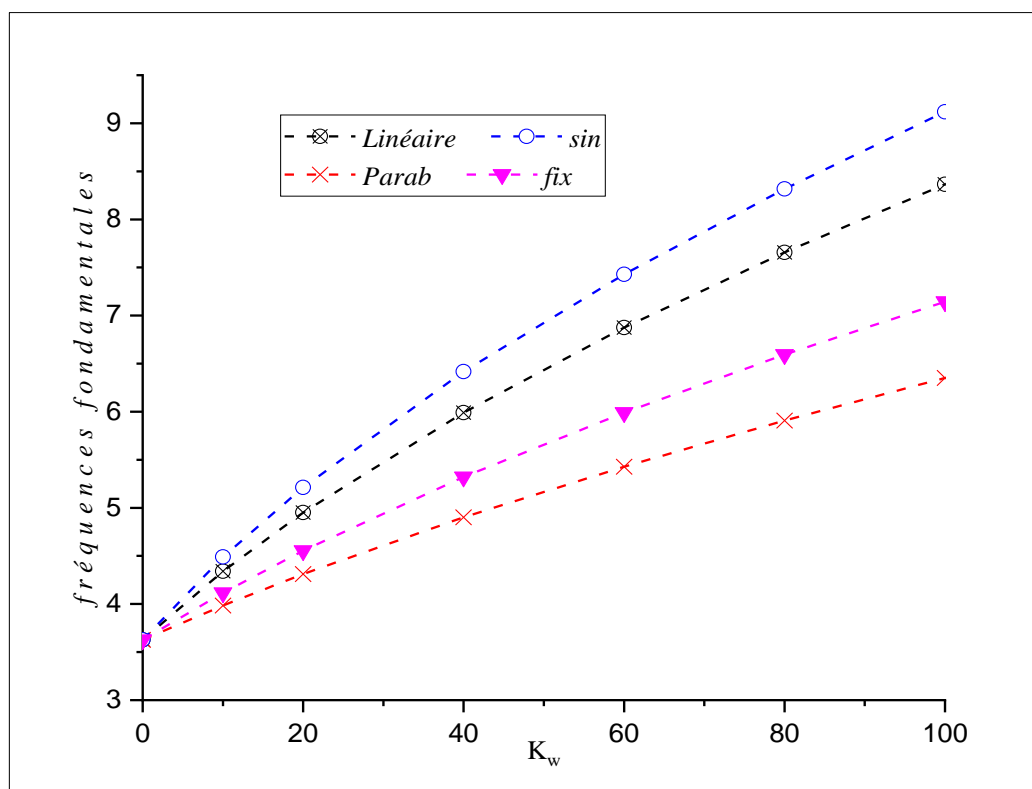


Figure IV. 15 : Variation des fréquences adimensionnelles d'une poutre P-FGM par rapport au paramètre de Winkler pour différents types de fondations élastiques.

### IV.6.4 Effet de la porosité « n » sur le paramètre fondation variable

Les différents effets du facteur de la porosité " $\alpha$ ", de l'indice matériel " $n$ " et des paramètres de fondation " $\zeta$ ,  $K_w$  and  $K_s$ " sur la fréquence fondamentale non dimensionnelles d'une poutre poreuse en FGM sont montrés dans le tableau.IV.8. (Ci-après) :

**Tableau IV.8 :** Effet de  $\alpha$ , de  $n$  et de  $\zeta$ , sur les fréquences non-dimensionnelles d'une poutre poreuse.

