

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Relizane
Faculté des sciences et techniques
Département de Génie Civil



Méthode des éléments finis

Cours et exercices corrigés

Présenté à L'Université de Relizane
Par Zemri Amine
Maître de conférences B
Destiné aux étudiants Master (Voies et ouvrages d'art, Structures)

Année universitaire 2021/2022

Sommaire

Introduction	03
Chapitre I : Introduction à la méthode des éléments finis.....	04
Chapitre II : Rappel sur le calcul matriciel.....	14
Chapitre III : Elément barre.....	25
Chapitre IV : Elément poutre.....	41
Chapitre 5 : Formulation variationnelle du problème d'élasticité	58
Chapitre 6 : Approximation, Fonctions d'Interpolation	65

Introduction

La méthode des éléments finis représente l'une des méthodes numériques les plus utilisées dans le monde de calcul et modélisation des structures.

Ce cours est destiné aux étudiants de master s'occupant plus spécialement de calcul des structures (bâtiments, ouvrages d'art,...), aux jeunes ingénieurs et à tous ceux qui s'intéressent au calcul structures.

Le cours commence par une introduction à cette méthode qui dévoile sa définition, son domaine d'emploi et les grandes axes de la MEF.

Le deuxième chapitre donne un rappel sur le calcul matriciel

Dans le troisième et quatrième chapitre, on donne la construction des deux éléments: barre et poutre, respectivement.

Ensuite, la formulation variationnelle du problème d'élasticité est présentée dans le chapitre cinq.

Le dernier chapitre est consacré au problème d'approximation et de fonction d'interpolation.

Dans chaque chapitre, on trouve le cours avec des exercices qui éclaircissent les principes développés.

Chapitre I : Introduction à la méthode des éléments finis

I.1 Introduction

Dans le domaine de l'ingénierie, l'analyse des problèmes se termine souvent à développer un modèle mathématique (une équation ou un système d'équations différentielles, auxquelles sont ajoutées des conditions aux limites) pouvant représenter d'une manière aussi réaliste que possible le problème recherché, en appuyant sur des théories de base et des hypothèses simplificatrices.

La résolution analytique d'équations différentielles pose parfois des difficultés insurmontables, et une solution exacte décrivant bien le problème étudié n'est pas toujours facile à trouver, en fait, elle n'est possible que pour des cas très simples. Le recours aux modèles physiques et à la simulation expérimentale pour la recherche d'une solution analogue à la solution recherchée peut s'avérer coûteux en temps et en moyens.

La résolution analytique d'équations différentielles n'est possible, dans la majorité des cas, que pour des cas simples. Avec les progrès enregistrés dans le domaine de l'informatique et les performances des ordinateurs de plus en plus grandes, il est plus possible qu'auparavant de résoudre numériquement des systèmes d'équations différentielles très complexes.

La méthode des éléments finis est l'une des techniques numériques les plus puissantes utilisées dans ce genre de problèmes.

L'un des avantages majeurs de cette méthode est le fait qu'elle offre la possibilité de développer un programme permettant de résoudre, avec peu de modifications, plusieurs types de problèmes. En particulier, toute forme complexe d'un domaine géométrique où un problème est bien posé avec toutes les conditions aux limites, peut être facilement traitée par la méthode des éléments finis.

I.2 Définition de la méthode des éléments finis :

La méthode des éléments finis (MEF) est une méthode numérique qui sert à résoudre un système d'équation différentielle ou à dérivées partiel en discrétisant le domaine physique (D) en plusieurs sous domaines (e) appelés éléments finis, et en proposant une forme approchée de la solution.

Les logiciels de calcul des structures générale (tel que ABAQUS, NASTRAN, CASTEM, CodeAster, ...etc.) ou spécialisés en génie civil et travaux publics (tel que SAP2000, ETABS, Autodesk Robot Structural Analysis, Graitec Concrete, ...etc.) utilisent la méthode des éléments finis dans leur code de calcul.

I.3 Pourquoi la méthode des éléments finis ?

La complexité (voir l'impossibilité) de trouver une solution analytique d'un problème en mécanique des solides (dans la majorité des cas) revient à deux causes :

- 1- *Le champ à modéliser est inconnu* : le champ de déplacement à rechercher est inconnu. La stratégie proposée par la MEF consiste à supposer une allure générique du champ inconnu ; cette allure est complètement déterminée à partir d'un certain nombre de paramètres (nœuds). Donc, la résolution est

obtenue par la détermination de ces paramètres (discrets) au lieu de connaître le champ lui-même (continu et donc en nombre infini).

- 2- *La géométrie est trop complexe* : pour laquelle il est difficile de décrire une seule allure du champ inconnu. Il faut donc découper le système en formes plus simples ou les champs locaux sont à déterminer à travers les caractéristiques locales. C'est le principe de la discrétisation.

En résumant, cette méthode consiste à diviser (discrétiser) le domaine physique à traiter en plusieurs sous domaines appelés éléments finis à dimensions non infinitésimales. La solution recherchée est remplacée dans chaque élément par une approximation avec des polynômes simples et le domaine peut ensuite être reconstitué avec l'assemblage ou sommation de tous les éléments.

I.4 Les grandes lignes de la méthode

Dans ce paragraphe, nous essayerons de présenter d'une manière simplifiée, les étapes d'application de la méthode des éléments finis et les outils nécessaires à sa mise en œuvre.

La résolution d'un problème physique par éléments finis suit grosso modo les étapes suivantes (Fig. 1) :

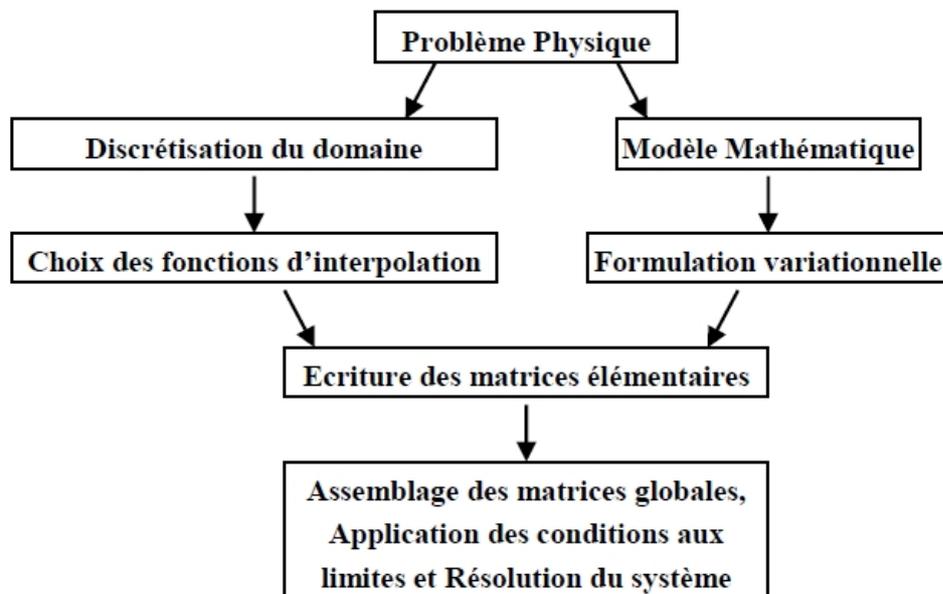


Fig. 1. Etapes générales de la méthode des éléments finis

Étape 1 : *Formulation des équations gouvernantes et des conditions aux limites.*

La majorité des problèmes d'ingénierie (génie civil, mécanique, électronique, électrotechnique,...) sont décrits par des équations différentielles aux dérivées partielles associées à des conditions aux limites définies sur un domaine et son contour. L'application de la MEF exige une réécriture de ces équations sous forme intégrale. La formulation faible est souvent utilisée pour inclure les conditions aux limites (voir le chapitre 5).

Étape 2 : *Division du domaine en sous domaines (discrétisation).*

Cette étape consiste à discrétiser le domaine en éléments et calculer les connectivités de chacun ainsi que les coordonnées de ses nœuds. Elle constitue ainsi la phase de préparation des données géométriques.

Etape 3 : Approximation sur un élément.

Dans chaque élément la variable, qui est le déplacement, est approximée par une simple fonction linéaire, polynomiale ou autre. Le degré du polynôme d'interpolation est relié au nombre de nœuds de l'élément. L'approximation nodale est appropriée. C'est dans cette étape que se fait la construction des matrices élémentaires.

Etape 4 : Assemblage et application des conditions aux limites.

Toutes les propriétés de l'élément (masse, rigidité,...) doivent être assemblées afin de former le système algébrique pour les valeurs nodales des variables physiques. C'est à ce niveau qu'on utilise les connectivités calculées à l'étape 2 pour construire les matrices globales à partir des matrices élémentaires.

Etape 5 : Résolution du système global :

Le système global peut être linéaire ou non linéaire. Il définit soit un problème d'équilibre qui concerne un cas stationnaire ou statique ou un problème de valeurs critiques où il faut déterminer les valeurs et vecteurs propres du système qui correspondent généralement aux fréquences et modes propres d'un système physique.

Un problème de propagation qui concerne le cas transitoire (non stationnaire) dans lequel il faut déterminer les variations dans le temps des variables physiques et la propagation d'une valeur initiale. Les méthodes d'intégration pas à pas sont les plus fréquentes telles que, méthode des différences finies centrales, méthode de Newmark, méthode de Wilson.

A ces méthodes doivent être associées des techniques d'itération pour traiter le cas non linéaire. La plus célèbre est la méthode de Newton Raphson.

I.5 les bases de la méthode des éléments finis :

La méthode des éléments finis est une méthode basée sur les trois branches suivantes :

- Les lois de la physiques
- L'analyse numérique
- L'informatique appliquée

I.5.1 Les lois de la physiques

Ce sont les sciences de l'ingénieur telles que la mécanique des milieux continus, l'élasticité, la plasticité, la mécanique générale, la mécanique des fluides, la thermodynamique, la dynamique des structures ...etc.

Après avoir établi le modèle physique, l'ingénieur doit chercher le modèle mathématique adéquat qui décrit fidèlement le phénomène physique en question à l'aide d'une fonctionnelle unique.

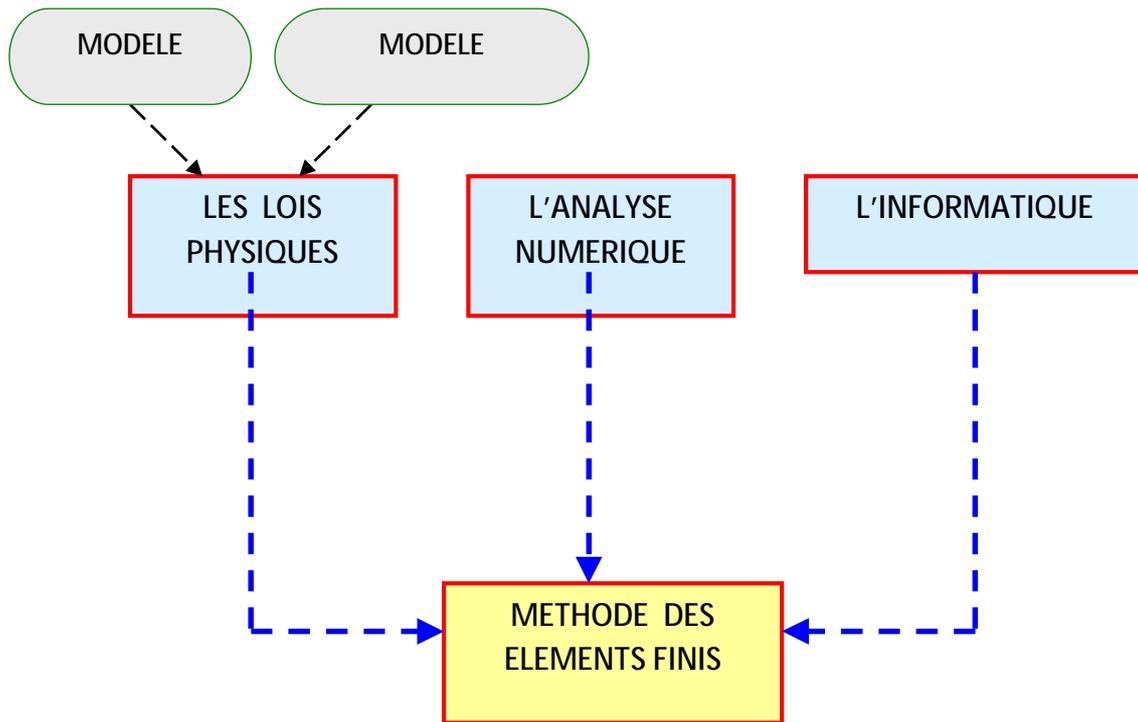


Fig. 2 : Les bases de la MEF

1.4.2 L'analyse numérique

C'est une branche des mathématiques qui utilise les méthodes d'approximations dans la résolution des équations polynomiales, algébriques linéaires et non linéaires par les méthodes matricielles, les équations différentielles ...etc.

L'analyse numérique s'avère très efficace pour la méthode des éléments finis.

Si nous voulons calculer un déterminant d'ordre 50, or la méthode des éléments finis peut générer des déterminants d'ordre 10^4 . Pour calculer le déterminant d'ordre 50 par la méthode exacte, il faudra effectuer à peu près 10^{64} opérations. Supposons que l'on possède un micro-ordinateur de vitesse de processeur de 1.2 GHz, c'est-à-dire qu'il peut effectuer 1.2×10^9 opérations élémentaires par seconde. Le temps qu'il va falloir pour achever le calcul est 8.33×10^{54} secondes, soit 9.64×10^{49} jours, ou 9.64×10^{47} années. Il faut donc souligner qu'en pratique, la résolution par les méthodes directes est presque inutilisable.

Par contre, par le biais des méthodes itératives de l'analyse numérique, on peut arriver à la solution en quelques minutes.

1.5.3 L'informatique appliquée

C'est un moyen puissant pour pouvoir résoudre les systèmes d'équations en un temps très réduit. On utilise parfois des mini-ordinateurs ou même des stations de calcul pour résoudre les problèmes de grande taille.

Le modèle de solution est écrit sous forme de programme selon le langage utilisé : Fortran, C++, Turbo-Pascal..etc. Ensuite ce programme est généralement compilé en langage machine, et enfin exécuté.

I.6 Discrétisation du domaine

La méthode des éléments finis est une méthode d'approximation par sous domaines, donc avant toute application il faut diviser le domaine à étudier en éléments. Chaque élément est défini géométriquement par un nombre de nœuds bien déterminé qui constituent en général ses sommets. (Fig. 3)

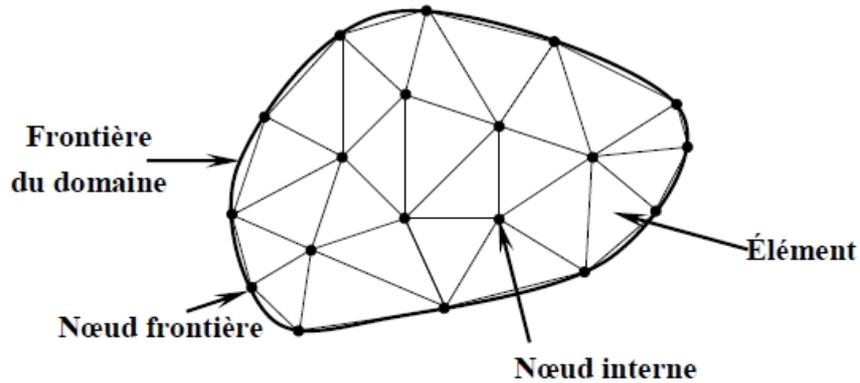


Fig. 3 : Discrétisation du domaine – éléments triangulaires

La discrétisation géométrique doit respecter les règles suivantes :

1. Un nœud d'un élément ne doit pas être intérieur à un côté d'un autre du même type. (Fig. 4 a)
2. Aucun élément bidimensionnel ne doit être plat, éviter les angles proches de 180° ou de 0° . (Fig. 4 b)
3. Deux éléments distincts ne peuvent avoir en commun que des points situés dans leurs frontières communes ; le recouvrement est exclu. (Fig. 4 c)
4. L'ensemble de tous éléments doit constituer un domaine aussi proche que possible du domaine donné ; les trous entre éléments sont exclus. (Fig. 4 d)
5. Les points nodaux doivent coïncider avec les points où il y a un changement du chargement. (Fig. 5)



Fig. 4 : Règles de discrétisation

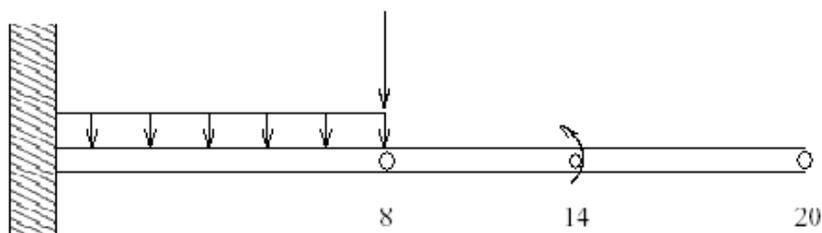


Fig. 5 : Console sous différentes charges

Remarque : Pour une structure donnée, on peut utiliser des éléments de types différents tels que barres, plaques et coques (Fig.6).

