جامعة غليزان
كلية العلوم الإقتصادية، التجارية وعلوم التسيير
قسم العلوم التجارية

مطبوعة بيداغوجية بعنوان :

محاضرات وتمارين محلولة في مقياس رياضيات المؤسسة

موجهة لطلبة السنة الثانية علوم إقتصادية، تجارية وعلوم التسيير

من إعداد

د. رفافة عبد العزيز

السنة الجامعية:2021-2022

لمن توجه المطبوعة:

توجه المطبوعة الى طلبة السنة الثانية التابعين لكلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، الذين يدرسون مقياس رياضيات المؤسسة خلال السداسي الثالث من مرحلة التكوين. مع الاستفادة المهمة لطلبة السنة الثالثة لنفس الكلية في دراسة مقياس بحوث العمليات.

هدف المقياس:

يهدف المقياس الى فهم الطالب لواقع الاشكالية الاقتصادية ميدانيا، مع اتقان صياغة الاشكالية في نموذج رياضي خطي، لايجاد الحل الأمثل للبرنامج الذي تمت صياغته، بهدف مساعدة متخذ القرار في الاختيار الأمثل من بين عدة خيارات وترشيد القرارات في المؤسسة.

متطلبات المقياس:

يتطلب دراسة مقياس رياضيات المؤسسة الالمام بالمبادئ النظرية في الاقتصاد، لطرح الاشكالية بالطريقة الصحيحة، اضافة الى اتقان الطالب لأساسيات الرياضيات بصفة عامة، لاسيما العمليات الحسابية، الهندسة وخاصة الحساب المصفوفاتي. مع امكانية التفسير الاقتصادي لجميع البيانات الناتجة خلال عملية الحل.

الأدوات المساعدة:

بالاضافة لمقياس الرياضيات، يمكن الاستعانة بعدة برامج حاسوبية تساهم في تسهيل العمليات الحسابية واختصار الوقت. نذكر من بينها:

- برنامج ميكروسوفت ايكسل
- برنامج WIN QSB
- Lindo & LINGO
- Gams

الفهرس العام

قائمـــة المختصـــرات

Désignation complète en langue étrangère	التسمية باللغة العربية	المختصرات
B, C, D		
Better Solution	الحل الأفضل	B S
Canonical form	الشكل النظامي أو القانوني	C F
Constraints	القيود	S/c
Dual Program	النموذج الثنائي	D P
F, G, I		
Feasible Solution	الحل الممكن	F S
General form	الشكل عام	G F
Graphical method	الطريقة البيانية	G M
Infeasible solution	عدم وجود حل ممكن	Inf S
Initial Basic Feasible Solution	الحل الابتدائي الأساسي الممكن	I B F S
L, M, N		
Linear Programming	البرمجة الخطية	L P
Matrix form	بشكل المصفوفات	Mat F
Maximisation	التعظيم	Max
Minimisation	التدنية	Min
Minimum-Cost Method	طريقة التكلفة الدنيا	Min C M
Mixed form	الشكل المختلط	Mix F
Non-Linear Programming	البرمجة غير الخطية	N-LP
Nonnegativity constraints	شرط عدم السلبية	N Neg C
North West-Corner Method	طريقة الزاوية الشمالية الغربية	N W C M
O, P, R		
Objective Function	دالة الهدف	O F
Optimal Solution	الحل الأمثل	O S
Optimization Problems	مشـاكل الأمثلية	O P
Pivot	المحور	P
Programming Quadratic	البرمجة التربيعية	P Q
Right Hand Side	الجانب الأيمن من القيود	RHS
S, T, U, V		
Sensitivity Analysis	تحليل الحساسية	S A
Shadow prices	سعر الظل	S P
Simplex Algorithm	الطريقة المبسطة	Simplex

Standard form	الشكل القياسي (المعياري)	S F
Stepping stone	طريقة المسار المتعرج	S S M
Superfluous constraint	قيد محايد	S C
Transportation problem	مسائل النقل	T P
Unbounded solution	حلول غير محدودة	Unb S
Vogel's Approximation Method	طريقة فوجل التقريبية	Vog A M

مقدمة:

في الوقت الحالي أصبح من الضروري الاعتماد على مختلف العلوم والأساليب الكمية المستخدمة في معالجة المشاكل التي تواجهها مختلف المؤسسات الاقتصادية، من أجل اتخاذ قرارات إدارية مثلى، تحقق الأهداف المرجوة للمؤسسة، خلال عملية الاختيار من بين البدائل المتعددة التي تعتمد على بيانات كبيرة ومعقدة، لا يمكن من خلالها الاعتماد على الطرق التقليدية في اتخاذ القرارات، مما يمثل ضرورة ملحة لمسؤولي المؤسسات في اعتماد أساليب كمية تعتمد على التحليل العلمي للمشكلة. لذلك أصبح استخدام الأساليب الكمية في مجال اتخاذ القرارات الإدارية ظاهرة حديثة تميز الإدارة حاليا، التي انتقل فيها أسلوب معالجة المشاكل الإدارية من الطرق التقليدية التي تتميز بالوصف والتجربة والخطأ إلى الطرق الكمية التي تعتمد على الأسلوب الرياضي في صياغة المشاكل الإدارية وحلها. حيث بدأ اعتماد الأساليب الكمية العلمية في حل المشكلات الإدارية خلال الحرب العالمية الثانية، ما وفر العديد من الحلول في إدارة المشاكل المعقدة. ما أدى الى ظهور علم بحوث العمليات، التي تم استخدامها بشكل واسع وفي عدة مجالات مختلفة، بفضل التطور التكنولوجي الكبير، واعتماد برمجيات الحاسب الآلي المطورة بشكل مستمر. والتي توفر حلول لمشاكل معقدة في وقت قصير جدا وبأقل تكاليف ممكنة. مما جعل منها تقنيات جد مهمة في عملية اتخاذ القرارات في مختلف الميادين، لاسيما تخطيط الإنتاج، مسائل النقل، مراقبة المخزون، طوابير الانتظار، المحاكاة، والتحليل الشبكي... الخ

في هذه المطبوعة نشرح مبادئ مقياس رياضيات المؤسسة، نركز على فهم البرمجة الخطية في حل العديد من الأمثلة حول تخطيط الإنتاج ومسائل النقل، مستخدمين مختلف أساليب الحل المعتمدة في مختلف المراجع الأساسية. متبعين البرنامج المقرر، ومحاولين تبسيط المقياس لأقصى قدر ممكن، لكي يتم فهمه من طرف الطلبة. من خلال حل أكبر قدر من الأمثلة والتطبيقات بدون مبالغة.

رياضيات المؤسسة:

تعتمد رياضيات المؤسسة على الرياضيات التطبيقية، التي تستخدم منهجية بحوث العمليات وأساليبها في حل المشكلات واتخاذ القرارات الإدارية، تستخدم بحوث العمليات الأساليب الكمية المستخدمة في اتخاذ القرارات، التي تم حديثا تطوير العديد منها بهدف المساعدة في عملية اتخاذ القرار، في مجالات متعددة مثل الهندسة الصناعية، وإدارة المخزون، وإدارة المواصلات فهي تعالج ميادين مختلفة، لكن جميعها تهدف الى إيجاد الحل الأمثل حسب نوع وطبيعة المسائل، وغالبا ما يكون الهدف هو الحصول على أقل تكلفة ممكنة أو أكبر ربح ممكن. (Greg H. Parlier, 2019)

مفهوم رياضيات المؤسسة:

رياضيات المؤسسة هي علم تطبيقي يساعد في اتخاذ القرارات الإدارية، تعتمد على مختلف الأساليب العلمية الرياضية المتاحة لمواجهة المشاكل الإدارية، لترشيد اتخاذ القرارات. حيث تعتمد على عملية استخدام الأساليب العلمية في حل المشكلات المعقدة. بالتطبيق العلمي للطرق الرياضية والإحصائية في حل مختلف المشاكل الإدارية في المؤسسة.

1- الفصل الأول: البرمجة الخطية Linear Programming

تمثل البرمجة الخطية أهمية بالغة في رياضيات المؤسسة وبحوث العمليات باعتبارها تهتم بإيجاد الحلول المثلى للمشاكل المتعلقة باستغلال الموارد المتاحة والإمكانيات المحدودة للحصول على أفضل النتائج. حيث انتشر استخدام هذه التقنيات من طرف الكثير من المهتمين باستخدام الأساليب الرياضية الحديثة في عملية التحليل ومعالجة المشاكل المتعلقة باتخاذ القرار سواء في المراجع المختصة أو في الممارسات الميدانية بسبب تطبيقاته العديدة في جميع المجالات. لتطبيق الطريقة وإيجاد حلول في فترة وجيزة؛ وبالدقة العالية مهما بلغ عدد القيود والمتغيرات. (Yury Kochetov, 2020)

1-1 مبادئ نظرية في البرمجة الخطية:

1-1-1 نشأة البرمجة الخطية:

ظهرت البرمجة الخطية سنة 1947 بعد الحرب العالمية الثانية، من طرف عالم الرياضيات George B. Dantzig الذي كان يعمل خبيرا في الجيش الأمريكي، والذي نشر في عام 1949 الطريقة المبسطة Simplex Algorithm لحل البرامج الخطية، حيث تمكن من حل الكثير المشاكل التي كان يعاني منها سلاح الطيران الأمريكي في مجالات التخطيط وتحديد برامج الصيانة والتدريب وذلك بالاعتماد على ما طريقة السمبلكس، ومنذ هذا الوقت تعددت الدراسات في تحسين حل البرامج الخطية بطرق جديدة. ونظرا للتبسيط الذي جاءت به هذه الطريقة بالإضافة إلى انتشار تكنولوجيا المعلوماتية بشكل واسع، بدأ استعمال هذا الأسلوب في الميادين الصناعية والاقتصادية والإدارية بشكل واسع في مختلف المجالات مما سمح بحل المشاكل المعقدة والتي لا يمكن حلها يدويا أو التي تحتاج إلى وقت وجهد كبير.

2-1-1 استخدامات البرمجة الخطية:

تعددت المجالات التي تستخدم فيها البرمجة الخطية بهدف إيجاد الحلول المثلى، مما يجعلها وسيلة هامة لدى متخذي القرار، من بينها: (الحميدان-وآخرون، 2017)

- **تنظيم العمليات الإنتاجية** الاختيار بين طرق الإنتاج المختلفة عن طريق إيجاد التوزيع الأمثل لمختلف عناصر الإنتاج (مواد؛ عمال؛ آلات ...الخ) على مختلف العمليات الصناعية بما يسمح بتحقيق أهداف المؤسسة. ويتجلى ذلك بشكل كبير في حالة قيام المؤسسة بإنتاج عدة منتجات تتنافس فيما بينها على مختلف عناصر الإنتاج المتوفرة بشكل محدود. ولتفادي بعض الحالات المتمثلة في إنتاج منتجات أقل ربحية أو حدوث تبذير كبير في استخدام الموارد مثلا أو إهدار للطاقة بشكل عام تساعد البرمجة الخطية على أخذ مختلف العوامل بعين الاعتبار وإيجاد أفضل خطط العمليات الإنتاجية والمنتجات وتدنية تكاليف الإنتاج.

- **مراعاة عنصر الطلب في السوق** تحديد برامج الإنتاج والمخزون في كل فترة ما يؤدي إلى تخفيض تكاليف الإنتاج والتخزين إلى أدنى مستوى ممكن.

- **تحديد طرق التوزيع المثلى**: كثيرا ما تبحث المؤسسات عن إيجاد أفضل السبل لتزويد زبائنها بالسلع المطلوبة أو تزويد وحدات إنتاجية معينة بمنتجات نصف مصنعة؛ وتساعد البرمجة الخطية بالسلع

المطلوبة أو تزويد وحدات إنتاجية معينة بمنتجات نصف مصنعة، وتساعد البرمجة الخطية في ذلك عن طريق تحقيق وفرات كثيرة في الوقت وتكاليف النقل والتوزيع عن طريق اختيار أفضل الطرق لتحقيق ذلك.

- **تحقيق التمويل الأمثل**: تحديد أفضل الطرق لتلبية الاحتياجات المالية القصيرة المدى والذي سيؤدي إلى تخفيض الفوائد إلى أدنى حد ممكن بالإضافة إلى إيجاد أفضل تشكيلة لمصادر التمويل القصيرة الأجل. ويسمح استخدام البرمجة الخطية هنا بتحديد المبالغ التي يجب اقتراضها في كل فترة من كل مصدر (البنك، الموردين أو مصادر أخرى) مما سيؤدي إلى تخفيض الفوائد التي ستدفعها المؤسسة إلى أدنى حد وتوفير الأموال في الوقت المناسب.

- **مشكلة التخصيص:** هنا يتم تثبيت مقدار الكمية التي يجب إنتاجها من كل نوع من المخرجات من اجل مضاعفة الربح، والهدف هو الوصول إلى اختيار كمية من المدخلات التي إذا ما اختيرت ستحقق أعلى ربحية من خلال بيع المنتج.

- **مشكلة التثبيت:** هو تثبيت عنصر إنتاج إلى عنصر إنتاج آخر لتحقيق أعلى كفاية ممكنة لنظام الإنتاج الذي يحقق أعلى ربحية.

- **مشكلة التوزيع:** اختيار أفضل الطرائق من اجل الوصول إلى خفض كلف النقل من خلال تحديد الكميات الواجب نقلها من مركز الإنتاج إلى الأسواق.

- **مشكلة الجدولة:** هي تعديل المنتجات وجدولتها على مدار السنة لكي يخفض كلفة المواد الأولية والعمل الإضافي والنقل.

- إضافة إلى الاستخدامات السابقة توجد الكثير من الميادين الأخرى التي تطبق البرمجة الخطية.

3-1-1 أهمية البرمجة الخطية:

- صياغة المشاكل الواقعية في شكل رياضي مما يسمح بمعالجة عدد كبير من المتغيرات والقيود مع التعبير عنها في نموذج رياضي مبسط.

- إمكانية استخدام الحاسب الآلي في حل الكثير من المسائل خاصة وأن هناك شيفرات جاهزة لمعالجة هذا النوع من المسائل والتي يمكن اقتناؤها بسهولة من السوق وهذا ما يوفر لمتخذ القرار الدقة في التحليل بالإضافة إلى تقليص الجهد والوقت.

- استبعاد الحلول غير المنطقية التي تعتبر غير ممكنة التحقيق واعتماد الحلول الممكنة فقط مع اختيار أفضلها.

4-1-1 مفهوم البرمجة الخطية:

هي أسلوب أو تقنية رياضية علمية تعالج مشكلة تخصيص موارد أو طاقات محدودة لتحقيق هدف محدد، يعبر عنه بدالة خطية تسمى دالة الهدف، وغالبا ما تمثل ربح أو تكلفة أو طاقة إنتاجية وغيرها، أما الموارد المتاحة فيعبر عنها بقيود على شكل مجموعة من المعادلات الخطية والمترجحات، التي تمثل

مستلزمات العملية الإنتاجية. كما تعرف على أنها تقنية رياضية تبحث عن حلول لمشكلة اقتصادية (إنتاجية، مالية، نقل، تحليل المشاريع ...) واختيار الحل الأمثل. (المهتدى، 2004)

5-1-1 فرضيات البرمجة الخطية:

يوجد مجموعة من الفرضيات الأولية لمشكلة البرمجة الخطية نلخصها كما يلي:

1- **الخطية:** نفترض أن العلاقة بين المتغيرات في دالة الهدف وفي المتراجحات علاقة خطية، أي أن هناك علاقة خطية بين المتغيرات المؤثرة في المشكلة قيد الدراسة.
2- **التأكد:** نفترض أن القيم المكونة لدالة الهدف أو القيود (المعاملات أو الموارد المتاحة) مؤكدة وثابتة أي لا تتغير أثناء دراسة المشكلة.
3- **التناسبية** :يعتبر كل نشاط مستقل عن الآخر، حيث أن الكميات التي يتم استخدامها من الموارد المختلفة تتناسب مع احتياجات العوامل المختلفة من كل هذه الموارد.
4- **الإضافة**: أن كمية المواد الأولية الداخلة في الإنتاج وكميات الإنتاج قابلة للإضافة، كما أنه لا يوجد تداخل بين الأنشطة المختلفة.
5- **قابلية القسمة أو التجزئة:** قيم الحل لمشكلة البرمجة الخطية لا يشترط أن تكون أعداد صحيحة، بمعنى قبول كسور كقيم لمتغيرات القرار، وإذا كان من الصعب إنتاج أجزاء من المنتج فعند ذلك نلجأ إلى استخدام البرمجة الصحيحة أو الرقمية.
6- **عدم السلبية:** قيم متغيرات القرار يجب أن تكون موجبة أو معدومة "غير سالبة"، فالقيم السالبة للكميات المادية ليس لها تفسير منطقي. مثلا: لا يمكن انتاج كمية سالبة. (في بعض الحالات يمكن التخلي عن هذه الفرضية. إذا كانت متغيرات القرار تقبل السلبية مثلا معدل النمو، أو القيمة الصافية) (مخلوف، 2004)

6-1-1 مشاكل الأمثلية: Optimization Problems

هي تلك المشاكل التي نبحث فيها عن أعظم أو أدنى قيمة لدالة تعتمد على متغير أو متغيرات، وتسمى هذه الدالة بدالة الهدف وتخضع إلى قيود متمثلة في معادلات أو متباينات تربط المتغيرات مع بعضها البعض. (Vanderbei, 2020)

2-1 صياغة النموذج الرياضي لمسائل البرمجة الخطية:

1-2-1 محتويات الشكل العام للبرنامج الخطي:

تحتوي جميع المشكلات الاقتصادية والإدارية المصاغة رياضيا على العناصر التالية (Michael Khachay, 2019) :

1- **متغيرين أو أكثر**: تسمى متغيرات القرار التي نسعى لتحديد قيمتها للوصول إلى الهدف (أكبر ربح، أو أقل تكلفة) ، يرمز لها بـ:

$X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots X_n$

n يمثل عدد متغيرات القرار في الدراسة، فمثلا يمكنها أن تعبر عن:

1-كمية إنتاج سلع.

2-ساعات عمل في أقسام انتاج.

3-قيمة مالية موجهة لاستثمارات أو قروض...

4-عدد من السلع المنقولة على مسارات محددة.

5-حجم المواد الأولية اللازمة لتصنيع سلعة.

وتنقسم المتغيرات في النموذج الخطي الى نوعين:

المتغيرات الأساسية: التي قيمتها في الحل غير معدومة. نعتبرها أساسية. لأنها تؤثر على دالة الهدف.

المتغيرات غير الأساسية: التي قيمتها في الحل معدومة، لذلك تعتبر غير أساسية. لأنها لا تؤثر على الدالة.

تحديد هدف لتحقيقه: يعبر عنه رياضيا بدالة خطية تسمى دالة الهدف، وتأخذ الشكل التالي:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

حيث أن:

Cj: تمثل معاملات متغيرات القرار. غالبا ما تعبر عن أرباح أو تكاليف.

وتكون دالة الهدف على شكلين:

1- حالة التعظيم: عندما نريد تعظيم الأرباح مثلا، تصاغ على شكل: Max

2- حالة التدنية: عندما نريد تدنية التكاليف مثلا، تصاغ على شكل: Min

$$[Max / Min]\, Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

وجود علاقة تأثير بين المتغيرات :يعبر عنها رياضيا بمتراجحات تسمى قيود المسألة، وهي مجموعة من القيود التي تحد من نسبة تحقيق الأهداف. لأنها تعبر عن الموارد المتوفرة أو اللازمة. وتكون على الأشكال التالية:

1- قيد من الشكل أكبر أو يساوي $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \geq b_i \quad ; \; i = 1, 2, \ldots, m$

2- قيد من الشكل أقل أو يساوي $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \leq b_i \quad ; \; i = 1, 2, \ldots, m$

3- قيد من الشكل يساوي $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i = b_i \quad ; \ i = 1, 2, \ldots, m$

حيث أن:

n: تمثل عدد متغيرات القرار، بترميز j.

m:عدد قيود المسألة، بترميز i.

a_{ij}: أعداد حقيقية تمثل معاملات القيود.

bi: أعداد حقيقية تمثل عن الموارد المتاحة أو اللازمة لكل قيد.

2-2-1 العناصر الأساسية المكونة للبرنامج الخطي:

من خلال التعريف الرياضي السابق للبرمجة الخطية يمكن تحديد ثلاثة عناصر أساسية في البرنامج الخطي: (الطاسان، 2019)

1- دالة الهدف: Objective Function

تعبر عن الهدف المراد تحقيقه من خلال الاستغلال الأمثل للموارد المتاحة عن طريق دالة تتضمن مجموعة من المتغيرات؛ نسعى إلى تحديد قيمها والتي بدورها تحدد مقدار الهدف المرجو. ويجب تحديد الهدف موضوع البرمجة رياضيا قد يمثل حالة تعظيم (كتعظيم الأرباح أو المبيعات...الخ) أو حالة تخفيض (كتخفيض التكاليف أو الزمن أو المخاطرة...الخ)

2- القيود: Constraints

هي مجموعة من المحددات يجب التقيد بها من أجل تحقيق الهدف والوصول إلى أفضل قرار، تعكس أساسا الموارد المتاحة بشكل محدود مثل ساعات العمل؛ كمية المواد المتوفرة، مساحة المخازن؛ الأموال المتوفرة.... الخ. كما قد تتمثل في قيود السوق (الطلب) أو قيود أخرى كثيرة يحددها محيط المؤسسة. ويجب التعبير عن هذه القيود بشكل رياضي. فقد تكون على شكل متراجحات من نوع أقل أو تساوي في حالة تحديد الحد الأقصى الذي يجب عدم تجاوزه أو من نوع أكبر أو تساوي في حالة تحديد الحد الأدنى الواجب توفره أو على شكل مساواة في حالة الالتزام المحدد مثل الطلبيات الخاصة.

3- شرط عدم السلبية: Nonnegativity constraints

يجب أن تكون كل متغيرات القرار في الحل الأمثل غير سالبة أي أن تكون موجبة أو معدومة.

3-2-1 الصيغة العامة للبرنامج الخطي:

- الشكل عام: General form

$$[Max\ /\ Min]Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

$S\ /\ c$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \begin{pmatrix} \leq \\ \geq \\ = \end{pmatrix} b_i \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_i \geq 0$$

- **بشكل مفصل:**

$$[Max\ /\ Min]Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

$S\ /\ c$

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \begin{pmatrix} \leq \\ \geq \\ = \end{pmatrix} b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \begin{pmatrix} \leq \\ \geq \\ = \end{pmatrix} b_2$$

$\ldots$

$\ldots$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \begin{pmatrix} \leq \\ \geq \\ = \end{pmatrix} b_m$$

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \geq 0$$

- **بشكل المصفوفات: Matrix form**

$$[Max\ /\ Min]Z = CX$$

$S\ /\ c$

$$AX \begin{pmatrix} \leq \\ \geq \\ = \end{pmatrix} B$$

$$X \geq 0$$

حيث أن:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & & a_{mn} \end{bmatrix} , X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} , B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix} , C = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \dots \quad c_n]$$

C: منقول مصفوفة معاملات دالة الهدف.

X: شعاع متغيرات القرار.

A: مصفوفة معاملات القيود.

B: شعاع الموارد.