$K_w, K_s$	$\zeta$	$n$	$\alpha$	Linear		parab		Sin		
				L/h=5	L/h=20	L/h=5	L/h=20	L/h=5	L/h=20	
(100,00)	0.2	0	0,1	4.0802	4.2202	3.9147	4.0562	4.1519	4.2912	
			0,2	4.1499	4.2945	3.9803	4.1265	4.2233	4.3673	
			0,3	4.2206	4.3700	4.0469	4.1979	4.2957	4.4445	
		5	0,1	3.9735	4.0869	3.7385	3.8508	4.0739	4.1878	
			0,2	4.0507	4.1712	3.8069	3.9260	4.1547	4.2759	
			0,3	4.1270	4.2559	3.8740	4.0011	4.2348	4.3647	
		10	0,1	4.0093	4.1215	3.7672	3.8788	4.1126	4.2252	
			0,2	4.0932	4.2151	3.8416	3.9630	4.2003	4.3226	
			0,3	4.1748	4.3095	3.9131	4.0475	4.2862	4.4213	
	0.6	0	0,1	4.2824	4.4208	3.7906	3.9334	4.4842	4.6216	
			0,2	4.3570	4.5001	3.8532	4.0007	4.5636	4.7056	
			0,3	4.4326	4.5805	3.9166	4.0691	4.6441	4.7908	
		5	0,1	4.2548	4.3700	3.5591	3.6708	4.5302	4.6479	
			0,2	4.3420	4.4649	3.6204	3.7389	4.6270	4.7528	
			0,3	4.4290	4.5608	3.6802	3.8065	4.7238	4.8594	
		10	0,1	4.2987	4.4122	3.5820	3.6936	4.5818	4.6972	
			0,2	4.3933	4.5167	3.6490	3.7705	4.6866	4.8121	
			0,3	4.4865	4.6227	3.7124	3.8472	4.7904	4.9292	
	1	0	0,1	4.4754	4.6128	3.6623	3.8067	4.7936	4.9298	
			0,2	4.5547	4.6966	3.7217	3.8709	4.8803	5.0211	
			0,3	4.6349	4.7817	3.7818	3.9361	4.9682	5.1137	
		5	0,1	4.5183	4.6359	3.3700	3.4816	4.9440	5.0663	
			0,2	4.6147	4.7404	3.4238	3.5420	5.0546	5.1861	
			0,3	4.7112	4.8466	3.4755	3.6013	5.1655	5.3083	
		10	0,1	4.5696	4.6849	3.3866	3.4986	5.0066	5.1259	
			0,2	4.6739	4.7993	3.4455	3.5676	5.1259	5.2561	
			0,3	4.7774	4.9160	3.5000	3.6358	5.2446	5.3895	
	(100,2.5)	0.2	0	0,1	6.1017	6.2392	5.9923	6.1294	6.1498	6.2875
				0,2	6.2183	6.3605	6.1065	6.2482	6.2675	6.4098
				0,3	6.3363	6.4834	6.2220	6.3686	6.3866	6.5338
			5	0,1	6.6184	6.7717	6.4821	6.6319	6.6783	6.8331
				0,2	6.7770	6.9486	6.6373	6.8042	6.8382	7.0120
				0,3	6.9327	7.1305	6.7904	6.9814	6.9949	7.1960
			10	0,1	6.7197	6.8696	6.5806	6.7268	6.7806	6.9323
				0,2	6.8851	7.0593	6.7436	6.9117	6.9470	7.1240
				0,3	7.0357	7.2550	6.8953	7.1025	7.0966	7.3219
0.6		0	0,1	6.2387	6.3767	5.9121	6.0489	6.3788	6.5174	
			0,2	6.3583	6.5010	6.0244	6.1659	6.5016	6.6449	
			0,3	6.4794	6.6270	6.1381	6.2845	6.6258	6.7741	

	1	5	0,1	6.7884	6.9462	6.3816	6.5290	6.9614	7.1243	
			0,2	6.9509	7.1288	6.5343	6.6981	7.1276	7.3126	
			0,3	7.1093	7.3166	6.6854	6.8717	7.2881	7.5064	
		10	0,1	6.8928	7.0478	6.4781	6.6217	7.0687	7.2297	
			0,2	7.0607	7.2434	6.6390	6.8032	7.2381	7.4312	
			0,3	7.2074	7.4453	6.7908	6.9903	7.3770	7.6394	
		0	0	0,1	6.3727	6.5112	5.8307	5.9673	6.5999	6.7395
				0,2	6.4953	6.6386	5.9412	6.0824	6.7275	6.8720
				0,3	6.6194	6.7677	6.0531	6.1992	6.8567	7.0062
	5		0,1	6.9539	7.1165	6.2794	6.4245	7.2324	7.4041	
			0,2	7.1199	7.3045	6.4295	6.5901	7.4035	7.6013	
			0,3	7.2803	7.4980	6.5783	6.7603	7.5656	7.8044	
	10		0,1	7.0610	7.2217	6.3738	6.5150	7.3434	7.5153	
			0,2	7.2304	7.4229	6.5324	6.6929	7.5120	7.7262	
			0,3	7.3697	7.6308	6.6837	6.8762	7.6260	7.9441	
	(100,10)	0.2	0	0,1	9.9461	10.1134	9.8795	10.0461	9.9757	10.1433
				0,2	10.1460	10.3196	10.0780	10.2508	10.1762	10.3501
				0,3	10.3483	10.5283	10.2788	10.4581	10.3791	10.5595
5			0,1	9.9002	11.5461	9.8937	11.4647	9.9029	11.5822	
			0,2	9.6592	11.8714	9.6550	11.7875	9.6610	11.9086	
			0,3	9.3622	12.2078	9.3592	12.1214	9.3635	12.2462	
10			0,1	9.0629	11.7389	9.0615	11.6559	9.0635	11.7757	
			0,2	8.7189	12.0842	8.7179	11.9986	8.7194	12.1222	
			0,3	8.3045	12.4425	8.3037	12.3542	8.3048	12.4816	
0.6		0	0,1	10.0306	10.1988	9.8311	9.9971	10.1182	10.2874	
			0,2	10.2323	10.4068	10.0286	10.2008	10.3218	10.4973	
			0,3	10.4364	10.6174	10.2283	10.4070	10.5278	10.7098	
		5	0,1	9.9077	11.6493	9.8885	11.4055	9.9146	11.7564	
			0,2	9.6641	11.9777	9.6517	11.7265	9.6688	12.0880	
			0,3	9.3657	12.3174	9.3569	12.0586	9.3692	12.4311	
		10	0,1	9.0645	11.8441	9.0605	11.5956	9.0660	11.9532	
			0,2	8.7202	12.1927	8.7172	11.9364	8.7214	12.3052	
			0,3	8.3054	12.5544	8.3031	12.2900	8.3064	12.6704	
1		0	0,1	10.1144	10.2835	9.7824	9.9480	10.2588	10.4295	
			0,2	10.3179	10.4933	9.9788	10.1506	10.4654	10.6425	
			0,3	10.5237	10.7058	10.1776	10.3557	10.6744	10.8581	
		5	0,1	9.9143	11.7516	9.8829	11.3460	9.9242	11.9280	
			0,2	9.6686	12.0831	9.6482	11.6652	9.6754	12.2648	
			0,3	9.3690	12.4261	9.3545	11.9954	9.3741	12.6133	
		10	0,1	9.0659	11.9484	9.0594	11.5350	9.0682	12.1281	
			0,2	8.7213	12.3002	8.7163	11.8739	8.7231	12.4855	
			0,3	8.3064	12.6653	8.3025	12.2255	8.3078	12.8564	