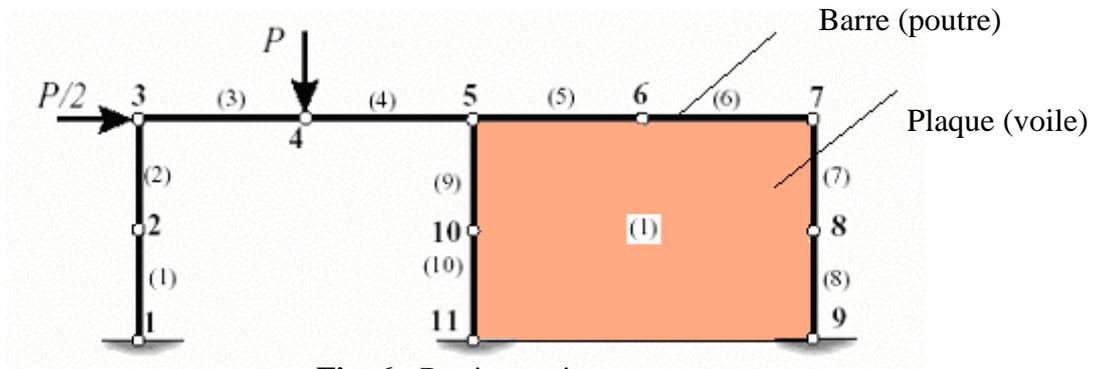


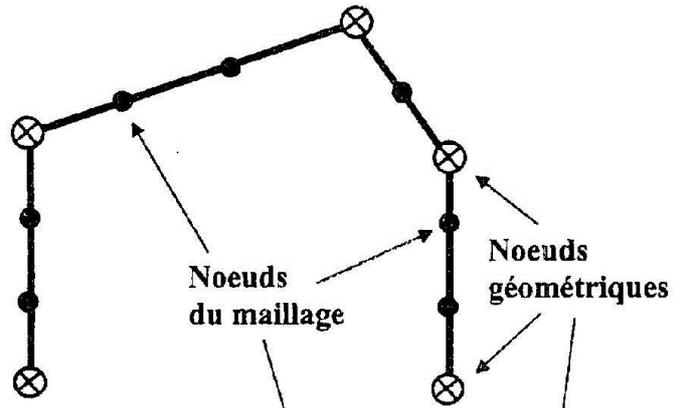
Fig. 6 : Portique mixte

Le résultat du procédé de discrétisation doit contenir deux données essentielles qui sont les coordonnées des nœuds et les connectivités des éléments. On doit numéroter tous les nœuds et les éléments de façon à avoir des matrices globales à petite largeur de bande, pour cela, la numérotation se fait selon la plus petite largeur du domaine.

1.7 Type d'éléments utilisé en MEF :

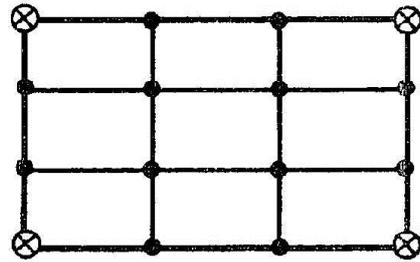
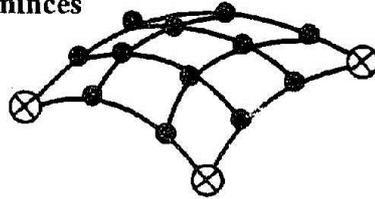
1D:

- Barres
- Poutres
- Coques axisymétriques



2D:

- Elasticité plane
- Axisymétrie
- Plaques minces
- Coques minces



3D:

- Solid massif
- Plaques épaisses
- Coques épaisses

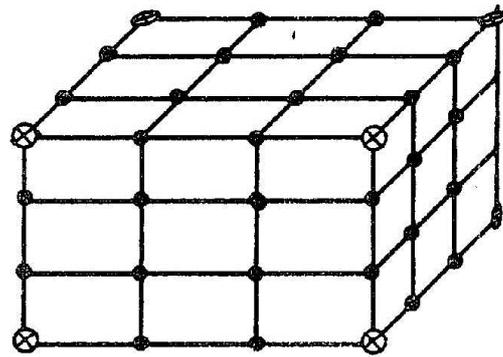


Fig. 7 : Discrétisation des systèmes (nœud physique et nœud de maillage)

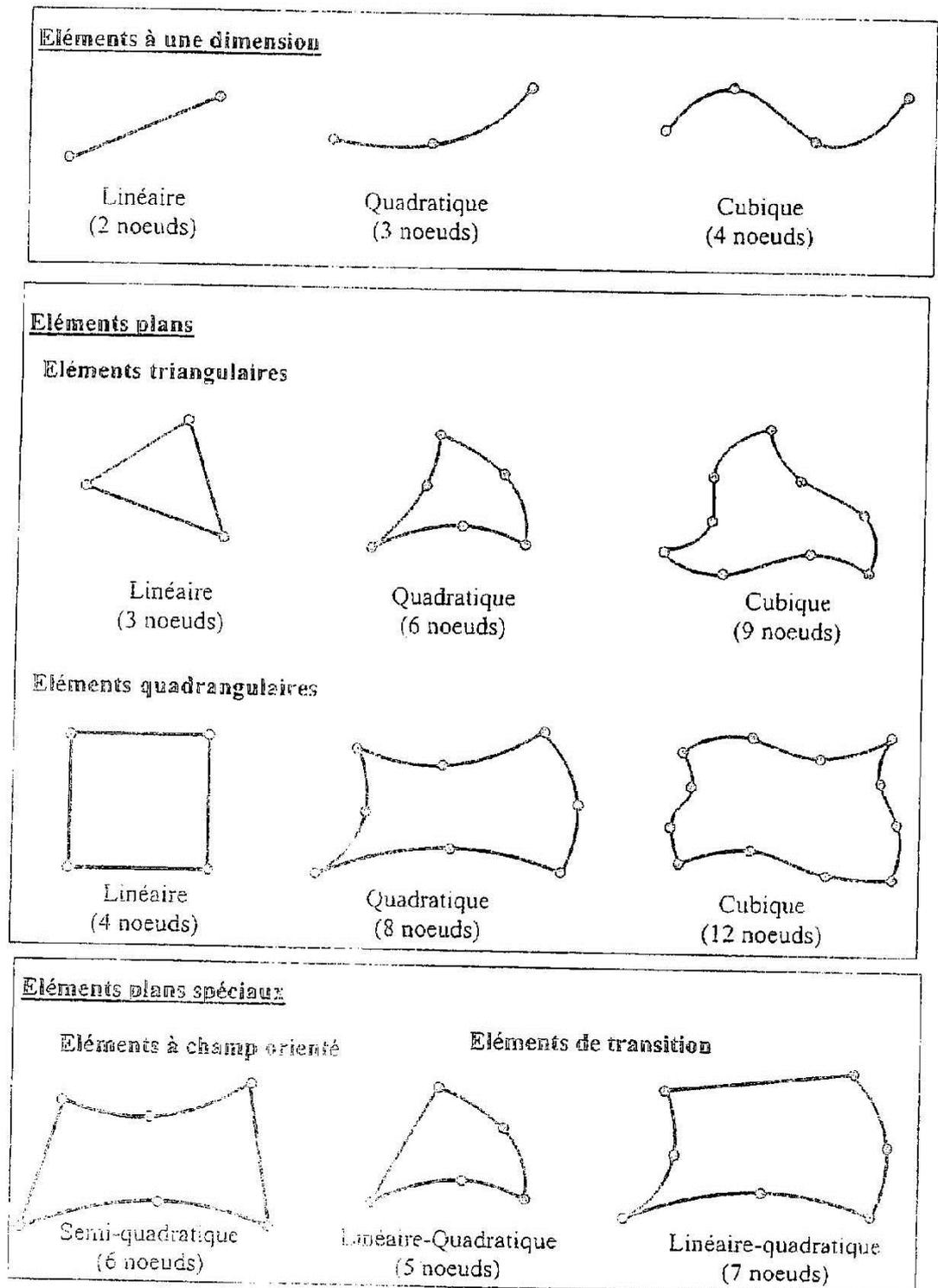


Fig. 8 : Type d'éléments linéique et plans

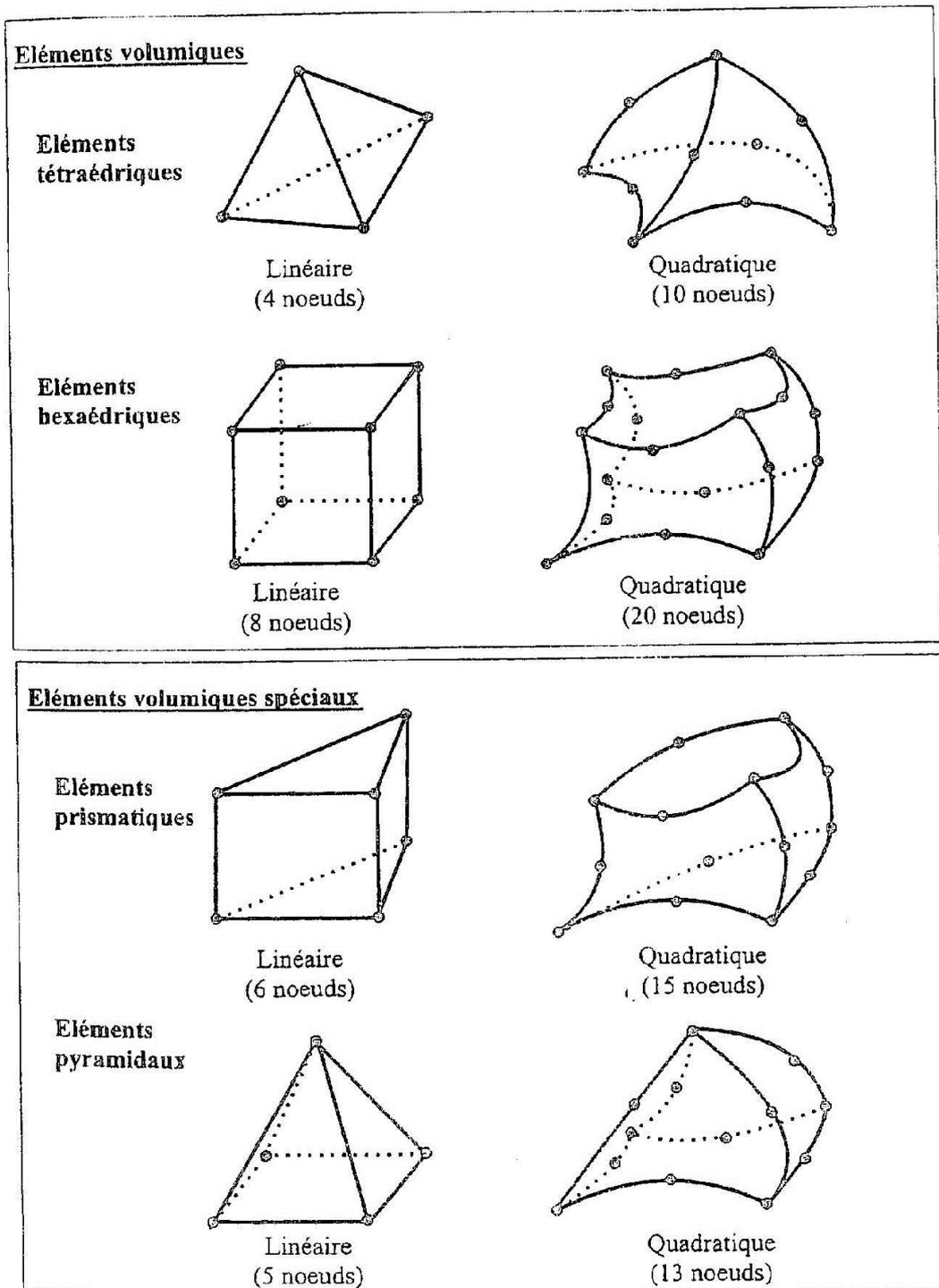


Fig. 9 : Type d'éléments volumiques

Pourquoi on étudie la MEF ?

Ce cours d'élément finis est programmé pour les étudiants de master (Structures, et travaux publics) pour deux raisons :

- 1- Pour comprendre le fonctionnement des logiciels de calcul des structures (qui utilisent cette méthode), et par la suite éviter les erreurs de conception liée à la modélisation par MEF et qui peuvent être graves.

- 2- On utilise la MEF dans le domaine de la recherche scientifique pour trouver des solutions numériques à des problèmes d'ingénierie, ou bien pour avoir une référence de comparaison avec des solution analytique.

Chapitre II: Rappel sur le calcul matriciel

Le calcul par éléments finis nécessitant le maniement de nombreuses valeurs numériques, il est plus aisé d'exprimer celles-ci sous forme matricielle.

En regroupant des termes de même nature au sein d'une seule et même variable, cette écriture plus synthétique permet en effet une meilleure compréhension des différentes phases de construction de la méthode.

Ceci nécessite néanmoins la maîtrise des opérations de base associées à ce type de calcul : l'addition ou le produit de plusieurs matrices, la résolution de systèmes linéaires, etc.

II.1 Notion de matrice

Soit la fonction polynomiale suivante :

$$v(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 \text{ avec } x \in [0, L] \quad (2.1)$$

Et sa dérivée :

$$v'(x) = b_1 + 2b_2x + 3b_3x^2 \quad (2.2)$$

Supposant que $v(x)$ et $v'(x)$ valent v_1 et β_1 en $x = 0$, v_2 et β_2 en $x = L$, on peut aisément établir le système de 4 équations suivant :

$$\begin{cases} v_1 = v(0) = b_0 \\ \beta_1 = v'(0) = b_1 \\ v_2 = v(L) = b_0 + b_1L + b_2L^2 + b_3L^3 \\ \beta_2 = v'(L) = b_1 + 2b_2L + 3b_3L^2 \end{cases} \quad (2.3)$$

Cependant, ce système peut être exprimé de manière plus synthétique sous forme matricielle en posant que le vecteur v

$$\{v\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \beta_1 \\ v_2 \\ \beta_2 \end{Bmatrix}$$

peut être relié au vecteur b

$$\{b\} = \begin{Bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$$

Anticipant sur les règles relatives au produit des matrices (cf. paragraphe II.2.2), on a donc :

$$\{v\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \beta_1 \\ v_2 \\ \beta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} = [R] \cdot \{b\}$$

équivalent au système d'équations (2.3).

Dans ce cas $\{v\}$ et $\{b\}$ sont des vecteurs " colonne " a 4 lignes alors que la matrice $[R]$ est une matrice dite carrée a 4 lignes et 4 colonnes. De manière générale, une matrice peut être caractérisée par un ensemble de nombres ordonnés et regroupés en n lignes et m colonnes.

On aura alors une matrice de dimensions $n \times m$:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & a_{1j} & \cdot & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & a_{2j} & \cdot & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot & a_{3j} & \cdot & a_{3m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdot & a_{ij} & \cdot & a_{im} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdot & a_{nj} & \cdot & a_{nm} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

a_{ij} caractérisant le terme des i^{eme} ligne et j^{eme} colonne de la matrice $[A]$. Si $n = 1$ ou $m = 1$, la matrice sera associée suivant le cas, soit a un vecteur ligne, soit a un vecteur colonne qui sont généralement notes $\{ \}$. De plus et spécifiquement pour les matrices dites carrées ($n = m$), les termes a_{ii} seront appelés termes diagonaux et formeront la diagonale de la matrice.

II.2 Opérations de base

II.2.1 Addition

Soit deux matrices $[A]$ et $[B]$ de dimensions $n \times m$ construites a partir de (2.4), la matrice $[C]$ de mêmes dimensions, somme des matrices $[A]$ et $[B]$, sera obtenue en posant que chacun des termes c_{ij} est égale a $a_{ij} + b_{ij}$. On aura alors :

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdot & c_{1j} & \cdot & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdot & c_{2j} & \cdot & c_{2m} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \cdot & c_{3j} & \cdot & c_{3m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{i1} & c_{i2} & c_{i3} & \cdot & c_{ij} & \cdot & c_{im} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \cdot & c_{nj} & \cdot & c_{nm} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} & \cdot & a_{1j} + b_{1j} & \cdot & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} & \cdot & a_{2j} + b_{2j} & \cdot & a_{2m} + b_{2m} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} & \cdot & a_{3j} + b_{3j} & \cdot & a_{3m} + b_{3m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & a_{i3} + b_{i3} & \cdot & a_{ij} + b_{ij} & \cdot & a_{im} + b_{im} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & a_{n3} + b_{n3} & \cdot & a_{nj} + b_{nj} & \cdot & a_{nm} + b_{nm} \end{bmatrix} = [A] + [B] \quad (2.5)$$

Dans le cas d'une différence des matrices [A] et [B], on posera de la même façon :

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \quad (2.6)$$

Exemples : Soit les matrices

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

et

$$[B] = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 & 2 \\ 1 & 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$[C] = [A] + [B] = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 9 & 5 \\ 4 & 7 & 2 & 8 \end{bmatrix} \quad [C] = [A] - [B] = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -5 & 1 \\ 2 & -5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

II.2.2 Produit

■ ■ Produit d'une matrice par un scalaire

Soit une matrice [A] de dimensions $n \times m$, la matrice [C], produit de la matrice [A] par le scalaire l sera obtenue en multipliant chacun des termes de la matrice [A] par l. On aura donc :

$$c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij} \quad (2.7)$$

Exemple :

$$[C] = 3 \cdot [A] = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 & 9 \\ 9 & 3 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

■ ■ Produit de 2 matrices

Soit deux matrices [A] et [B] de dimensions respectives $n \times m$ et $m \times l$, la matrice [C], produit des matrices [A] et [B]¹, de dimensions $n \times l$, sera obtenue en posant que les termes c_{ij} sont égaux à :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{k=m} a_{ik} \times b_{kj} \quad (2.8)$$

Par exemple, on trouvera pour le premier terme :

$$c_{11} = a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21} + \dots + a_{1m} \times b_{m1}$$

Cependant et pour que ce produit soit possible, il est important de noter que le nombre de colonnes de la matrice $[A]$ doit être égal au nombre de lignes de la matrice $[B]$.