4-2-1 **الأشكال المختلفة للنماذج الخطية:** يأخذ النموذج الخطي بشكل عام أحد الصيغ التالية:

1- الشكل النظامي أو القانوني: Canonical form يكون على نوعين:

- إما من الشكل Max وكل القيود أقل أو تساوي:

$$[Max]Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

$$S/c$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \leq b_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_i \geq 0$$

- أو من الشكل Min وكل القيود أكبر أو تساوي:

$$[Min]Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

$$S/c$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \geq b_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_i \geq 0$$

2- الشكل المختلط: Mixed form النموذج يحتوي على قيود مختلفة الأشكال $(\leq, \geq, =)$

$$[Max\ /\ Min]\ Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

$$S\ /\ c$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \begin{pmatrix} \leq \\ \geq \\ = \end{pmatrix} b_i \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_i \geq 0$$

ملاحظة: يمكن تحويل أي شكل مختلط الى الشكل القانوني، من خلال مجموعة من التحويلات المنطقية:

- اما تحويل دالة الهدف من تعظيم الى تدنية أو العكس. عن طريق ضرب طرفي الدالة في (-1)
- أو تحويل القيود من أكبر أو يساوي الى أقل أو يساوي، أو العكس. بضرب طرفي القيد في (-1)
- أو تحويل قيد مساواة الى قيدين من الشكل ($\geq$ $\leq$)، ثم تحويل أحد القيدين لتحقيق الشكل القانوني.

سنتطرق الى هذه التحويلات بالتفصيل في محور النموذج المقابل (الثنائي).

تحويل النموذج من الشكل المختلط الى الشكل القانوني:

مثال:

$$[Min]\ Z = 8x_1 + 12x_2$$

$$S\ /\ c$$

$$3x_1 + 5x_2 \leq 25$$

$$7x_1 + 12x_2 \geq 15$$

$$5x_1 + 8x_2 = 20$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

الشكل القانوني:

$$[Max]\ Z = -8x_1 - 12x_2$$

$$S\ /\ c$$

$$3x_1 + 5x_2 \leq 25$$

$$-7x_1 - 12x_2 \leq -15$$

$$5x_1 + 8x_2 \leq 20$$

$$-5x_1 - 8x_2 \leq -20$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

مع العلم أن:

$$5x_1 + 8x_2 = 20 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x_1 + 8x_2 \leq 20 \\ 5x_1 + 8x_2 \geq 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x_1 + 8x_2 \leq 20 \\ -5x_1 - 8x_2 \leq -20 \end{cases}$$

3- الشكل القياسي (المعياري): Standard form

يعتبر الشكل القياسي من أهم الأشكال لأنه معتمد في إيجاد الحل الأمثل في طريقة السمبلكس، ويتميز بتحويل كل قيوده الى معادلات، لكن بتحويلات منطقية. بحيث أن:

- في حالة ≥ الطرف الأقل يضاف اليه متغير متمم (مورد عاطل) (S+)، لتتوازن المعادلة.
- أما في حالة ≤ الطرف الأكبر يطرح منه متغير متمم (S-) مع إضافة متغير اصطناعي (A+)
- بينما في حالة = يتم إضافة متغير اصطناعي (A+)

$$[Max\ /\ Min]Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j + 0 \times S_i \begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} M \times A_i$$

$$S/c$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i + S_i + A_i = b_i \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_i, S_i, A_i \geq 0$$

تحويل النموذج من الشكل المختلط الى الشكل القياسي:

مثال:

$$[Min]Z = 8x_1 + 12x_2$$

$$S/c$$

$$3x_1 + 5x_2 \leq 25$$

$$7x_1 + 12x_2 \geq 15$$

$$5x_1 + 8x_2 = 20$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

نحول القيدود الى معادلات لتضاف اليها المتغيرات المتممة (الراكدة) و/أو الاصطناعية:

1- إذا كان القيد من الشكل ≥ يتم إضافة متغير **متمم** S_i لكي **تتوازن** المعادلة في المساواة. (S+)

2- إذا كان القيد من الشكل ≤ يتم طرح متغير **متمم** S_i **لتتوازن** المعادلة ثم اضافة متغير **اصطناعي** A_i لنحصل على حل ابتدائي أساسي ممكن **موجب.**(S- +A)

3- إذا كان القيد من الشكل = يتم اضافة متغير اصطناعي A_i لنحصل على حل منطقي ابتدائي أساسي ممكن**.**(A+)

4- يتم إضافة المتغيرات المضافة في القيود، لدالة الهدف وشرط عدم السلبية أيضا.

لكن في دالة الهدف:

- تكون معاملات المتغيرات المتممة 0 لكيلا تؤثر على القيمة الاجمالية لدالة الهدف.
- تكون معاملات المتغيرات الاصطناعية (M+) في حالة (Min) و (M-) في حالة (Max) لكي نتمكن من التخلص منها بقيمة معدومة في نهاية الحل بالسمبلكس ، لعدم وجود تفسير اقتصادي لها.

ملاحظة: المتغيير المتمم S_i يفسر اقتصاديا بالموارد العاطلة أو الاضافية:

- في حالة ≤ المتغير المتمم يمثل الموارد التي لم يتم استغلالها في عملية الإنتاج، لتحقيق نتائج الحل.
- في حالة ≥ المتغير المتمم يمثل الموارد الاضافية عن الحد الأدنى، التي استغلت في عملية الإنتاج.
- في حالة المساواة نضيف متغير اصطناعي فقط، والذي يجب أن ينعدم في نهاية الحل.

$$[Min]Z = 8X_1 + 12X_2 + 0S_1 + 0S_2 + MA_1 + MA_2$$

$$S/c$$

$$3X_1 + 5X_2 + S_1 = 25$$

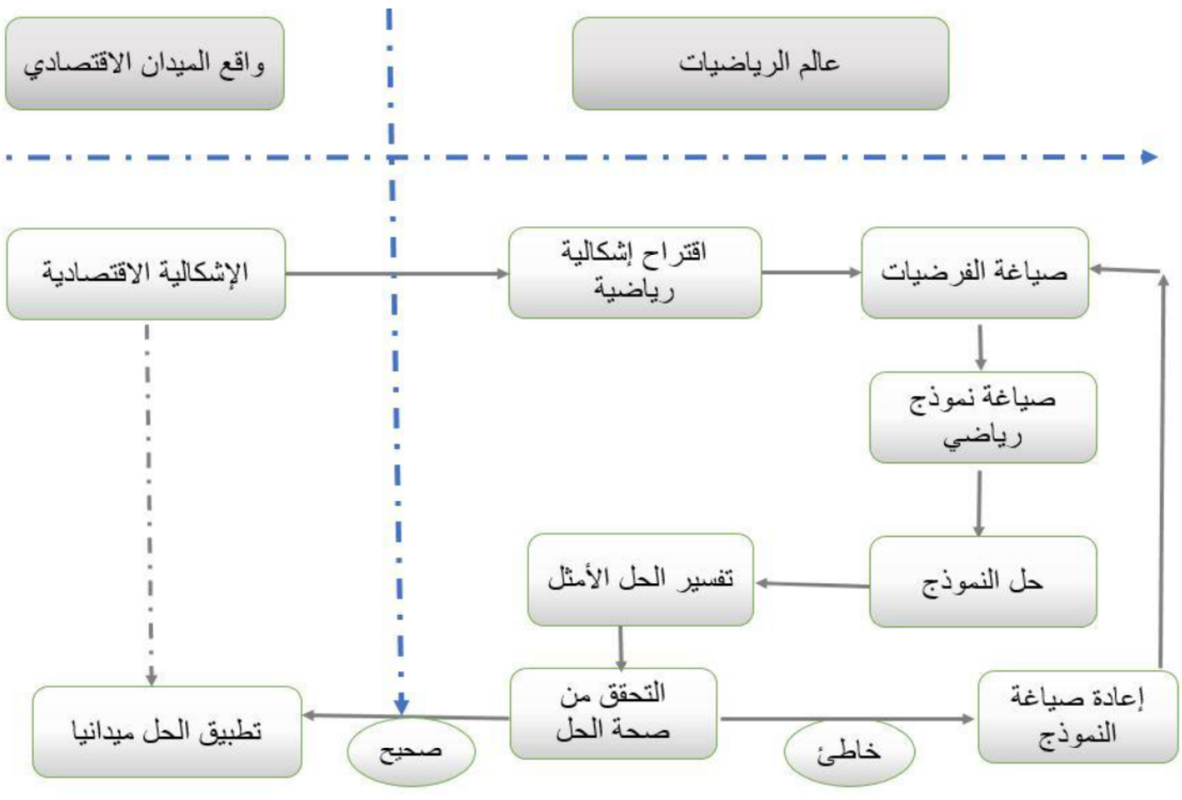
$$7X_1 + 12X_2 - S_2 + A_1 = 15$$

$$5x_1 + 8x_2 + A_2 = 20$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, A_1, A_2 \geq 0$$

5-2-1 صياغة النموذج الرياضي:

الصياغة: هي محاولة تطبيق الرياضيات على مسألة تمثل إشكالية واقعية في الاقتصاد أو الاجتماع أو ميادين أخرى. ذلك من خلال تحويل هذه المسألة الى نموذج رياضي، يتم حله باستخدام تقنيات الحل في البرمجة الخطية. واختيار أفضل الحلول من بين البدائل المتاحة التي تتناسب مع طبيعة المشكلة التي نريد تطبيقها ميدانيا، وذلك من خلال التأكد من صحة الحل، كما يوضحه الشكل التالي: (الشيخ، 2009)



المصدر: من اعداد الباحث

من خلال مسألة وصفية تعبر عن مشكلة اقتصادية واقعية، يتم صياغة برنامج في شكل رياضي سواء تعلق الأمر بدالة الهدف أو القيود. وغالباً ما تتبع الخطوات التالية مع معظم المشاكل التي تصاغ بشكل خطي:

1- **التعبير عن المشكلة بصورة وصفيه،** من خلال تحديد ما يلي:

أ- **تحديد الهدف النهائي** للمشكلة المدروسة، أي إذا كانت تتعلق بتعظيم الأرباح أو تخفيض التكاليف، أو تقليل كمية عناصر الإنتاج المستخدمة، أو الاستفادة القصوى من عنصر العمل البشري وغيرها من الأهداف، مع تحديد وحدات القياس.

ب- **توضيح العلاقة** الموجودة بين الهدف والمتغيرات التي يستطيع متخذ القرار السيطرة عليها.

ت- **تعريف القيود** المتعلقة بالمشكلة المدروسة.

2- **تحويل الشكل الوصفي للمشكلة إلى شكل رياضي،** وذلك بوضعها في الصيغة الرياضية المناسبة من خلال إتباع الخطوات التالية:

أ- **تحديد متغيرات المسألة** تحديدا واضحا والتي تحقق الهدف المرجو. ويمكن عموما الوصول إلى تحديد دقيق للمتغيرات عن طريق المطلوب النهائي، أو تحديد المتغيرات التي تقابل الأرباح أو التكاليف في المسألة، لأنها تمثل معاملاتها في دالة الهدف. وتسمى متغيرات القرار. ويتم ترميزها وتعريفها بشكل صحيح.

وتعتبر خطوة تحديد المتغيرات من أهم الخطوات في بناء النموذج الرياضي وأي خطأ يؤدي إلى استحالة بناء كامل النموذج الرياضي أو بنائه بشكل خاطئ.

ب- **تحديد الهدف في الدالة،** اما تعظيم في حالة توفر الأرباح أو تدنية في حالة توفر التكاليف.

ت- **ترجمة القيود المفروضة** على تحقيق الهدف رياضيا حيث يتم من خلالها بشكل عام مقارنة ما هو متاح أو متوفر من موارد مع ما يتم استهلاكه أو استغلاله من ذلك المورد. ويطلق على مقدار الموارد المتاحة اسم الثوابت، وتكون على الجانب الأيمن من القيود. أما استغلال الموارد من طرف مختلف السلع فيكون من الجانب الأيسر للقيود؛ مع التأكد من استخدام وحدة القياس نفسها على الطرفين:

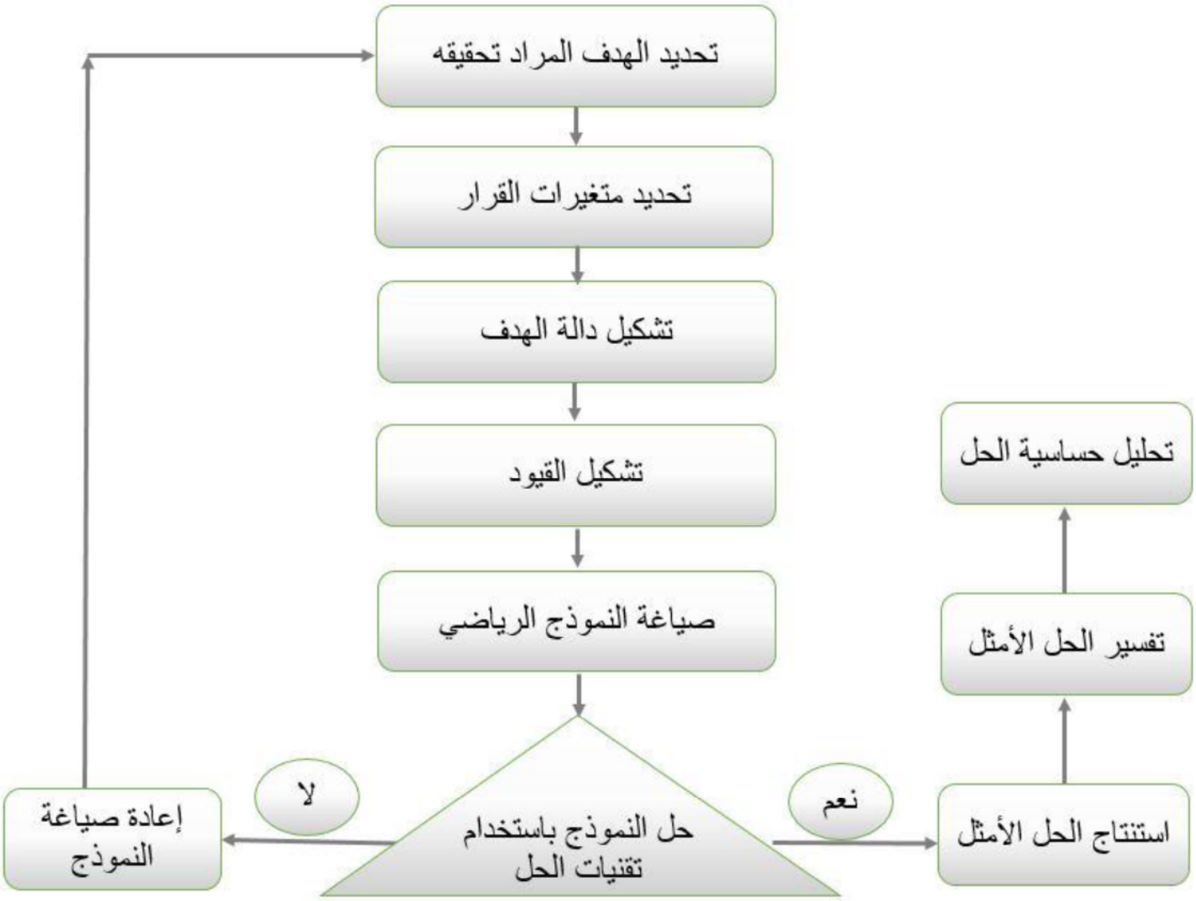
الكمية القصوى للموارد المتاحة ($\leq$) استهلاك الموارد المتاحة من طرف مختلف السلع أثناء الإنتاج.

أو: الحد الأدنى الواجب توفره ($\geq$) استهلاك الموارد المتاحة من طرف مختلف السلع أثناء الإنتاج.

أما عندما تكون القيود عقودا أو شروطا محددة بالضبط، فيكون القيد على شكل مساواة (=)

ث- **تحديد شرط عدم السلبية** للمتغيرات يجب أن يعبر عنه في آخر النموذج الرياضي على الشكل $X_i \geq 0$

إن إتباع هذه الخطوات في صياغة النماذج الخطية، يقلل إلى حد كبير من الأخطاء الممكن ارتكابها، وقبل الانتقال إلى صياغة بعض الأمثلة المعبرة عن المسائل الاقتصادية والإدارية، يجب الاشارة إلى أن حل نماذج البرمجة الخطية لا يتضمن الحصول على قيم بأرقام صحيحة، وإنما يمكن أن تكون القيم أرقاما حقيقية، وهذا غير مناسباً لبعض الحالات الاقتصادية، مثل تحديد كميات إنتاج منتجات تامة غير قابلة للتجزئة، لذلك من أجل الحصول على قيم صحيحة يمكن استخدام طريقة البرمجة بالأعداد الصحيحة.



المصدر: من اعداد الباحث

3-1 تمارين محلولة في صياغة النموذج الرياضي لمسائل البرمجة الخطية:

التمرين 1 (توضيحي): تخطيط الانتاج

شركة تنتج نوعين من السلع a وb، من خلال ثلاثة مراحل عبر **3 أقسام**، فإذا كان تصنيع السلعة a يحتاج الى **4** ساعات عمل في القسم الأول **وساعتين** عمل في القسم الثاني و**5** ساعات عمل في القسم الثالث وتحتاج السلعة b إلى **3** ساعات عمل في كل قسم. كما أن ساعات العمل المتاحة في القسم الأول هي **340** ساعة وفي القسم الثاني **210** ساعة وفي القسم الثالث **420** ساعة عمل أسبوعيا. واذا كان ربح الوحدة الواحدة من السلعة a هو **17** دينار .و **11** دينار للسلعة b

المطلوب :صياغة المسالة في شكل نموذج خطي لتحديد حجم الإنتاج الأمثل من السلعتين.

الحل :

- **تحديد المتغيرات:** دائما نجد في المسألة **المتغيرات** تقابلها اما **أرباح أو تكاليف** (لأنها تمثل **معاملاتها** في دالة الهدف) لذلك من أجل معرفة متغيرات الدراسة يكفي **البحث** عن الأرباح أو التكاليف التي تقابلها، أحيانا يجب حسابها. (مهما يكن يجب اتباع المطلوب جيدا).
- نعتبر أن كمية انتاج السلعة a هي x_1 كمية انتاج السلعة b هي x_2

- **تحديد دالة الهدف**: من خلال التأكد من توفر الأرباح في المسألة نعتبر أن هدف الشركة هو تعظيم الأرباح (Max).

$$\text{Max } Z = 17\,x_1 + 11\,x_2$$

- **تحديد القيود:** لتبسيط المسألة يمكن وضعها على شكل جدول.

الوقت اللازم لتصنيع الوحدة الواحدة من السلعة يجب ألا يتجاوز عدد الساعات العمل المتاحة في القسم 1. كما يلي:

$$4\,x_1 + 3\,x_2 \le 340$$

بالنسبة للقسم الثاني:

$$2\,x_1 + 3\,x_2 \le 210$$

بالنسبة للقسم الثالث:

$$5\,x_1 + 3\,x_2 \le 420$$

- **شرط عدم السلبية:** ولأن عدد الوحدات المنتجة لا يمكن أن يكون سالبا، نظيف شرط عدم السلبية:

$$x_1;\ x_2 \ge 0$$

البرنامج الخطي:

ترميز المتغيرات:

x1 كمية انتاج السلعة a

x2 كمية انتاج السلعة b

دالة الهدف: $\text{Max } Z = 17\,x_1 + 11\,x_2$

x_1 x_2 | الموارد المتاحة

القسم 1 :	$4\,x_1 + 3\,x_2$	$\le$	340
القسم 2:	$2\,x_1 + 3\,x_2$	$\le$	210
القسم 3:	$5\,x_1 + 3\,x_2$	$\le$	420

S/c

$$x_1;\ x_2 \ge 0$$

تتشكل **القيود** دائما من **طرفين: الأيمن** يمثل **الموارد** (المتاحة أو اللازمة). **والأيسر** يمثل **مصفوفة** تتكون من **أعمدة** و**أسطر**.

دائما **الأعمدة** تمثل **المتغيرات**، بينما **الأسطر** تمثل (مراحل انتاج، أقسام، ساعات العمل....) تمثل **الموارد** (**المقيدة** في المسألة).

للمقارنة بين الطرفين تتوسطهم إشارات المتراجحات، **(≤ أو ≥ أو =)**. حسب صياغة المسألة للمورد المتوفر أو اللازم للإنتاج.

ملاحظة مهمة: لصحة القيد لا يمكن أبدا مقارنة وحدات مختلفة (وهذا حتى خارج مجال الرياضيات)**.** بمعنى أن الطرفين الأيمن والأيسر يجب التعبير عنهم بنفس الوحدة تماما. فمثلا نجد الكثير من الأخطاء حتى من طرف المختصين في المجال، كمقارنة الكمية مع النسبة!

تمرين 2: تعظيم الأرباح

شركة تنتج سلعتين A، B. سعر البيع وتكلفة كل وحدة موضحة في الجدول التالي:

	السلعة A	السلعة B
سعر البيع	70	50
التكلفة	45	20

تقوم الشركة بإنتاج السلعتين في نفس العملية الإنتاجية. لكن تبيع كل منها في سوق مختلفة، حيث يبلغ حجم الطاقة المتاحة للإنتاج: 1500 ساعة عمل. ويحتاج انتاج B 4 ساعات عمل، بينما تحتاج السلعة A 3 ساعات. وبعد اجراء دراسة تسويقية اتضح أن المؤسسة تستطيع بيع 5000 وحدة منA و3500 وحدة من B كحد أقصى.

المطلوب: صياغة نموذج رياضي لهذه المسألة يعظم أرباح الشركة.

الحل:

ترميز المتغيرات:

x1 : كمية انتاج السلعة A

x2 : كمية انتاج السلعة B

$[Max]Z = (70-45)x_1 + (50-20)x_2$ دالة الهدف

S/c

$3x_1 + 4x_2 \leq 1500$ ساعات العمل

$x_1 \leq 5000$ كمية الانتاج

$x_2 \leq 3500$ كمية الانتاج

$x_1, x_2 \geq 0$

تمرين 3: تركيب الخليط

تقوم شركة لصناعة المواد الكيماوية للمنظفات بإنتاج مركب يستخدم في التنظيف يتكون من ثلاثة مركبات أساسية ويمر بثلاثة مراحل من التصنيع بحيث ساعات العمل التي يحتاجها كل مركب، موضحة كما يلي:

يحتاج المركب الأول في المرحلة الأولى 6 سا تركيب، والمرحلة الثانية 2 سا معاينة، والمرحلة الثالثة 5 سا تعبئة.

ويحتاج المركب الثاني في المرحلة الأولى 4 سا تركيب، والمرحلة الثانية 1 سا معاينة، والمرحلة الثالثة 3 سا تعبئة.

ويحتاج المركب الثالث في المرحلة الأولى 3 سا تركيب، والمرحلة الثانية 3 سا معاينة، والمرحلة الثالثة 3 سا تعبئة.

ويعمل العمال في المصنع 44 سا يوميا في قسم التركيب؛ و28 سا في قسم المعاينة و36 سا في قسم التعبئة.

حيث يحقق اللتر الواحد ربحا قدره 22 دج للمركب الأول و24 دج للمركب الثاني؛ و26 دج للمركب الثالث.

المطلوب: صياغة النموذج الخطي والذي يعظم الأرباح.

الحل:

ترميز المتغيرات:

x_1 : كمية انتاج المركب الأول.

x_2 : كمية انتاج المركب الثاني.

x_3 : كمية انتاج المركب الثالث.