Il est montré à partir de ce tableau que les fréquences provoquées par la porosité de la poutre FGM augmentent avec l'augmentation du facteur de la porosité. Il est à remarquer aussi que les fréquences causées par les poutres courtes en FGM sont plus petites que celles causées par les poutres poreuses moyennement épaisses, et que ces fréquences augmentent avec la croissance des paramètres de fondation ( $k_w$ ,  $k_s$  et  $\zeta$ ).

Cependant, comparé au paramètre de Winkler  $K_w$ , le paramètre de Pasternak  $K_s$  a un impact plus dominant sur l'augmentation de la fréquence non-dimensionnelle.

## IV.7 Conclusion

Dans ce chapitre, une nouvelle théorie de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur à trois variables intégrale d'une poutre est utilisée pour analyser la vibration libre et le flambement des poutres fonctionnellement graduées parfaites et poreuses avec un nouveau modèle de la distribution de la porosité utilisant divers modèles des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevé, Les propriétés mécaniques de la poutre ont été prises comme variantes à travers l'épaisseur suivant deux loi de variation, de puissance et sigmoïdale. Une fondation à raideur variable a été utilisée dans ce travail

L'étude paramétrique réalisée a permis de mettre en évidence les différents facteurs influençant le comportement vibratoire de flambage dans les poutres en FGM. Il est indiqué que les réponses aux fréquences et à la stabilité dans les poutres en FGM sont affectées par divers paramètres tels que les constantes de fondation élastique, l'indice de gradient et le rapport hauteur/longueur. A partir de cette méthode on peut prédire la valeur de la fréquence pour différents paramètres  $L/h$  et  $n$  lorsque les raideurs élastiques soient variables.

On peut conclure aussi que les courbes des fréquences de vibration ainsi que des charges critiques de flambement sont considérablement influencées par l'indice de volume de porosité dans les poutres fonctionnellement graduées avec une excellente convergence du modèle actuel de distribution de porosité avec d'autres modèles dans la littérature.

# Conclusion Générale

---

## Conclusion Générale

Dans ces travaux de thèse, l'effet de la porosité sur le comportement dynamique et statique des structures conçues en matériaux avancés, a été pris en considération. Nous avons introduit un modèle de porosité que nous avons validé par rapport aux autres modèles trouvés dans la littérature; comme nous avons introduit un modèle de fondation qui tient compte de la raideur de l'assise élastique corrigée par une couche de Pasternak qui tient compte de l'effet de couplage entre les ressorts de Winkler ; sachant que la raideur prise et variable reflétant des cas authentiques de la géologie des terres. Comme artifice de résolution, nous avons utilisé les théories d'ordre élevé pour les structures de type poutres

Concernant l'étude mathématique menée, une formulation théorique a été développée pour étudier comportement dynamiques et statique des poutres poreuses sans ou avec l'effet des fondations élastiques variables basé sur la théorie de déformation de cisaillement. Cette théorie d'ordre supérieure à trois variables est décrit la courbe de cisaillement selon la hauteur de la poutre en utilisant quatre fonctions de gauchissement. Les fondations élastiques ont une couche de ressort de Winkler qui est interconnectée par couche Pasternak. La raideur de Winkler est supposée variable à travers longueur de la poutre. Les résultats obtenus à partir de l'analyse de la stabilité et de la vibration libre des poutres poreuses FGM reposants sur des fondations élastiques uniformes ou variables ont été comparées à d'autres résultats trouvés dans la littérature et les conclusions suivantes ont été tirées :

- La théorie utilisée est efficace et en bon accord avec les autre théories issues de la littérature. Dû aux nombres réduits des inconnus, l'analyse du comportement vibratoire et de flambement devient plus simple à aborder même sous d'autres conditions aux limites, et sous différents modèles de porosité ;
- Les fréquences naturelles diminuent avec l'augmentation des indices de la loi de puissance avec ou sans fondation élastique ; ceci est valable quel que soit l'élancement de la poutre; cette constatation reste valable pour les charges critiques de flambement.
- Les fréquences naturelles augmentent avec l'augmentation de l'élancement de la poutre avec ou sans fondation élastique ; ceci est valable quel que soit l'élancement de la poutre; cette constatation reste valable pour les charges critiques de flambement.