Exemple : Soit les matrices A et B :

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ et } [B] = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 1 \\ 1 & 6 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$[C] = [A] \cdot [B] = \begin{bmatrix} 1 \cdot 4 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 7 & 1 \cdot 9 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 5 \cdot 7 & 3 \cdot 9 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 6 + 5 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 36 \\ 50 & 53 \end{bmatrix}$$

■ ■ Produit de 3 matrices

Soit trois matrices $[A]$, $[B]$ et $[C]$ de dimensions respectives $n \times m$, $m \times l$ et $l \times p$, la matrice $[F]$, produit des matrices $[A]$, $[B]$ et $[C]$, de dimensions $n \times p$ sera obtenue en effectuant dans un premier temps soit le produit $[A] \cdot [B]$ soit celui de $[B] \cdot [C]$, les deux approches amenant au même résultat.

$$[F] = [A] \cdot [B] \cdot [C] = [A] \cdot \left(\overbrace{[B] \cdot [C]}^{[D]} \right) = [A] \cdot [D] = \left(\overbrace{[A] \cdot [B]}^{[E]} \right) \cdot [C] = [E] \cdot [C]$$

Exemple : Soit les matrices A , B et C

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 1 \\ 1 & 6 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \text{ et } [C] = \begin{bmatrix} 27 & 36 \\ 50 & 53 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} ([A] \cdot [B]) \cdot [C] &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 1 \\ 1 & 6 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 27 & 36 \\ 50 & 53 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 27 & 36 \\ 50 & 53 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 27 & 36 \\ 50 & 53 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2529 & 2880 \\ 4000 & 4609 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [A] \cdot ([B] \cdot [C]) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 1 \\ 1 & 6 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 27 & 36 \\ 50 & 53 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 558 & 621 \\ 131 & 161 \\ 327 & 354 \\ 439 & 317 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2529 & 2880 \\ 4000 & 4609 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

II.2.3 Matrice transposée

Soit la matrice $[A]$ de dimensions $n \times m$, la matrice $[B]$ de dimensions $m \times n$ transposée de $[A]$ (notée $[A]^T$) sera obtenue en posant pour chacun des termes de $[B]$ que $b_{ij} = a_{ji}$. Pratiquement, ce calcul revient à échanger les lignes et les colonnes de la matrice $[A]$.

Exemple : soit la matrice A et B

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad [B] = [A]^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

On notera par ailleurs que :

$$([A] \cdot [B])^T = [B]^T \cdot [A]^T \quad (2.9)$$

II.3 Matrices carrées

II.3.1 Matrice identité

La matrice identité, notée $[I]$, est une matrice carrée dont les termes diagonaux sont égaux à 1, tous les autres étant nuls. De ce fait, le produit de la matrice identité par une matrice $[A]$ quelconque (ou inversement) est égale à la matrice $[A]$ elle-même.

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et } [I] \cdot [A] = [A] \cdot [I] = [A] \quad (2.10)$$

II.3.2 Matrice inverse

La matrice inverse de $[A]$ notée $[A]^{-1}$ est définie telle que $[A] \cdot [A]^{-1} = [A]^{-1} \cdot [A] = [I]$ et peut être calculée en posant :

$$[A]^{-1} = \frac{1}{\det[A]} \cdot \text{Com}[A]^T \quad (2.11)$$

ou $\text{Com}[A]$ et $\det[A]$ sont respectivement la comatrice et le déterminant de la matrice $[A]$.

La matrice $[A]$ sera donc inversible à condition que son déterminant soit différent de 0.

■ Calcul du déterminant

– 2 dimensions :

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \quad (2.12)$$

– 3 dimensions :

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (2.13)$$

Qui peut être calculé grâce à la règle de Sarrus :

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \\ a_{21} \quad a_{22} \quad a_{33} \end{array}$$

----- + Produit des 3 termes

————— - Produit des 3 termes

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} \\ - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21}$$

■ Calcul de la comatrice et la matrice inverse

La comatrice de $[A]$, notée $Com[A]$, correspond à la matrice des cofacteurs de $[A]$. Le cofacteur du terme i, j de la matrice $[A]$ est obtenu en multipliant par $(-)^{i+j}$ le déterminant de la sous-matrice issue de la suppression des ligne i et colonne j .

- 1 dimension :

$$[A] = a_{11} \Rightarrow [A]^{-1} = \frac{1}{a_{11}} \quad (2.14)$$

- 2 dimensions :

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow Com[A] = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow [A]^{-1} = \frac{1}{\det[A]} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

- 3 dimensions :

$$\begin{aligned}
[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} &\Rightarrow Com[A] = \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix} \quad (2.16) \\
\Rightarrow [A]^{-1} = \frac{1}{\det[A]} &\begin{bmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33} & a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} \\ a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32} \\ a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} & a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23} & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

II.3.3 Méthodes de résolution de systèmes linéaires

Considérant n équations à n inconnues (qui sont regroupées dans le vecteur $\{q\}$), la résolution du système linéaire de type $[K] \cdot \{q\} = \{F\}$ amène à isoler le vecteur $\{q\}$ de manière à obtenir :

$$[K] \cdot \{q\} = \{F\} \Leftrightarrow \underbrace{[K]^{-1} \cdot [K]}_{[I]} \cdot \{q\} = [K]^{-1} \cdot \{F\} \Rightarrow \{q\} = [K]^{-1} \cdot \{F\} \quad (2.17)$$

Ceci suppose bien sûr que le déterminant de la matrice $[K]$ est différent de 0.

Dans le cas contraire, on parlera de système singulier. Nous verrons d'ailleurs par la suite qu'en éléments finis la singularité de la matrice de rigidité $[K]$ est souvent associée à un problème de conditions d'appui.

De plus, la méthode de calcul par éléments finis amenant dans la plupart des cas à la résolution d'un système de n équations à n inconnues de grandes dimensions, l'inversion conventionnelle vue au chapitre précédent s'avérera peu efficace.

Les outils de calcul par éléments finis font donc très souvent appel à des méthodes plus pertinentes telles que celles par élimination de Gauss, de Cholesky ou frontale.

Il existe deux grandes familles de méthodes de résolution : les méthodes directes (Gauss, Cholesky, frontale, etc.) et les méthodes itératives (gradients conjugués).

Leur efficacité sera directement liée aux performances du ou des processeurs de l'ordinateur utilisés, de la vitesse d'accès au disque dur mais surtout de la quantité de mémoire vive (RAM) disponible.

Généralement, les méthodes de gradients conjugués se révèlent moins gourmandes en terme de mémoire. Ceci étant et spécifiquement pour les problèmes linéaires élastiques comportant plusieurs cas de charges, leur utilisation apparaît moins pertinente dans la mesure où celles-ci nécessitent une résolution complète à chaque changement d'état de charges.

En effet et dans le cas des méthodes directes appliquées aux problèmes linéaires élastiques, seul le premier cas de charges nécessite une inversion de la matrice de rigidité, les résultats des cas suivants étant obtenus par linéarité après stockage de la matrice inversée en mémoire (uniquement si les conditions d'appui ou de température ne varient pas).

■ Résolution par la méthode par élimination de Gauss

Soit le système à résoudre

$$[K] \cdot \{q\} = \{F\} \text{ (} n \text{ équations à } n \text{ inconnues) :}$$

$$\begin{cases} k_{11}q_1 + k_{12}q_2 + k_{13}q_3 + \dots + k_{1n}q_n = F_1 \\ k_{21}q_1 + k_{22}q_2 + k_{23}q_3 + \dots + k_{2n}q_n = F_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \cdot \\ k_{n1}q_1 + k_{n2}q_2 + k_{n3}q_3 + \dots + k_{nn}q_n = F_n \end{cases} \quad (2.18)$$

Pour éliminer la 1^{re} inconnue, la méthode consistera à exprimer q_1 en fonction des autres inconnues et à la remplacer dans les $(n - 1)$ équations restantes :

$$q_1 = \frac{1}{k_{11}} (F_1 - k_{12}q_2 - k_{13}q_3 - \dots - k_{1n}q_n) \quad (2.19)$$

Donc et en remplaçant (2.19) dans (2.18), le système devient :

$$\begin{cases} k_{11}q_1 + k_{12}q_2 + k_{13}q_3 + \dots + k_{1n}q_n = F_1 \\ k_{22}^1q_2 + k_{23}^1q_3 + \dots + k_{2n}^1q_n = F_2^1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \cdot \\ k_{n2}^1q_2 + k_{n3}^1q_3 + \dots + k_{nn}^1q_n = F_n^1 \end{cases} \quad (2.20)$$

Avec

$$\begin{cases} k_{ij}^s = k_{ij}^{s-1} - \frac{k_{is}^{s-1}k_{sj}^{s-1}}{k_{ss}^{s-1}} \\ F_i^s = F_i^{s-1} - \frac{k_{is}^{s-1}F_s^{s-1}}{k_{ss}^{s-1}} \end{cases}$$

Au terme de la n^{ième} élimination, le système s'écrit sous forme triangulaire ce qui rend aisée sa résolution :

$$\begin{cases} k_{11}q_1 + k_{12}q_2 + k_{13}q_3 + \dots + k_{1n}q_n = F_1 \\ k_{22}^1q_2 + k_{23}^1q_3 + \dots + k_{2n}^1q_n = F_2^1 \\ k_{33}^2q_3 + \dots + k_{3n}^2q_n = F_3^2 \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ k_{nn}^{n-1}q_n = F_n^{n-1} \Rightarrow q_n \end{cases} \quad (2.21)$$

Ceci étant, l'utilisation de la méthode par élimination n'est envisageable que si les termes diagonaux de la matrice $[K]$ sont non nuls. Dans le cas contraire, un ou plusieurs pivots nuls rendront l'inversion de la matrice $[K]$ impossible. Bien évidemment, tous ces pivots doivent être différents de zéro et nous verrons même qu'en éléments finis, ceux-ci doivent être positifs.

■ ■ Exemple de résolution par la méthode de Gauss

Soit le système d'équations suivant :

$$\frac{ES}{2L} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

✓ 1^{re} étape : élimination de U_2

De la 1^{re} équation de (2.22), on déduit que :

$$U_2 = \frac{V_3 + U_4}{3} \quad (2.23)$$

En remplaçant (2.23) dans (2.22), la nouvelle expression du système fait apparaître quatre équations indépendantes de U_2 :

$$\frac{ES}{2L} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 - \frac{1}{3} & 1 - \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{3} & 3 - \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \end{Bmatrix} = \frac{ES}{2L} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

✓ 2^{em} étape : élimination de V_2

Pour éliminer V_2 , on répète l'opération en considérant cette fois la deuxième équation de (2.24) d'où :

$$V_2 = \frac{V_3}{2} \quad (2.25)$$

Le système devient alors :

$$\frac{ES}{2L} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} - \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \end{Bmatrix} = \frac{ES}{2L} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

Et ainsi de suite...

✓ 3^{em} étape : élimination de V_3

$$V_3 = \frac{6}{7} \left(-\frac{2PL}{ES} - \frac{2}{3}U_4 + V_4 \right) \quad (2.27)$$

$$\frac{ES}{2L} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{7} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) & \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{7} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{7} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) & 2 - \frac{6}{7} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \\ \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{7} P \\ -\frac{6}{7} P \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

$$\frac{ES}{2L} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{16}{7} & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{7} & \frac{8}{7} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \\ \frac{4}{7} P \\ -\frac{6}{7} P \end{Bmatrix}$$

▼ 4^{em} étape : élimination de U_4

$$U_4 = \frac{PL}{2ES} - \frac{V_4}{4} \quad (2.29)$$

$$\frac{ES}{2L} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{16}{7} & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{7} + \frac{4}{7} \left(-\frac{1}{4}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \\ \frac{4}{7} P \\ -\frac{6}{7} P - \frac{1}{7} \cdot P \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

Soit finalement :

$$\frac{ES}{2L} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{16}{7} & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{7} - \frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \\ \frac{4}{7} P \\ -\frac{6}{7} P - \frac{1}{7} \cdot P \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

On déduit de la 5e équation :

$$\frac{ES}{2L} \cdot V_4 = -P \Rightarrow V_4 = -\frac{2PL}{ES} \quad (2.32)$$

D'où a partir de (2.23), (2.25), (2.27) et (2.29), les valeurs des autres inconnues :

$$\begin{aligned} U_4 &= \frac{PL}{2ES} - \frac{V_4}{4} = \frac{PL}{ES} \\ V_3 &= \frac{6}{7} \left(-\frac{2PL}{ES} - \frac{2}{3}U_4 + V_4 \right) = -\frac{4PL}{ES} \\ V_2 &= \frac{V_3}{2} = -\frac{2PL}{ES} \\ U_2 &= \frac{V_3 + U_4}{3} = -\frac{PL}{ES} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Bien évidemment, la méthode par élimination de Gauss s'avère dans ce cas bien compliquée comparée à une approche plus classique telle que celle décrite ci-dessous.

Reprenant le système (2.22), les 2e et 5e équations permettent de déduire respectivement que $2V_2 = V_3$ et $2V_4 = V_3$ d'où $V_2 = V_4$.

De la somme des 1re et 4e équations résulte que $2U_2 + 2U_4 = 0 \Rightarrow U_2 = -U_4$.

D'où a partir de la 1re : $3U_2 - V_3 - U_4 = 0 \Rightarrow V_3 = 4U_2$.

En remplaçant ces différents résultats dans la 3e équation, on obtient finalement :

$$-U_2 - V_2 + 2V_3 + U_4 - V_4 = -\frac{2PL}{ES} \Rightarrow -2U_2 + V_3 = -\frac{2PL}{ES} \Rightarrow V_3 = -\frac{4PL}{ES}$$

Soit

$$U_2 = -U_4 = -\frac{PL}{ES} \text{ et } V_2 = V_4 = -\frac{2PL}{ES}$$

Chapitre III : Elément barre

III-1 Définition:

L'élément barre est utilisé dans les assemblages de barres ou de tiges travaillant en traction ou compression. On les trouve surtout en charpente métallique et dans les systèmes à treillis.

L'élément barre est élément qui a une dimension beaucoup plus grande par rapport aux deux autres. Leur chargement est seulement axiale.

III-2 Formulation de l'élément barre :

Plusieurs éléments finis barres ont existés dans la bibliographie, le cas le plus simple est l'élément barre à deux nœuds, représenté dans la figure *Fig. I-1*.

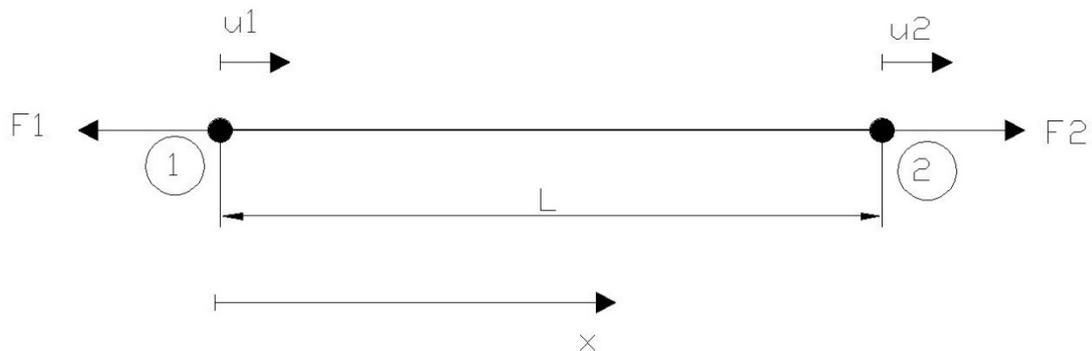


Fig. III-1 : Elément barre à deux nœuds

Pour formuler cet élément, on considère une barre de section A de longueur L et constitué d'un matériau homogène de module de Young E, soumise à des forces de traction aux extrémités 1 et 2.

L'approximation du champ de déplacement $u(x)$ s'écrit sous la forme polynomiale suivante:

$$u(x) = a_0 + a_1 x$$

Les deux conditions nodales permettent de déterminer les coefficients a_0 et a_1 :

$$u(0) = a_0 + a_1 0 = u_1$$

$$u(L) = a_0 + a_1 L = u_2$$

Ou u_1 et u_2 sont respectivement les déplacements aux nœuds 1 et 2. La solution donne les deux coefficients $a_0 = u_1$, et $a_1 = \frac{u_2 - u_1}{L}$. Ainsi, on a :

$$u(x) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{L} x$$

En regroupant les termes en facteur des valeurs nodales u_1 et u_2 , on obtient :

$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right)u_1 + \frac{x}{L}u_2$$

$$u(x) = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2$$

$$\text{D'où : } N_1(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \text{ et } N_2(x) = \left(\frac{x}{L}\right)$$

N_1 et N_2 sont les fonctions de forme reliées aux nœuds 1 et 2, respectivement.

Le champ de déplacement dans le cas de la barre s'écrit sous cette forme:

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{\partial u(x)}{\partial x} = \frac{\partial N_1}{\partial x}u_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x}u_2 \\ &= \frac{-1}{L}u_1 + \frac{1}{L}u_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

La loi de comportement d'une barre, c'est la loi de Hook dans ce cas, s'écrit comme suit :

$$s_x = Ee_x = \begin{bmatrix} -E & E \\ L & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Et on sait que la contrainte dans le cas de compression/traction s'écrit :

$$s_x = \frac{F}{A} \Rightarrow F = s_x A = \begin{bmatrix} -EA & EA \\ L & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

F : est la force normale appliquée au nœud..

Si on considère l'équilibre de l'élément :

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_1 = -F_2 \text{ donc :}$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} EA & -EA \\ L & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} -EA & EA \\ L & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

La convention de signe: les déplacements ainsi que les forces sont positives s'ils suivent le sens du repère, et négative dans la cas contraire.