دالة الهدف: $[Max]Z = 22x_1 + 24x_2 + 26x_3$

S/c

قسم التركيب: $6x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 44$

قسم المعاينة: $2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 28$

قسم التعبئة: $5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 36$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

تمرين 4: الاستثمار

يريد رجل أعمال استثمار مبلغ 5.000.000 دج في استثمارات مختلفة. يتمثل الاستثمار الأول في شراء أسهم لشركة " الأدوية " حيث يقدر عائدها ب 18%، مقابل درجة مخاطرة تقدر بشكل عام ب 16%. أما الإستثمار الثاني يتمثل في شراء أسهم لشركة " المكملات الغذائية" والتي يقدر عائدها ب 32%، مقابل درجة مخاطرة تقدر ب 22%. حيث يجب ألا تتجاوز الخسارة مبلغ 15.000 دج حالة وقوعها.

شكل النموذج الرياضي لهذه المسالة باعتبارها مسالة برمجة خطية لتعظيم الأرباح.

الحل:

-ترميز المتغيرات :

x1 المبلغ المستثمر في أسهم شركة الأدوية

x2 المبلغ المستثمر في أسهم شركة المكملات الغذائية

$[Max]Z = 0,18x_1 + 0,32x_2$ دالة الهدف

S/c

$0,16x_1 + 0,22x_2 \leq 15.000$ المخاطرة

$x_1 + x_2 = 5.000.000$ اجمالي الاستثمار

$x_1, x_2 \geq 0$

تمرين 5: تخطيط الانتاج

تنتج شركة نوعين من السلع: الأول زيت؛ والثاني سكر. بحيث:

يحتاج الزيت 9 ساعات في قسم التصنيع؛ و4 ساعات في قسم التغليف.

ويحتاج السكر 5 ساعات في قسم التصنيع؛ و3 ساعات في قسم التغليف.

يعمل في المصنع عمال بواقع 18 ساعة يوميا في قسم التصنيع؛ و12 ساعة في قسم التغليف.

يحقق الزيت ربحا بمقدار 22 دينار للوحدة الواحدة ويحقق الثاني 11 دينار للوحدة الواحدة.

المطلوب: صياغة البرمجة الخطية والذي يعظم الأرباح.

الحل:

ترميز المتغيرات:

x_1 : كمية انتاج الزيت.

x_2 : كمية انتاج السكر.

$$[Max]Z = 22x_1 + 11x_2$$ الـ هدف

S/c

$9x_1 + 5x_2 \le 18$ م الـ تـ صـ نـ يـع

$4x_1 + 3x_2 \le 12$ قـ سم الـ تـ غـ لـ يـ ف

$x_1, x_2 \ge 0$

تمرين 6: تخطيط الانتاج

شركة لصناعة الأثاث المنزلي تنتج 3 أنواع: (طاولات، كراسي، خزانات). بيانات التشغيل موضحة في الجدول التالي:

النوع	الطاولات	الكراسي	الخزانات	الموارد
مواد أولية	50	35	65	220
ساعات العمل	4	3	9	180
الآلات	3	2	5	28
ربح الوحدة	350	250	950	/

المطلوب: صياغة النموذج الخطي الذي يعظم الأرباح.

الحل:

ترميز المتغيرات:

x_1 : كمية انتاج الطاولات.

x_2 : كمية انتاج الكراسي.

x_3 : كمية انتاج الخزانات.

$$[Max]Z = 350x_1 + 250x_2 + 950x_3$$ دالـ ة الـ هدف

S/c

$50x_1 + 35x_2 + 65x_3 \le 220$ مـواد أولـ يـ ة

$4x_1 + 3x_2 + 9x_3 \le 180$ ساعـات الـ عمـ ل

$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 28$ الألا ت

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

تمرين 7: أقسام الانتاج

شركة تنتج 3 أنواع من الملابس: (رجال، نساء، أطفال). الساعات اللازمة للتشغيل موضحة في الجدول التالي:

المنتج	القسم الأول	القسم الثاني	القسم الثالث	الربح
ملابس رجال	4	5	3	900
ملابس نساء	7	6	4	1.200
ملابس أطفال	3	4	3	600
الساعات المتاحة	48	65	35	/

المطلوب: صياغة النموذج الخطي والذي يعظم الأرباح.

الحل:

ترميز المتغيرات:

x_1 : كمية انتاج ملابس رجال.

x_2 : كمية انتاج ملابس نساء.

x_3 : كمية انتاج ملابس أطفال.

دالة الهدف

$$[Max]Z = 900x_1 + 1200x_2 + 600x_3$$

$$S/c$$

القسم الأول

$$4x_1 + 7x_2 + 3x_3 \leq 48$$

القسم الثاني

$$5x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 65$$

القسم الثالث

$$3x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 35$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

تمرين 8: مراحل الانتاج

شركة لانتاج العصائر، تنتج 3 أنواع أساسية. تمر عبر 4 مراحل للإنتاج. البيانات يوضحها الجدول:

المنتج	النوع 1	النوع 2	النوع 3	المورد (ساعة)
المرحلة 1 (ساعة)	3	2	3	60
المرحلة 2 (ساعة)	1	1	2	30
المرحلة 3 (ساعة)	4	3	4	40
المرحلة 4 (ساعة)	5	5	3	50
الأرباح	13	15	18	/

المطلوب: صياغة النموذج الخطي والذي يعظم الأرباح.

الحل:

ترميز المتغيرات:

x_1 : حجم انتاج النوع 1.

x_2 : حجم انتاج النوع 2.

x_3 : حجم انتاج النوع 3.

دالة الهدف $[Max]Z = 13x_1 + 15x_2 + 18x_3$

S/c

المرحلة 1 $3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 60$

المرحلة 2 $x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 30$

المرحلة 3 $4x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 40$

المرحلة 4 $5x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 50$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

تمرين 9: مخطط الإنتاج

تقوم إحدى الشركات المتخصصة في صناعة الأثاث بصناعة ثلاثة أنواع: خزانة؛ طاولة وسرير. وتستعمل هذه الشركة في عملية الإنتاج مادتين أوليتين هما الخشب والحديد حيث تتوفر كمية مقدارها 8000 قطعة خشبية و4000 قطعة حديدية. أما الكميات اللازمة من هذه المواد لصناعة الأثاث فهي كما يلي:

المادة الأولية	الكمية اللازمة لكل أثاث (قطعة)		
	خزانة	طاولة	سرير
الحديد	12	4	4
خشب	18	6	15

أما الوقت المخصص لصناعة سرير فهو يساوي ساعتان والوقت المخصص لصناعة طاولة ساعة ونصف وثلاثة ساعات لصناعة خزانة. أما الطاقة الإنتاجية للشركة فهي تساوي إنتاج 500 سرير. أما المبيعات المقدرة لكل أثاث فهي تساوي 125 وحدة على الأقل من كل نوع. كما أنه لأسباب تقنية يجب إنتاج عدد من خزانات يكون ضعف عدد الأسرة. أما الربح الخاص بكل أثاث فهو 2000 دينار عن خزانة 800 عن طاولة و1200 عن السرير. مع العلم أن عدد ساعات العمل المتاحة يوميا هو220 ساعة.

المطلوب: إيجاد البرنامج الخطي الذي يسمح بإيجاد خطة الإنتاج المثلى التي تسمح بتعظيم الأرباح.

الحل:

ترميز المتغيرات:

x_1 كمية انتاج الخزانات

x_2 كمية انتاج الطاولات

x_3 كمية انتاج الأسرة

دال ة ال هدف	$[Max]Z = 2000x_1 + 800x_2 + 1200x_3$
	S/c
ال حدي د	$12x_1 + 4x_2 + 4x_3 \leq 4000$
ال خ شـ ب	$18x_1 + 6x_2 + 15x_3 \leq 8000$
ساعات ال عمل	$3x_1 + 1.5x_2 + 2x_3 \leq 220$
ال م ب ي عا ت	$x_1 \geq 125$
ال م ب ي عا ت	$x_2 \geq 125$
ال م ب ي عا ت	$x_3 \leq 500$
ال م ب ي عا ت	$x_1 = 2x_3$
	$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

تمرين 10: اقتناء وحدات لتدنية تكاليف النقل

تريد شركة للنقل اقتناء نوعين من الحافلات، كلفة الحافلة من النوع A 6 مليون دج وتتسع ل 26 مسافرا في حين تكلف الحافلة من النوع B 8 مليون دج وتتسع ل 52 مسافرا. وأن مرآب الشركة يتسع ل 100 حافلة على الأكثر مهما كان نوعها، كما أن القرض الممنوح من البنك محدد بعدم تجاوز مبلغ 750 مليون دج. وأن تعدد المسارات بين مختلف الأحياء يتطلب اقتناء على الأقل 36 حافلة من النوع A و28 حافلة من النوع B. ولتحقيق مردودية كافية يجب ألا يقل عدد المقاعد عن 3200 مقعد، وأن عدد الحافلات من النوع B يجب ألا يقل عن ثلث الحافلات الإجمالية.

المطلوب: صياغة النموذج الخطي للمسألة.

الحل:

ترميز المتغيرات:

x_1 : عدد الحافلات من النوع A

x_2 : عدد الحافلات من النوع B

دال ة ال هدف $[Min]\, Z = 6x_1 + 8x_2$

S/c

ال م يزان ية $6x_1 + 8x_2 \le 750$

ال مراب $x_1 + x_2 \le 100$

ع دد ال حاف لا ت $x_1 \ge 36$

ع دد ال حاف لا ت $x_2 \ge 28$

$x_2 \ge \frac{1}{3}(x_1 + x_2)$

ع دد ال م قاع د $26x_1 + 52x_2 \ge 3200$

$x_1, x_2 \ge 0$

تمرين 11: استثمار البنك

أراد بنك استثمار مبلغ قدره 50 مليون دينار كقروض، موزعة على 5 فئات: قروض شخصية، قروض شراء سيارات، قروض عقارية، قروض زراعية وقروض استثمار. وكان معدل الفائدة لكل قرض على التوالي: 15% 14.5% 12% 17% 16%

وبعد اجراء خبرة تبين أن معدل الديون المعدومة لهذه القروض هي على التوالي: 12% 8% 6% 4% 9%

مع العلم أن الديون المعدومة لا يمكن تحصيلها. كما أن حالة المنافسة تستوجب على البنك تخصيص 40% من المبلغ الإجمالي في قروض العقارات والقروض الزراعية. ولدعم حركة العمران يجب ألا يقل القرض العقاري عن 50% من القروض الشخصية وقروض السيارات، القروض العقارية. وأن البنك يحدد من معدل الديون المعدومة ألا تزيد عن 5%

معدل الديون المعدومة = مجموع الأموال غير المحصّلة / مجموع الاستثمارات

المطلوب: صياغة نموذج رياضي لهذه المسألة

الحل:

ترميز المتغيرات:

X_1 المبلغ المستثمر في القروض الشخصية

X_2 المبلغ المستثمر في قروض شراء السيارات

X_3 المبلغ المستثمر في القروض العقارية

X_4 المبلغ المستثمر في القروض الزراعية

X_5 المبلغ المستثمر في قروض الاستثمار

ة ال هدف

$$[Max]Z = (0{,}15 \times 0{,}88)x_1 + (0{,}145 \times 0{,}92)x_2 +$$
$$(0{,}12 \times 0{,}94)x_3 + (0{,}17 \times 0{,}91)x_4 + (0{,}16 \times 0{,}96)x_5$$

S/c

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \le 50.000.000$$ اجمالي الاستثمار

$$x_3 + x_4 \ge 0{,}4(50.000.000)$$

$$x_3 \ge 0{,}5(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$\frac{0{,}12x_1 + 0{,}08x_2 + 0{,}06x_3 + 0{,}9x_4 + 0{,}4x_5}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5} \le 0{,}05$$ المخاطرة

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$$

تمرين 12: تركيب الخليط لتدنية تكاليف الانتاج

تنتج شركة أنواع مختلفة من الأسمدة الزراعية. استلمت الشركة طلبيه للحصول على 58.000 كلغ من أسمدة معينة. ويتكون هذا النوع من الأسمدة من ثلاثة مركبات هي a, b, c والمواصفات المطلوبة لذلك السماد كما وردت في الطلبية مبينة كما يلي:

1- يجب أن يحتوي السماد على الأقل 8.000 كلغ من المركب a.

2- يجب أن يحتوي السماد على الأكثر من 12.000 كلغ من المركب b.

3- يجب أن يحتوي السماد على الأقل 6.000 كلغ من المركب c.

وإذا علمت أن كلفة كلغ من المركب a تساوي 5 دينار وكلفة كلغ من المركب b تساوي 8 دينار وكلفة كلغ من المركب c تساوي 12 دينار.

المطلوب: صياغة النموذج الخطي لتدنية التكاليف.

الحل:

ترميز المتغيرات:

x_1 : الكمية المنتجة من المركب a

x_2 : الكمية المنتجة من المركب b

x_3 : الكمية المنتجة من المركب c

دال ة ال هدف $[Min]\, Z = 5x_1 + 8x_2 + 12x_3$

S/c

ال ط ل ب ية $x_1 + x_2 + x_3 = 58.000$

ك م ية ال م كون ف ي ال سما د $x_1 \geq 8.000$

$x_2 \leq 12.000$

$x_3 \geq 6.000$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

تمرين 13: الاسكان

يريد مقاول بناء عدة مباني، تكون بعض هذه المباني ذات 5 طوابق والبعض الآخر ذات طابقين. فكم عدد كل نوع من هذه المباني ينبغي بناءه كي تستوعب أكبر عدد من السكان؟ علما أن البيانات موضحة في الجدول الآتي:

عدد الطوابق	تكلفة المبنى	ساعات العمل اللازمة لكل مبنى	المساحة اللازمة لكل المبنى	عدد السكان في المبنى الواحد
5	95 م د	140	750	35
2	45 م د	80	550	14

باعتبار المبلغ المتوفر 4.800.000.000 دج وساعات العمل المتاحة 7500، مع مساحة أرض اجمالية تبلغ 55000م^2

الحل:

ترميز المتغيرات:

x_1 عدد المباني المنجزة ذات 5 الطوابق

x_2 عدد المباني المنجزة ذات طابقين

دال ة ال هدف $[Max]\, Z = 35x_1 + 14x_2$

S/c

ت ك ل فة ال م ب ن ى ب ال م ل يون دي نار $95x_1 + 45x_2 \leq 4800$

ال م ساح ة $750x_1 + 550x_2 \leq 55000$

ساعات ال عم ل $140x_1 + 80x_2 \leq 7500$

$x_1, x_2 \geq 0$

تمرين 14: تلبية الطلبية مع تدنية التكاليف

شركة انتاج مواد كمياوية استلمت طلبية للحصول على 25.000 طن من خليط يحتوي على ثلاث مركبات بمواصفات وشروط محددة وهي:

يجب أن يحتوي الخليط على الأكثر من 550 طن من المركب الأول

يجب أن يحتوي الخليط على الأقل 810 طن من المركب الثاني

يجب أن يحتوي الخليط على الأقل 720 طن من المركب الثالث

وأن تكلفة الطن الواحد من المركب الأول 56.000 دينار والمركب الثاني 72.000 دينار؛ والمركب الثالث 96.000 دينار

المطلوب: صياغة النموذج الخطي لتدنية التكاليف.

الحل:

ترميز المتغيرات:

x_1 : الكمية المنتجة من المركب 1

x_2 : الكمية المنتجة من المركب 2

x_3 : الكمية المنتجة من المركب 3

$[Min]Z = 56.000x_1 + 72.000x_2 + 96.000x_3$ دالة الهدف

S/c

$x_1 + x_2 + x_3 = 25.000$ الطلبية

$x_1 \leq 550$ المركب الأول

$x_2 \geq 810$ المركب الثاني

$x_3 \geq 720$ المركب الثالث

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

تمرين 15: تركيب مواد غذائية

حليب أطفال مركب من ثلاث أنواع أساسية. تدخل في تركيبه 3 مركبات غذائية.

النوع	المكون 1	المكون 2	المكون 3	التكلفة
النوع 1	2	4	0	280
النوع 2	1	6	3	340
النوع 3	0	3	1	230
الموارد اللازمة للحليب	35 كلغ	31 كلغ	28 كلغ	/

المطلوب: صياغة النموذج الخطي لتدنية التكاليف.

الحل:

ترميز المتغيرات:

x_1 : الكمية المنتجة من النوع 1

x_2 : الكمية المنتجة من النوع 2

x_3 : الكمية المنتجة من النوع 3

$$[Min]Z = 280x_1 + 340x_2 + 230x_3$$ دالة الهدف

$$S/c$$

$$2x_1 + x_2 \geq 35$$ المكون الأول

$$4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \geq 31$$ المكون الثاني

$$3x_2 + x_3 \geq 28$$ المكون الثالث

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

التمرين 16: توظيف العمال

يقوم نوعين من المفتشين بفحص المنتجات الصناعية في إحدى الشركات، يتوقع أن يتم فحص ما لا يقل عن 2600 وحدة من المنتج. فإذا علمت بأن المفتش a يستطيع فحص 35 قطعة في الساعة وبدقة 95 % مع 8 ساعات عمل/يوم. ويستطيع المفتش b فحص 22 قطعة بدقة 98%، إن الأجور المدفوعة لكلا النوعين من المفتشين هي 9 وحدات نقدية في الساعة للمفتش a و6 وحدات نقدية في الساعة للمفتش b.و عدد المفتشين الموجودين في المؤسسة هو 21 من النوع a و14 من النوع b

المطلوب صياغة المسألة في شكل نموذج خطي لتحديد العدد الأمثل من المفتشين المستخدمين.

الحل: ترميز المتغيرات:

x_1 : عدد المفتشين المستخدمين من النوع a

x_2 : عدد المفتشين المستخدمين من النوع b

كلفة الساعة الواحدة للمفتش من النوع a = $9 + (35 * 0.05)$

كلفة الساعة الواحدة للمفتش من النوع b = $6 + (22 * 0.02)$

$$[Min]Z = [9 + (35 \times 0.05)x_1 + 6 + (22 \times 0.02)\ x_2] \times 8$$ الهدف في اليوم

$$S/c \quad x_1 \leq 21$$ عدد المفتشين من النوع الأول

$$x_2 \leq 14$$ عدد المفتشين من النوع الثاني

$$(35 \times 8)x_1 + (22 \times 8)x_2 \geq 2600$$ عدد الوحدات المنتجة

$$x_1, x_2 \geq 0$$

التمرين 17: توقع متطلبات السوق

تنتج شركة نوعين من الأحذية، الأحذية للرجال وأخرى للنساء، سعر بيع كل حذاء رجالي 4500 دج و 7200دج لكل حذاء نسائي .وحسب متطلبات السوق لا يجب أن يتعدى إنتاج النوعين 1200 وحدة و2500 وحدة على التوالي أسبوعيا .يتوافر لدى المؤسسة 35 عامل ويشتغل كل عامل 8 ساعات يوميا و5 أيام أسبوعيا .مدة صنع حذاء النساء ضعف مدة صنع الحذاء الرجالي حيث يحتاج صنع الحذاء الرجالي 3 ساعات. يكلف تصنيع الحذاء الرجالي 3600 دج و5300 دج للحذاء النسائي.

المطلوب :صياغة البرنامج الخطي لتحديد كمية الإنتاج اللازمة من الأحذية للوفاء بمتطلبات السوق المتوقع.

الحل:

ترميز المتغيرات:

x_1 : كمية الإنتاج من الأحذية الرجالية أسبوعيا

x_2 : كمية الإنتاج من الأحذية النسائية أسبوعيا

$[Max]Z = (4500-3600)x_1 + (7200-5300)\ x_2$ دالة الهدف

S/c

$3x_1 + 6x_2 \le (35 \times 8 \times 5)$ عدد الساعات

$x_1 \le 1200$ متطلبات السوق

$x_2 \le 2500$ متطلبات السوق

$x_1, x_2 \ge 0$

تمرين 18: تغدية الأنعام

استلمت شركة لأغدية الأنعام طلبية لمركب غداء حيواني، مكون من ثلاث أنواع أساسية. كل نوع يتكون من 4 مركبات (كربوهيدرات، دهون، بروتين، فيتامين)

النوع	1	2	3
كربوهيدرات	12	8	6
دهون	10	6	4
بروتين	11	12	8
فيتامين	7	8	6
التكلفة	180	220	340

وأن الأنعام تحتاج 40 وحدة من كربوهيدرات، و60 وحدة من دهون، و80 وحدة من بروتين، و50 وحدة من فيتامين.

المطلوب :صياغة البرنامج الخطي لتحديد كمية الإنتاج اللازمة لتلبية احتياجات الأنعام في التغدية.

الحل:

ترميز المتغيرات:

x_1 : الكمية المنتجة من النوع 1

x_2 : الكمية المنتجة من النوع 2

x_3 : الكمية المنتجة من النوع 3

دالـ ـة الـ هدف	$[Min]Z = 180x_1 + 220x_2 + 340x_3$
	S/c
كـ ربـ وهـ يدرا ت	$12x_1 + 8x_2 + 6x_3 \geq 40$
دهو ن	$10x_1 + 6x_2 + 4x_3 \geq 60$
بـ روتـ يـ ن	$11x_1 + 12x_2 + 8x_3 \geq 80$
فـ يـ تامـ يـ ن	$7x_1 + 8x_2 + 6x_3 \geq 50$
	$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

4-1 طرق حل مسائل البرمجة الخطية:

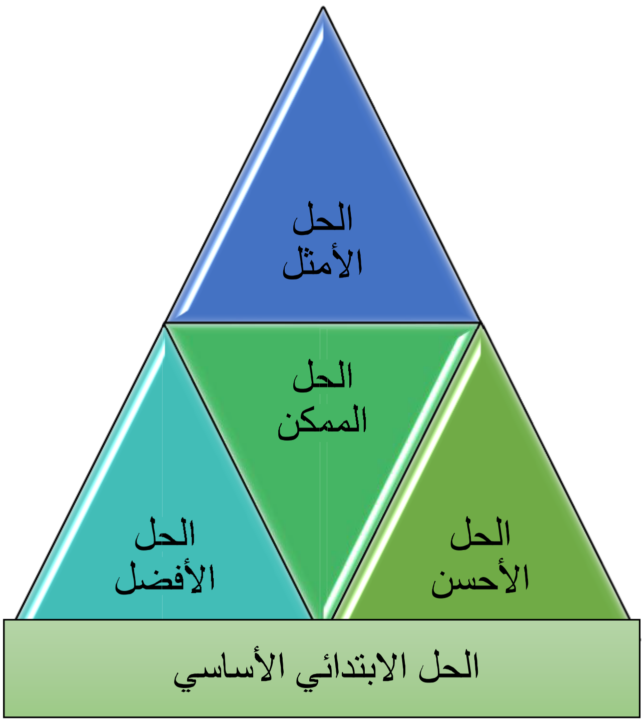
تعتبر خطوة صياغة النموذج الخطي مهمة، لكنها مجرد الخطرة الأولى التي يعتمدها متخذ القرار، حيث يجب توفر قيم الحل الأمثل لذلك النموذج من أجل اتخاذ القرار الصحيح. ولذلك نجد عدة طرق يتم بواسطتها حل مسائل البرمجة الخطية ويعتمد استخدام أحد هذه الطرق على طبيعة وحجم المسألة موضوع الدراسة من حيث عدد المتغيرات والقيود. ومن أهم هذه الطرق نذكر: (الأسطل، 2016)

1- الطريقة البيانية Graphical method
2- طريقة السمبلكس Simplex method

قبل التطرق الى طرق الحل يجب فهم والتمييز بين مصطلحات الحلول المختلفة:

- **الحل الابتدائي الأساسي الممكن:** Initial Basic Feasible Solution هو حل مقبول رياضيا، لكنه غير مقبول اقتصاديا، لأنه ابتدائي، بحيث يكون عنده الإنتاج معدوم.
- **الحل الممكن:** Feasible Solution هو حل مقبول رياضيا، ويمكن قبوله اقتصاديا، إذا لم يكن ابتدائي أي أن الإنتاج عنده غير معدوم.
- **الحل الأفضل (الأحسن):** Better Solution هو حل ممكن ومقبول اقتصاديا لكن يمكننا تحسين الحل بعده.
- **الحل الأمثل:** Optimal Solution هو الحل الذي نسعى الى تحقيقه بعدة طرق. لأنه الأفضل على الاطلاق. حيث لا يمكن تحسين الحل بعده.