- Les fréquences de vibration obtenues dans le présent travail et les modèles de Ebrahimi and Jafari (2016), CBT Şimşek (2010) et de Ibnorachid (2019) donnent des résultats proches les uns des autres; sachant que les résultats de littérature sont basés sur les modèles d'éléments finis.
- Les charges critiques obtenues dans le présent travail et les modèles de Nguyen et al (2013) et Vo et al (2014) donnent des résultats proches les uns des autres; sachant que les résultats Vo et al (2014) sont basés sur les modèles d'éléments finis.
- Les fréquences d'une poutre sur appui élastique sont supérieures à celle d'une poutre sans fondation. Ces fréquences diminuent avec l'augmentation de l'effet des fondations élastiques ; ceci est justifié par la rigidification de la poutre.
- Les fréquences naturelles et les charges critiques de flambement sont prédites efficacement pour les poutres élancées puisque l'effet du cisaillement transverse ne prend pas effet.
- La fréquence et les charges critiques de flambement dans les poutres en S-FGM sont plus importantes que celles des poutres en P-FGM.
- A partir des résultats qui présentent les fréquences et charges critiques de deux types de poutres (P-FGM et S-FGM) pour les différentes formules du facteur de distribution de la porosité, nous pouvons observer que les valeurs des fréquences et des charges critiques obtenues diminuent avec l'augmentation du facteur de porosité ; ceci est parfait par le fait que la porosité assouplie la poutre en la rendant plus flexible.
- Cette remarque est valable pour tous les cas de distribution, à l'exception de la formulation de troisième ordre (Hadji) ; ou, l'augmentation du facteur  $\lambda$  implique l'augmentation des réponses mécaniques de la poutre.
- Par rapport à constatations tirées dans cette étude, la porosité est un paramètre très influent sur le comportement mécanique des structures, à cet effet, il est impératif de le considérer en vue de mener une étude plus réaliste.

Les perspectives ouvertes par ce travail sont les suivantes :

- Prise en compte de plusieurs conditions aux limites en vue de l'étude de l'effet de la fondation élastique variable ;

- Une validation expérimentale est nécessaire pour la maîtrise du comportement des structures fonctionnellement graduées FGM, et par la suite, pouvoir dimensionner et calculer ce type de structures ;
- tenir compte l'effet de l'étirement de l'épaisseur
- développe un modèle élément fini pour étudier le comportement des structures FGM en introduisant des théories de déformation par cisaillement et l'effet de stretching ; en plus des conditions aux limites.

# Références bibliographiques

---

## Références bibliographiques

- [Ait Atmane. 2010] Ait Atmane, H., Tounsi, A., Mechab, I., and Adda Bedia, E. A. (2010). "Freevibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory." *Int. J. Mech. Mater. Des.*, Vol. 6, No. 2, pp. 113-121.
- [Ait Atmane et al. 2015] Ait Atmane, H., Tounsi, A., Bernard, F. and Mahmoud, S.R. (2015), "A computational shear displacement model for vibrational analysis of functionally graded beams with porosities", *Steel Compos. Struct.*, 19(2), 369-384.
- [Ait yahia et al. 2015] Ait Yahia, S., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015), "Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories", *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 53(6), 1143-1165.
- [Altenbach H. 1998] Altenbach H. Theories for laminated and sandwich plates. *Mechanics of composite materials.* 1998;34(3):243.
- [Ayache et al. 2018] Ayache B, Bennai R, Fahsi B, Fourn H, Ait Atmane H, Tounsi A. Analysis of wave propagation and free vibration of functionally graded porous material beam with a novel four variable refined theory. *Earthquakes And Structures.* 2018;15(4):369.
- [Baron C.2008] Baron C Naili S « Propagation d'ondes élastiques au sein d'un guide d'ondes élastiques anisotrope à gradient unidirectionnel sous chargement fluide», *Compte Rendue Mécanique* ; 336 (9) : 722-730, 2008.
- [Batou et al. 2019] Batou B, Nebab M, Bennai R, Atmane HA, Tounsi A, Bouremana M. Wave dispersion properties in imperfect sigmoid plates using various HSDTs. *Steel and Composite Structures.* 2019;33(5):699.
- [Benadouda et al. 2017] Benadouda, M., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Bernard, F., Mahmoud, S.R. (2017), "An efficient shear deformation theory for wave propagation in functionally graded material beams with porosities", *Earthquakes and Structures*, 13(3), 255-265.
- [Benferhat et al. 2016] Benferhat, R., Daouadji, T. H., and Mansour, M. S. (2016), "Free vibration analysis of FG plates resting on an elastic foundation and based on the neutral surface concept using higher-order shear deformation theory", *Comptes Rendus Mecanique.*, 344(9), 631-641. <https://doi.org/10.1016/j.crme.2016.03.002>.
- [Bennai et al. 2015] Bennai, R., Ait Atmane, H. and Tounsi, A. (2015), "A new higher-order shear and normal deformation theory for functionally graded sandwich beams", *Steel Compos. Struct.*, 19(3), 521-546
- [Binétruy. 2004] Binétruy, C ' Physique du moulage des composites avancés :aspects théoriques ', *Techniques de l'Ingénieur*, 2004 AM 3718, pp 1-16.
- [Bishop A. 1993] Bishop A., Lin C.Y., Navaratnam M., Rawlings R.D., McShane H.B., «A functionally gradient material produced by a powder metallurgical process», *Journal of Materials.*
- [Boch P.1989] Boch P., Chartier T., Huttepain M., «Tape casting of Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/ZrO<sub>2</sub> laminated Composites», *J. Am. Ceram. Soc*; 69 ( 8):191-192,1986.
- [Bowles et al. 1992] K.J. Bowles and S. Frimpong, 'Voids effects on the interlaminar shear strength of unidirectional graphite-fiber reinforced composites', *Journal of Composite Materials*, Vol 26, pp 1487-1509, 1992.
- [Bréard. 1997] J. Bréard, ' Matériaux composites à matrice polymère , modélisation numérique de la phase de remplissage du procédé R.T.M. et détermination expérimentale de la perméabilité d'un renfort fibreux', Thèse de doctorat, Université du Havre, 1997.
- [Bréard et al. 2003] J. Bréard, A. Saouab, G. Bouquet, 'Numerical simulation of void formation in LCM', *Composites : Part A*, Vol. 34, pp 517-523, 2003.
- [Caliri Jr MF. 2017] Caliri Jr MF, Ferreira AJ, Tita V. A new finite element for thick laminates and sandwich structures using a generalized and unified plate theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering.* 2017;109(2):290.