En réarrangeant ces deux équations (1) et (2) sous forme matricielle, cela va nous donner :

$$\begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

Ou simplement : $[K_e]\{u_e\}=\{F_e\}$, ou

$\{u_e\}$ est le vecteur des déplacements nodaux;

$\{F_e\}$ est le vecteur des forces nodales ;

$[K_e]$ est la matrice locale de rigidité élémentaire.

III-3 Passage au repère de la structure (global) :

Si les propriétés sont définies dans le repère local de l'élément, il est nécessaire de redéfinir les grandeurs matricielles de tous les éléments dans un repère unique, avant de faire l'assemblage. Ce passage du repère local au repère global se fait par une rotation des axes.

Pour faire cela, on va considérer l'élément de barre dans ses deux repères local et global, illustrée dans la figure suivante *Fig.III-2* :

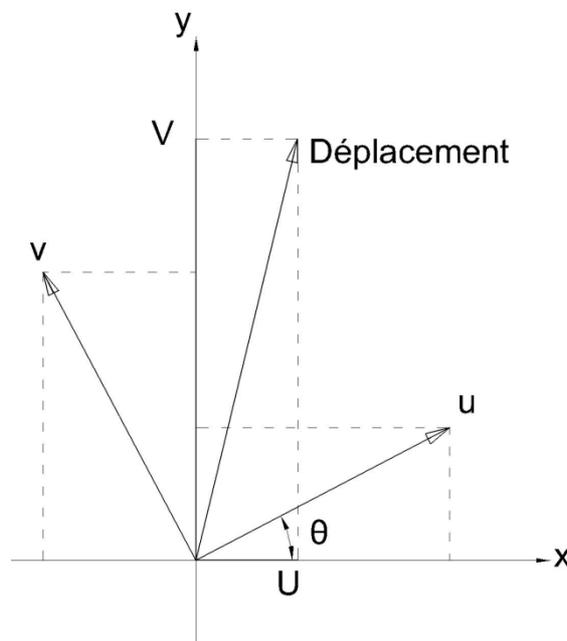


Fig.III-2 : Principe de changement de repère

L'angle θ est l'angle entre le repère local de la barre et le repère global de la structure.

Le vecteur de déplacement local va être de la forme : $\{u_e\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$

Si on écrit les déplacements nodaux dans le repère global en fonction de ceux dans le repère local, on trouve :

$$\text{Déplacement}_{x1}=U_1 = u_1 \cos \theta - v_1 \sin \theta$$

$$\text{Déplacement}_{y1}=V_1 = u_1 \sin \theta + v_1 \cos \theta$$

De même pour le deuxième nœud :

$$\text{Déplacement}_{x2}=U_2 = u_2 \cos \theta - v_2 \sin \theta$$

$$\text{Déplacement}_{y2}=V_2 = u_2 \sin \theta + v_2 \cos \theta$$

On reformule ces quatre équations sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos q & -\sin q & 0 & 0 \\ \sin q & \cos q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos q & -\sin q \\ 0 & 0 & \sin q & \cos q \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

Ou simplement : $\{U_e\} = [T_e] \{u_e\}$

$\{U_e\}$: est le vecteur de déplacements nodaux dans le repère global.

$[T_e]$: est la matrice de passage ou de rotation.

C'est une matrice orthogonal et son déterminant égale à 1, donc sa matrice inverse est la transposé de cette dernière.

La matrice de rigidité élémentaire dans le repère global sera de la forme:

$$[K_e^g] = [T_e]^T [K_e] [T_e]$$

$$[K_e^g] = \begin{bmatrix} \cos q & \sin q & 0 & 0 \\ -\sin q & \cos q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos q & \sin q \\ 0 & 0 & -\sin q & \cos q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{AE}{l} & 0 & -\frac{AE}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{AE}{l} & 0 & \frac{AE}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos q & -\sin q & 0 & 0 \\ \sin q & \cos q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos q & -\sin q \\ 0 & 0 & \sin q & \cos q \end{bmatrix}$$

$$[K_e^g] = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

(c : cos θ , s : sin θ)

De même pour le vecteur des forces dans le repère global :

$$\{F_e^{global}\} = [T_e]^T \{F_e^{local}\}$$

III-4 Assemblage :

Une matrice de rigidité globale doit être établie et qui a une dimension de $(n \times n)$ tel que n est le nombre de degré de liberté de la structure entière.

Exemple :

$$[K]_1 = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [Q]_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$[K]_2 = \begin{bmatrix} k_{11}^2 & k_{12}^2 \\ k_{21}^2 & k_{22}^2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [Q]_2 = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Pour obtenir la matrice de rigidité globale, il suffit d'assembler ces deux matrices de la façon suivante :

$$[K]_G = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 + k_{11}^2 & k_{12}^2 \\ 0 & k_{21}^2 & k_{22}^2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [Q] = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

III-5 Conditions aux limites :

Les conditions aux limites sont indispensables pour rendre la matrice de rigidité inversible.

Dans le cas où on a un déplacement nul dans un nœud (encastrement ou un appui dans le sens bloqué), on doit éliminer la ligne et la colonne du déplacement concerné (dans la matrice de rigidité) ainsi que la force correspondante qui sera une force de réaction.

III-6 Réactions d'appuis

Pour calculer les réactions d'appui, il suffit d'utiliser le système matriciel global et après avoir calculé les déplacements, pour trouver les valeurs des réactions.

III-7 Forces internes :

Les forces internes (compression ou traction) de l'élément barre peuvent être obtenues directement à partir de l'équation suivante :

$$\{F_e^{local}\} = [T_e] \{F_e^{global}\}$$

Pour un élément de nœud (i,j) , tel que "i" est le premier nœud et "j" est le deuxième nœud, l'effort normal (compression ou traction) correspond à la force

nodale à l'extrémité (j) de la barre(c.-à-d. le troisième composant du vecteur des force élémentaire dans le repère local $\{F_e^{local}\}$), il devient :

$$\begin{cases} F_{jx} = \frac{EA}{L} [\cos^2 \theta (u_j - u_i) + \cos \theta \sin \theta (v_j - v_i)] \\ F_{jy} = \frac{EA}{L} [\cos \theta \sin \theta (u_j - u_i) + \sin^2 \theta (v_j - v_i)] \end{cases}$$

A partir de ces trois dernières équations, l'effort normal peut être écrit :

$$N = \cos \theta F_{jx} + \sin \theta F_{jy}$$

En développant cette dernière équation on trouve :

$$N = \frac{EA}{L} [\cos \theta (u_j - u_i) + \sin \theta (v_j - v_i)]$$

Ou sous forme matricielle :

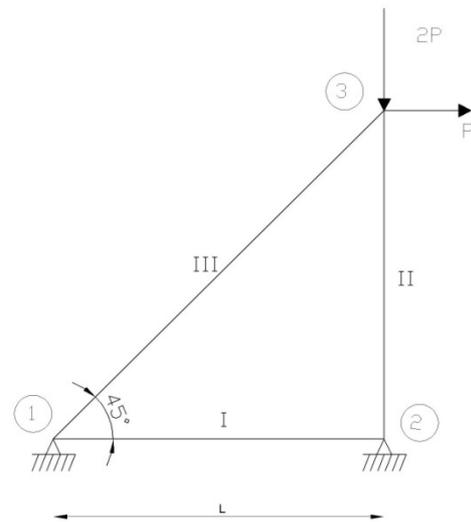
$$N = \frac{EA}{L} [\cos \theta \quad \sin \theta] \begin{Bmatrix} u_j - u_i \\ v_j - v_i \end{Bmatrix}$$

III-7 Exercices :

III-7-1 Exercices 1:

- 1. Calculer les déplacements des nœuds pour la structures indiquée sur la figure.
- 2. Calculer les réactions des appuis.
- 3. Calculer les contraintes dans chaque barre.

Fig.III-3



Solution:

-1.

Élément	Nœuds	Longueur	angle	c	s	c ²	s ²	cs
I	1-2	L	0	1	0	1	0	0
II	2-3	L	90°	0	1	0	1	0
III	1-3	$\sqrt{2}L$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Les matrices élémentaires de chaque barre dans le repère global:

$$\text{Elément I: } K_1 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Elément I: } K_2 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Elément I: } K_3 = \frac{EA}{2\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Assemblage des matrices élémentaires:

$$K = K_1 + K_2 + K_3$$

Cet assemblage se fait en respectant les degrés de liberté de chaque matrice.

$$K = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1.35 & 0.3536 & -1 & 0 & -0.3536 & -0.3536 \\ 0.3536 & 0.3536 & 0 & 0 & -0.3536 & -0.3536 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -0.3536 & -0.3536 & 0 & 0 & 0.3536 & 0.3536 \\ -0.3536 & -0.3536 & 0 & -1 & 0.3536 & 1.3536 \end{bmatrix}$$

Le système matriciel global s'écrit:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1.35 & 0.3536 & -1 & 0 & -0.3536 & -0.3536 \\ 0.3536 & 0.3536 & 0 & 0 & -0.3536 & -0.3536 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -0.3536 & -0.3536 & 0 & 0 & 0.3536 & 0.3536 \\ -0.3536 & -0.3536 & 0 & -1 & 0.3536 & 1.3536 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U1 \\ V1 \\ U2 \\ V2 \\ U3 \\ V3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Rx1 \\ Ry1 \\ Rx2 \\ Ry2 \\ P \\ -2P \end{bmatrix}$$

Les conditions aux limites: $U_1=V_1=U_2=V_2=0$.

Après avoir entré les conditions aux limites:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -1.35 & 0.3536 & 1 & 0 & -0.3536 & -0.3536 \\ -0.3536 & -0.3536 & 0 & 0 & -0.3536 & -0.3536 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -0.3536 & -0.3536 & 0 & 0 & 0.3536 & 0.3536 \\ -0.3536 & -0.3536 & 0 & -1 & 0.3536 & 1.3536 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U1 \\ V1 \\ U2 \\ V2 \\ U3 \\ V3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Rx1 \\ Ry1 \\ Rx2 \\ Ry2 \\ P \\ -2P \end{bmatrix}$$

le système réduit peut s'écrire comme suit:

$$\begin{bmatrix} 0.3536 & 0.3536 \\ 0.3536 & 1.3536 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U3 \\ V3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ -2P \end{bmatrix}$$

Déterminant(K)= $0.3536\left(\frac{EA}{L}\right)^2$

$$\begin{bmatrix} U3 \\ V3 \end{bmatrix} = \frac{L}{EA} \begin{bmatrix} 0.3536 & -0.3536 \\ -0.3536 & 0.3536 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ -2P \end{bmatrix} = \frac{PL}{EA} \begin{bmatrix} 5.828 \\ -3 \end{bmatrix}$$

-2. Calcule des réactions des appuis:

$$\begin{bmatrix} Rx1 \\ Ry1 \\ Rx2 \\ Ry2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3536 & 0.3536 \\ 0.3536 & -0.3536 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U3 \\ V3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P \\ -P \\ 0 \\ 3P \end{bmatrix}$$

-3. Calcul des contraintes:

$\sigma = \frac{N}{A}$: N est l'effort normal

Elément I

$$N_1 = \frac{EA}{L} [\cos q \quad \sin q] \begin{bmatrix} u_2 - u_1 \\ v_2 - v_1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{EA}{L} [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \end{bmatrix}$$

$$= 0 \Rightarrow s = 0$$

Elément II:

$$N_2 = \frac{EA}{L} [\cos q \quad \sin q] \begin{bmatrix} u_3 - u_2 \\ v_3 - v_2 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 5.828 - 0 \\ -3 - 0 \end{bmatrix} \frac{PL}{EA} = -3P \Rightarrow s = \frac{-3P}{A}$$

Elément III:

$$N_3 = \frac{EA}{L} [\cos q \quad \sin q] \begin{Bmatrix} u_3 - u_1 \\ v_3 - v_1 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -3 & -0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 5.828 \\ -3-0 \end{Bmatrix} \frac{PL}{EA} = -3P \Rightarrow S = \frac{-1.414P}{A}$$

III-7-2 Exercices 2:

On se propose de définir la relation Force Déplacement pour la structure en treillis représentée ci-dessous (Fig. I-3).

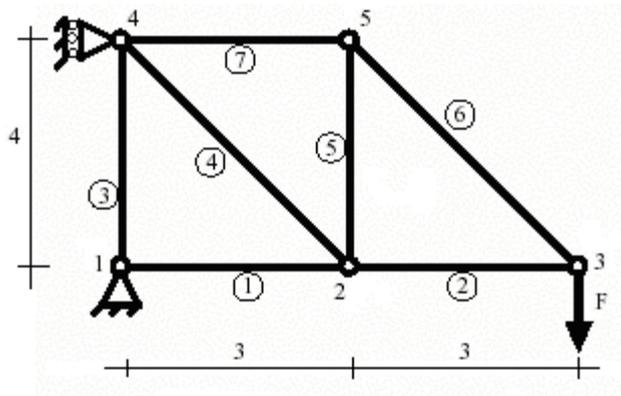


Fig. III-4 : Charpente plane à 7 barres et 5 nœuds

Le tableau suivant résume les caractéristiques géométriques de la structure:

Elément	Nœuds	Longueur	angle	c	s	c ²	s ²	cs
I	1-2	3	0	1	0	1	0	0
II	2-3	3	0	1	0	1	0	0
III	1-4	4	90°	0	1	0	1	0
IV	2-4	5	126.87°	-0.6	0.8	0.36	0.64	-0.48
V	2-5	4	90°	0	1	0	1	0
VI	3-5	5	126.87°	-0.6	0.8	0.36	0.64	-0.48
VII	4-5	3	0	1	0	1	0	0

On établit la matrice de rigidité de chaque barre :

Barre (1): Barre (1,2): $L_{1,2} = 3m \quad q = 0 \quad c = 1 \quad s = 0$

$$\begin{Bmatrix} X_1^1 \\ Y_1^1 \\ X_2^1 \\ Y_2^1 \end{Bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0.33 & 0 & -0.33 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.33 & 0 & 0.33 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

Barre (2): Barre (2,3): $L_{2,3} = 3m$ $q = 0$ $c = 1$ $s = 0$

$$\begin{Bmatrix} X_2^2 \\ Y_2^2 \\ X_3^2 \\ Y_3^2 \end{Bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0.33 & 0 & -0.33 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.33 & 0 & 0.33 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

Barre (3): Barre (1,4): $L_{1,4} = 4m$ $q = 90^\circ$ $c = 0$ $s = 1$

$$\begin{Bmatrix} X_1^3 \\ Y_1^3 \\ X_4^3 \\ Y_4^3 \end{Bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 & -0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.25 & 0 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

Barre (4): Barre (2,4): $L_{2,4} = 5m$ $q = 126.87^\circ$ $c = -0.6$ $s = 0.8$

$$\begin{Bmatrix} X_2^4 \\ Y_2^4 \\ X_4^4 \\ Y_4^4 \end{Bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0.072 & -0.096 & -0.072 & 0.096 \\ -0.096 & 0.128 & 0.096 & -0.128 \\ -0.072 & 0.096 & 0.072 & -0.096 \\ 0.096 & -0.128 & -0.096 & 0.128 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

Barre (5): Barre (2,5): $L_{2,5} = 4m$ $q = 90^\circ$ $c = 0$ $s = 1$

$$\begin{Bmatrix} X_2^5 \\ Y_2^5 \\ X_5^5 \\ Y_5^5 \end{Bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 & -0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.25 & 0 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix}$$

Barre (6): Barre (3,5): $L_{3,5} = 5m$ $q = 126.87^\circ$ $c = -0.6$ $s = 0.8$

$$\begin{Bmatrix} X_3^6 \\ Y_3^6 \\ X_5^6 \\ Y_5^6 \end{Bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0.072 & -0.096 & -0.072 & 0.096 \\ -0.096 & 0.128 & 0.096 & -0.128 \\ -0.072 & 0.096 & 0.072 & -0.096 \\ 0.096 & -0.128 & -0.096 & 0.128 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix}$$

Barre (7): Barre (4,5): $L_{4,5} = 3m$ $q = 0$ $c = 1$ $s = 0$

$$\begin{Bmatrix} X_4^7 \\ Y_4^7 \\ X_5^7 \\ Y_5^7 \end{Bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0.33 & 0 & -0.33 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.33 & 0 & 0.33 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix}$$

Pour obtenir la matrice de rigidité globale de la structure, on doit faire un assemblage des matrices de rigidité élémentaires. Cet assemblage se fait de la manière qu'en chaque nœud i , les forces X_i et Y_i sont calculées comme suit :

On peut ainsi écrire la relation globale de la structure : $\{P\} = [K]\{u\}$

$$\begin{Bmatrix} Rx_1 \\ Ry_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -F \\ Rx_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0.33 & 0 & -0.33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.25 & 0 & 0 \\ 0.33 & 0.732 & 0 & -0.96 & -0.33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.096 & 0.378 & 0 & 0 & 0.096 & -0.128 & 0 & -0.25 \\ 0 & 0 & -0.33 & 0 & 0.405 & -0.096 & 0 & 0 & -0.072 & 0.096 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.096 & 0.128 & 0 & 0 & 0.096 & -0.128 \\ 0 & 0 & -0.072 & 0.096 & 0 & 0 & 0.405 & -0.096 & -0.33 & 0 \\ 0 & -0.25 & 0.096 & -0.128 & 0 & 0 & -0.096 & 0.378 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.072 & 0.096 & -0.33 & 0 & 0.405 & -0.096 \\ 0 & 0 & 0 & -0.25 & -0.072 & 0.096 & 0 & 0 & 0.072 & 0.154 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix}$$

Les conditions aux limites :

On a $u_1 = v_1 = u_4 = 0$

On peut donc éliminer les lignes n° 1, 2 et 7 appartenant au vecteur $\{u\}$. On peut de même éliminer les colonnes et les lignes n° 1, 2 et 7 appartenant à la matrice de rigidité globale $\{K\}$.