ملاحظة: كل الحلول المقبولة تعتبر حلولا ممكنة، بمعنى إذا لم يتوفر الحل الممكن، لا يمكن إيجاد حل أمثل.



المصدر: من اعداد الباحث

2- الفصل الثاني: الطريقة البيانية Graphical method

2-1- أسس تطبيق الطريقة البيانية:

2-1-1- الطريقة البيانية:

تستعمل الطريقة البيانية كمدخل في البرمجة الخطية لحل المسائل البسيطة حيث يمكن حل النموذج الرياضي بالطريقة الرسم البيانية عندما يكون النموذج الرياضي متكون من متغيرتين فقط لكي نتمكن من رسمها على الرسم البياني ثنائي الأبعاد. أو استخدام رسم في معلم ثلاثي الأبعاد في حالة وجود 3 متغيرات، لكنها تحتاج الى برامج الحاسوب لصعوبة تطبيقها يدويا. أما عند تعقد المسألة موضوع البرمجة (عند وجود أكثر من متغيرين في المسألة) فإن الطريقة البيانية تصبح غير قادرة على إيجاد حل لتلك المسألة ولا بد من استعمال طريقة السمبلكس أو غيرها من الطرق. ولكن استخدام هذه الطريقة يعتبر مدخلاً لفهم واستيعاب طريقة الحل، حيث تبين صورة واضحة لاحتمالات الحل الأمثل للنموذج الرياضي.

2-1-2- خطوات حل النموذج الخطي بالطريقة البيانية: (راتول، 2006)

يجب إتباع مجموعة من الخطوات لحل النموذج الخطي بالطريقة البيانية، والوصول الى الحل الأمثل:

1- **رسم مستقيمات القيود في منحنى بياني**: ذلك لإمكانية تمثيل كل قيد بخط مستقيم. في معلم متعامد ومتجانس. حيث المحور الأفقي يمثل X_1، والمحور العمودي يمثل X_2.
- نحول المتراجحات الى معادلات، لنتمكن من رسمها.
- نحدد احداثيات نقطتين لكل قيد.
- نرسم المستقيمات التي تمثل القيود.

2- **تحديد منطقة الحلول الممكنة المشتركة:**

أ- نحدد منطقة الحلول الممكنة لكل قيد وحده. وذلك حسب نوع إشارته.
- إذا كان القيد من الشكل $\leq$ فان منطقة الحلول الممكنة للقيد تكون تحت الخط المستقيم.
- إذا كان القيد من الشكل $\geq$ فان منطقة الحلول الممكنة للقيد تكون فوق الخط المستقيم.
- إذا كان القيد من الشكل $=$ فان منطقة الحلول الممكنة للقيد تكون تنتمي للخط المستقيم.

ب- نحدد منطقة الحلول الممكنة المشتركة التي تحقق كل القيود.

3- **تحديد احداثيات النقط الحدية:** الحل الأمثل يقع على أحد النقاط الحدية لزوايا المضلع الذي يمثل منطقة الحلول الممكنة المشتركة. لذلك نستعين بجدول لتحديد احداثيات النقط الحدية.
- النقط التي تتقاطع مع المحور العمودي أو الأفقي نستنتج احداثياتها من المنحنى البياني.
- النقط التي تمثل تقاطع بين قيدين نحدد احداثياتها من خلال حل جملة حل معادلتين بين معادلتي القيدين المعنيين بالتقاطع.

4- **يتم حساب قيم دالة الهدف Z** المقابلة لكل نقطة، ذلك بتعويض احداثياتها في دالة الهدف. من خلال تشكيل جدول ينظم عملية الحل.

5- اتخاد القرار: تكون الإجابة عبارة عن تفسير الحل الأمثل اقتصاديا، من خلال استنتاج الحل الأمثل من الجدول وذلك باختيار:

- احداثيات النقطة التي تقابل أكبر قيمة لـ Z في حالة Max.
- احداثيات النقطة التي تقابل أقل قيمة لـ Z في حالة Min، باستثناء الصفر. لأن الإنتاج يكون عندها معدوم.

2-2- تمارين محلولة باستخدام الطريقة البيانية:

تمرين 1: ليكن لدينا النموذج القانوني مع قيدين، المطلوب: إيجاد الحل الأمثل بالطريقة البيانية.

$$[Max]Z = 5x_1 + 4x_2$$
$$S/c$$
$$3x_1 + 5x_2 \le 15$$
$$4x_1 + 2x_2 \le 12$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

نطبق الخطوات التالية للوصول إلى الحل الأمثل:

1- **رسم مستقيمات القيود في منحنى بياني:** بتحويل المتراجحات إلى معادلات، ذلك لرسم المستقيمات، نعلم أن كل مستقيم يمكن رسمه باستخدام نقطتين. لذلك نقوم بتحديد الاحداثيات لنقطتين بالنسبة لكل مستقيم، كما يلي:

$$3x_1 + 5x_2 = 15$$
$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = ?$$
$$\Rightarrow 3(0) + x_2 2 = 15$$
$$\Rightarrow 5x_2 = 15$$
$$\Rightarrow x_2 = 15/5 = 3$$
$$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = ?$$
$$\Rightarrow 3x_1 + 5(0) = 15$$
$$\Rightarrow 3x_1 = 15$$
$$\Rightarrow x_1 = 15/3 = 5$$

x_1	0	5
x_2	3	0

$4x_1 + 2x_2 = 12$

$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = ?$

$\Rightarrow 4(0) + 2x_2 = 12$

$\Rightarrow 2x_2 = 12$

$\Rightarrow x_2 = 12/2 = 6$

$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = ?$

$\Rightarrow 4x_1 + 2(0) = 12$

$\Rightarrow 4x_1 = 12$

$\Rightarrow x_1 = 12/4 = 3$

x_1	0	3
x_2	6	0

2- تحديد منطقة الحلول الممكنة المشتركة:

نقوم بتحديد منطقة الحلول الممكنة بالنسبة لكل قيد حسب اشارته. في هذه الحالة كل القيود ($\leq$) اذن منطقة الحل تحت المستقيمات.

ثم نحدد منطقة الحلول الممكنة المشتركة، التي تحقق كافة القيود. والتي تمثل بيانيا منطقة تقاطع الحلول الممكنة بالنسبة لكافة القيود.

3-تحديد احداثيات النقط الحدية: الحل الأمثل يقع على أحد النقاط الحدية لزوايا المضلع A , B ,C, D، نلاحظ أن قيم إحداثيات النقاط A, B, D معروفة. أما النقطة C الناتجة من تقاطع المستقيمين 1 و 2 فلا

يمكن تقدير قيم إحداثياتها بدقة من الشكل، لذلك يتم إيجادها من خلال حل جملة معادلتين للمستقيمين المعنيين بالتقاطع.

$$(\mathbf{3}x_1 + \mathbf{5}x_2 = \mathbf{15}) \times 4 \Rightarrow 12x_1 + 20x_2 = 60$$

$$(\mathbf{4}x_1 + \mathbf{2}x_2 = \mathbf{12}) \times 3 \Rightarrow 12x_1 + 6x_2 = 36$$

بطرح المعادلتين نتحصل على معادلة ذات مجهول واحد: $0x_1 + 14x_2 = 24 \Rightarrow x_2 = \mathbf{12/7}$

نعوض قيمة x_2 في أحد المعادلتين لاستنتاج قيمة x_1

$$3x_1 + 5(12/7) = 15 \Rightarrow 3x_1 = -60/7 + (7 \times 15)/7 \Rightarrow x_1 = (45/3)/7 \Rightarrow x_1 = \mathbf{15/7}$$

4-يتم حساب قيم دالة الهدف Z المقابلة لكل نقطة، ذلك بتعويض احداثياتها في دالة الهدف.

احداثيات النقط الحدية (x_1,x_2)	قيمة دالة الهدف $Z=5x_1+4x_2$
A(0,0)	5(0)+4(0)=0
B(3,0)	5(3)+4(0)=15
C(15/7,12/7)	5(15/7)+4(12/7)=123/7
D(0,3)	5(0)+4(3)=12

5-اتخاذ القرار واستنتاج الحل الأمثل: قيمة دالة الهدف التي تحقق أقصى ربح تتمثل في $Z=123/7$ تقابل النقطة الحدية C ذات الاحداثيات (15/7,12/7)

وعليه فان الحل الأمثل للبرنامج الخطي يكون: $x_1=15/7, x_2=12/7$ و $Z=123/7$

- اقتصاديا: في حالة الإنتاج لا يمكن انتاج وحدات غير تامة، لذلك عند الحصول على قيم كسرية في الحل الأمثل، الأصح أن نكمل الحل بستخدام طريقة البرمجة بالأعداد الصحيحة، للوصول الى الحل الأمثل بأعداد طبيعية بالنسبة لمتغيرات الإنتاج X_i، لكن باعتبار أن الطريقة ليست محتواة في البرنامج، يمكننا أن نكتفي بتقريبها الى قيم طبيعية،

الإجابة الاقتصادية: على الشركة انتاج وحدتين من x_1 ووحدتين من x_2 لتحقيق أقصى ربح يقدر ب: 18 وحدة نقدية.

تمرين 2: ليكن لدينا النموذج المختلط المتكون من قيدين، المطلوب: إيجاد الحل الأمثل بالطريقة البيانية.

$$\begin{aligned}
&[MAX]Z = 8x_1 + 12x_2 \\
&S/c \\
&\quad 8x_1 + 4x_2 = 16 \\
&\quad 6x_1 + 2x_2 \leq 24 \\
&\quad x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

1- **رسم مستقيمات القيود في منحنى بياني:** بتحويل المتراجحات إلى معادلات، ذلك لرسم المستقيمات، نعلم أن كل مستقيم يمكن رسمه باستخدام نقطتين. لذلك نقوم بتحديد الاحداثيات لنقطتين بالنسبة لكل مستقيم، كما يلي:

$8x_1 + 4x_2 = 16$

$x1$	0	2
$x2$	4	0

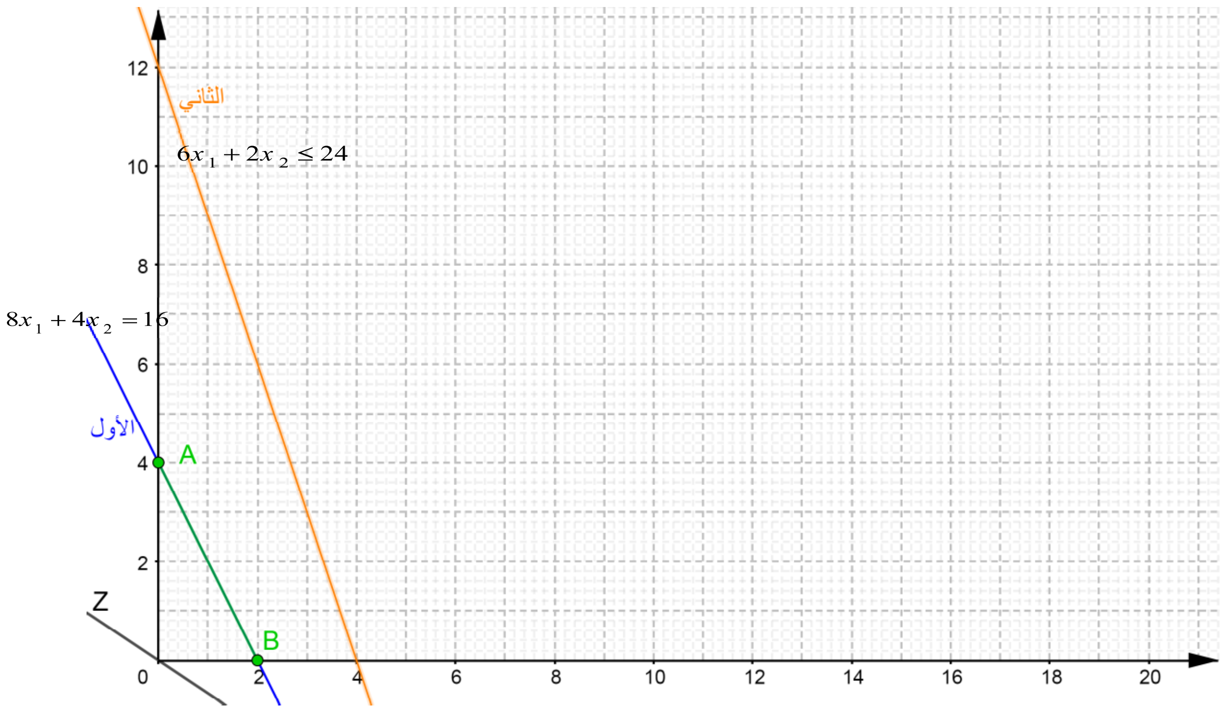
$6x_1 + 2x_2 = 24$

$x1$	0	4
$x2$	12	0

2- **تحديد منطقة الحلول الممكنة المشتركة:**

نقوم بتحديد منطقة الحلول الممكنة بالنسبة لكل قيد حسب اشارته. في هذه الحالة هناك قيد (≤) وآخر (=) اذن منطقة الحل الممكن للقيد الثاني تكون تنتمي لمستقيمه فقط.

ثم نحدد منطقة الحلول الممكنة المشتركة، التي تحقق كافة القيود. والتي تمثل بيانيا منطقة تقاطع الحلول الممكنة بالنسبة لكافة القيود. اذن منطقة الحلول الممكنة المشتركة تكون تنتمي لقيد المساواة فقط.



3- **تحديد احداثيات النقط الحدية:** الحل الأمثل يقع على أحد النقاط الحدية لزوايا المضلع C,. B , A

4- **يتم حساب قيم دالة الهدف Z** المقابلة لكل نقطة، ذلك بتعويض احداثياتها في دالة الهدف.

احداثيات النقط الحدية (x_1,x_2)	قيمة دالة الهدف $Z=8x_1+12x_2$
$A\ (0,4)$	$8(0)+12(4)=48$
$B(2,0)$	$8(2)+12(0)=16$

5- **اتخاد القرار واستنتاج الحل الأمثل:** قيمة دالة الهدف التي تحقق أقصى ربح تتمثل في $Z=48$ تقابل النقطة الحدية A ذات الاحداثيات (0,4)

وعليه فان الحل الأمثل للبرنامج الخطي يكون: $x_1=0,\ x_2=4$ و $Z=48$

الإجابة الاقتصادية: على الشركة عدم انتاج أي وحدة من x_1 و4 وحدات من x_2 لتحقيق أقصى ربح يقدر ب: 48 وحدة نقدية.

تمرين 3: ليكن لدينا النموذج المختلط مع قيدين، المطلوب: إيجاد الحل الأمثل بالطريقة البيانية.

$$
\begin{aligned}
&[MAX]Z = 10x_1 + 14x_2\\
&S/c\\
&\quad 10x_1 + 4x_2 \geq 20\\
&\quad 6x_1 + 3x_2 \leq 24\\
&\quad x1, x2 \geq 0
\end{aligned}
$$

1- **رسم مستقيمات القيود في منحنى بياني:** بتحويل المتراجحات إلى معادلات، ذلك لرسم المستقيمات، نعلم أن كل مستقيم يمكن رسمه باستخدام نقطتين. لذلك نقوم بتحديد الاحداثيات لنقطتين بالنسبة لكل مستقيم، كما يلي:

$10x_1+4x_2=20$

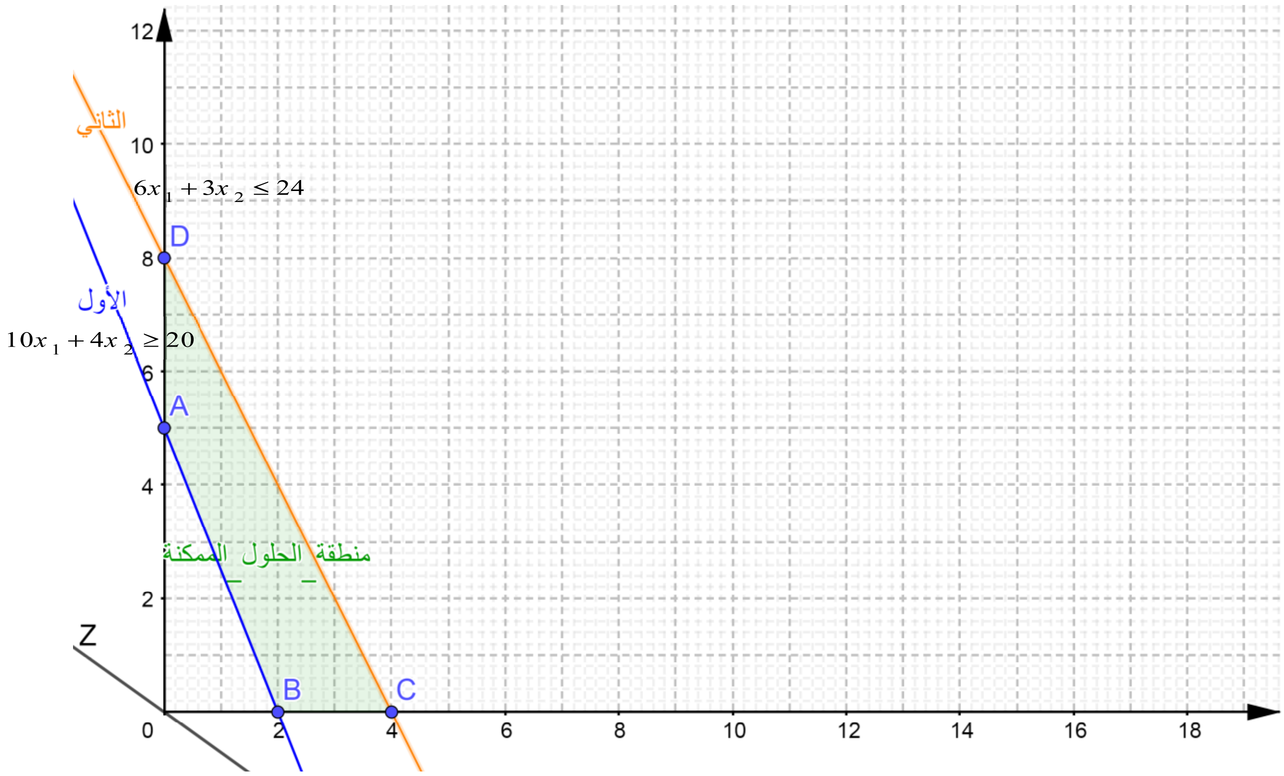
x_1	0	2
x_2	5	0

$6x_1+3x_2=24$

x_1	0	4
x_2	8	0

2- **تحديد منطقة الحلول الممكنة المشتركة:**

نقوم بتحديد منطقة الحلول الممكنة بالنسبة لكل قيد حسب اشارته. في هذه الحالة هناك قيد ($\leq$) وقيد ($\geq$) ثم نحدد منطقة الحلول الممكنة المشتركة، التي تحقق كافة القيود. والتي تمثل بيانيا منطقة تقاطع الحلول الممكنة بالنسبة لكافة القيود. اذن منطقة الحل بين المستقيمين.



3- **تحديد احداثيات النقط الحدية:** الحل الأمثل يقع على أحد النقاط الحدية لزوايا المضلع A , B ,C, D.

4- **يتم حساب قيم دالة الهدف Z** المقابلة لكل نقطة، ذلك بتعويض احداثياتها في دالة الهدف.

قيمة دالة الهدف $Z=10x_1+14x_2$	احداثيات النقط الحدية (x_1,x_2)
$10(0)+14(5)=70$	$A(0,5)$
$10(2)+14(0)=20$	$B(2,0)$
$10(4)+14(0)=40$	$C(4,0)$
$10(0)+14(8)=112$	$D(0,8)$

5- **اتخاذ القرار واستنتاج الحل الأمثل:** قيمة دالة الهدف التي تحقق أقصى ربح تتمثل في $Z=112$ تقابل النقطة الحدية D ذات الاحداثيات (0,8) و عليه فان الحل الأمثل للبرنامج الخطي يكون:
$x_1=0, x_2=8$ و $Z=112$

الإجابة الاقتصادية: على الشركة عدم انتاج أي وحدة من x_1 وإنتاج 8 من x_2 لتحقيق أقصى ربح قدره: 112 وحدة نقدية.

تمرين 4: ليكن لدينا النموذج المختلط مع 3 قيود، المطلوب إيجاد الحل الأمثل بالطريقة البيانية.

$$
\begin{aligned}
&[MAX]Z = 10x_1 + 14x_2 \\
&S/c \\
&\quad 4x_1 + 8x_2 \geq 32 \\
&\quad 5x_1 + 8x_2 \leq 80 \\
&\quad 3x_1 \leq 48 \\
&\quad x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

1- رسم مستقيمات القيود في منحنى بياني: بتحويل المتراجحات إلى معادلات، ذلك لرسم المستقيمات، نعلم أن كل مستقيم يمكن رسمه باستخدام نقطتين. لذلك نقوم بتحديد الاحداثيات لنقطتين بالنسبة لكل مستقيم، كما يلي:

$4x_1+8x_2=32$

x_1	0	8
x_2	4	0

$5x_1+8x_2=80$

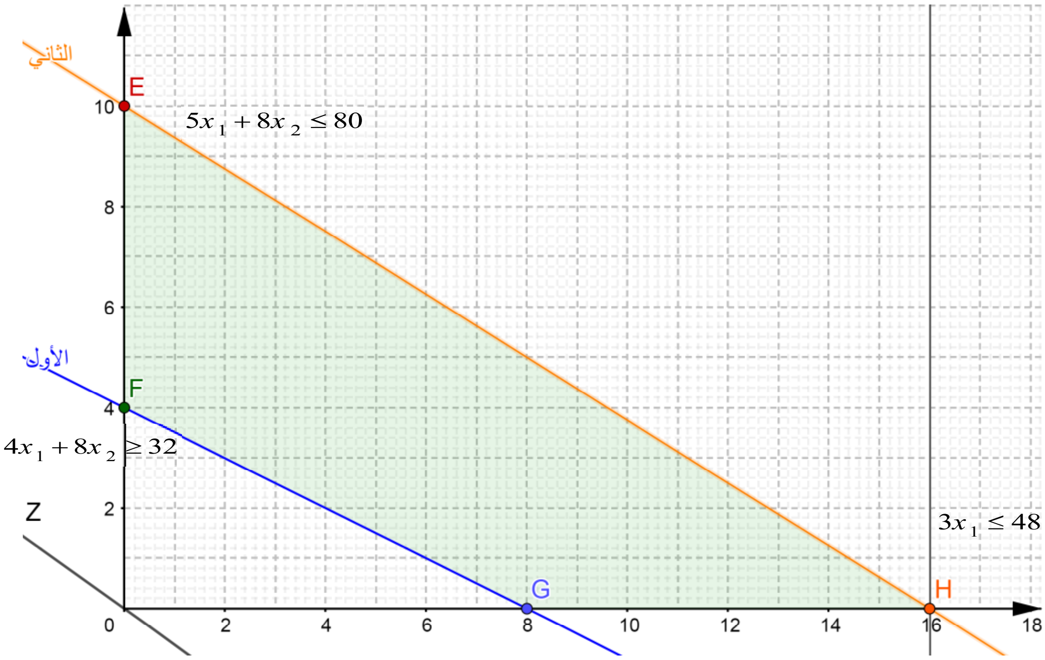
x_1	0	16
x_2	10	0

$3x_1=48$

x_1	16	16
x_2	0	1

2- تحديد منطقة الحلول الممكنة المشتركة:

نقوم بتحديد منطقة الحلول الممكنة بالنسبة لكل قيد حسب اشارته. في هذه الحالة تختلف اشارة القيود ثم نحدد منطقة الحلول الممكنة لمشتركة، التي تحقق كافة القيود. والتي تمثل بيانيا منطقة تقاطع الحلول الممكنة بالنسبة لكافة القيود. لنستنتج أن منطقة الحل المشترك تقع بين المستقيمين 1 و2. بينما نلاحظ أن القيد الثالث لا يؤثر في الحل تماما.