- [Chakraverty et al. 2014] Chakraverty, S., Pradhan, K.K. (2014), “Free vibration of exponential functionally graded rectangular plates in thermal environment with general boundary conditions”. *Aerosp. Sci. Technol.* 36, 132–156.
- [Costa et al. 2001] M.L. Costa, S.F. Müller de Almeida, M.C. Rezende, ‘The influence of porosity on the ILSS of carbon/epoxy and carbon/bismaleimide fabric laminates’, *Composites Science and Technology*, Vol. 61; pp 2101-2108; 2001.
- [De Lima AS. 2018] de Lima AS, de Faria AR, Faria JJR. Critical review of displacement-based laminate theories and modeling techniques. 2018:10.
- [Demetris. 2015] Demetris P, Cristina G. *Mechanics of functionally graded material structures*: World Scientific; 2015.
- [Divinis et al.2005] N. Divinis, M. Kostoglou, T.D. Karapantsios, V. Bontozoglou, ‘Selfsimilar growth of a gas bubble induced by localized heating : the effect of temperature-dependent transport properties’, *Chemical Engineering Science*; Vol. 60; pp 1673-1683; 2005.
- [El Meiche et al. 2011] El Meiche A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate 53 (4), 2011,237-247.
- [Ebrahimi and Jafari.2016] Ebrahimi, F., and Jafari, A. (2016). “ Thermo-mechanical vibration analysis of temperature-dependent porous FG beams based on Timoshenko beam theory”. *Struct. Eng. Mech*, 59(2), 343-371.
- [Fletcher ,1993] Fletcher N.H., « Van der Waals ’ equation and nucleation theory», *Europeen Journal Physics*, Vol. 14, pp 29-35, 1993.
- [Frishfelds et al. 2008] V.Frshfelds ,T.S. Lundström , A. Jakovics , ‘ Bubble motion through non-crimp fabrics during composites manufacturing’, *Composites: Part A*, Vol. 39,pp 243- 251, 2007.
- [Fourn et al. 2018] Fourn H, Atmane HA, Bourada M, Bousahla AA,Tounsi A, Mahmoud S. A novel four variable refined plate theory for wave propagation in functionally graded material plates. *STEEL AND COMPOSITE STRUCTURES*. 2018;27(1):109.
- [Gupta et al, 2017] Gupta, A., Talha, M., Seemann, W.: Free vibration and flexural response of functionally graded beam resting on Winkler- Pasternak elastic foundations using non-polynomial higher order shear and normal deformation theory. *Mech. Adv. Mater. Struct.* (2017).
- [Gupta et Talha. 2018] Influence of porosity on the flexural and vibration response of gradient plate using nonpolynomial higher-order shear and normal deformation theory”, *Int. J. Mech. Mater. Des.*,14(2),277-296.
- [Hadji et al. 2019] Hadji, L., Zouatnia, N., Bernard, F. (2019), “An analytical solution for bending and free vibration responses of functionally graded beams with porosities: Effect of the micromechanical models”, *Structural Engineering and Mechanics*, 69(2), 231-241.
- [Hadji et Bernard. 2020] Hadji, L. and Bernard, F. (2020), “Bending and free vibration analysis of functionally graded beams on elastic foundations with analytical validation”, *Advances in Materials Research.*, 09(1), 63-98.
- [Harper B.D. 1987] Harper B.D ., Staab G.H., Chen R.S ., « A note on the effects of voids upon the hygral and mechanical properties of AS4/3502 Graphite/Epoxy», *Journal of Composite Materials*, Vol. 21, pp 280-289, March 1987.
- [Houari M.S.A. 2011] Houari M.S.A . « Analyse des contraintes thermoélastique : lois des puissances », Thèse de Doctorat, Université de Djilalli Liabès Sidi Bel Abbes, Algérie, 2011.
- [Ibnorachid et al. 2019] Ibnorachid, Z., Boutahar, L., EL Bikri , K., and Benamar , R. (2019). “Buckling Temperature and Natural Frequencies of Thick Porous Functionally Graded Beams Resting on Elastic Foundation in a Thermal Environment”. *Advances in Acoustics and Vibration*.
- [Jha et al. 2013] Jha D , Kant T , Singh R . A critical review of recent research on functionally graded plates. *Composite Structures*. 2013;96:833.
- [Kaczkowski. 1968] Kaczkowski, On Kinematical Assumptions of Refined Theories of Plates: A Survey, 57(4): 1088-1091.
- [Kang et al. 2001] M.K. Kang, W.I. Lee, H.T. Hahn, ‘Analysis of vacuum bag transfer molding process’,



Composites: Part A, Vol 32, pp 1553-1560, 2001.