Au nœud 1, les forces sont R_{x1} et R_{y1} .

Au nœud 4, les forces R_{x4} suivant x.

Au nœud 3, les forces $F_y = -F$.

Le système réduit s'écrit:

$$\begin{bmatrix} 0 & -0.096 & -0.33 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.096 & 0.378 & 0 & 0 & -0.125 & 0 & -0.25 \\ -0.33 & 0 & 0.405 & -0.096 & 0 & -0.072 & 0.096 \\ 0 & 0 & -0.096 & 0.128 & 0 & 0.096 & -0.128 \\ 0.096 & -0.128 & 0 & 0 & -0.378 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.072 & 0.096 & 0 & 0.405 & -0.096 \\ 0 & -0.25 & -0.072 & 0.096 & 0 & 0.072 & 0.154 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U2 \\ V2 \\ U3 \\ V3 \\ V4 \\ U5 \\ V5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Après résolution du système, le vecteur de déplacement est obtenu:

$$\begin{bmatrix} U2 \\ V2 \\ U3 \\ V3 \\ V4 \\ U4 \\ V4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8033 \\ 5.0057 \\ -1.4562 \\ -2.5881 \\ -1.4911 \\ 2.2523 \\ 8.0057 \end{bmatrix}$$

III-7-3 Exercice 3 :

Pour le système de barres articulées de la figure ci-dessous déterminer :

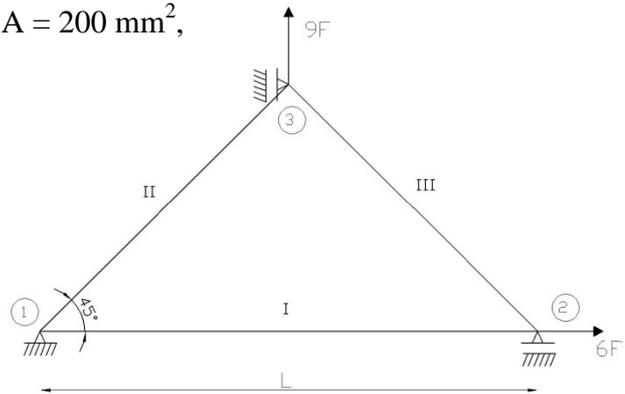
1. les déplacements nodaux;
2. les efforts et les contraintes dans chaque barre.

On considère connues E, F, l et A.

Application numérique : E = $2 \cdot 10^5$ MPa, A = 200 mm²,

l = 1 m et F = 10 kN.

FigIII. 5



Solution:

I- Calcul des déplacements:

- Premier pas : numérotation des nœuds et des éléments
- Deuxième pas : application des forces nodales et des déplacements nodaux.
- Troisième pas : complètement du tableau

Barre	Nœuds	q_e [°]	$\cos q_e$	$\sin q_e$	c^2	s^2	cs	l_e	EA_e
I	1-2	0	1	0	1	0	0	l	EA
II	1-3	45	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$l \frac{\sqrt{2}}{2}$	EA
III	2-3	135	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$l \frac{\sqrt{2}}{2}$	EA

- Quatrième pas : écriture de la matrice de rigidité pour chaque élément de barre séparément

$$[K^1] = \frac{EA}{l} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad [K^2] = \frac{\sqrt{2} EA}{l} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix};$$

$$[K^3] = \frac{\sqrt{2} EA}{l} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- Cinquième pas : Emplacement des trois matrices dans une matrice globale [K] (6 lignes x 6 colonnes).

$$[K^1] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{1} & 0 & -\frac{EA}{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{1} & 0 & \frac{EA}{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K^2] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{1} & \frac{EA}{1} & 0 & 0 & -\frac{EA}{1} & -\frac{EA}{1} \\ \frac{EA}{1} & \frac{EA}{1} & 0 & 0 & -\frac{EA}{1} & -\frac{EA}{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{1} & -\frac{EA}{1} & 0 & 0 & \frac{EA}{1} & \frac{EA}{1} \\ -\frac{EA}{1} & -\frac{EA}{1} & 0 & 0 & \frac{EA}{1} & \frac{EA}{1} \end{bmatrix}$$

$$[K^3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \\ 0 & 0 & \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ 0 & 0 & \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ 0 & 0 & \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ 0 & 0 & \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix}$$

- Sixième pas : Assemblage des matrices de rigidité $[K^s]$ dans la matrice globale de rigidité

$$[K^s] = \begin{bmatrix} \frac{2EA}{l} & \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \\ \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ \frac{EA}{l} & 0 & \frac{2EA}{l} & -\frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & \frac{2EA}{l} & 0 \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & \frac{2EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{2EA}{l} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{EA\sqrt{2}}{l} \begin{bmatrix} \sqrt{2} + 1 & 1 & -\sqrt{2} & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} + 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- Septième pas : écriture de la relation fondamentale de la MEF, $\{F\} = [K] \cdot \{u\}$ et détermination des déplacements nodaux et des forces nodales :

$$\begin{Bmatrix} R_{x1} \\ R_{y1} \\ 6F \\ R_{y2} \\ R_{x3} \\ 9F \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \frac{EA\sqrt{2}}{l} \begin{bmatrix} \sqrt{2} + 1 & 1 & -\sqrt{2} & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} + 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \end{Bmatrix}$$

Les conditions aux limites sont: $U_1=V_1=V_2=U_3=0$

L'application de ces conditions aux limites se fait par suppressions des lignes et des colonnes correspondantes à ces déplacements nuls.

Le système réduit:

$$\frac{\sqrt{2}EA}{2l} \begin{bmatrix} \sqrt{2}+1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6F \\ 9F \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow U_2 = 1.1082 \frac{Fl}{EA}; \quad V_3 = 5.8099 \frac{Fl}{EA}$$

$$\Rightarrow U_2 = 0.277mm; \quad V_3 = 1.4525mm$$

En ce qui concerne les réactions des appuis, on prend comme équations les lignes 1, 2, 4 et 5. On aura dans ce cas :

$$\begin{Bmatrix} R_{x1} \\ R_{y1} \\ R_{y2} \\ R_{x3} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{\mathbf{1}} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_2 \\ W_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5F \\ -4F \\ -5F \\ -F \end{Bmatrix}.$$

L'allongement Δl pour un élément quelconque $i - j$ se calcule avec la formule :

$$Dl_{ij} = (U_j - U_i) \cos \alpha - (W_j - W_i) \sin \alpha$$

- Huitième pas : calcul des efforts dans chaque élément de barre.

Les efforts dans un élément de barre articulée $i - j$ se calculent avec la formule :

$$N_{ij}^e = \frac{EA^e}{\mathbf{1}^e} [c \quad s] \begin{Bmatrix} U_j - U_i \\ V_j - V_i \end{Bmatrix}_e$$

En appliquant l'expression mentionnée ci-dessus, on aura donc les efforts dans les barres 1-2, 1-3 et 2-3

$$N_{12}^1 = \frac{EA^e}{\mathbf{1}^e} [1 \quad 0] \begin{Bmatrix} 0.277 - 0 \\ 0 - 0_i \end{Bmatrix}_e = 11080N$$

$$N_{13}^2 = \frac{2EA^e}{\sqrt{2}\mathbf{1}^e} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 - 0 \\ 1.4525 - 0_i \end{Bmatrix}_e = 58100N$$

$$N_{23}^3 = \frac{2EA^e}{\sqrt{2}\mathbf{1}^e} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 - 0.277 \\ 1.4525 - 0_i \end{Bmatrix}_e = 69180N$$

2- Calcul des contraintes:

Les contraintes dans chaque élément de barre se calculent avec la formule :

$$s_{ij}^e = \frac{N_{ij}^e}{A_e}, \text{ donc :}$$

$$s_{12}^1 = \frac{N_{12}^1}{A_1} = \frac{11080}{200} = 55.4[MPa]$$

$$s_{13}^2 = \frac{N_{13}^2}{A_2} = \frac{58100}{200} = 255[MPa]$$

$$s_{23}^3 = \frac{N_{23}^3}{A_3} = \frac{69180}{200} = 345.9[MPa]$$

Chapitre IV : Élément poutre

IV.1 Définition:

Même si les poutres et les barres ont une morphologie géométrique similaire, en plus des forces axiales, les poutres supportent des moments de flexion et des forces de cisaillement. Les poutres sont généralement utilisées dans les ponts, les fondations, les structures de bâtiments, ... etc.

Étant donné que le moment fléchissant et les forces de cisaillement provoquent une rotation et une flèche dans une direction normale à l'axe de la poutre, les paramètres nodaux dans un élément de poutre 1–2 sont illustrés à la Figure IV.1.

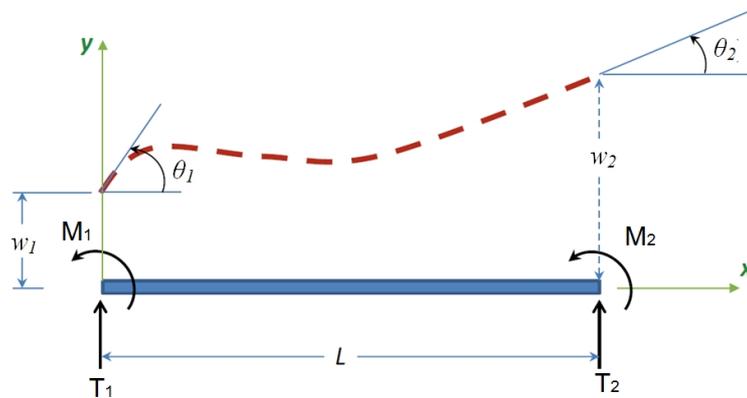


Fig. IV-1 Élément poutre

IV.2 Approximation du champs de déplacement:

Compte tenu du fait qu'un élément de poutre bidimensionnel (2D) a quatre degrés de liberté (w_1 , θ_1 , w_2 , θ_2), un polynôme approprié $u(x)$ pour la distribution des déplacements le long de l'axe de la poutre doit contenir quatre constantes inconnues. Par conséquent, la fonction de déplacement doit avoir la forme fonctionnelle suivante:

$$u(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad (4.1)$$

En utilisant la dernière équation, ainsi que la relation entre la flèche $w(x)$ et la rotation $\theta(x)$, les conditions aux limites:

$$w(0) = u_1 \quad (4.2)$$

$$\left. \frac{dw(x)}{dx} \right|_{x=0} = q_1 \quad (4.3)$$

$$u(L) = u_2 \quad (4.4)$$

$$\left. \frac{dw(x)}{dx} \right|_{x=L} = q_2 \quad (4.5)$$

donnent les équations suivantes:

$$a_0 = u_1 \quad (4.6)$$

$$a_1 = \theta_1 \quad (4.7)$$

$$a_3 L^3 + a_2 L^2 + a_1 L + a_0 = u_2 \quad (4.8)$$

$$3a_3 L^2 + 2a_2 L + a_1 = q_2 \quad (4.9)$$

Les équations ci-dessus peuvent être écrites en format matricielle suivante par rapport aux paramètres a_0, a_1, a_2, a_3 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

La solution de cette dernière équation donne:

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

Maintenant, on peut écrire le champs de déplacement $u(x)$ en fonction des déplacement nodaux:

$$\begin{aligned} w(x) = & x^3 \begin{bmatrix} \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} + x^2 \begin{bmatrix} -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \\ & + x \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$w(x) = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

Avec N_1, N_2, N_3 et N_4 sont les fonctions de forme:

$$N_1 = \frac{1}{L^3} (2x^3 - 3x^2L + L^3) \quad (4.14)$$

$$N_2 = \frac{1}{L^3} (x^3L - 2x^2L^2 + xL^3) \quad (4.15)$$

$$N_3 = \frac{1}{L^3} (-2x^3 + 3x^2L) \quad (4.16)$$

$$N_4 = \frac{1}{L^3} (x^3L - x^2L^2) \quad (4.17)$$

IV.3 Matrice élémentaire de la poutre:

Comme il est connu de la mécanique des solides, les efforts internes, c'est-à-dire les moments fléchissant $M(x)$ et les efforts tranchants $T(x)$ peuvent être écrits en fonction des déplacements $w(x)$:

$$T(x) = EI \frac{\partial^3 w(x)}{\partial x^3} \quad (4.18)$$

$$M(x) = EI \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} \quad (4.19)$$

Tenant en compte l'équation de déplacement $w(x)$, ces efforts internes peuvent être écrits:

$$T(x) = EI \frac{\partial^3}{\partial x^3} [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \left\{ \begin{array}{l} w_1 \\ \mathbf{q}_1 \\ w_2 \\ \mathbf{q}_2 \end{array} \right\} \quad (4.20)$$

$$M(x) = EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \left\{ \begin{array}{l} w_1 \\ \mathbf{q}_1 \\ w_2 \\ \mathbf{q}_2 \end{array} \right\} \quad (4.21)$$

En dérivant les fonctions de formes:

$$T(x) = \frac{EI}{L^3} [12 \ 6L \ -12 \ 6L] \left\{ \begin{array}{l} w_1 \\ \mathbf{q}_1 \\ w_2 \\ \mathbf{q}_2 \end{array} \right\} \quad (4.22)$$

$$M(x) = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12x - 6L & 6Lx - 4L^2 & -12x + 6L & 6Lx - 2L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \mathbf{q}_1 \\ w_2 \\ \mathbf{q}_2 \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

A partir de la figure **Fig. IV.1** les conditions aux limites élémentaires peuvent être écrites:

$$T(0) = T_1 \quad (4.24)$$

$$M(0) = M_1 \quad (4.25)$$

$$T(L) = T_2 \quad (4.26)$$

$$M(L) = M_2 \quad (4.27)$$

Combinant les équations

$$T_1 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \mathbf{q}_1 \\ w_2 \\ \mathbf{q}_2 \end{Bmatrix} \quad (4.28)$$

$$M_1 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \mathbf{q}_1 \\ w_2 \\ \mathbf{q}_2 \end{Bmatrix} \quad (4.29)$$

$$-T_2 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \mathbf{q}_1 \\ w_2 \\ \mathbf{q}_2 \end{Bmatrix} \quad (4.30)$$

$$-M_2 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \mathbf{q}_1 \\ w_2 \\ \mathbf{q}_2 \end{Bmatrix} \quad (4.31)$$

Ces quatre dernière équations peuvent être assemblées dans un système matriciel:

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ M_1 \\ T_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \mathbf{q}_1 \\ w_2 \\ \mathbf{q}_2 \end{Bmatrix} \quad (4.32)$$

Une fois les déplacements nodaux w_1 , θ_1 , u_2 et θ_2 sont connus, le champs de déplacement $w(x)$, des efforts tranchants $T(x)$ et des moments fléchissant $M(x)$ le long de la poutre peuvent être calculée à l'aide des équations (4.13), (4.22) et (4.23), respectivement.

Il est à noter que l'équation (4.32) correspond à un élément de poutre 2D soumis aux seules forces nodales. Dans le cas de poutres chargées par des charges réparties entre les nœuds, des forces nodales équivalentes doivent être dérivées pour simuler les effets des charges réparties. À cette fin, l'élément de poutre doit être supposé reposer sur des supports fixes aux deux extrémités, puis les charges nodales équivalentes simulant les effets de charge réparties doivent être calculées. Ces charges nodales équivalentes doivent être ajoutées aux extrémités de chaque élément en tant que charges externes. Le tableau 6.1 résume les charges nodales équivalentes pour les cas courants de charges réparties. Compte tenu des valeurs T_1, M_1, T_2, M_2 des forces nodales équivalentes ainsi que de la nomenclature de la Figure 4.2, l'élément Equation (4.32) peut maintenant s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} -f_1 \\ m_1 \\ -f_2 \\ -m_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} T_1 \\ M_1 \\ T_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (4.33)$$

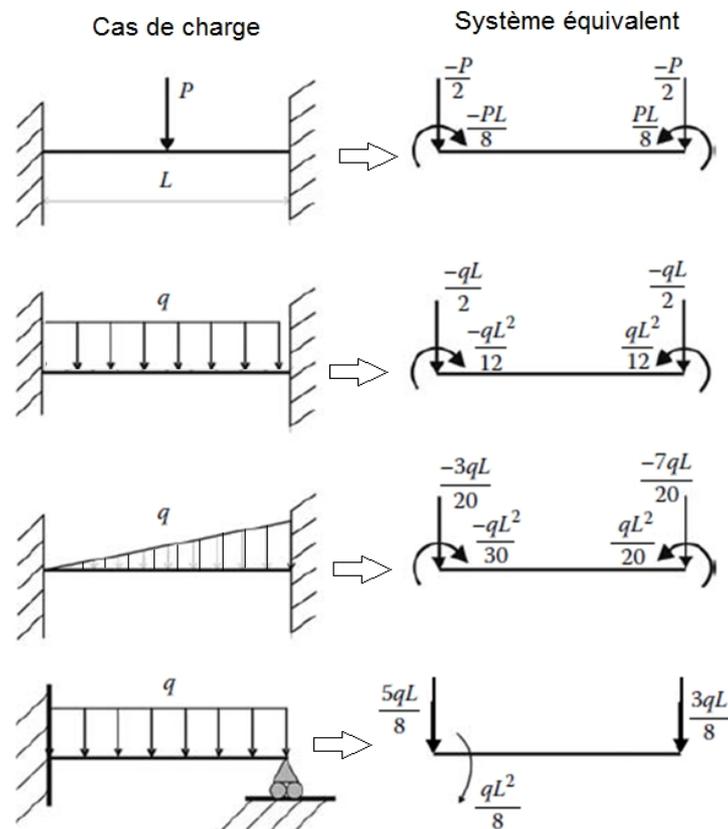


Fig. IV-2 Charges équivalentes pour les charges réparties

IV.4 Exercices:

IV.4.1 Exercice 01:

Déterminer les déplacements nodaux ainsi que les efforts internes T et M dans la poutre indiquées sur la figure **Fig. IV-3**.