3- تحديد احداثيات النقط الحدية: الحل الأمثل يقع على أحد النقاط الحدية لزوايا المضلع E ,H, G, F.

4- يتم حساب قيم دالة الهدف Z المقابلة لكل نقطة، ذلك بتعويض احداثياتها في دالة الهدف.

احداثيات النقط الحدية (x_1,x_2)	قيمة دالة الهدف $Z=10x_1+14x_2$
$F(0,4)$	$10(0)+14(4)=56$
$E(0,10)$	$10(0)+14(10)=140$
$H(16,0)$	$10(16)+14(0)=160$
$G(8,0)$	$10(8)+14(0)=80$

5- اتخاد القرار واستنتاج الحل الأمثل: قيمة دالة الهدف التي تحقق أقصى ربح تتمثل في $Z=160$ تقابل النقطة الحدية H ذات الاحداثيات (16,0) و عليه فان الحل الأمثل للبرنامج الخطي يكون:

$x_1=16, x_2=0$ و $Z=160$

الإجابة الاقتصادية: على الشركة عدم انتاج أي وحدة من x_2 وإنتاج 16 وحدة من x_1 لتحقيق أقصى ربح قدره: 160 وحدة نقدية.

تمرين 5: حالة تدنية: ليكن لدينا النموذج المختلط مع 4 قيود، المطلوب: إيجاد الحل الأمثل بالطريقة البيانية.

$$
\begin{array}{l}
[MIN]Z = 8x_1 + 10x_2 \\
S/c \\
\quad 4x_1 + 8x_2 \geq 24 \\
\quad 6x_1 + 9x_2 \leq 90 \\
\quad 3x_1 \leq 36 \\
\quad 3x_2 \leq 15 \\
x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

1- **رسم مستقيمات القيود في منحنى بياني:** بتحويل المتراجحات إلى معادلات، ذلك لرسم المستقيمات، نعلم أن كل مستقيم يمكن رسمه باستخدام نقطتين. لذلك نقوم بتحديد الاحداثيات لنقطتين بالنسبة لكل مستقيم، كما يلي:

$4x_1+8x_2=24$

x_1	0	6
x_2	3	0

$6x_1+9x_2=90$

x_1	0	15
x_2	10	0

$3x1=36$

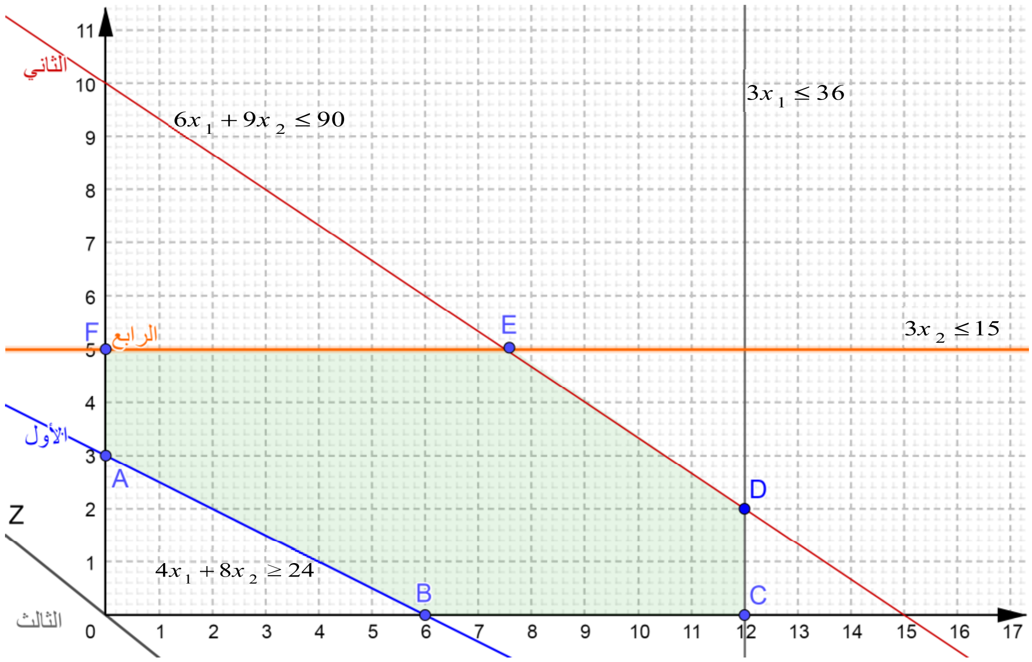
x_1	12	12
x_2	0	1

$3x_2=15$

x_1	0	1
x_2	5	5

2- تحديد منطقة الحلول الممكنة المشتركة:

نقوم بتحديد منطقة الحلول الممكنة بالنسبة لكل قيد حسب اشارته. في هذه الحالة تختلف اشارة القيود، ثم نحدد منطقة الحلول الممكنة لمشتركة، التي تحقق كافة القيود. والتي تمثل بيانيا منطقة تقاطع الحلول الممكنة بالنسبة لكافة القيود. لنستنتج أن منطقة الحل المشترك تقع بين المستقيمات.



ـتحديد احداثيات النقط الحدية: الحل الأمثل يقع على أحد النقاط الحدية لزوايا المضلع A , B ,C, D، E, F, نلاحظ أن قيم إحداثيات النقاط A, B , F, C معروفة. أما النقط D, E الناتجة من تقاطع المستقيمات لا يمكن تقدير قيم إحداثياتها بدقة من الشكل، لذلك يتم إيجادها من خلال حل جملة معادلتين للمستقيمين المعنيين بالتقاطع. بنفس طريقة التمرين الأول.

4-يتم حساب قيم دالة الهدف Z المقابلة لكل نقطة، ذلك بتعويض احداثياتها في دالة الهدف.

احداثيات النقط الحدية (x_1,x_2)	قيمة دالة الهدف $Z=8x_1+10x_2$
$F(0,5)$	$8(0)+10(5)=50$
$A(0,3)$	$8(0)+10(3)=30$
$B(6,0)$	$8(6)+10(0)=48$
$C(12,0)$	$8(12)+10(0)=96$
$D(12,2)$	$8(12)+10(2)=116$
$E(15/2,5)$	$8(152)+10(5)=110$

5-اتخاذ القرار واستنتاج الحل الأمثل: قيمة دالة الهدف التي تحقق أدنى تكلفة تتمثل في $Z=30$ تقابل النقطة الحدية A ذات الاحداثيات (0,3) وعليه فان الحل الأمثل للبرنامج الخطي يكون: $\boldsymbol{x_1=0, x_2=3}$ و $\boldsymbol{Z=30}$

الإجابة الاقتصادية: على الشركة عدم انتاج أي وحدة من x_1 وإنتاج 3 وحدات من x_2 لتحقيق أدنى تكلفة قدرها: 30 وحدة نقدية.

تمرين 6: ليكن لدينا النموذج المختلط مع 4 قيود، المطلوب: إيجاد الحل الأمثل بالطريقة البيانية.

$$
\begin{aligned}
&[MIN]\,Z = 8x_1 + 10x_2 \\
&S/c \\
&\quad 4x_1 + 8x_2 \geq 24 \\
&\quad 6x_1 + 9x_2 \leq 90 \\
&\quad 3x_1 \leq 36 \\
&\quad 3x_2 \geq 15 \\
&\quad x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

1- **رسم مستقيمات القيود في منحنى بياني:** بتحويل المتراجحات إلى معادلات، ذلك لرسم المستقيمات، نعلم أن كل مستقيم يمكن رسمه باستخدام نقطتين. لذلك نقوم بتحديد الاحداثيات لنقطتين بالنسبة لكل مستقيم، كما يلي:

$4x_1+8x_2=24$

x_1	0	6
x_2	3	0

$6x_1+9x_2=90$

x_1	0	15
x_2	10	0

$3x_1=36$

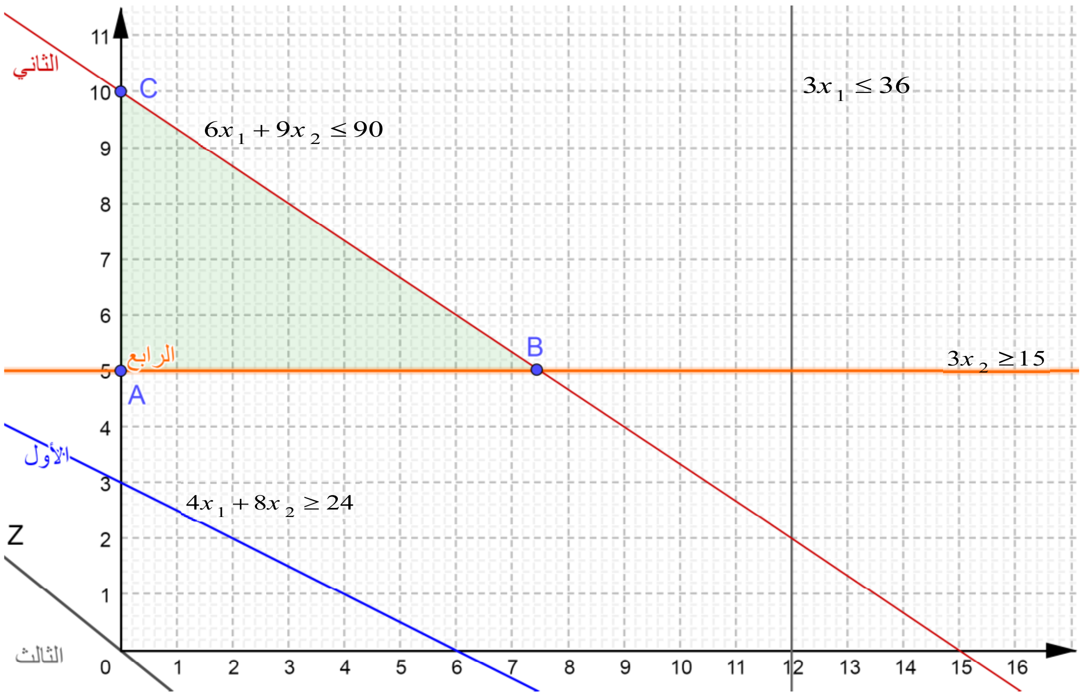
x_1	12	12
x_2	0	1

$3x_2=15$

x_1	0	1
x_2	5	5

2- تحديد منطقة الحلول الممكنة المشتركة:

نقوم بتحديد منطقة الحلول الممكنة بالنسبة لكل قيد حسب اشارته. في هذه الحالة تختلف اشارة القيود، ثم نحدد منطقة الحلول الممكنة المشتركة، التي تحقق كافة القيود. والتي تمثل بيانيا منطقة تقاطع الحلول الممكنة بالنسبة لكافة القيود. لنستنتج أن منطقة الحل المشترك تقع بين المستقيمين.



3-تحديد احداثيات النقط الحدية: الحل الأمثل يقع على أحد النقاط الحدية لزوايا المثلث A , B ,C, نلاحظ أن قيم إحداثيات النقاط A, C معروفة. أما النقطة B الناتجة من تقاطع المستقيمين 4 و 2 فلا يمكن تقدير قيم إحداثياتها بدقة من الشكل، لذلك يتم إيجادها من خلال حل جملة معادلتين للمستقيمين المعنيين بالتقاطع. بنفس طريقة التمرين الأول.

4-يتم حساب قيم دالة الهدف Z المقابلة لكل نقطة، ذلك بتعويض احداثياتها في دالة الهدف.

احداثيات النقط الحدية (x_1,x_2)	قيمة دالة الهدف $Z=8x_1+10x_2$
$C(0,10)$	$8(0)+10(10)=100$
$A(0,5)$	$8(0)+10(5)=50$
$B(15/2,5)$	$8(15/2)+10(5)=110$

5-- اتخاذ القرار واستنتاج الحل الأمثل: قيمة دالة الهدف التي تحقق أدنى تكلفة تتمثل في $Z=50$ تقابل النقطة الحدية A ذات الاحداثيات (0,5) وعليه فان الحل الأمثل للبرنامج الخطي يكون: $\boldsymbol{x_1=0, x_2=5}$ و $\boldsymbol{Z=50}$

الإجابة الاقتصادية: على الشركة عدم انتاج أي وحدة من x_1 وإنتاج 5 وحدات من x_2 لتحقيق أدنى تكلفة قدرها: 50 وحدة نقدية.

أنواع القيود:

يمكن أن نستنتج أن هناك عدة أنواع من القيود حيث يمكن تصنيفها إلى قيود محددة لنشاط المؤسسة وأخرى غير محددة لنشاط المؤسسة. فالقيد المحدد لنشاط المؤسسة هو القيد الذي تستغل طاقته بالكامل ولذلك يمكن أن نطلق عليه قيد الطاقات النادرة. أما القيود التي لم تستغل طاقاتها بالكامل فيطلق عليها اسم قيود الطاقات الفائضة ويشترك النوعان من القيود في تحديد منطقة الحلول الممكنة كما نلاحظه منم الرسم البياني الأول؛ إلا أن النوع الأول من القيود فقط والمتمثل في قيود الطاقات النادرة هو الذي يلعب دورا أساسيا في تحديد نقطة الحل الأمثل. بالاعتماد على مثالنا السابق؛ يمكن القول من خلال الرسم البياني الأول أن كلا من القيدين الأول والثالث فقط يمران بنقطة الحل الأمثل ومن ثم يمكن اعتبراهما قيودا محددة لنشاط المؤسسة أي أنها قيود الطاقات النادرة نظرا للاستغلال الكامل لطاقتهما والطاقة الغير مستغلة تساوي الصفر لكل منهما أما القيد الثاني الذي لا يشارك في تحديد نقطة الحل الأمثل فيمكن اعتباره قيدا غير محدد لنشاط المؤسسة؛ أي أنها قيود الطاقات الزائدة أو الفائضة؛ نظرا لتوفره على طاقة غير مستغلة بعد عملية الإنتاج أو الاستغلال.

ونستخلص مما سبق أن القيد المحدد للنشاط يمثل طاقة أو موردا نادرا يسبب الاستغلال الكلي لطاقته بينما القيد الغير محدد للنشاط يمثل طاقة غير مستغلة بالكامل أي أن هناك كمية متبقية من الموارد بعد عملية الاستغلال.

إن التمييز ما بين القيود المحددة والغير محددة للنشاط تساعد المسير على اتخاذ قراراته المتعلقة بالإجابة على السؤالين التاليين في ظل الظروف الحالية للإنتاج:

- ما هي الطاقات أو الموارد الواجب زيادتها أو العمل على الحصول على كميات إضافية منها؟
- ما هي الطاقات أو الموارد الواجب تخفيضها أو إيجاد استعمالات أخرى لها وبأي كميات؟

ومن خلال الأمثلة السابقة؛ فان المسير سيبذل بدون شك قصارى جهده من أجل زيادة الطاقات المستغلة بالكامل لزيادة الإنتاج ومن ثم المبيعات؛ أما الطاقات الممثلة بالقيود غير المحددة للنشاط؛ فهي توضح الكمية التي يمكن تخفيضها عند الشراء أو التوظيف أو العمل على إيجاد استعمالات بديلة لها في حالة عدم توفر إمكانية زيادة الموارد وهذا بشرط عدم التأثير على الحل الأمثل الذي توصلنا إليه.

يمكن أن نواجه في بعض الأحيان أنواع أخرى من القيود؛ أهمها:

القيود الزائدة عن الحاجة:

إن وجود هذه القيود وحذفها لن يكون له أي تأثير على منطقة الحلول الممكنة وعلى نقطة الحل الأمثل وهذا عكس القيود السابقة التي في حالة حذف أحدها أو تغيير مقدارها سيؤدي إلى تغيير مساحة منطقة الحلول الممكنة بالإضافة إلى تغير نقطة الحل الأمثل أحيانا .

أما النوع الأخير من القيود فيمكن أن نطلق عليها اسم قيود المبيعات في المثال السابق افترضنا أن كل ما يتم إنتاجه يتم بيعه؛ لكن هذا ليس حقيقة بشكل عام «حيث تتوفر أحيانا قيود على الكميات الممكن بيعها. إن هذه الشروط يجب إدراجها ضمن قيود المسألة ويصبح الأمر ليس متعلقا بالكميات الواجب إنتاجها فقط وإنما أيضا يجب الخضوع لقيود السوق والطلبيات من العملاء.

حالات خاصة في الطريقة البيانية:

تمرين 7: حالة تعدد الحلول المثلى:

$$
\begin{aligned}
&[MIN]\ Z = 6x_1 + 10x_2 \\
&S/c \\
&\quad 3x_1 + 6x_2 \leq 30 \\
&\quad 3x_1 + 5x_2 \geq 15 \\
&\quad x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

1- **رسم مستقيمات القيود في منحنى بياني:** بتحويل المتراجحات إلى معادلات، ذلك لرسم المستقيمات، نعلم أن كل مستقيم يمكن رسمه باستخدام نقطتين. لذلك نقوم بتحديد الاحداثيات لنقطتين بالنسبة لكل مستقيم، كما يلي:

$3x_1+6x_2=30$

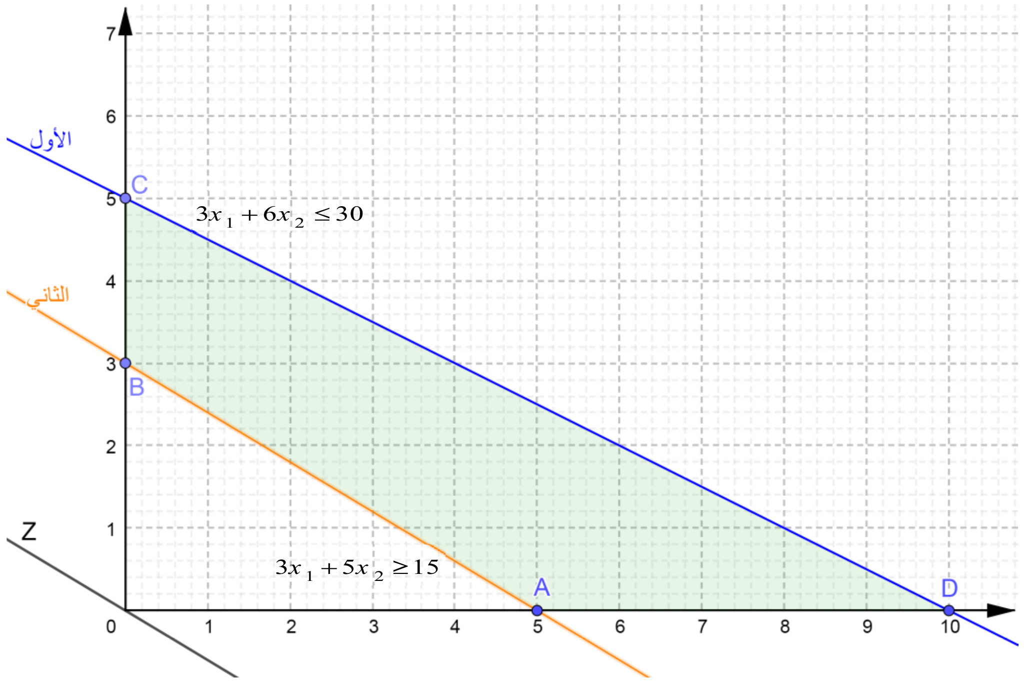
x_1	0	10
x_2	5	0

$3x_1+5x_2=15$

x_1	0	5
x_2	3	0

2- تحديد منطقة الحلول الممكنة المشتركة:

نقوم بتحديد منطقة الحلول الممكنة بالنسبة لكل قيد حسب اشارته. في هذه الحالة تختلف اشارة القيود، ثم نحدد منطقة الحلول الممكنة المشتركة، التي تحقق كافة القيود. والتي تمثل بيانيا منطقة تقاطع الحلول الممكنة بالنسبة لكافة القيود. لنستنتج أن منطقة الحل المشترك تقع بين المستقيمين.



3-تحديد احداثيات النقط الحدية : الحل الأمثل يقع على أحد النقاط الحدية لزوايا المضلع A , B ,C, D،

4-يتم حساب قيم دالة الهدف Z المقابلة لكل نقطة، ذلك بتعويض احداثياتها في دالة الهدف.

احداثيات النقط الحدية (x_1,x_2)	قيمة دالة الهدف $Z=6x_1+10x_2$
$C(0,5)$	$6(0)+10(5)=50$
$B(0,3)$	$6(0)+10(3)=30$
$A(5,0)$	$6(5)+10(0)=30$
$D(10,0)$	$6(10)+10(0)=60$

5-اتخاد القرار واستنتاج الحل الأمثل: قيمة دالة الهدف التي تحقق أدنى تكلفة تتمثل في $Z=30$ تقابل النقطتين الحديتين B, A ذات الاحداثيات (5,0) (0,3) وعليه فان الحل الأمثل للبرنامج الخطي يكون عند النقطتين ويشمل كل نقاط القطعة المستقيمة A , B
هذه الحالة الخاصة تدعى حالة تعدد الحلول المثلى، تكون عندما يوازي مستقيم دالة الهدف أحد القيود.
الإجابة الاقتصادية: على الشركة الاختيار اما:

- عدم انتاج أي وحدة من x_1 وإنتاج 3 وحدات من x_2 لتحقيق أدنى تكلفة قدرها: 30 وحدة نقدية.
- أو عدم انتاج أي وحدة من x_2 وإنتاج 5 وحدات من x_1 لتحقيق أدنى تكلفة قدرها: 30 وحدة نقدية.