- [Karama. 2003] Karama, M., Afaq, K.S., Mistou, S. (2003), “Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity”, *Int. J. Solids Struct.*, 40(6), 1525–1546.
- [Kardos et al. 1983] Kardos et al., J.L. Kardos, M.P. Dudukovic, E.L. Mc Kagne and M.W. Lehman, ‘Void formation and transport during composite laminate processing: an initial model Framework’, *Composite Materials: Quality Assurance and Processing, ASTM STP 797*, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, PA, pp 96-109, 1983.
- [Kardos et al. 1986] Kardos et al. J.L. Kardos and M.P. Dudukovic, ‘Void growth and resin transport during processing of thermosetting – matrix composites’, *Advances in Polymer Science*, Vol. 80, p 101-123, 1986.
- [Kawasaki A.1997] Kawasaki A., Watanabe R. « Concept and P/M fabrication of functionally gradient materials», *Ceramics International*, 8842(95):73–83, 1997.
- [Kendall et al. 1983] Kendall, K., Howard, A., Birchall, J., Prat, P., Proctor, A. and Jefferies, S.A. (1983), “The relation between porosity, microstructure and strength, and the approach to advanced cement-based materials”, *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A*, 310(1511), 139-153. <https://doi.org/10.1098/rsta.1983.0073>.
- [Khandan R. 2012] Khandan R., Noroozi S., Sewell P., Vinney J. The development of laminated composite plate theories: a review. *Journal of Materials Science*. 2012;47(16):5901.
- [Kieback et al. 2003] Kieback B., Neubrand A., Riedel H., «Processing techniques for functionally graded materials», *Materials Science and Engineering : A*, 362(1-2):81–106, 2003.
- [Kingery et al. 1975] W.D.Kingery, K.Bowen, D.R. Uhlmann, ‘Introduction to ceramics’, Wiley- Interscience publication, 2nd Edition, ISBN 0-471-47860-1, 1032 p, 1975.
- [Koizumi M. 1992] Koizumi M., « Recent Progress of functionally graded materials in Japan », *Ceram. Eng.Sci. Proc*; 13 (7-8): 333-347, 1992.
- [Koizumi. M. 1996] Koizumi M., « FGM activities in Japan, department of materials chemistry». Ryukoku University, Ohtsu, 520-21 Japan, 1996.
- [Koizumi M. 1997] Koizumi M., « FGM activities in Japan», *Composites*; 28 (1-2):1– 4. 1997.
- [Kokini K.1990] Kokini K., Takeuchi Y. « Multilayer ceramic thermal barrier coatings under transient thermal loads», In *Proceeding of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 31-36, 1990.
- [Kwak H.Y. 1998] Kwak H.Y., Kim Y.W., «Homogeneous nucleation and macroscopic growth of gas bubble in organic solutions», *International Journal of Heat mass transfer*; Vol. 41 N°4-5; pp 757-767; 1998.
- [Ledru . 2009 ] Ledru Y.; Etude de la porosité dans les matériaux composites stratifiés aéronautiques Thèse de Doctorat de l’université de Toulouse, 2009.
- [Lee et al. 1996] J.G. Lee and R.W. Flumerfelt, ‘A refined approach to bubble nucleation and polymer foaming process : dissolved gas and cluster size effects’, *Journal of Colloid and Interface Science*, Vol 184, pp 335-348, 1996.
- [Levinson. 1980] *The Journal of Philosophy* Vol. 77, No. 1 (Jan., 1980), pp. 5-28 (24 pages) Published By: *Journal of Philosophy, Inc.* <https://doi.org/10.2307/2025596>.
- [Liu et al. 2004] L.Liu, B. Zhang, D. Wang, ‘Void content in carbon/epoxy composites and its effects on flexural properties’, 49th International Sampe Symposium and Exhibition, pp 254-261, 2004.
- [Liu et al. 2006 (a)] L.Liu, B. Zhang D. Wang, ‘Void content in carbon/epoxy Composites and its effects on flexural properties ’49th International Sampe Symposium and Exhibition, pp 254-261, 2006.
- [Lundström. 1996] T.S. Lundstrom ‘Bubble transport through constricted capillary tubes with application to resin transfer molding’ *Polymer Composites*, Vol 17, N°6, pp 770- 779 1996.
- [Murthy. 1981] Murthy; Departments of Biological Sciences and Biochemistry Purdue University, West Lafayette, Ind. 47907, U.S.A. Received 5 May 1981, Available online 9 March 2005.