Données: $L=8\text{m}$, $q=3\text{KN/m}$, $E=200\text{GPa}$, $I=125\times 10^{-6}\text{m}^4$

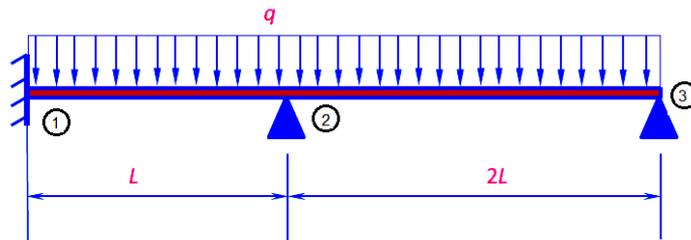


Fig. IV-3

Solution:

a) Vecteurs des forces nodaux:

Puisque on a une poutre soumise uniquement à des forces répartie, la première étape est la transformation de la charge uniforme "q" en forces nodales équivalentes. En tenant compte du tableau 4.2, la simulation suivante de la structure donnée doit être utilisée :

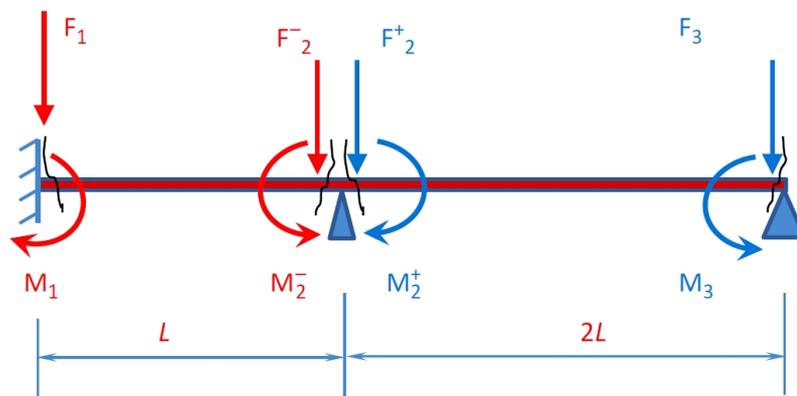


Fig. IV-4 Forces nodaux équivalentes

où les charges équivalentes agissant sur les nœuds de chaque élément sont données par les formules suivantes :

$$F_1 = qL/2 = 12\ 000\ \text{N}, \quad M_1 = qL^2/12 = 16\ 000\ \text{N.m}$$

$$F_2^- = qL/2 = 12\ 000\ \text{N}, \quad M_2^- = qL^2/12 = 16\ 000\ \text{N.m}$$

$$F_2^+ = q(2L)/2 = 24\ 000\ \text{N}, \quad M_2^+ = q(2L)^2/12 = 64\ 000\ \text{N.m}$$

$$F_3=q(2L)/2=24\,000\text{ N}, \quad M_3=q(2L)^2/12=64\,000\text{ N.m}$$

b) Equations élémentaire

Elément 1, nœud 1-2

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ m_1 \\ f_2 \\ m_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vartheta_1 \\ u_2 \\ \vartheta_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -qL/2 \\ -qL^2/12 \\ -qL/2 \\ +qL^2/12 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ m_1 \\ f_2 \\ m_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 585,937.5 & 2,343,750 & -585,937.5 & 2,343,750 \\ 2,343,750 & 1.25 \times 10^7 & -2,343,750 & 6,250,000 \\ -585,937.5 & -2,343,750 & 585,937.5 & -2,343,750 \\ 2,343,750 & 6,250,000 & -2,343,750 & 1.25 \times 10^7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vartheta_1 \\ u_2 \\ \vartheta_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -12,000 \\ -16,000 \\ -12,000 \\ 16,000 \end{Bmatrix}$$

Elément 2: nœuds 2-3

$$\begin{Bmatrix} f_2 \\ m_2 \\ f_3 \\ m_3 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{(2L)^3} \begin{bmatrix} 12 & 6(2L) & -12 & 6(2L) \\ 6(2L) & 4(2L)^2 & -6(2L) & 2(2L)^2 \\ -12 & -6(2L) & 12 & -6(2L) \\ 6(2L) & 2(2L)^2 & -6(2L) & 4(2L)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ \vartheta_2 \\ u_3 \\ \vartheta_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -q(2L)/2 \\ -q(2L)^2/12 \\ -q(2L)/2 \\ +q(2L)^2/12 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_2 \\ m_2 \\ f_3 \\ m_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 585,937.5 & 4,687,500 & -585,937.5 & 4,687,500 \\ 4,687,500 & 5 \times 10^7 & -4,687,500 & 2.5 \times 10^7 \\ -585,937.5 & -4,687,500 & 585,937.5 & -4,687,500 \\ 4,687,200 & 2.5 \times 10^7 & -4,687,500 & 5 \times 10^7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ \vartheta_2 \\ u_3 \\ \vartheta_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -24,000 \\ -64,000 \\ -24,000 \\ 64,000 \end{Bmatrix}$$

c) Agrandissement des équations des éléments en coordonnées globales

Les équations des éléments locaux ci-dessus doivent maintenant être étendues aux degrés de liberté de l'ensemble de la structure :

Elément 1, nœud 1-2

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ m_1 \\ f_2 \\ m_2 \\ f_3 \\ m_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 585,937.5 & 2,343,750 & -585,937.5 & 2,343,750 & 0 & 0 \\ 2,343,750 & 1.25 \times 10^7 & -2,343,750 & 6,250,000 & 0 & 0 \\ -585,937.5 & -2,343,750 & 585,937.5 & -2,343,750 & 0 & 0 \\ 2,343,750 & 6,250,000 & -2,343,750 & 1.25 \times 10^7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vartheta_1 \\ u_2 \\ \vartheta_2 \\ u_3 \\ \vartheta_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -12,000 \\ -16,000 \\ -12,000 \\ 16,000 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Elément 2 nœuds 2-3

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ m_1 \\ f_2 \\ m_2 \\ f_3 \\ m_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 585,937.5 & 4,687,500 & -585,937.5 & 4,687,500 \\ 0 & 0 & 4,687,500 & 5 \times 10^7 & -4,687,500 & 2.5 \times 10^7 \\ 0 & 0 & -585,937.5 & -4,687,500 & 585,937.5 & -4,687,500 \\ 0 & 0 & 4,687,200 & 2.5 \times 10^7 & -4,687,500 & 5 \times 10^7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vartheta_1 \\ u_2 \\ \vartheta_2 \\ u_3 \\ \vartheta_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -24,000 \\ -64,000 \\ -24,000 \\ 64,000 \end{Bmatrix}$$

(d) *Équation structurelle en coordonnées globales*

L'équation structurelle en coordonnées globales peut être obtenue par superposition des équations des éléments développés ci-dessus. Par conséquent, en ajoutant les équations des éléments ci-dessus, l'équation globale suivante peut être obtenue :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \\ F_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 585,937.5 & 2,343,750 & -585,937.5 & 2,343,750 & 0 & 0 \\ 2,343,750 & 1.25 \times 10^7 & -2,343,750 & 6,250,000 & 0 & 0 \\ -585,937.5 & -2,343,750 & 1,171,875 & 2,343,750 & -585,937.5 & 4,687,500 \\ 2,343,750 & 6,250,000 & -7,031,250 & 6.25 \times 10^7 & -4,687,500 & 2.5 \times 10^7 \\ 0 & 0 & -585,937.5 & -4,687,500 & 585,937.5 & -4,687,500 \\ 0 & 0 & 4,687,200 & 2.5 \times 10^7 & -4,687,500 & 5 \times 10^7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vartheta_1 \\ u_2 \\ \vartheta_2 \\ u_3 \\ \vartheta_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -12,000 \\ -160,000 \\ -36,000 \\ -48,000 \\ -24,000 \\ 64,000 \end{Bmatrix}$$

L'équation ci-dessus peut être écrite sous la forme matricielle suivante :

$$\{R\} = [K]\{d\} - \{f\}$$

Ou
$$[[K] \quad [-I]] \begin{Bmatrix} \{d\} \\ \{R\} \end{Bmatrix} = \{f\} \quad (01)$$

e) *Les conditions aux limites:*

Pour la dérivation du système algébrique fournissant le champ de déplacement nodal, les conditions aux limites du problème doivent être incorporées à l'équation structurelle ci-dessus. Compte tenu des types d'appuis ainsi que des forces nodales, les six conditions aux limites suivantes peuvent être spécifiées :

(a) *Conditions aux limites pour les déplacements nodaux*

- (1) $u_1 = 0$
- (2) $\vartheta_1 = 0$
- (3) $u_2 = 0$
- (4) $u_3 = 0$

(b) *Conditions aux limites pour les forces nodales*

- (5) $M_2 = 0$
- (6) $M_3 = 0$

Les conditions aux limites ci-dessus peuvent maintenant être exprimées dans un format matriciel :

(a) Conditions aux limites pour les déplacements nodaux

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ou dans un format abrégé :

$$[BCd]\{d\} = \{DO\}$$

$$[[BCd] \ [O]] \begin{Bmatrix} \{d\} \\ \{R\} \end{Bmatrix} = \{DO\} \quad (02)$$

(b) Conditions aux limites pour les forces nodales

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \\ F_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ou dans un format abrégé :

$$[BCR]\{R\} = \{RO\}$$

Ou

$$[[O] \ [BCR]] \begin{Bmatrix} \{d\} \\ \{R\} \end{Bmatrix} = \{RO\}$$

On somme les deux équations:

$$[[BCd] \ [BCR]] \begin{Bmatrix} \{d\} \\ \{R\} \end{Bmatrix} = \{DO + RO\}$$

(f) Système algébrique pour la dérivation des déplacements nodaux

En combinant l'équation structurelle dérivée (01) avec les conditions aux limites ci-dessus (équation 02), le système algébrique suivant peut être obtenu :

$$\begin{bmatrix} [K] & [-I] \\ [BCd] & [BCR] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{d\} \\ \{R\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f\} \\ \{DO+RO\} \end{Bmatrix}$$

Ou en format abrégé: $[A] \{X\} = \{B\}$

Avec:

$$\{X\} = \{u_1, \vartheta_1, u_2, \vartheta_2, u_3, \vartheta_3, F_1, M_1, F_2, M_2, F_3, M_3\}^T$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 585,937 & 2.34375 \times 10^6 & -585,937 & 2.34375 \times 10^6 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.34375 \times 10^6 & 1.25 \times 10^7 & -2.34375 \times 10^6 & 6.25 \times 10^6 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -585,937 & -2.34375 \times 10^6 & 585,937 & 2.34375 \times 10^6 & -585,937 & 4.6875 \times 10^6 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2.34375 \times 10^6 & 6.25 \times 10^6 & 2.34375 \times 10^6 & 6.25 \times 10^7 & -4.6875 \times 10^6 & 2.5 \times 10^7 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -585,937 & -4.6875 \times 10^6 & 585,937 & -4.6875 \times 10^6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4.6875 \times 10^6 & 2.5 \times 10^7 & -4.6875 \times 10^6 & 5 \times 10^7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{B\} = \begin{Bmatrix} -12,000 \\ -16,000 \\ -36,000 \\ -48,000 \\ -24,000 \\ 64,000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La solution du système ci-dessus donne les déplacements nodaux et les réactions sur les appuis de la poutre :

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vartheta_1 \\ u_2 \\ \vartheta_2 \\ u_3 \\ \vartheta_3 \\ F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \\ F_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0016 \\ 0 \\ 0.00208 \\ 8250 \\ 6000 \\ 42,000 \\ 0 \\ 21,750 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(g) Déplacements, forces de cisaillement et moments de flexion

Connaissant les déplacements nodaux $\{u1, \vartheta1, u2, \vartheta2, u3, \vartheta3\}T$, les déplacements $u(x)$, les forces de cisaillement $T(x)$ et les moments fléchissant $M(x)$ pour tout point x de la poutre peuvent être obtenus :

Elément1: nœuds 1-2

Dérivation des déplacements

$$N1 = 0.001953125(512 - 24x^2 + 2x^3)$$

$$N2 = 0.001953125(512x - 128x^2 + 8x^3)$$

$$N3 = 0.001953125(24x^2 - 2x^3)$$

$$N4 = 0.001953125(-64x^2 + 8x^3)$$

$$u(x) = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0016 \end{Bmatrix}$$

$$= -0.0000031250000000000001(-64x^2 + 8x^3)$$

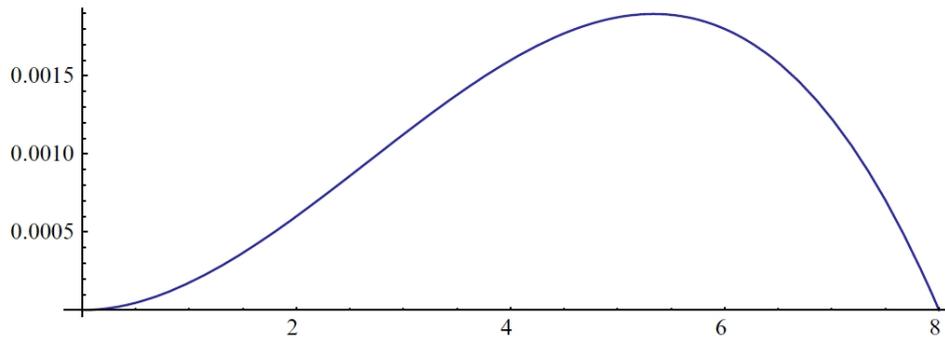


Fig. IV-5 Représentation graphique du déplacement $u(x)$ sur l'élément 1

Dérivation des efforts tranchants

$$f(x) = \frac{EI}{L^3} \cdot [12 \ 6L \ -12 \ 6L] \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0016 \end{Bmatrix} = -3750$$

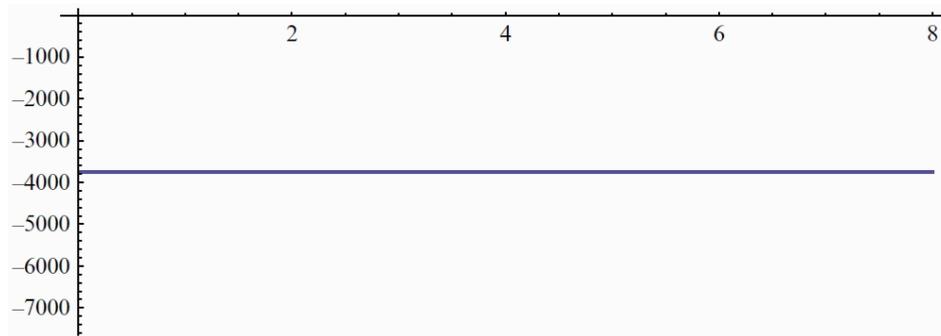


Fig.IV-6 Diagramme de T(x) sur l'élément 1

Dérivation des moments fléchissant

$$m(x) = \frac{EI}{L^3} \cdot [12x - 6L \quad 6Lx - 4L^2 \quad -12x + 6L \quad 6Lx - 2L^2] \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0016 \end{Bmatrix}$$

$$= -78.12500000000003(-128 + 48x)$$

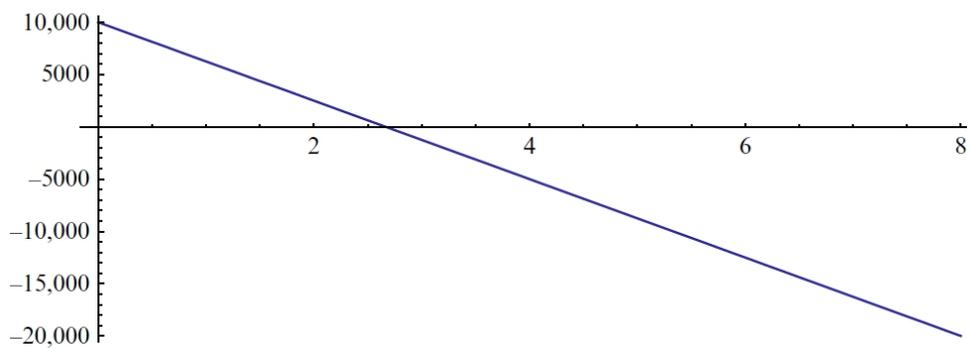


Fig.IV-7 Diagramme du moment fléchissant M(x)

Elément 2: nœuds 2-3

Dérivation des déplacements

$$N1 = 0.000244140625(4096 - 48x^2 + 2x^3)$$

$$N2 = 0.000244140625(4096x - 512x^2 + 16x^3)$$

$$N3 = 0.000244140625(48x^2 - 2x^3)$$

$$N4 = 0.000244140625(-256x^2 + 16x^3)$$

$$u(x) = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.0016 \\ 0 \\ 0.00208 \end{Bmatrix}$$

$$= -3.906250000000001 \times 10^{-7} (4096x - 512x^2 + 16x^3) + 5.078124999999989 \times 10^{-7} (-256x^2 + 16x^3)$$

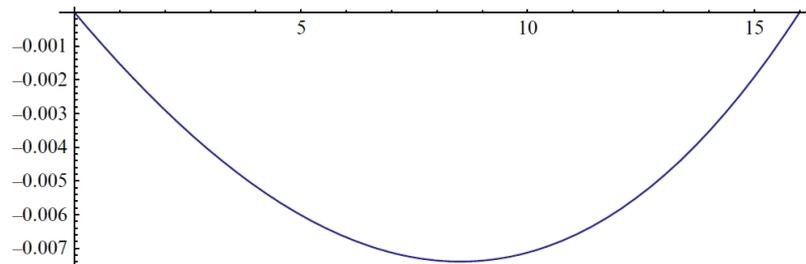


Fig.IV-8 Représentation graphique de déplacement $u(x)$ pour l'élément 2

Dérivation des efforts tranchants

$$f(x) = \frac{EI}{L^3} \cdot [12 \ 6(2L) \ -12 \ 6(2L)] \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.0016 \\ 0 \\ 0.00208 \end{Bmatrix} = 2250$$