تمرين 8: حالة عدم وجود حل ممكن: Infeasible solution

$$
\begin{aligned}
&[MAX]Z = 6x_1 + 7x_2\\
&S/c\\
&\quad 6x_1 + 10x_2 \le 30\\
&\quad 9x_1 + 15x_2 \ge 90\\
&\quad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

1- **رسم مستقيمات القيود في منحنى بياني:** بتحويل المتراجحات إلى معادلات، ذلك لرسم المستقيمات، نعلم أن كل مستقيم يمكن رسمه باستخدام نقطتين. لذلك نقوم بتحديد الاحداثيات لنقطتين بالنسبة لكل مستقيم، كما يلي:

$6x_1+10x_2=30$

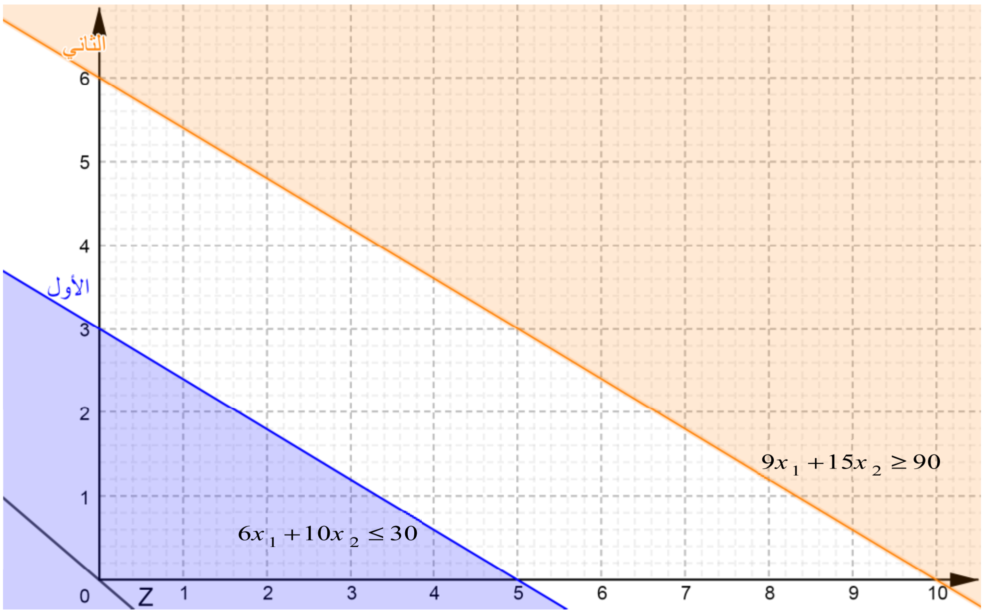
$x1$	0	5
$x2$	3	0

$9x_1+15x_2=90$

$x1$	0	10
$x2$	6	0

2- تحديد منطقة الحلول الممكنة المشتركة:

نقوم بتحديد منطقة الحلول الممكنة بالنسبة لكل قيد حسب اشارته. في هذه الحالة تختلف اشارة القيود، ثم نحدد منطقة الحلول الممكنة المشتركة، التي تحقق كافة القيود. والتي تمثل بيانيا منطقة تقاطع الحلول الممكنة بالنسبة لكافة القيود.



نلاحظ أنه لا توجد منطقة حلول مشتركة بين المستقيمات، وذلك لتناقض القيود. مما يؤكد عدم وجود حل ممكن لهذا النموذج. هذه الحالة الخاصة تدعى حالة عدم وجود حل ممكن. وتكون عندما يوجد تناقض منطقي بين أحد القيود.

تمرين 9: حالة عدم وجود حل ممكن: Infeasible solution

$$
\begin{aligned}
&[MIN]\,Z = 6x_1 + 7x_2 \\
&S/c \\
&\quad 5x_1 + 7x_2 \leq 35 \\
&\quad 8x_1 + 12x_2 \geq 72 \\
&\quad 2x_1 \geq 32 \\
&\quad x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

1- **رسم مستقيمات القيود في منحنى بياني:** بتحويل المتراجحات إلى معادلات، ذلك لرسم المستقيمات، نعلم أن كل مستقيم يمكن رسمه باستخدام نقطتين. لذلك نقوم بتحديد الاحداثيات لنقطتين بالنسبة لكل مستقيم، كما يلي:

$5x_1+7x_2=35$

x_1	0	7
x_2	5	0

$8x_1+12x_2=72$

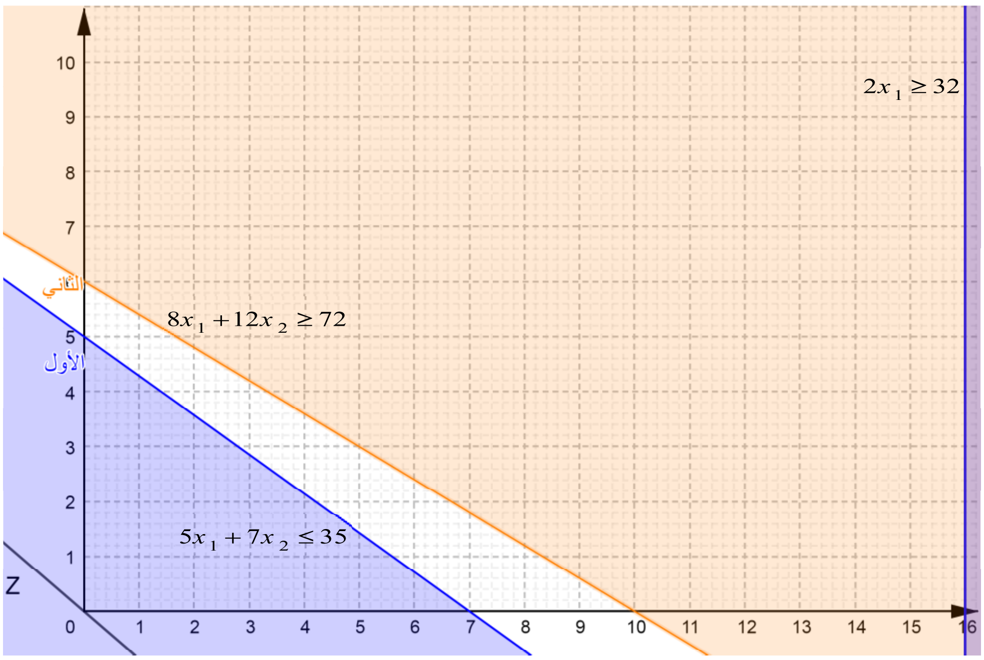
x_1	0	9
x_2	6	0

$2x_1=32$

x_1	16	16
x_2	0	1

2- تحديد منطقة الحلول الممكنة المشتركة:

نقوم بتحديد منطقة الحلول الممكنة بالنسبة لكل قيد حسب اشارته. في هذه الحالة تختلف اشارة القيود، ثم نحدد منطقة الحلول الممكنة المشتركة، التي تحقق كافة القيود. والتي تمثل بيانيا منطقة تقاطع الحلول الممكنة بالنسبة لكافة القيود.



نلاحظ أنه لا توجد منطقة حلول ممكنة مشتركة بين المستقيمات. مما يؤكد عدم وجود حل ممكن لهذا النموذج.

هذه الحالة الخاصة تدعى حالة عدم وجود حل ممكن. وتكون عندما يوجد تناقض منطقي بين القيود.

تمرين 10: حالة عدم وجود حل ممكن Infeasible solution

$$
\begin{aligned}
&MIN\ Z = 6x_1 + 7x_2\\
&S/c\\
&\quad 5x_1 + 7x_2 \leq 35\\
&\quad 8x_1 + 16x_2 \geq 80\\
&\quad 2x_1 \geq 32\\
&\quad x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

1- **رسم مستقيمات القيود في منحنى بياني:** بتحويل المتراجحات إلى معادلات، ذلك لرسم المستقيمات، نعلم أن كل مستقيم يمكن رسمه باستخدام نقطتين. لذلك نقوم بتحديد الاحداثيات لنقطتين بالنسبة لكل مستقيم، كما يلي:

$5x_1+7x_2=35$

x_1	0	7
x_2	5	0

$8x_1+16x_2=80$

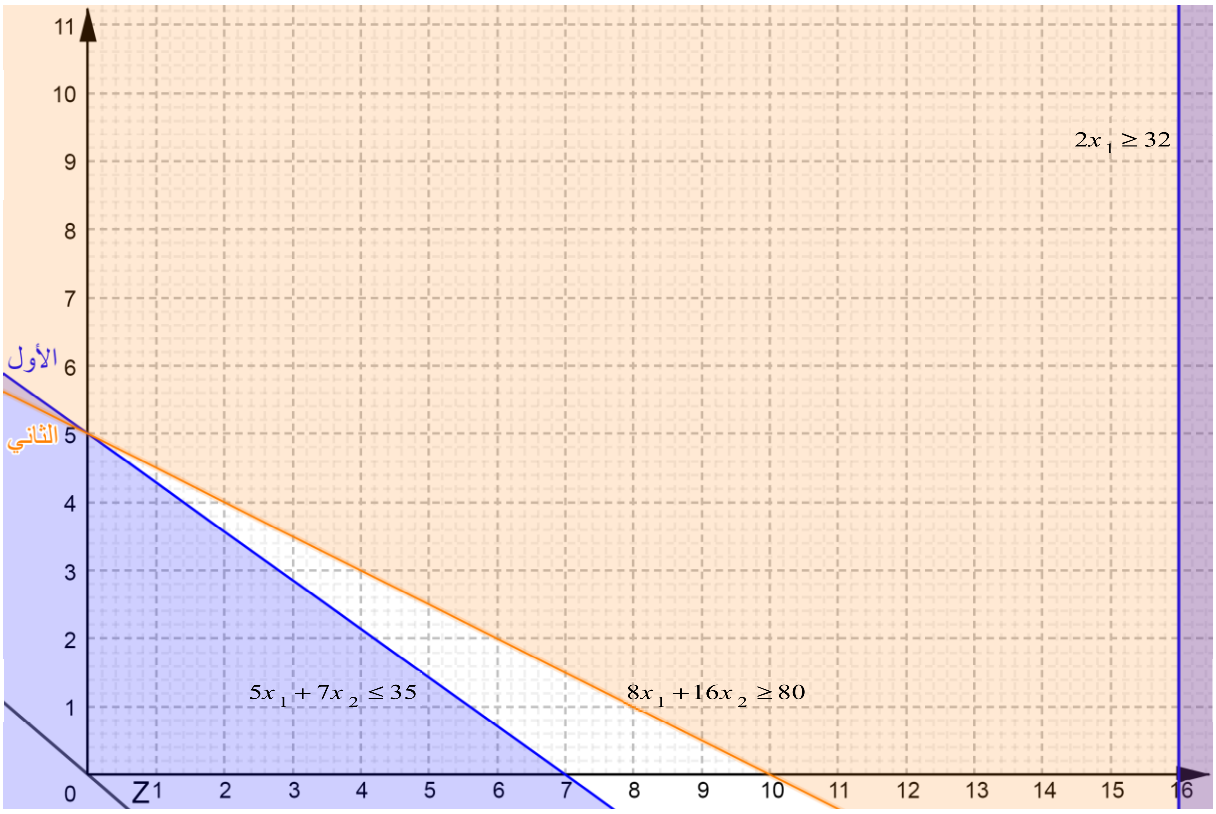
x_1	0	10
x_2	5	0

$2x_1=32$

x_1	16	16
x_2	0	1

2- تحديد منطقة الحلول الممكنة المشتركة:

نقوم بتحديد منطقة الحلول الممكنة بالنسبة لكل قيد حسب اشارته. في هذه الحالة تختلف اشارة القيود، ثم نحدد منطقة الحلول الممكنة المشتركة، التي تحقق كافة القيود. والتي تمثل بيانيا منطقة تقاطع الحلول الممكنة بالنسبة لكافة القيود. نلاحظ أنه لا توجد منطقة حلول مشتركة بين المستقيمات، وذلك لتناقض القيد الثالث رغم تقاطع القيدين 1، 2 في النقطة (0،5). مما يؤكد عدم وجود حل ممكن لهذا النموذج.



نلاحظ أنه لا توجد منطقة حلول ممكنة مشتركة بين المستقيمات، وذلك لتناقض القيد الثالث رغم تقاطع القيدين 1، 2 في النقطة (0،5). مما يؤكد عدم وجود حل ممكن لهذا النموذج.

تمرين 11: قيدين متطابقين:

$$\begin{aligned} &[Max]Z = 12x_1 + 8x_2 \\ &S/c \\ &\quad 3x_1 + 5x_2 \geq 12 \\ &\quad 9x_1 + 15x_2 \leq 36 \\ &\quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

1- **رسم مستقيمات القيود في منحنى بياني:** بتحويل المتراجحات إلى معادلات، ذلك لرسم المستقيمات، نعلم أن كل مستقيم يمكن رسمه باستخدام نقطتين. لذلك نقوم بتحديد الاحداثيات لنقطتين بالنسبة لكل مستقيم، كما يلي:

$3x_1+5x_2=12$

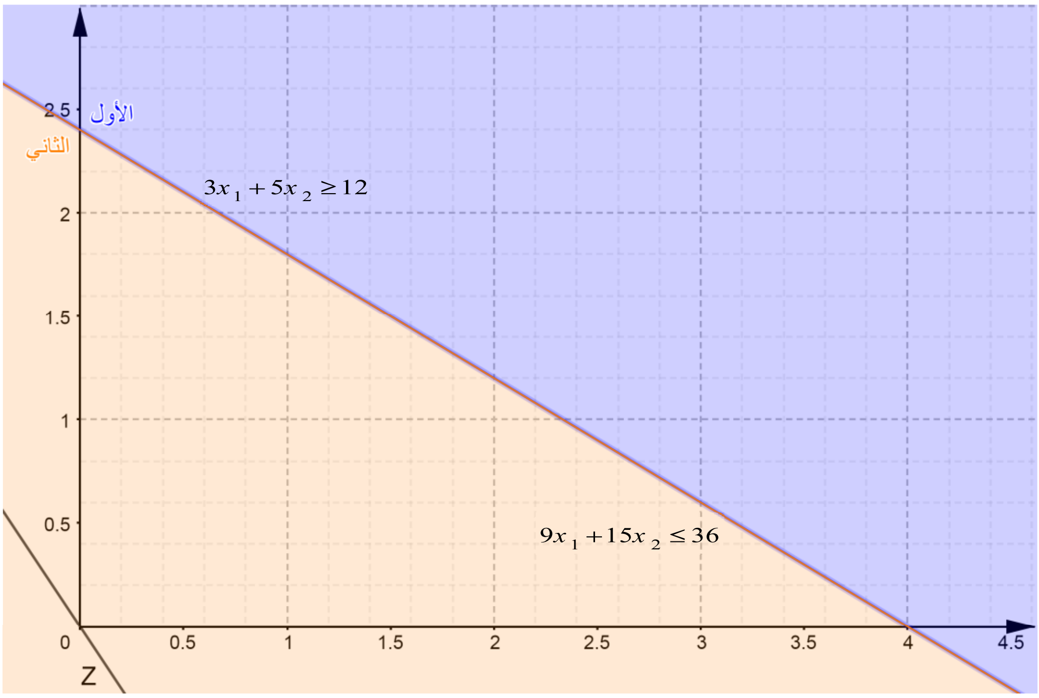
x_1	0	4
x_2	2.4	0

$9x_1+15x_2=36$

x_1	0	4
x_2	2.4	0

2-تحديد منطقة الحلول الممكنة المشتركة:

نقوم بتحديد منطقة الحلول الممكنة بالنسبة لكل قيد حسب اشارته. في هذه الحالة تختلف اشارة القيود، ثم نحدد منطقة الحلول الممكنة المشتركة، التي تحقق كافة القيود. والتي تمثل بيانيا منطقة تقاطع الحلول الممكنة بالنسبة لكافة القيود. نلاحظ أن منطقة الحل المشترك تتطابق مع المستقيمين. بحيث تمثل القطعة المستقيمة .A , B تظهر هذه الحالة عندما يكون أحد القيود مضاعف لقيد أخر.



3-تحديد احداثيات النقط الحدية: الحل الأمثل يقع على طول القطعة المستقيمة A، B

4-يتم حساب قيم دالة الهدف Z المقابلة لكل نقطة، ذلك بتعويض احداثياتها في دالة الهدف.

احداثيات النقط الحدية (x_1,x_2)	قيمة دالة الهدف $Z=12x_1+8x_2$
$A(0,12/5)$	$12(0)+8(12/5)=96/5$
$B(4,0)$	$12(4)+8(0)=48$

5-اتخاد القرار واستنتاج الحل الأمثل: قيمة دالة الهدف التي تحقق أقصى ربح تتمثل في Z=48 تقابل النقطة الحدية B ذات الاحداثيات (4,0) وعليه فان الحل الأمثل للبرنامج الخطي يكون: $x_1=4, x_2=0$ و$Z=48$

الإجابة الاقتصادية: على الشركة عدم انتاج أي وحدة من x_2 وإنتاج 4 وحدات من x_1 لتحقيق أقصى ربح قدره: 48 وحدة نقدية.

تمرين 12: حالة حلول غير محدودة Unbounded solution

$$
\begin{aligned}
&[Max]\,Z = 8x_1 + 5x_2 \\
&S/c \\
&\quad 5x_1 + 7x_2 \geq 35 \\
&\quad 9x_1 + 15x_2 \geq 90 \\
&\quad x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

1- **رسم مستقيمات القيود في منحنى بياني:** بتحويل المتراجحات إلى معادلات، ذلك لرسم المستقيمات، نعلم أن كل مستقيم يمكن رسمه باستخدام نقطتين. لذلك نقوم بتحديد الاحداثيات لنقطتين بالنسبة لكل مستقيم، كما يلي:

$5x_1+7x_2=35$

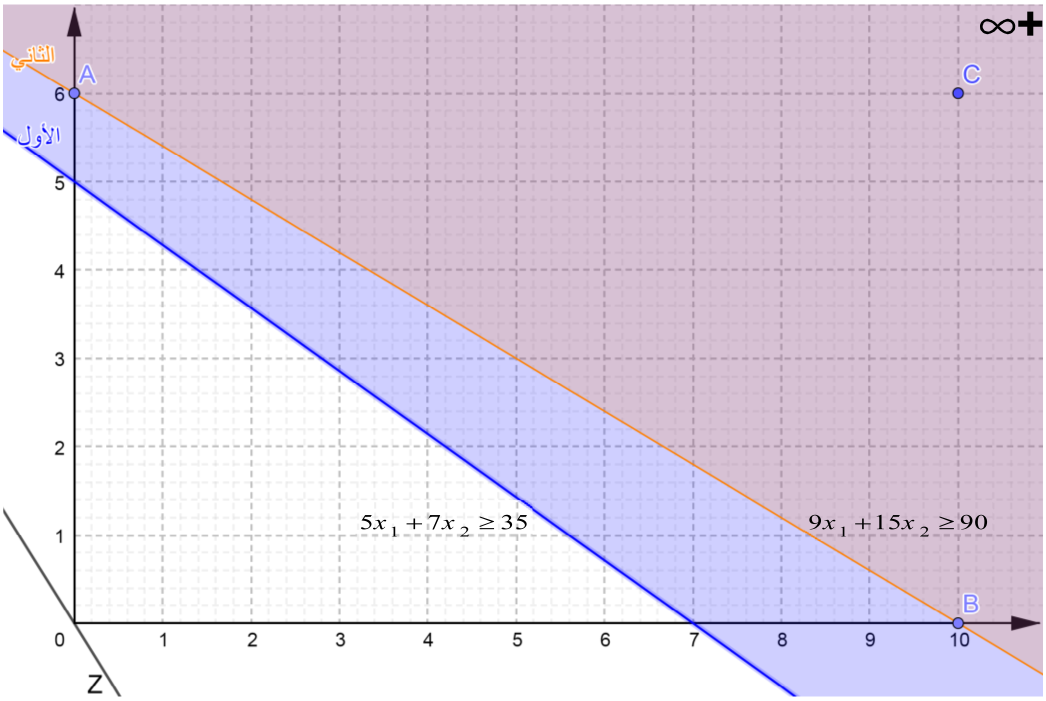
x_1	0	7
x_2	5	0

$9x_1+15x_2=90$

x_1	0	10
x_2	6	0

2-تحديد منطقة الحلول الممكنة المشتركة:

نقوم بتحديد منطقة الحلول الممكنة بالنسبة لكل قيد حسب اشارته. ثم نحدد منطقة الحلول الممكنة المشتركة، التي تحقق كافة القيود. والتي تمثل بيانيا منطقة تقاطع الحلول الممكنة بالنسبة لكافة القيود. في هذه الحالة كل اشارات القيود على شكل $\geq$ ما يجعل منطقة الحلول الممكنة لكل قيد فوق المستقيمات، لنستنتج أن منطقة الحل المشترك تؤول الى + ما لانهاية.



3-تحديد احداثيات النقط الحدية: الحل الأمثل يقع بين النقاط الحدية للقطعة المستقيمة A , B ويؤول الى + ما لانهاية.

4-يتم حساب قيم دالة الهدف Z المقابلة لكل نقطة، ذلك بتعويض احداثياتها في دالة الهدف.

احداثيات النقط الحدية (x_1,x_2)	قيمة دالة الهدف $Z=8x_1+5x_2$
$A(0,6)$	8(0)+5(6)=30
$B(10,0)$	8(10)+5(0)=80
$C(10,6)$	8(10)+5(6)=110

نلاحظ أنه مهما اخترنا نقطة أكبر في منطقة الحلول الممكنة تعطي ربح أكبر. لأنها تؤول الى +∞ ما لانهاية. هذه الحالة تدعى حالة الحلول غير المحدودة. تظهر عندما تكون الدالة تعظيم والقيود كلها ≥. باعتبار كل الموارد غير محدودة وهذا غير ممكن. لذلك تعتبر هذه الحالة نظرية يستحيل ظهورها في الواقع.

تمرين 13: حالة حلول غير محدودة Unbounded solution

$$[Max]Z = 4x_1 + 8x_2$$
$$S/c$$
$$3x_1 + 6x_2 \geq 30$$
$$5x_1 + 8x_2 \geq 40$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

1- **رسم مستقيمات القيود في منحنى بياني:** بتحويل المتراجحات إلى معادلات، ذلك لرسم المستقيمات، نعلم أن كل مستقيم يمكن رسمه باستخدام نقطتين. لذلك نقوم بتحديد الاحداثيات لنقطتين بالنسبة لكل مستقيم، كما يلي:

$3x_1+6x_2=30$

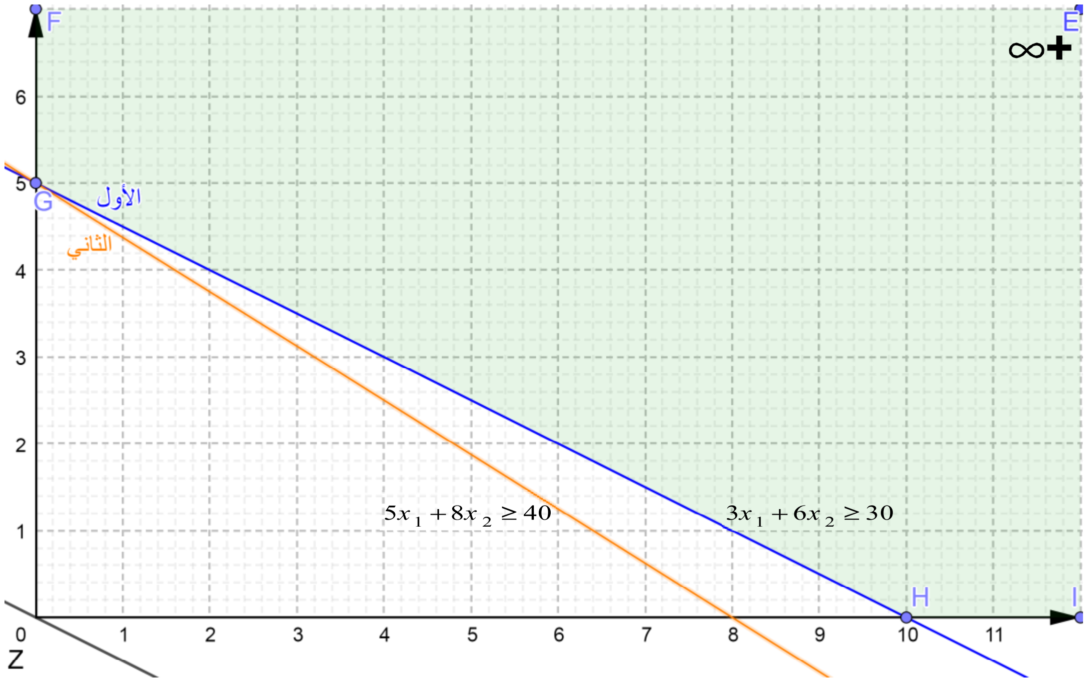
x_1	0	10
x_2	5	0

$5x_1+8x_2=40$

x_1	0	8
x_2	5	0

2- تحديد منطقة الحلول الممكنة المشتركة:

نقوم بتحديد منطقة الحلول الممكنة بالنسبة لكل قيد حسب اشارته. ثم نحدد منطقة الحلول الممكنة المشتركة، التي تحقق كافة القيود. والتي تمثل بيانيا منطقة تقاطع الحلول الممكنة بالنسبة لكافة القيود. في هذه الحالة كل اشارات القيود على شكل $\geq$ ما يجعل منطقة الحلول الممكنة لكل قيد فوق المستقيمات، لنستنتج أن منطقة الحل المشترك تؤول الى + ما لانهاية.