- [Nebab et al. 2019] Nebab, M., Ait Atmane, H., Bennai, R. and Tahar, B. (2019), "Effect of nonlinear elastic foundations on dynamic behavior of FG plates using four-unknown plate theory", *Earthq. Struct.*, 17(5), 447-462.
- [Nguyen T. K. 2007] Nguyen T. K., Sab K., Bonnet G., « Shear correction factors of functionally graded plates », *Mech. Advanced Mater. Struct.*; 14 (8): 567-575, 2007.
- [Nguyen et al. 2013] Nguyen, T.K., Vo, T.H., Thai, T.H. (2013) "Static and free vibration of axially loaded functionally graded beams based on the first-order shear deformation theory", *composite part B*. 55, 147-157.
- [Niino M. 1988] Niino M., Suzuki A., Hirai T., Watanabe R., Hirano T., Kuroishi N. «Method of producing a functionall gradient material», U.S. Patent 4571099, 1988.
- [Okamura H. 1991] Okamura H., «State of the art of material design projects for severe service applications» *Mater. Sci. Eng :A*; 143 (1-2): 3-9, 1991.
- [Olivier P. 1994] Olivier. P., 'Etude des contraintes résiduelles de cuisson dans les stratifiés carbone/époxy en relation avec les cycles de polymérisation Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, 270p, 1994.
- [Olivier et al. 1995] P. Olivier, J.P. Cottu et B. Ferret, 'Effects of cure cycle pressure and voids on some mechanical properties of carbon/epoxy laminates', *Composites*, Vol. 26 N°7, p 509, 1995.
- [Ould Larbi. 2014] Ould Larbi Latifa « Etude comparative des différentes théories à ordre élevé pour la vibration libre des poutres FGM » Thèse de Doctorat de l'université de DJILLALI LIABES de SIDI BEL ABBES, 2013.
- [Patel et al. 1996] N. Patel, J.L. Lee, 'Modeling of void formation and removal in liquid composite molding. Part I: Wettability analysis', *Polymer Composites*, Vol 17 N°1, pp 96- 103, 1996.
- [Payvar. 1987] P. Payvar, 'Mass transfer controlled bubble growth during rapid decompression of a liquid', *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol 30, N° 4, pp 699- 706, 1987.
- [Pitchumani. 1996] R. Pitchumani, S. Ranganathan, R.C. Don, J.W. Gillespie, M.A. Lamontia, 'Analysis of transport phenomena governing interfacial bonding and void dynamics during thermoplastic tow placement', *International Journal of Heat Mass Transfer*, Vol. 39, N°9, pp 1883-1897, 1996.
- [Pillai et al. 2004] K.M. Pillai and M.S. Munagavalasa, 'Governing equations for unsaturated flow through woven fiber mat. Part 2. Non-isothermal reactive flows', *Composites: Part A*, Vol. 35, pp 403-415, 2004.
- [Pillai. 2007] K.M. Pillai, T. Roy and C. Dulmes, 'Experimental investigations of the unsaturated flow in liquid composite molding' Workshop à l'IMFT, Novembre 2007.
- [Ranganathan et al. 1995] Ranganathan, S.G. Advani, M.A. Lamontia, 'A nonisothermal process model for consolidation and void reduction during in-situ tow placement of thermoplastic composites', *Journal of composite materials*, Vol. 29, N°8, pp 1040-1062, 1995.
- [Reissner. 1975] Reissner March 1975 <https://doi.org/10.1002/sapm19755411>.
- [Reddy. 1984] Reddy, J.N., 1984. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *J Appl Mech* 51(4), 745-52.
- [Reddy et cheng. 2001] Reddy, J.N. and Cheng, Z.Q. (2001), "Three-dimensional thermomechanical deformations of functionally graded rectangular plates", *Eur. J. Mech. A/Solid.*, 20, 841-855.
- [Saeedi N. 2012] Navid Saeedi. «Une approche très efficace pour l'analyse du délaminage des plaques stratifiées infiniment longues», Thèse de Doctorat, Laboratoire Navier, 2012.
- [Sallai. 2011] Sallaiben-Oumrane, « Etude et analyse des structures en FGM: Comparaison entre E-FGM, P-FGM et S-FGM. » Thèse de Doctorat de l'université de DJILLALI LIABES de SIDI BEL ABBES, 2011.
- [Schoeller. 1955] H. Schoeller, 'Hydrogéologie' Ecole Nationale Supérieure du Pétrole, Technip, Paris, 2 vol, 443 p, 1955.
- [Schaefer. 1994] D.W. Schaefer, 'Engineered porous materials', A publication of the Materials Research