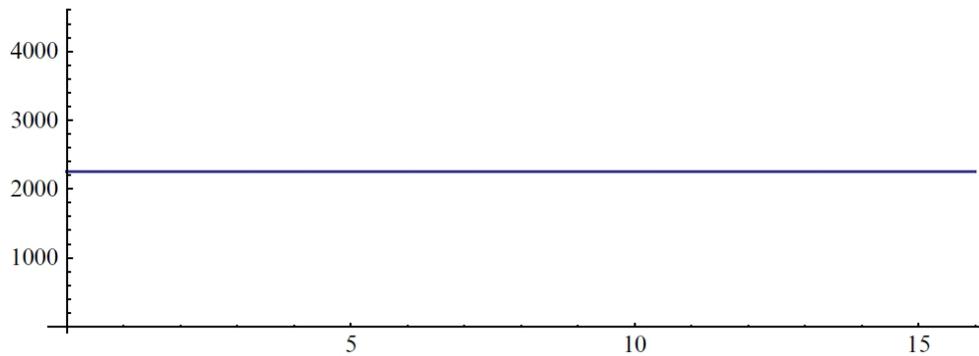


Fig.IV-9 Diagramme de l'effort tranchant $T(x)$ sur l'élément 2

Dérivation des moments fléchissant

$$m(x) = \frac{EI}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} 12x - 6(2L) & 6(2L)x - 4(2L)^2 & -12x + 6(2L) & 6(2L)x - 2(2L)^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.0016 \\ 0 \\ 0.00208 \end{Bmatrix}$$

$$= 48,828.125(-0.00160000000000000005(-1024 + 96x) + 0.0020799999999999955(-512 + 96x))$$

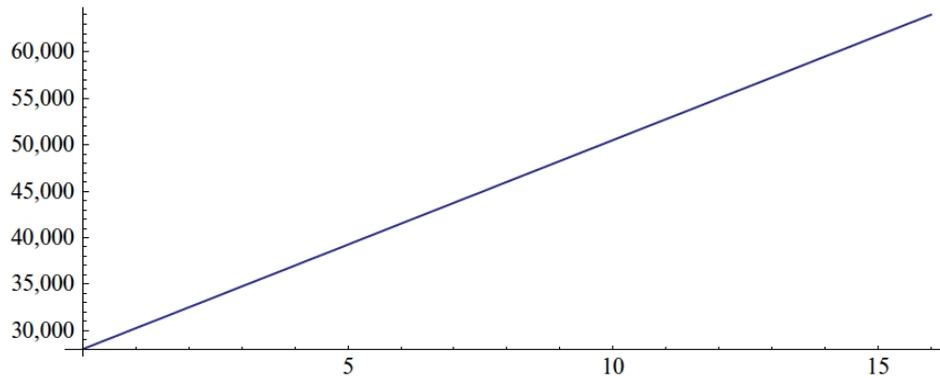


Fig.IV-10 Diagramme du moment fléchissant $M(x)$ sur l'élément 2

IV.4.1 Exercice 02:

Pour la poutre de section circulaire de diamètre d (**Fig. IV-11**), calculez le déplacement transversal du nœud 2 ainsi que les réactions V_1 , M_1 et V_3 . Tracez les diagrammes T et M et déterminez la contrainte maximale supportée par la poutre. Application numérique : $L = 0,8$ m, $E = 21 \cdot 10^4$ MPa, $F = 4$ kN, $d = 60$ mm.

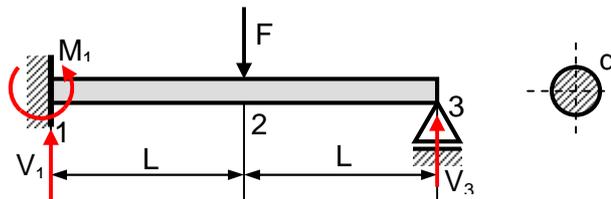


Fig.IV-11

On part de l'expression de la matrice de rigidité pour un élément de poutre dans un système local d'axes de coordonnées :

$$[K^e] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

On particularise cette expression pour chacune des deux régions 1-2 respectivement 2-3, en négligeant les lignes et les colonnes 1 et 4, à cause de l'absence des forces axiales :

$$[K^I] = \frac{EI}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}_I = \frac{EI}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 12 & -6L & 0 & 0 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_I$$

$$[K^{II}] = \frac{EI}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}_{II} = \frac{EI}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 6L & -12 & 6L \\ 0 & 0 & 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}_{II}$$

$$\text{Donc, } \begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2^I \\ M_2^I \end{Bmatrix}_I = [K^I] \cdot \begin{Bmatrix} W_1 \\ j_1 \\ W_2^I \\ j_2^I \end{Bmatrix}_I \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} V_2^{II} \\ M_2^{II} \\ V_3 \\ M_3 \end{Bmatrix}_{II} = [K^{II}] \cdot \begin{Bmatrix} W_2^{II} \\ j_2^{II} \\ W_3 \\ j_3 \end{Bmatrix}_{II}$$

En assemblant les deux matrices de rigidité, on aura :

$$[K] = [K^I] + [K^{II}] = \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

En écrivant l'équation fondamentale de la MEF, on aura :

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2^I \\ M_2^I \\ V_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} W_1 \\ j_1 \\ W_2 \\ j_2 \\ W_3 \\ j_3 \end{Bmatrix} \text{ et,}$$

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2^{II} \\ M_2^{II} \\ V_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 6L & -12 & 6L \\ 0 & 0 & 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} W_1 \\ j_1 \\ W_2 \\ j_2 \\ W_3 \\ j_3 \end{Bmatrix}$$

Par l'addition des deux relations, il en résulte :

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 = -F \\ M_2 = 0 \\ V_3 \\ M_3 = 0 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} W_1 = 0 \\ j_1 = 0 \\ W_2 \\ j_2 \\ W_3 = 0 \\ j_3 \end{Bmatrix}$$

En choisissant les lignes et les colonnes 3, 4 et 6, on obtiendra :

$$\begin{Bmatrix} -F \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} 24 & 0 & 6L \\ 0 & 8L^2 & 2L^2 \\ 6L & 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} W_2 \\ j_2 \\ j_3 \end{Bmatrix},$$

$$\text{d'où il en résulte : } W_2 = -\frac{7 FL^3}{96 EI}, \varphi_2 = -\frac{3 FL^2}{96 EI} \text{ et } \varphi_2 = \frac{12 FL^2}{96 EI}.$$

En remplaçant ces trois valeurs dans le système matriciel, écrit pour les lignes et les colonnes 1, 2 et 5, on obtiendra :

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} -12 & 6L & 0 \\ -6L & 2L^2 & 0 \\ -12 & -6L & -6L \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -\frac{7 FL^3}{96 EI} \\ \frac{3 FL^2}{96 EI} \\ \frac{12 FL^2}{96 EI} \end{Bmatrix}, \text{ d'où il en résulte : } V_1 = \frac{11}{16} F,$$

$$V_3 = \frac{5}{16} F \text{ et } M_1 = -\frac{3}{8} FL.$$

Les diagrammes T et M sont présentés ci-dessous :

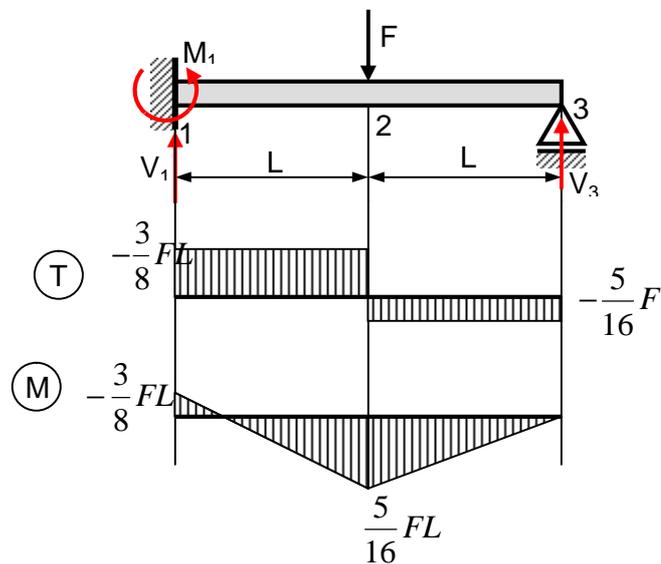


Fig.IV-12 Diagrammes des efforts internes

En ce qui concerne la contrainte maximale, en appliquant la relation de Navier, on obtiendra :

$$s_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_y} = \frac{3 FL}{8 \cdot \frac{p d^3}{32}} = \frac{3 \cdot 4000 \cdot 800 \cdot 32}{8 \cdot p \cdot 60^3} = 56,58 \text{ MPa}.$$

Chapitre 5 : Formulation variationnelle du problème d'élasticité

V-1 Introduction:

L'utilisation classique du mot "formulation variationnelle" fait référence à la construction de la fonctionnelle ou au principes variationnelle qui sont équivalents aux équations gouvernantes du problème.

Tandis que l'utilisation moderne de ce mot représente la formulation dans laquelle les équations gouvernantes sont transformées à une forme intégrale pondérée équivalente et qui n'est pas forcément équivalente au principe variationnelle.

Dans les chapitres 3 et 4, nous avons utilisé des méthodes bien connues d'analyse structurelle pour développer les matrices de rigidité des éléments de barre et de poutre. La raison en est que ces éléments sont unidimensionnels et que les solutions exactes des équations différentielles régissant leurs comportements sont bien connues. Pour d'autres problèmes structurels en deux et trois dimensions, de telles approches directes sont inexistantes pour la raison évidente qu'il n'est pas possible de trouver des solutions analytiques aux équations différentielles régissant leur comportement, sauf dans le cas de géométries très simples. L'alternative est de remplacer les équations différentielles par des équations algébriques approchées. Ceci est réalisé en utilisant des méthodes résiduelles pondérées.

V-2 Formulation générale:

Soit un problème physique (qu'il soit structurel ou non) dont le comportement est régi par un ensemble d'équations différentielles :

$$B(\{u\}) = 0 \text{ dans } \Omega$$

où

$B(\)$ représente un opérateur différentiel linéaire

$\{u\}$ est la fonction inconnue

Ω est le domaine géométrique

Puisque la variable $\{u\}$ est inconnue, nous pouvons essayer de lui substituer une fonction d'essai ou approchée de notre choix, disons $\{\bar{u}\}$ donnée comme une fonction polynomiale :

c

où

les coefficients α_i sont des paramètres généraux

$P_i(\{x\})$ est une base polynomiale

La substitution de $\{\bar{u}\}$ à la place de $\{u\}$ ne satisfera en général pas à l'équation différentielle (6.1) et entraînera un résidu sur le domaine ; C'est,

$$\mathbb{B}(\{\bar{u}\}) \neq 0 \text{ dans } \Omega$$

L'essence des méthodes des résidus pondérés est de forcer le résidu à être nul dans une moyenne sur l'ensemble du domaine. Pour ce faire, on multiplie le résidu par une fonction de pondération et on force l'intégrale du résidu pondéré à s'annuler sur tout le domaine ; C'est,

$$\{W\} = \int_{\Omega} \psi \mathbb{B}(\{\bar{u}\}) d\Omega = 0$$

Il existe une variété de méthodes résiduelles telles que la méthode de collocation, la méthode des sous-domaines, la méthode des moindres carrés, la méthode des moments et la méthode de Galerkin. Ils diffèrent tous dans le choix de la fonction de pondération. La plus populaire est cependant la méthode de Galerkin, et c'est la seule décrite dans ce chapitre.

La « méthode des éléments finis » est un cas particulier basé sur la formulation de Galerkin avec une construction systématique de l'approximation par sous domaine « éléments finis ».

V-3 La méthode de Galerkin:

Dans la méthode de Galerkin, la fonction de pondération est simplement la variation de la fonction d'essai elle-même ; C'est,

$$\psi = \delta\{\bar{u}\} = \sum_{i=1}^n \delta\alpha_i P_i(\{x\})$$

En remplaçant ψ et $\{\bar{u}\}$, l'équation (6.4) devient

$$\begin{aligned} \{W\} &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \delta\alpha_i P_i(\{x\}) \mathbb{B} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i P_i(\{x\}) \right) d\Omega = 0 \\ &= \{\delta\alpha_i\}^T \int_{\Omega} P_i(\{x\}) \left(\mathbb{B} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i P_i(\{x\}) \right) \right) d\Omega = 0 \end{aligned}$$

Puisque la relation précédente doit être égale à zéro pour tout $\delta\alpha_i$ arbitraire, elle peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}
W_1 &= \int_{\Omega} P_1(\{x\}) \left(\mathbb{B} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i P_i(\{x\}) \right) \right) d\Omega = 0 \\
W_2 &= \int_{\Omega} P_2(\{x\}) \left(\mathbb{B} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i P_i(\{x\}) \right) \right) d\Omega = 0 \\
&\vdots \\
W_n &= \int_{\Omega} P_n(\{x\}) \left(\mathbb{B} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i P_i(\{x\}) \right) \right) d\Omega = 0
\end{aligned}$$

Le système d'équations (6.7) peut être résolu pour les coefficients inconnus α_i .

Exercice

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\mathbb{B}(u(x)) = \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + u(x) \text{ on } \Omega = [0, 1]$$

Avec les conditions aux limites suivantes:

$$u(x=0)=1; \quad u(x=1)=0$$

Solution:

Cette équation a la solution exacte :

$$u(x) = 1 - \frac{\sin(x)}{\sin(1)}$$

Résolvons l'équation différentielle en utilisant la méthode de Galerkin. On choisit la fonction d'approximation $u(x)$ sous la forme d'un polynôme :

$$\bar{u}(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$$

Pour s'assurer que la fonction d'essai $\bar{u}(x)$ se rapproche le mieux possible de la fonction exacte $u(x)$, nous devons nous assurer qu'elle est dérivable autant de fois que requis par l'opérateur différentiel et satisfait les conditions aux limites ; C'est,

$$\begin{aligned}
\bar{u}(x=0) = 1 &\Rightarrow \alpha_0 = 1 \\
\bar{u}(x=1) = 0 &\Rightarrow 1 + \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\
&\Rightarrow \alpha_1 = -(1 + \alpha_2)
\end{aligned}$$

La fonction d'essai devient donc

$$\bar{u}(x) = \alpha_2(x^2 - x) - x + 1$$

Il est deux fois dérivable et satisfait les conditions aux limites. En remplaçant $\bar{u}(x)$ dans l'équation (6.8), le résidu s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}\mathbb{R}(\bar{u}(x)) &= \frac{d^2\bar{u}(x)}{dx^2} + \bar{u}(x) \\ &= \alpha_2(x^2 - x + 2) - x\end{aligned}$$

La fonction de pondération correspondante est obtenue comme

$$\psi = \delta\bar{u}(x) = \delta\alpha_2(x^2 - x)$$

Intégrer le produit du résiduel pondéré sur le domaine donne

$$W = \int_0^{+1} \delta\alpha_2(x^2 - x) \times (\alpha_2(x^2 - x + 2) - x) dx = 0$$

Puisque $\delta\alpha_2 \neq 0$, il s'ensuit

$$W = \int_0^{+1} (x^2 - x) \times (\alpha_2(x^2 - x + 2) - x) dx = 0$$

L'évaluation de l'intégrale conduit à une équation algébrique de la forme

$$\frac{1}{12} - \frac{3}{10}\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{5}{18}$$

L'approximation finale s'écrit alors

$$\bar{u}(x) = \frac{5}{18}(x^2 - x) - x + 1$$

La figure 6.1 montre une comparaison graphique entre la solution exacte, l'équation (6.10), et la solution approchée, l'équation (6.19). Avec un seul paramètre α_2 , la solution approchée est très acceptable.

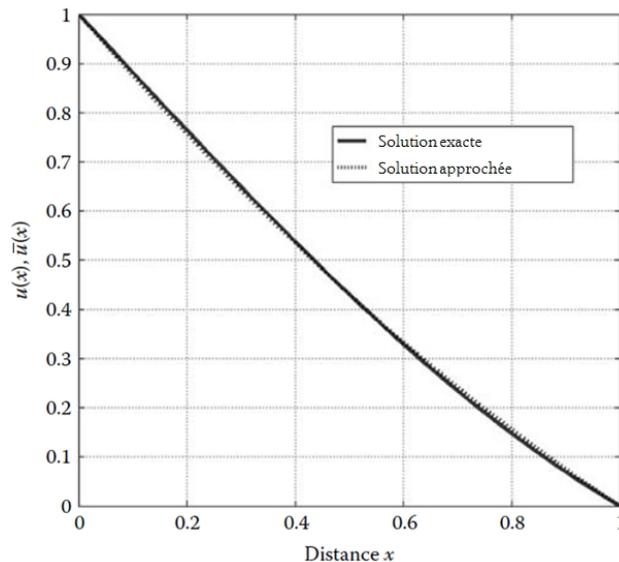


Fig. Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée

V-4 Formulation faible:

Étant donné l'équation différentielle suivante

$$\mathbb{B}(u(x)) = \frac{d^2u(x)}{dx^2} + u(x) + x = 0 \text{ on } \Omega = [0, 1]$$

Avec les conditions aux limites suivantes:

$$\begin{aligned} u(x=0) &= g \\ \frac{du}{dx}(x=1) &= p \end{aligned}$$

avec g et p étant des constantes réelles. La première condition aux limites imposée à $u(x)$ est dite essentielle, tandis que la seconde condition aux limites imposée à sa dérivée est dite naturelle. Si nous appliquons l'équation résiduelle pondérée (6.4) à l'équation différentielle (6.20), nous obtenons

$$\int_0^1 \psi \left(\frac{d^2\bar{u}(x)}{dx^2} + \bar{u}(x) + x \right) dx = 0$$

On pourrait aussi faire la même chose avec la condition aux limites naturelle donnée sous la forme d'une équation différentielle ; C'est

$$\left[\left(\frac{d\bar{u}}{dx} - p \right) \psi \right]_{(x=1)} = 0$$

Puisque les deux expressions (6.22) et (6.23) sont égales à zéro, nous pouvons écrire

$$\int_0^1 \psi \left(\frac{d^2\bar{u}(x)}{dx^2} + \bar{u}(x) + x \right) dx = \left[\left(\frac{d\bar{u}}{dx} - p \right) \psi \right]_{(x=1)}$$

L'équation (6.24) est une forme intégrale de l'équation différentielle (6.20) et de sa condition aux limites naturelle.