3-تحديد احداثيات النقط الحدية: الحل الأمثل يقع بين النقاط الحدية للقطعة المستقيمة G , H ويؤول الى + ما لانهاية.

4-يتم حساب قيم دالة الهدف Z المقابلة لكل نقطة، ذلك بتعويض احداثياتها في دالة الهدف.

احداثيات النقط الحدية (x_1,x_2)	قيمة دالة الهدف $Z=4x_1+8x_2$
$G(0,5)$	$4(0)+8(5)=40$
$H(10,0)$	$4(10)+8(0)=40$
$E(12,7)$	$4(12)+8(7)=104$

نلاحظ أنه مهما اخترنا نقطة أكبر في منطقة الحلول الممكنة تعطي ربح أكبر. لأنها تؤول الى + ما لانهاية. هذه الحالة تدعى حالة الحلول غير المحدودة. تظهر هذه الحالة عندما تكون الدالة تعظيم والقيود كلها ≤. باعتبار كل الموارد غير محدودة وهذا غير ممكن. لذلك تعتبر هذه الحالة نظرية يستحيل ظهورها في الواقع.

تمرين 14: حالة وجود قيد محايد، لا يؤثر على الحل الممكن Superfluous constraint

$$
\begin{aligned}
&MAX\ Z = 10x_1 + 14x_2\\
&S/c\\
&\quad 4x_1 + 8x_2 \geq 32\\
&\quad 5x_1 + 8x_2 \leq 80\\
&\quad 3x_1 \leq 54\\
&\quad x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

1- رسم مستقيمات القيود في منحنى بياني: بتحويل المتراجحات إلى معادلات، ذلك لرسم المستقيمات، نعلم أن كل مستقيم يمكن رسمه باستخدام نقطتين. لذلك نقوم بتحديد الاحداثيات لنقطتين بالنسبة لكل مستقيم، كما يلي:

$4x_1+8x_2=32$

$x1$	0	8
$x2$	4	0

$5x_1+8x_2=80$

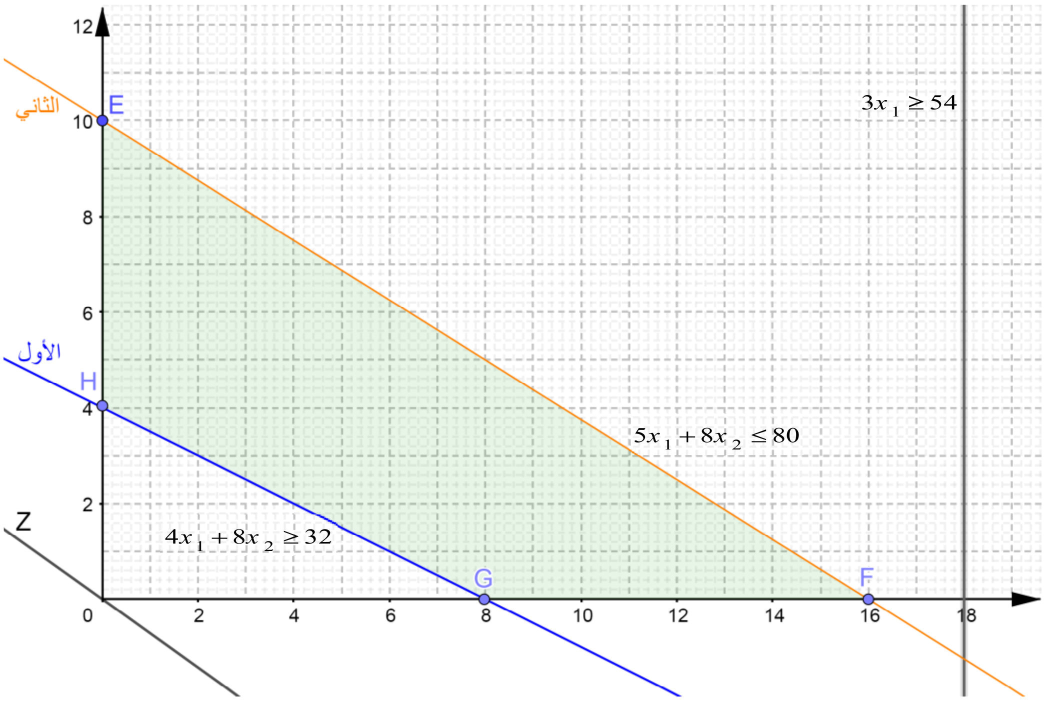
x_1	0	16
x_2	10	0

$3x_1=54$

x_1	18	18
x_2	0	1

2- تحديد منطقة الحلول الممكنة المشتركة:

نقوم بتحديد منطقة الحلول الممكنة بالنسبة لكل قيد حسب اشارته. في هذه الحالة تختلف اشارة القيود، ثم نحدد منطقة الحلول الممكنة المشتركة، التي تحقق كافة القيود. والتي تمثل بيانيا منطقة تقاطع الحلول الممكنة بالنسبة لكافة القيود. نلاحظ أن منطقة الحل المشترك تقع بين المستقيمين 1 و2، وأن القيد 3 لا يؤثر على منطقة الحل تماما.



3-تحديد احداثيات النقط الحدية: الحل الأمثل يقع على أحد النقاط الحدية لزوايا المضلع F ,E, G , H،

4-يتم حساب قيم دالة الهدف Z المقابلة لكل نقطة، ذلك بتعويض احداثياتها في دالة الهدف.

احداثيات النقط الحدية (x_1,x_2)	قيمة دالة الهدف $Z=10x_1+14x_2$
$H(0,4)$	$10(0)+14(4)=56$
$E(0,10)$	$10(0)+14(10)=140$
$F(16,0)$	$10(16)+14(0)=160$
$G(8,0)$	$10(8)+14(0)=80$

5- اتخاذ القرار واستنتاج الحل الأمثل: قيمة دالة الهدف التي تحقق أقصى ربح تتمثل في $Z=160$ تقابل النقطة الحدية F ذات الاحداثيات (16,0) وعليه فان الحل الأمثل للبرنامج الخطي يكون: $\boldsymbol{x_1=16, x_2=0}$ و $\boldsymbol{Z=160}$

الإجابة الاقتصادية: على الشركة عدم انتاج أي وحدة من x_2 وإنتاج 16 وحدة من x_1 لتحقيق أقصى ربح قدره: 160 وحدة نقدية.

تمرين 15: حالة وجود قيد محايد، لا يؤثر على الحل الممكن Superfluous constraint

$$\begin{aligned}
&MAX\ Z = 10x_1 + 14x_2\\
&S/c\\
&\quad 4x_1 + 8x_2 \geq 32\\
&\quad 6x_1 + 8x_2 \leq 80\\
&\quad 3x_1 \leq 48\\
&\quad x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

1- **رسم مستقيمات القيود في منحنى بياني:** بتحويل المتراجحات إلى معادلات، ذلك لرسم المستقيمات، نعلم أن كل مستقيم يمكن رسمه باستخدام نقطتين. لذلك نقوم بتحديد الاحداثيات لنقطتين بالنسبة لكل مستقيم، كما يلي:

$4x_1+8x_2=32$

x_1	0	8
x_2	4	0

$6x_1+8x_2=80$

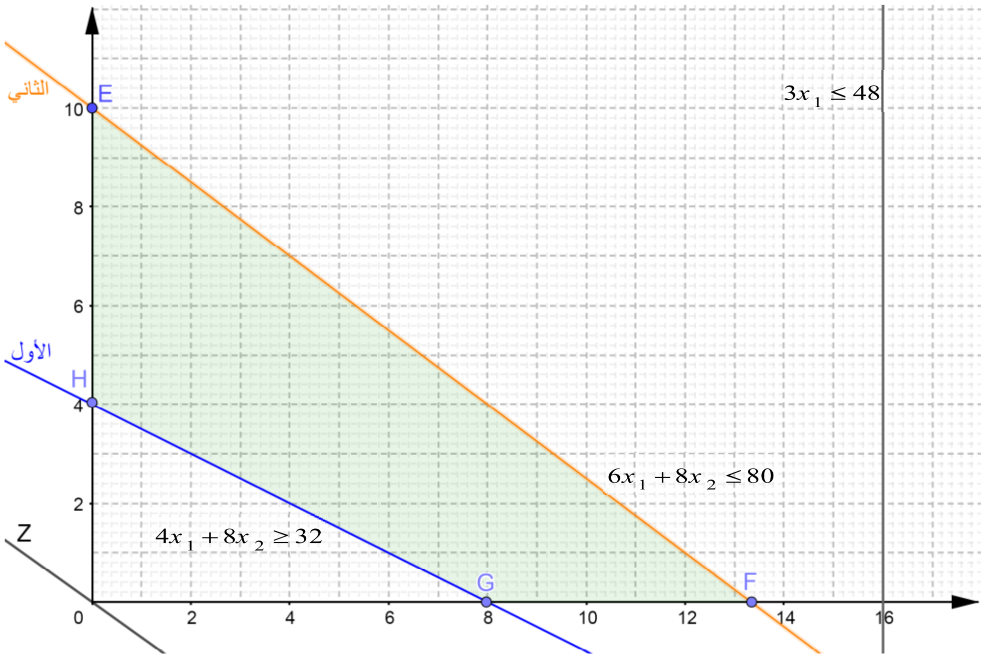
x_1	0	13.33
x_2	10	0

$3x_1=48$

x_1	16	16
x_2	0	1

2- تحديد منطقة الحلول الممكنة المشتركة:

نقوم بتحديد منطقة الحلول الممكنة بالنسبة لكل قيد حسب اشارته. ثم نحدد منطقة الحلول الممكنة المشتركة، التي تحقق كافة القيود. والتي تمثل بيانيا منطقة تقاطع الحلول الممكنة بالنسبة لكافة القيود. في هذه الحالة تختلف اشارة القيود، نلاحظ أن منطقة الحل المشترك تقع بين المستقيمين 1 و2، وأن القيد 3 لا يؤثر على منطقة الحل تماما.



3-تحديد احداثيات النقط الحدية: الحل الأمثل يقع على أحد النقاط الحدية لزوايا المضلع H , G ,E, F،

4-يتم حساب قيم دالة الهدف Z المقابلة لكل نقطة، ذلك بتعويض احداثياتها في دالة الهدف.

احداثيات النقط الحدية (x_1,x_2)	قيمة دالة الهدف $Z=10x_1+14x_2$
$H(0,4)$	10(0)+14(4)=56
$E(0,10)$	10(0)+14(10)=140
$F(40/3,0)$	10(40/3)+14(0)=400/3
$G(8,0)$	10(8)+14(0)=80

5- اتخاذ القرار واستنتاج الحل الأمثل: قيمة دالة الهدف التي تحقق أقصى ربح تتمثل في $Z=140$ تقابل النقطة الحدية E ذات الاحداثيات (0,10) و عليه فان الحل الأمثل للبرنامج الخطي يكون: $\boldsymbol{x_1=0, x_2=10}$ و$\boldsymbol{Z=140}$

الإجابة الاقتصادية: على الشركة عدم انتاج أي وحدة من x_1 وإنتاج 10 وحدات من x_2 لتحقيق أقصى ربح قدره: 140 وحدة نقدية.

تمرين 16: حالة وجود قيد محايد، لا يؤثر على الحل الممكن Superfluous constraint

$$MAX\ Z = 10x_1 + 14x_2$$
$$S/c$$
$$4x_1 + 8x_2 \geq 32$$
$$10x_1 + 8x_2 \leq 80$$
$$3x_1 \leq 54$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

1- **رسم مستقيمات القيود في منحنى بياني:** بتحويل المتراجحات إلى معادلات، ذلك لرسم المستقيمات، نعلم أن كل مستقيم يمكن رسمه باستخدام نقطتين. لذلك نقوم بتحديد الاحداثيات لنقطتين بالنسبة لكل مستقيم، كما يلي:

$4x_1+8x_2=32$

x_1	0	8
x_2	4	0

$10x_1+8x_2=80$

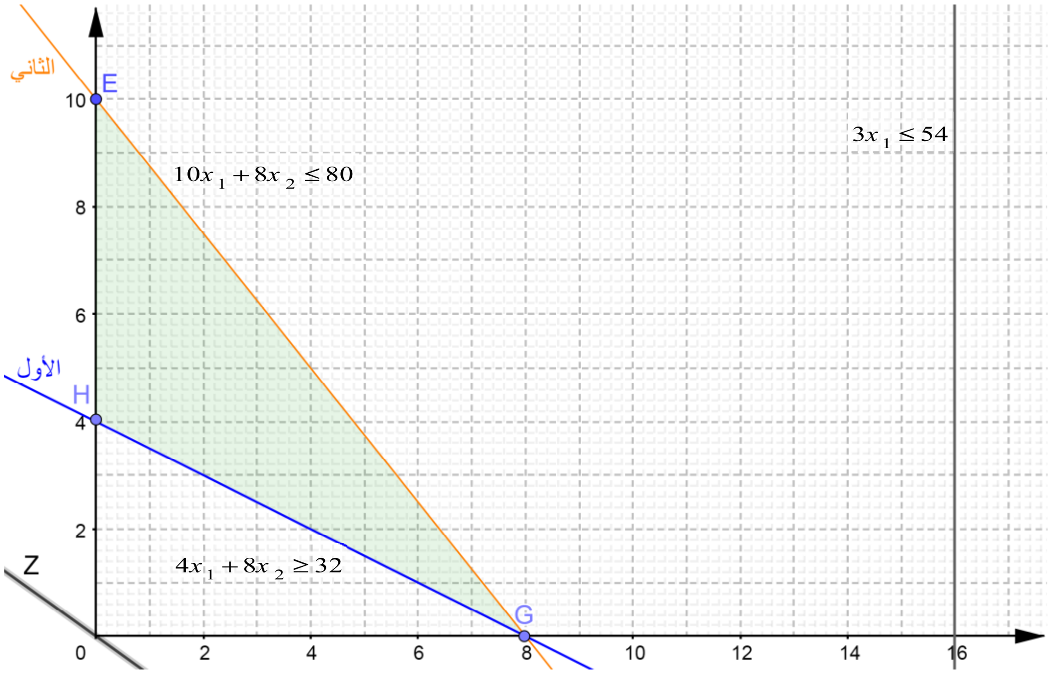
x_1	0	8
x_2	10	0

$3x_1=48$

x_1	16	16
x_2	0	1

2- تحديد منطقة الحلول الممكنة المشتركة:

نقوم بتحديد منطقة الحلول الممكنة بالنسبة لكل قيد حسب اشارته. ثم نحدد منطقة الحلول الممكنة المشتركة، التي تحقق كافة القيود. والتي تمثل بيانيا منطقة تقاطع الحلول الممكنة بالنسبة لكافة القيود. في هذه الحالة تختلف اشارة القيود، لنلاحظ أن منطقة الحل المشترك تقع بين المستقيمين 1 و2، وأن القيد 3 لا يؤثر على منطقة الحل تماما.



3-تحديد احداثيات النقط الحدية: الحل الأمثل يقع على أحد النقاط الحدية لزوايا المثلث E, G , H,

4-يتم حساب قيم دالة الهدف Z المقابلة لكل نقطة، ذلك بتعويض احداثياتها في دالة الهدف.

احداثيات النقط الحدية (x_1,x_2)	قيمة دالة الهدف $Z=10x_1+14x_2$
$H(0,4)$	$10(0)+14(4)=56$
$E(0,10)$	$10(0)+14(10)=140$
$G(8,0)$	$10(8)+14(0)=80$

5- اتخاذ القرار واستنتاج الحل الأمثل: قيمة دالة الهدف التي تحقق أقصى ربح تتمثل في $Z=140$ تقابل النقطة الحدية E ذات الاحداثيات (0,10) وعليه فان الحل الأمثل للبرنامج الخطي يكون: $\boldsymbol{x_1=0, x_2=10}$ و$\boldsymbol{Z=140}$

الإجابة الاقتصادية: على الشركة عدم انتاج أي وحدة من x_1 وإنتاج 10 وحدات من x_2 لتحقيق أقصى ربح قدره: 140 وحدة نقدية.

3- الفصل الثالث: الطريقة المبسطة (السمبلكس): Simplex Method

بعد شرح الطريقة البيانية في حل مشكلة البرمجة الخطية؛ نعلم أنها لا تستخدم إلا في حالة وجود متغيرين فقط أو ثلاثة على أكثر. ويرجع ذلك أساسا إلى استحالة الرسم البياني عندما يزيد عدد المتغيرات الواجب اتخاذ القرار بشأنها على 3. وبمأن معظم التطبيقات الميدانية تتضمن عددا كبيرا من المتغيرات والقيود؛ فإننا نحتاج إلى طريقة أخرى تسمى طريقة "السمبلكس". التي طورها العالم الأمريكي dantzig عام 1947؛ وطبقت لأول مرة سنة 1951.

3-1- أسس تطبيق طريقة السمبلكس:

3-1-1- طريقة السمبلكس:

تقوم طريقة السمبلكس على فكرة تحسين الحل خلال كل جدول في دالة الهدف؛ أي أننا نبدأ بالجدول الأول الذي يمثل الحل الابتدائي (انتاج معدوم) وننتقل من جدول الى آخر لتحسين الحل إلى أن نصل إلى الجدول الذي يمثل الحل الأمثل والذي لا يمكن تحسين دالة الهدف بعده. وتعتمد هذه الطريقة لحل مسائل البرمجة الخطية على قاعدة أساسية تم استنتاجها سابقا في الطريقة البيانية والتي تنص على أن أي حل لمسألة البرنامج الخطي سيكون على أحد النقاط الحدية لمنطقة الحلول الممكنة؛ وبذلك تتجاهل هذه الطريقة الحلول الممكنة الأخرى وتركز على النقط الحدية فقط. حيث يعتمد استخدام طريقة السمبلكس على مجموعة من الخطوات في شكل جداول تتطلب إجراء عدد من العمليات الحسابية وفق منهجية معينة على هذه الجداول التي تلخص المسألة محل الدراسة؛ والتي تؤدي في النهاية إلى الحصول على الحل الأمثل ان وجد. (الدش، 2012)

3-1-2- خطوات حل النموذج الخطي بطريقة السمبلكس:

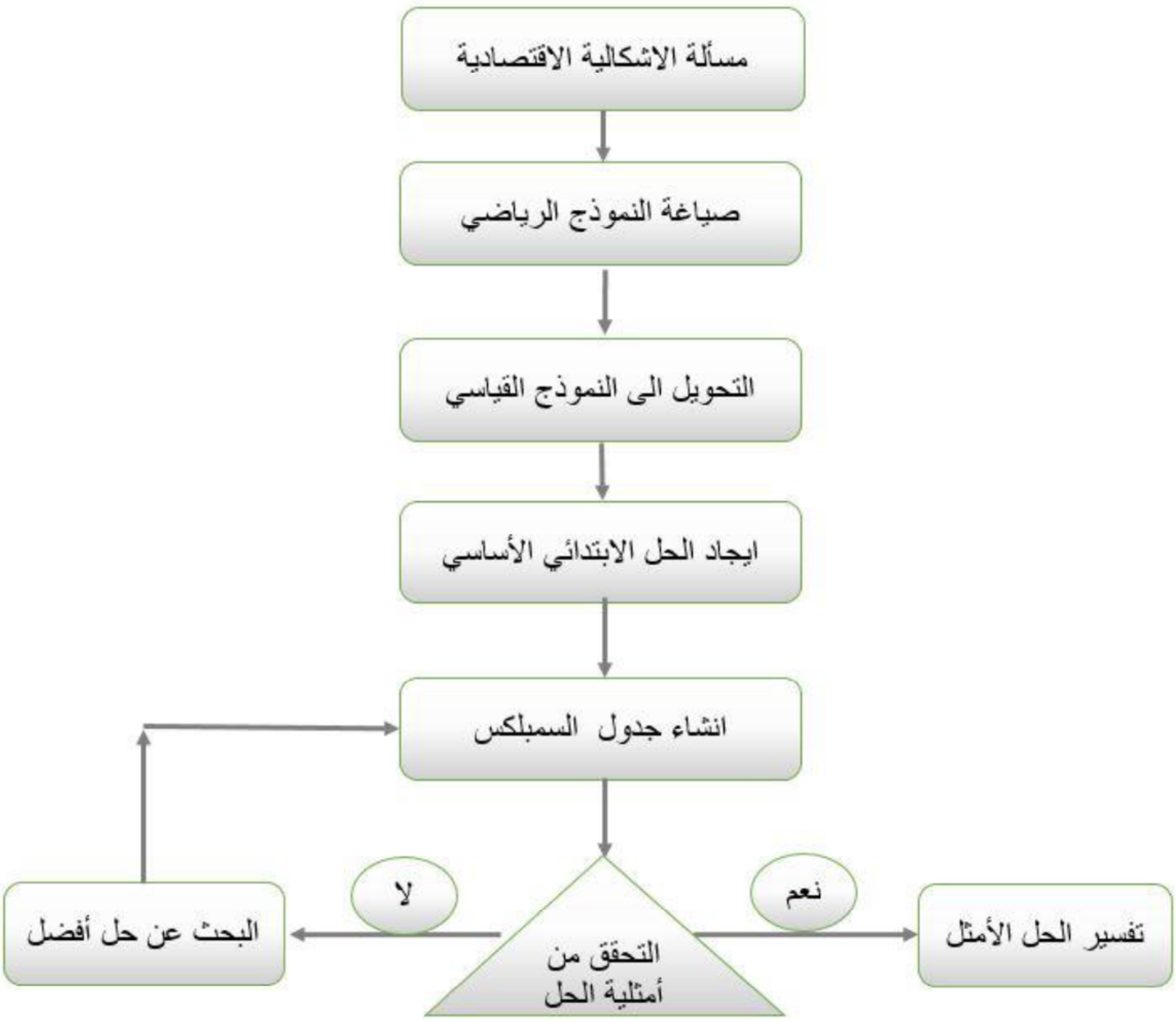
لحل النموذج الخطي بطريقة السمبلكس يجب اتباع الخطوات التالية: (برونسون، 2004)

1- صياغة المسألة في شكل نموذج رياضي
2- تحويل النموذج الرياضي للمسألة إلى نموذج قياسي (معياري)
3- إيجاد الحل الابتدائي الأساسي الممكن.
4- انشاء الجدول الأول للسمبلكس اعتمادا على الحل الابتدائي.
5- التحقق من شرط الأمثلية بعد انشاء كل جدول.
6- في حالة عدم تحقق شرط الأمثلية ننتقل الى جدول أخر لتحسين الحل.
7- نواصل عملية الحل حتى الوصول إلى الحل الأمثل وتفسيره اقتصاديا.