- Society : Bulletin MRS, Vol 19, N°4, pp 14-17, 1994.
- [Shi and Voyiadjis. 2011] Shi , Voyiadjis A Sixth-Order Theory of Shear Deformable Beams With Variational Consistent Boundary Conditions *J. Appl. Mech.* Mar 2011, 78(2): 021019.
- [Şimşek. 2010] Şimşek, M. (2010). “Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher-order beam theories”. *Nuclear Engineering and Design*, 240(4), 697-705.
- [Sobhi. 2013] Sobhy, M. (2013), “Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions”, *Compos. Struct*, 99, 76-87.
- [Sofiyev. 2011] Sofiyev “Thermal buckling of FGM shells resting on a two-parameter elastic foundation” October 2011 *Thin-Walled Structures* 49(10):1304-1311.
- [Steffens H.D. 1990] Steffens H.D , Dvorak M , Wewel M ,«Plasma sprayed functionally gradient materials-processing and applications», in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 139-43, 1990.
- [Takahashi M. 1990] Takahashi M , Itoh Y, Kashiwaya H , «Fabrication and Evaluation of W/Cu Gradient Material by Sintering and Infiltration Technique» in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 129-34, 1990.
- [Tang et al. 1987] J.M. Tang , W.I. Lee and G.S. Springer , ‘Effects of cure pressure on resin flow , voids and mechanical properties’, *Journal of Composite Materials*, Vol 21, p 421- 440, May 1987.
- [Timoshenko. 1972] Timoshenko. Department of Mechanical Engineering, University of Nottingham, Nottingham NG7 2RD, England Received 20 March 1972, Available online 24 July 2003.
- [Touratier. 1991] Touratier, M. (1991), “An efficient standard plate theory”, *Int. J. Eng. Sci.*, 29(8), 901–916.
- [Trochu et al. 2006] F. Trochu , E. Ruiz, V. Achim , S. Soukane, ‘ Advanced numerical simulation of liquid composite molding for process analysis and optimization’, *Composites: Part A*, Vol 37, pp 890-902, 2006.
- [Vo et al. 2014] Vo, T.P., Thai, H.T., Nguyen, T.K., Inam, F., Lee, J. (2015a), "A quasi- 3D theory for vibration and buckling of functionally graded sandwich beams". *Compos. Struct.* 119, 1–12.
- [Voyiadjis and Shi. 1991] Voyiadjis , Shi Simple and efficient shear flexible two-node arch/beam and four-node cylindrical shell/plate finite elements.
- [Wattanasakulpong .2012] Wattanasakulpong , N ., Prusty, B.G., Kelly, D.W., Hoffman, M. (2012), “Free vibration analysis of layered functionally graded beams with experimental validation”, *Mater. Des.*, 36, 182–190.
- [Wattanasakulpong. 2014] Wattanasakulpong N. And Ungbhakorn V., Linear and nonlinear vibration analysis of elastically restrained ends FGM beams with porosities, *Aerosp.Sci.Technol.*, 32(1) (2014) 111-120.
- [Wisnom et al. 1996] M.R. Wisnom , T. Reynolds and N. Gwilliam , ‘Reduction in ILSS by discrete and distributed Voids’, *Composites Science and Technology*, 56, pp 93-101, 1996.
- [Woo et al, 2006] Woo, J., Meguid, S.A. and Ong, L.S. (2006), “Nonlinear free vibration behavior of functionally graded plates”, *J. Sound Vib.*, 289, 595-611.
- [Yaghoobi, 2014] Yaghoobi, H., Valipour, M.S., Fereidoon, A. and Khoshnevisrad, P. (2014), “Analytical study on post-buckling and nonlinear free vibration analysis of FG beams resting on nonlinear elastic foundation under thermo-mechanical loading using VIM”, *Steel and Composite Structures*, 17(5), 753–776.
- [Yamaleev et al. 2006] N. Yamaleev , R. Mohan , ‘ Effect of the phase transition on intratow flow behavior and void formation in liquid composite molding’, *International journal of multiphase flow*; Vol 32; pp 1219-1233; 2006.
- [Yang et al. 2006] J. Yang ,Y. Jia, S.Sun,D. Ma ,T.Shi ,L.An, ‘Mesoscopic simulation of the impregnating process of unidirectional fibrous preform in resin transfer molding’, *Materials Science and Engineering*, pp 515-520, 2006.
- [Yang et al. 2008] Yang, J. & CHEN, Y. 2008. Free vibration and buckling analyses of functionally graded beams with edge cracks. *Composite Structures*, 83, 48-60.

- [Ying et al. 2008]** J.Ying Lü C.F. .Chen.W.,« Two-dimensional elasticity solutions for functionally graded beams resting on elastic foundations Materials», Composite Structures, 84 (03): 2009 2019, 2008.
- [Yokota. 1978]** M.J. Yokota , ‘Process controlled curing of resin matrix composites’, Sample Journal, p11-17, July/Augus, 1978.
- [Yoshida et al. 1986]** H. Yoshida, T. Ogasa and R. Hayashi, ‘Statistical approach to the relationship between ILSS and void content of CFRP’, Composites Science and Technology, Vol 25, pp 3-18, 1986.
- [Zeng Y. 2000]** Zeng Y., Jiang D.,Watanabe T.,«Fabrication and Properties ofTape-Cast Laminated and Functionally Gradient Alumina–Titanium Carbide Materials», Journal of the American Ceramic Society, 83 (12): 2999–3003, 2000
- [Zhang et al. 2016]** Zhang LW, Lei ZX, Liew KM. Free vibration analysis of FG-CNT reinforced composite straight-sided quadrilateral plates resting on elastic foundations using the IMLS-Ritz method. Journal of Vibration and Control. 2016;23(6):1026