Dans l'équation (6.24), la fonction d'essai $\bar{u}(x)$ doit non seulement satisfaire la condition aux limites essentielle, mais elle doit également être dérivable deux fois plus que requis par l'opérateur différentiel afin d'approcher la fonction exacte $u(x)$. D'autre part, la fonction n'a pas du tout besoin d'être continue.

Maintenant, intégrons une fois l'équation (6.24) par partie :

$$\int_0^1 \left((\bar{u}(x) + x) \psi - \frac{d\bar{u}(x)}{dx} \frac{d\psi}{dx} \right) dx + [p\psi]_0^1 = 0$$

Notez que les deux fonctions $\bar{u}(x)$ et ψ ne doivent être dérivables qu'une seule fois. En d'autres termes, nous avons allégé la condition de continuité imposée à $\bar{u}(x)$ de un et augmenté celle imposée à ψ de un également.

Si on continue à intégrer par partie, on obtient

$$\int_0^1 \left((\bar{u}(x) + x)\psi + \bar{u}(x) \frac{d^2\psi}{dx^2} \right) dx + \left[p\psi - \bar{u}(x) \frac{d\psi}{dx} \right]_0^1 = 0$$

Nous nous retrouvons avec un problème identique à l'équation (6.24) ; cette fois, la fonction ψ doit être dérivable deux fois, tandis que la fonction $\bar{u}(x)$ n'a pas du tout besoin d'être continue. Il s'ensuit donc que l'équation (6.25) est la plus appropriée. C'est ce qu'on appelle la forme faible. De plus, lorsque la méthode de Galerkin est utilisée, les fonctions $\bar{u}(x)$ et ψ ont le même degré de continuité puisque $\psi = \delta u(x)$.

La forme intégrale faible permet de diminuer d'un degré l'ordre de dérivation et fait apparaître les conditions aux limites.

V-5 Dérivation de la matrice de rigidité par le principe de l'énergie potentielle minimale

Présentons maintenant les techniques numériques élémentaires (utilisées sur chaque élément) permettant de calculer les formes matricielles déduites de la formulation variationnelle (forme intégrale) d'un problème de physique. Dans un premier temps nous rappelons l'écriture matricielle de la forme variationnelle d'un problème de mécanique des structures, cette formulation est une des plus complexes car elle fait intervenir quatre champs « contraintes, déformations, forces et déplacements »

La forme intégrale du principe des travaux virtuels est:

$$\forall \delta \bar{u} \quad \int_{\mathcal{D}} \rho \ddot{u} \cdot \delta \bar{u} \, dV = - \int_{\mathcal{D}} \sigma : \delta \varepsilon \, dV + \int_{\mathcal{D}} \bar{f} \cdot \delta \bar{u} \, dV + \int_{\partial} \bar{T} \cdot \delta \bar{u} \, dS$$

Pour chaque élément $\forall M \in D_e$

L'approximation nodale des déplacements :

$$\{\bar{u}(M)\} = [N(M)] \{U_e\}$$

Le champ des déformations

$$\{\varepsilon(M)\} = [B(M)] \{U_e\} \quad \text{avec} \quad [B(M)] = [L][N(M)]$$

[B] : matrice d'opérateurs différentiels appliqués aux fonctions d'interpolation

Le champ des contraintes

$$\{\sigma (M)\} = [D(M)]\{\varepsilon(M)\} = [D(M)][B(M)]\{U_e\}$$

D'où le premier terme :

$$\int_{De} \rho \ddot{u} \cdot \delta \bar{u} \, dV = \{\delta U_e\}^T [M_e] \{\ddot{U}_e\}$$

avec $[M_e] = \int_{De} [N(M)]^T \rho [N(M)] \, dV$ matrice masse élémentaire.

Le second terme :

$$\int_{De} \bar{\sigma} : \bar{\delta \varepsilon} \, dV = \{\delta U_e\}^T [K_e] \{U_e\}$$

avec $[K_e] = \int_{De} [B(M)]^T [D(M)] [B(M)] \, dV$ matrice raideur élémentaire.

Le travail virtuel des champs de force donnés sur l'élément

$$\delta T_{de} = \int_{De} \bar{f}_d \cdot \delta \bar{u} \, dV + \int_{\partial De} \bar{T}_d \cdot \delta \bar{u} \, dS$$

$$\delta T_{de} = \{\delta U_e\}^T \{F_{de}\}$$

avec $\{F_{de}\} = \int_{De} \langle N(M) \rangle^T \{\bar{f}_d\} \, dV + \int_{\partial De} \langle N(M) \rangle^T \{\bar{T}_d\} \, dS$

Le principe des travaux virtuels:

$$\forall D_e \quad [M_e] \{\ddot{u}_n\} + [K_e] \{u_n\} = \{F_{de}\} + \{F_{ie}\}$$

Les efforts inconnus représentent les actions mécaniques extérieures à l'élément considéré, on y trouve les efforts de liaison entre les éléments, et pour les éléments de frontière les efforts associés aux liaisons cinématiques de la structure.

Lors de l'assemblage des éléments d'une structure, la somme des actions mécaniques « inter-élémentaire » est nulle. Il ne reste donc aux nœuds internes que les efforts donnés. Et aux nœuds de frontière les efforts de liaisons inconnus.

Chapitre 6 : Approximation, Fonctions d'Interpolation

Interpolation unidimensionnelle de type Lagrange, Interpolation polynômiale : Fonctions de formes, Polynôme de Lagrange, Polynôme d'Hermite, Triangle de Pascal, Conditions de conformité.

Fonctions d'interpolation

Les fonctions de forme ou fonctions d'interpolation sont les fonctions N_i qui relient les déplacements d'un point quelconque intérieur à un élément aux n déplacements nodaux q_i qui sont les degrés de liberté dans le cas de l'approche cinématique : il y a pour un élément autant de fonctions de forme que de degrés de liberté dans l'élément.

$$u(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x)q_i$$

Elles assurent le passage du problème continu au problème discret, la connaissance du déplacement en quelques nœuds discrets permettant de reconstruire le champ de déplacement dans l'élément. Le déplacement en un point quelconque de l'élément est une combinaison linéaire des déplacements nodaux, dont les coefficients sont les valeurs des fonctions de forme en ce point.

Règles à respecter pour la construction des fonction de forme:

1- Principe de compatibilité (de continuité):

La construction de la solution approchée sur un élément fini doit essentiellement satisfaire les exigences du problème à résoudre et la géométrie de l'élément. Pour illustrer cette affirmation, considérons les problèmes de barre et de poutre représentés respectivement sur les figures 7.4a et b. Sous l'effet de la force appliquée P , chaque section transversale A de la barre est soumise à une contrainte constante $\sigma = P/A$. En conséquence, la barre est soumise à une déformation constante $\varepsilon = \sigma/E$, où E représente le module d'élasticité du matériau.

Dans un contexte unidimensionnel, la déformation normale est en fait donnée comme une dérivée directe du déplacement $u(x)$; c'est-à-dire $\varepsilon = du(x)/dx$. Puisque la déformation est constante sur toute la barre, il s'ensuit que le déplacement $u(x)$ est une fonction linéaire de x . En conséquence, il est possible de construire une fonction approchée $u(x)$ pour le déplacement en utilisant un polynôme linéaire:

$$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x$$

Les paramètres α_1 et α_2 sont identifiés à l'aide des deux valeurs nodales d'extrémité U_1 et U_2 . Le problème des barres est classé comme un problème C^0 . La solution approchée doit être continue et sa dérivée doit exister.

Considérons maintenant le problème du poutre. Sous la charge appliquée uniformément répartie, chaque section transversale de la poutre est soumise à un déplacement vertical $w(x)$ et à une rotation $\theta(x)$. A partir de la théorie des poutres classique, la rotation $\theta(x)$ est obtenue comme la dérivée première de la déviation $w(x)$; c'est-à-dire $\theta(x) = dw(x)/dx$. La pente $\theta(x)$ doit être continue, sinon la poutre développerait des « plis » dans sa forme déviée. Par conséquent, si nous sommes sur le point de construire une fonction approchée $w(x)$ pour la flexion, alors la fonction approchée et sa dérivée première doivent être continues. La dérivée seconde, qui représente la courbure de la poutre, doit exister. Une fonction appropriée qui satisfait à ces exigences serait:

$$w(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3$$

Les quatre paramètres α_1 , α_2 , α_3 et α_4 peuvent être identifiés en utilisant les deux valeurs nodales d'extrémité pour la flèche, w_1 , w_2 , et les deux valeurs d'extrémité pour la pente, θ_1 et θ_2 . Le problème du poutre est classé comme un problème C^1 . La solution approchée et sa dérivée première doivent être continues, la dérivée seconde doit exister.

En général, le principe de compatibilité peut être formulé comme suit :

- Pour un problème de classe C^0 (continuité C^0), la solution approchée doit être continue à travers la frontière des éléments mais pas nécessairement ses dérivées.
- Pour un problème de classe C^1 (continuité C^1), la solution approchée et ses dérivées du premier ordre doivent être continues à travers la frontière des éléments mais pas nécessairement ses dérivées du second ordre.
- Pour un problème de classe C^n (continuité C^n), la solution approchée et ses dérivées d'ordre $(n-1)$ doivent être continues à travers la frontière des éléments mais pas nécessairement ses dérivées d'ordre n .

2- Principe de la complétude

Encore une fois, considérons le problème des barres de la figure 7.4a. Si la force appliquée P est différente de zéro, alors le déplacement $u(x)$ a une valeur finie différente de zéro en tout point x appartenant à la barre sauf en $x = 0$, où un déplacement égal à zéro est imposé (condition aux limites) . Si nous choisissons de discrétiser la barre avec un élément linéaire à deux nœuds, alors la fonction approchée adoptée donnée dans l'équation (7.20) fera un choix approprié car si la taille des éléments diminue jusqu'à zéro, c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = \alpha_1$, qui est une constante représentant la valeur réelle du déplacement en ce point. Cependant, si la fonction d'essai ne contenait pas de terme constant, $\lim_{x \rightarrow 0} u(x)$ sera égal à zéro, ce qui ne

représente pas le cas réel. De plus, le terme constant est nécessaire pour que la fonction approchée puisse représenter un mouvement de corps rigide. Dans ce cas, tous les points doivent avoir le même déplacement $u(x) = a$. De plus, on a $du(x)/dx = a_2$, ce qui représente le cas réel de la barre à déformation constante. Cela conduit à la définition du principe de complétude, qui peut être énoncé comme suit. Lorsque la taille de l'élément se réduit à zéro, la fonction approchée doit être capable de représenter :

- Pour un problème de classe C^0 (continuité C^0), une valeur constante de la fonction exacte ainsi que des valeurs constantes de ses dérivées du premier ordre.
- Pour un problème de classe C^1 (continuité C^1), une valeur constante de la fonction exacte ainsi que des valeurs constantes de ses dérivées du premier et du second ordre.
- Pour un problème de classe C^n (continuité C^n), une valeur constante de la fonction exacte ainsi que des valeurs constantes de ses dérivées jusqu'au $n^{\text{ième}}$ ordre.

Ces conditions, telles qu'énoncées par les principes de compatibilité et d'exhaustivité, sont suffisantes pour garantir que la solution par éléments finis converge vers la solution exacte. Heureusement, de nos jours, nous n'avons pas besoin d'observer ces principes à chaque fois que nous résolvons un problème avec la méthode des éléments finis. Tous les éléments communs qui sont utilisés dans la pratique ont été développés et vérifiés selon ces principes, et plus encore. . . Leurs formulations géométriques et analytiques sont fournies dans les bibliothèques d'éléments de la plupart des logiciels d'analyse par éléments finis. Cependant, il ne suffit jamais de rappeler que les solutions obtenues avec la méthode des éléments finis ne sont que des approximations de la solution exacte. Par conséquent, il est intéressant de comprendre ces principes afin d'évaluer la précision ou de faire un diagnostic d'un modèle d'éléments finis.

Les fonctions de forme de Lagrange:

La plus simple est l'emploi des polynômes de Lagrange. Le polynôme de Lagrange d'ordre i passe exactement par 1 au point x_i et par 0 sur tous les autres points x_j . On peut donc l'utiliser comme fonction de forme :

$$N_i(x) = \frac{\prod_{i \neq j} (x - x_j)}{\prod_{i \neq j} (x_i - x_j)}$$

Pour représenter un champ du premier degré le long d'un bord, ce qui suppose donc deux inconnues, il faut deux connecteurs indépendants donc deux nœuds : un à chaque extrémité de l'arête. Pour une barre du premier degré de longueur L et de caractéristiques constantes, on peut écrire directement : $x_1 = 0$ et $x_2 = L$.

$$\begin{cases} N_1(x) = \frac{x-L}{0-L} = 1 - \frac{x}{L} \\ N_2(x) = \frac{x-0}{L-0} = \frac{x}{L} \end{cases}$$

On retrouve les deux fonctions d'interpolation précédemment calculées.

Par application de la formule donnant l'expression des polynômes de Lagrange, on détermine les trois fonctions d'interpolation associées aux trois degrés de liberté de cet élément de barre du second degré :

$$\begin{cases} N_1(x) = \frac{(x-L/2)(x-L)}{(0-L/2)(0-L)} = \frac{(2x-L)(x-L)}{L^2} \\ N_2(x) = \frac{(x-0)(x-L)}{(L/2-0)(L/2-L)} = \frac{4x(L-x)}{L^2} \\ N_3(x) = \frac{(x-0)(x-L/2)}{(L-0)(L-L/2)} = \frac{x(2x-L)}{L^2} \end{cases}$$

Toute parabole est une combinaison linéaire des trois monômes 1 , x et x^2 , mais est également une combinaison linéaire unique des trois fonctions ci-dessus.

Les fonctions de forme d'Hermite:

D'autres solutions peuvent exister pour les fonctions de forme. On cite ici un seul exemple les éléments finis d'Hermite qui ont la particularité d'avoir deux fonctions de base associées à chaque nœud. Dans cette version, la valeur de la solution est ajustée avec la première fonction alors que la deuxième permet d'ajuster la valeur de la dérivée. Ce type de fonctions de base peut avoir un intérêt pour la résolution de certaines équations aux dérivées partielles (par exemple l'équation des poutres ou des plaques), même si elle nécessite d'avoir deux fois plus de fonctions pour un maillage donné.

Si on prend un exemple de la poutre classique, la rotation est la dérivée de la flèche:

$$\frac{dw(x)}{dx} = \theta(x)$$

Si l'élément pris en compte est l'élément poutre de deux nœuds avec deux degrés de liberté par nœuds, w et θ , on peut écrire l'approximation de w comme suit:

$$w(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3$$

la rotation est la dérivée de $w(x)$, donc elle s'écrit comme suit:

$$\theta(x) = \alpha_2 + 2\alpha_3 x + 3\alpha_4 x^2$$

Les conditions aux limites de la poutre sont:

$$\begin{aligned} w(0) &= w_1, & w(L) &= w_2 \\ \theta(0) &= \theta_1, & \theta(L) &= \theta_2 \end{aligned}$$

Après résolution de ces équations, les valeurs des coefficients a_0 , a_1 , a_2 et a_3 seront trouvés:

$$a_0 = w_1$$

$$a_1 = t_1$$

$$a_2 = -\frac{2 t_1 l + 3 w_1 + l t_2 - 3 w_2}{l^2}$$

$$a_3 = \frac{2 w_1 + t_1 l + l t_2 - 2 w_2}{l^3}$$

Puis, les fonctions de formes seront trouvées comme suit:

$$N_1 = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \quad N_2 = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad N_3 = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \quad N_4 = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

Avec:

$$w = N_1 w_1 + N_2 q_1 + N_3 w_2 + N_4 q_2$$

Références

- 1- Abdelghani SEGHIR, Cours Méthode des Éléments Finis, (Polycopié présenté à l'université Abderrahmane Mira – Bejaia).
- 2- Dimitrios G. Pavlou, Essentials of the Finite Element Method (2005, Elsevier Inc).
- 3- Gouri Dhatt, Gilbert Touzot, Emmanuel Lefrançois- Finite element method. (2012, ISTE Ltd and John Wiley & Sons, Inc).
- 4- J.N. Reddy - An Introduction to the Finite Element Method, 3rd Edition (2005, McGraw-Hill Education (ISE Editions)).
- 5- Jean-Charles Craveur, Modélisation des éléments finis,(2008, Dunod).
- 6- LOUHIBI M. Z, la méthode des éléments finis, (université Djillali Liabes - Sidi Bel Abbas).
- 7- Michel Cazenave, Méthode des éléments finis Approche pratique en mécanique des structures, (2010, Dunod).
- 8- Ouinas Djamel, Application de la méthode des éléments finis, Cours et exercices corrigés, (2em édition, 2014, OPU).
- 9- Vincent Manet, Méthode des éléments finis, (2013- Vincent Manet).