ملخص لأهم العمليات في طريقة السمبلكس:

		Max	Min
دالة الهدف		$[Max]Z = C_iX_i + \ldots + 0S_i - MA_i$	$[Min]Z = C_iX_i + \ldots + 0S_i + MA_i$
القيود	$\leq$	نحول القيد الى مساواة بإضافة متغير متمم $(+S_i)$	
	$\geq$	نحول القيد الى مساواة بطرح متغير متمم وإضافة متغير اصطناعي $(-S_i+A_i)$	
	$=$	نترك القيد مساواة لكن نظيف متغير اصطناعي $(+A_i)$	
شرط الأمثلية		كل قيم سطر $c_j - z_j \leq 0$	كل قيم سطر $c_j - z_j \geq 0$
المتغير الداخل		أكبر قيمة في $[Max] \rightarrow c_j - z_j$	أقل قيمة في $[Min] \rightarrow c_j - z_j$
المتغير الخارج		أقل قيمة موجبة في عمود النسبة	أقل قيمة موجبة في عمود النسبة

مراحل حل خوارزمية السمبلكس:



المصدر: من اعداد الباحث

معلومات مهمة في طريقة السمبلكس:

- عند اختيار المتغير الخارج يجب الاختيار من بين المعاملات الموجبة فقط في عمود النسبة.

- في حالة كون كل معاملات عمود المحور سالبة أو معدومة، لا نتحصل على قيم موجبة في عمود النسبة، ومنه لا يمكن اختيار المتغير الخارج، لذلك النموذج لا يمكن حله، ربما بسبب خطأ في صياغة النموذج.

- بعد دخول متغير جديد للحل، يمكن خروجه خلال مراحل الحل المقبلة.

- المتغيرات الاصطناعية يجب خروجها من الحل، لأن معاملاتها كبيرة جدا. ما يستحيل دخولها مرة أخرى.

- عند الانتقال لجدول جديد، القيمة الجديدة المقابلة للمحور تساوي دائما 1. وكل القيم الأخرى التي تنتمي الى نفس العمود تكون معدومة.

- خلال مراحل الحل تزداد دالة الهدف في حالة التعظيم أو تبقى ثابتة في احدى المراحل حتى أمثلية الحل، أما في حالة التدنية فتتناقص الدالة أو تبقى ثابتة حتى أمثلية الحل.

- باعتبار أن اختيار المتغير الخارج يتم على أساس أقل قيمة موجبة في عمود النسبة. لذلك عند حساب قيم النسبة (بقسمة قيم الحل على قيم المحور)، لا حاجة لحساب النسبة المقابلة للقيم السالبة والمعدومة في عمود المحور. لأنها تعطي نتيجة اما سالبة أو حالة عدم تعيين. وكلتاهما لا تأخذ في الاعتبار.

- في عمود النسبة يمكن اختيار أقل قيمة موجبة معدومة، إذا كانت نتيجة قسمة الصفر على قيمة موجبة.

لتبسيط فهم طريقة السمبلكس، نحاول شرح الحالة العامة بدون الفصل بين حل النموذج الرياضي العام أو النموذج الرياضي المختلط. لأن الاختلاف الوحيد في النموذج المختلط نعتمد على المعامل Big-M

إضافة الى الاختلاف البسيط في شرط الأمثلية وتحديد المتغير الداخل بين حالة التعظيم وحالة التدنية. علما أنه لا يمثل اختلاف كبير. بحيث يفضل أن يفهم القارئ طريقة واحدة باعتبارنا نتبع نفس المبادئ، لتجنب صعوبة الفهم وكثرة القوانين.

3-2- تمارين محلولة في طريقة السمبلكس:

تمرين 1 (توضيحي)**:** المطلوب: إيجاد الحل الأمثل بطريقة السمبلكس.

$$[Max]Z = 2x_1 + 4x_2$$
$$S/c$$
$$2x_1 + 4x_2 \le 8$$
$$3x_1 + 6x_2 \le 12$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

1- **تحويل البرنامج الى الشكل القياسي:** نحول القيدود الى معادلات لتضاف اليها المتغيرات المتممة (الراكدة) و/أو الاصطناعية:

1- إذا كان القيد من الشكل ≤ يتم إضافة متغير **متمم** S_i لكي **تتوازن** المعادلة في المساواة. (+S)

2- إذا كان القيد من الشكل ≥ يتم طرح متغير **متمم** S_i **لتتوازن** المعادلة ثم اضافة متغير **اصطناعي** A_i لنحصل على حل ابتدائي أساسي ممكن **موجب.**(-S +A)

3- القيد من الشكل = نظيف متغير اصطناعي $(+A_i)$ لنحصل على حل ابتدائي أساسي **منطقي.**

الشكل القياسي:

$$[Max]Z = 2x_1 + 4x_2 + 0s_1 + 0s_2$$
$$S/c$$
$$2x_1 + 4x_2 + s_1 = 8$$
$$3x_1 + 6x_2 + s_2 = 12$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2 \ge 0$$

2- **إيجاد الحل الابتدائي الأساسي الممكن:** نفترض أن متغيرات الإنتاج معدومة: $x_1 = x_2 = 0$

$$\begin{array}{l} 2X_1 + 4X_2 + S_1 \qquad = 8 \Rightarrow \boxed{S_1} = \boxed{8} \\ 3X_1 + 6X_2 \qquad - S_2 = 12 \Rightarrow \boxed{S_2} = \boxed{12} \end{array}$$

الكتابة المصفوفاتية للنموذج: لا تشترط في الحل لكن تساعد على فهم تحويل مصفوفة القيود الى الجدول الأول للسمبلكس:

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \end{matrix}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

3- اعداد الجدول الأول للسمبلكس:

يتم اعداد الجدول الأول للسمبلكس من خلال تحويل وترتيب بيانات النموذج الخطي كما يلي:

B : المتغيرات الأساسية غير المعدومة. (تبدأ بمتغيرات الحل الابتدائي الممكن وتتغير خلال تغيير الجدول)

C_B : معاملات المتغيرات الأساسية في دالة الهدف Z

$rhs=X_B$: الحل الذي يقابل المتغيرات، الجانب الأيمن من القيود (Right Hand Side)

C_j: معاملات المتغيرات في دالة الهدف

X_B/x_i : هذه النسبة تحدد المتغير الخارج حيث يتم اختيار أقل نسبة موجبة

***Z_j*:** يتم حسابها بضرب الشعاع C_B في العمود المقابل لكل قيمة.

***C_j-Z_j* :** في كل عمود يتم طرح قيمة Z_j من C_j

الجدول-1		*C_j*	2	4	0	0	
المتغيرات الأساسية B	*C_B*	*$rhs=X_B$*	*x_1*	*x_2*	*S_1*	*S_2*	أقل نسبة موجبة X_B/x_2
S_1	0	8	2	(4)	1	0	8/4=2→
S_2	0	12	3	6	0	1	12/6=2
Z=0		*Z_j*	**0**	**0**	**0**	**0**	
		C_j-Z_j	2	4↑	0	0	

تحديد المتغير الداخل: أكبر قيمة في سطر C_j-Z_j في حالة (Max) هي 4 المقابلة لعمود المتغير x_2. اذن x_2 هو المتغير الداخل في الجدول الموالي.

تحديد المتغير الخارج: أدنى قيمة موجبة في عمود النسبة X_B/x_i في حالة (Max أو Min) هي 2 (في هذه الحالة متساوية بين السطرين) لذلك يمكننا الاختيار بينهم. لنختار المتغير الخارج S_1.

قيمة المحور (Pivot) التي تمثل نقطة تقاطع سطر المتغير الخارج مع عمود المتغير الداخل، هي 4.

للانتقال الى الجدول **الجديد** يمكن الاستعانة **بجداول مساعدة** لحساب القيم الجديدة في الجدول الجديد.

بالاعتماد على الأسس التالية: Row =R = سطر

- السطر الذي ينتمي اليه المحور يتم **قسمة** جميع قيمه على قيمة **المحور**، كما يلي:

$R1$(جديد)=$R1$(قديم)÷4

$R1$(قديم) =	8	2	4	1	0
$R1$(جديد)=$R1$(قديم)÷4	2	1/2	1	1/4	0

- أما الأسطر الأخرى فيتم حساب قيمها الجديدة كما يلي:

السطر الجديد= السطر القديم – [قيم **سطر المحور** الجديد × القيمة المقابلة للمحور في **السطر القديم]**

R2 (جديد) = R2(قديم) - [R1(جديد) × 6]

$R2$(جديد)=$R2$(قديم) - 6$R1$(جديد)

$R2$(قديم) =	12	3	6	0	1
$R1$(جديد) =	2	1/2	1	1/4	0
6×$R1$(جديد) =	12	3	6	3/2	0
$R2$(جديد)=$R2$(قديم) - 6$R1$(جديد)	0	0	0	-3/2	1

الجدول-2		*Cj*	2	4	0	0	
B	***C_B***	***rhs=X_B***	***x*1**	***x*2**	***S*1**	***S*2**	النسبة
*x*2	4	2	1/2	1	1/4	0	
*S*2	0	0	0	0	-3/2	1	
***Z*=8**		***Zj***	**2**	**4**	**1**	**0**	
		Cj-Zj	0	0	-1	0	

كل قيم C_j-Z_j أقل أو تساوي الصفر. (تحقق شرط الأمثلية في حالة التعظيم) $c_j - z_j \le 0$ اذن الجدول الأخير يمثل الحل الأمثل.

الحل الأمثل: $[Max]Z = 8,\ X_1 = 0,\ X_2 = 2,\ S_1 = 0,\ S_2 = 0$

شرط الأمثلية: في كل مرة ننتهي من اعداد جدول السمبلكس، نتحقق من توفر شرطي الأمثلية لــ: Dantzig

1- كل قيم $c_j - z_j \le 0$. في حالة Max أو $c_j - z_j \ge 0$ في حالة Min

2- $x_1, x_2, s_1, s_2 \ge 0$

تمرين 2:

$$[Min]Z = 3x_1 + 5x_2$$
$$S/c$$
$$x_1 + 3x_2 \le 6$$
$$2x_1 + 4x_2 \ge 8$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

1-تحويل البرنامج الى الشكل القياسي: نحول القيود الى معادلات لتضاف اليها المتغيرات المتممة (الراكدة) و/أو الاصطناعية:

$$[Min]Z = 3X_1 + 5X_2 + 0S_1 + 0S_2 + MA_1$$
$$S/c$$
$$X_1 + 3X_2 + S_1 = 6$$
$$2X_1 + 4X_2 - S_2 + A_1 = 8$$
$$X_1, X_2, S_1, S_2, A_1 \ge 0$$

إيجاد الحل الابتدائي الأساسي الممكن: نفترض أن الإنتاج معدوم، لذلك $x_1 = x_2 = 0$

$$X_1 + 3X_2 + S_1 = 6 \Rightarrow S_1 = 6$$
$$2X_1 + 4X_2 - S_2 + A_1 = 8 \Rightarrow A_1 = 8$$

الجدول-1		Cj	3	5	0	0	M	
B	**C_B**	**$rhs=X_B$**	**$x1$**	**$x2$**	**$S1$**	**$S2$**	**$A1$**	النسبة **X_B/x_2**
$S1$	0	6	1	3	1	0	0	6/3=2
$A1$	M	8	2	**(4)**	0	-1	1	8/4=2→
$Z=8M$		**Zj**	**$2M$**	**$4M$**	**0**	**$-M$**	**M**	
		$Cj-Zj$	$-2M+3$	$-4M+5$↑	0	M	0	

تحديد المتغير الداخل: أقل قيمة في سطر C_j-Z_j في حالة (Min) هي $-4M+5$ المقابلة لعمود المتغير x_2. اذن x_2 هو المتغير الداخل في الجدول الموالي.
تحديد المتغير الخارج: أدنى قيمة موجبة في عمود النسبة X_B/x_i في حالة (Max أو Min) هي 2 (في هذه الحالة متساوية بين السطرين) هنا الأسبقية دائما لخروج المتغير الاصطناعي A_1

قيمة المحور (Pivot) التي تمثل نقطة تقاطع سطر المتغير الخارج مع عمود المتغير الداخل، هي 4
للانتقال الى الجدول **الجديد** يمكن الاستعانة **بجداول مساعدة** لحساب القيم الجديدة في الجدول الجديد.
بالاعتماد على الأسس التالية: R= Row = سطر

السطر الذي ينتمي اليه المحور يتم **قسمة** جميع قيمه على قيمة **المحور**، كما يلي:

$R2$(جديد)$=R2$(قديم)$\div 4$

$R2$(قديم) =	8	2	4	0	-1
$R2$(جديد)$=R2$(قديم)$\div 4$	2	1/2	1	0	-1/4

أما الأسطر الأخرى فيتم حساب قيمها الجديدة كما يلي:

السطر الجديد= السطر القديم – [قيم **سطر المحور** الجديد × القيمة المقابلة للمحور في **السطر القديم**]

R2 (جديد) = R2(قديم) **-** [3 × R1(جديد)]

$R1$(جديد)$=R1$(قديم) - $3R2$(جديد)

$R1$(قديم) =	6	1	3	1	0
$R2$(جديد) =	2	1/2	1	0	-1/4
$3\times R2$(جديد) =	6	3/2	3	0	-3/4
$R1$(جديد)$=R1$(قديم) - $3R2$(جديد)	0	-1/2	0	1	3/4

الجدول-2		Cj	3	5	0	0	
B	C_B	***rhs***$=X_B$	***x*1**	***x*2**	***S*1**	***S*2**	**النسبة**
$S1$	0	0	-1/2	0	1	3/4	
$x2$	5	2	1/2	1	0	-1/4	
***Z*=10**		***Zj***	**5/2**	**5**	**0**	**-5/4**	
		Cj-Zj	1/2	0	0	5/4	

كل قيم C_j-Z_j أكبر أو تساوي الصفر. (تحقق شرط الأمثلية في حالة تدنية) $c_j - z_j \geq 0$ اذن الجدول الأخير يمثل الحل الأمثل.

الحل الأمثل: $[Min]Z = 10,\ X_1 = 0,\ X_2 = 2,\ S_1 = 0,\ S_2 = 0$

شروط الأمثلية: في كل مرة ننتهي من اعداد جدول السمبلكس، نتحقق من شروط الأمثلية لــ Dantzig:

1- كل قيم $c_j - z_j \leq 0$ في حالة Max أو $c_j - z_j \geq 0$ في حالة Min

2- $x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$

3- $A_i = 0$

تمرين 3:

$$[Min]Z = 2x_1 + x_2$$
$$S/c$$
$$x_1 + 3x_2 \geq 18$$
$$4x_1 + 2x_2 \geq 32$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

1-تحويل البرنامج الى الشكل القياسي: نحول القيود الى معادلات لتضاف اليها المتغيرات المتممة (الراكدة) و/أو الاصطناعية:

$$[Min]Z = 2X_1 + X_2 + 0S_1 + 0S_2 + MA_1 + MA_2$$
$$S/c$$
$$X_1 + 3X_2 - S_1 + A_1 = 18$$
$$4X_1 + 2X_2 - S_2 + A_2 = 32$$
$$X_1, X_2, S_1, S_2, A_1, A_2 \geq 0$$

إيجاد الحل الابتدائي الأساسي الممكن: نفترض أن الإنتاج معدوم، لذلك $X_1 = X_2 = S_1 = S_2 = 0$

$$X_1 + 3X_2 - S_1 + A_1 = 18 \Rightarrow A_1 = 18$$
$$4X_1 + 2X_2 - S_2 + A_2 = 32 \Rightarrow A_2 = 32$$

الجدول-1		Cj	2	1	0	0	M	M	
B	**C_B**	**$rhs=X_B$**	**$x1$**	**$x2$**	**$S1$**	**$S2$**	**$A1$**	**$A2$**	النسبة X_B/x_2
$A1$	M	18	1	(3)	-1	0	1	0	18/3=6→
$A2$	M	32	4	2	0	-1	0	1	32/2=16
$Z=50M$		**Zj**	**$5M$**	**$5M$**	**$-M$**	**$-M$**	**M**	**M**	
		$Cj-Zj$	$-5M+2$	$-5M+1$↑	M	M	0	0	

تحديد المتغير الداخل: أقل قيمة في سطر C_j-Z_j في حالة (Min) هي $-5M+1$ المقابلة لعمود المتغير x_2. اذن x_2 هو المتغير الداخل في الجدول الموالي.
تحديد المتغير الخارج: أدنى قيمة موجبة في عمود النسبة X_B/x_i في حالة (Max أو Min) هي 6 اذن المتغير الخارج هو المتغير الاصطناعي A_1

قيمة المحور (Pivot) التي تمثل نقطة تقاطع سطر المتغير الخارج مع عمود المتغير الداخل، هي 3
للانتقال الى الجدول **الجديد** يمكن الاستعانة **بجداول مساعدة** لحساب القيم الجديدة في الجدول الجديد.
بالاعتماد على الأسس التالية: R= Row = سطر

السطر الذي ينتمي اليه المحور يتم **قسمة** جميع قيمه على قيمة **المحور**، كما يلي:

$R1$(جديد)$=R1$(قديم)$\div 3$

$R1$(قديم) =	18	1	3	-1	0	0
$R1$(جديد)$=R1$(قديم)$\div 3$	6	1/3	1	-1/3	0	0

أما الأسطر الأخرى فيتم حساب قيمها الجديدة كما يلي:
السطر الجديد =السطر القديم – [قيم **سطر المحور** الجديد × القيمة المقابلة للمحور في **السطر القديم**]
R2 (جديد) = R2(قديم) - [2 × R1(جديد)]

$R2$(جديد)$=R2$(قديم) - $2R1$(جديد)

$R2$(قديم) =	32	4	2	0	-1	1
$R1$(جديد) =	6	1/3	1	-1/3	0	0
$2\times R1$(جديد) =	12	2/3	2	-2/3	0	0
$R2$(جديد)$=R2$(قديم) - $2R1$(جديد)	20	10/3	0	2/3	-1	1

الجدول-2		Cj	2	1	0	0	M	
B	C_B	$rhs=X_B$	**x1**	**x2**	**S1**	**S2**	**A2**	**النسبة** X_B/x_1
$x2$	1	6	1/3	1	-13	0	0	6/1/3=18
A2	M	20	**(10/3)**	0	2/3	-1	1	20/10/3=6→
Z=20M+6		**Zj**	**10M/3+1/3**	**1**	**2M/3-1/3**	**-M**	**M**	
		Cj-Zj	-10M/3+5/3↑	0	-2M/3+1/3	M	0	

هناك قيم في سطر C_j-Z_j سالبة. باعتبار الدالة Min فان شرط الأمثلية لم يتحقق. لذلك نواصل عملية الحل بالانتقال الى جدول أخر. حتى تحقق شرط الأمثلية.

تحديد المتغير الداخل: أقل قيمة في سطر C_j-Z_j في حالة (Min) هي $(5/3)+(10M/3)-$ المقابلة لعمود المتغير X_1. اذن X_1 هو المتغير الداخل في الجدول الموالي.

تحديد المتغير الخارج: أدنى قيمة موجبة في عمود النسبة X_B/x_i في حالة (Max أو Min) هي 6 اذن المتغير الخارج هو المتغير الاصطناعي A_2

قيمة المحور (Pivot) التي تمثل نقطة تقاطع سطر المتغير الخارج مع عمود المتغير الداخل، هي (10/3)

للانتقال الى الجدول **الجديد** يمكن الاستعانة **بجداول مساعدة** لحساب القيم الجديدة في الجدول الجديد. بالاعتماد على الأسس التالية: R= Row = سطر

السطر الذي ينتمي اليه المحور يتم **قسمة** جميع قيمه على قيمة **المحور**، كما يلي:

$R2$(جديد)=$R2$(قديم) ×3/10

$R2$(قديم) =	20	10/3	0	2/3	-1
$R2$(جديد)=$R2$(قديم) ×3/10	6	1	0	1/5	-3/10

أما الأسطر الأخرى فيتم حساب قيمها الجديدة كما يلي:

السطر الجديد=السطر القديم – [قيم **سطر المحور** الجديد × القيمة المقابلة للمحور في **السطر القديم**]

R2 (جديد) = R2(قديم) - [(1/3) × R1(جديد)]

$R1$(جديد)=$R1$(قديم) – 1/3$R2$(جديد)

$R1$(قديم) =	6	1/3	1	-1/3	0
$R2$(جديد) =	6	1	0	1/5	-3/10
1/3×$R2$(جديد) =	2	1/3	0	1/15	-1/10
$R1$(جديد)=$R1$(قديم) - 13$R2$(جديد)	4	0	1	-2/5	1/10

الجدول-3		*Cj*	2	1	0	0	
B	***CB***	***rhs=XB***	***x1***	***x2***	***S1***	***S2***	**النسبة**
*x*2	1	4	0	1	-2/5	1/10	
*x*1	2	6	1	0	1/5	-3/10	
***Z*=16**		***Zj***	**2**	**1**	**0**	**-1/2**	
		Cj-Zj	0	0	0	1/2	

كل قيم C_j-Z_j أكبر أو تساوي الصفر. (تحقق شرط الأمثلية في حالة التدنية) $c_j - z_j \geq 0$ اذن الجدول الأخير يمثل الحل الأمثل.

الحل الأمثل: $[Min]Z = 16,\ X_1 = 6,\ X_2 = 4,\ S_1 = 0,\ S_2 = 0$

شرط الأمثلية: في كل مرة ننتهي من اعداد جدول السمبلكس، نتحقق من شروط الأمثلية لــ Dantzig:

1- كل قيم $c_j - z_j \leq 0$. في حالة Max أو $c_j - z_j \geq 0$ في حالة Min

2- $x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$

3- $A_i = 0$

تمرين 4: حل نفس التمرين بطريقة المرحلتين:

$$[Min]Z = 2x_1 + 5x_2$$
$$S/c$$
$$x_1 + 3x_2 \geq 18$$
$$4x_1 + 2x_2 \geq 32$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

1- المرحلة الأولى:

يتم التحويل الى الشكل القياسي، لكن بالحفاظ على المتغيرات الاصطناعية فقط بدون المعامل M في دالة الهدف. وحذف كل المتغيرات الأخرى. مع تغيير شكل دالة الهدف الى Min مهما كان نوعها.
اذن نستخدم دائما دالة الهدف من الشكل Min والتي تساوي مجموع المتغيرات الاصطناعية بمعاملات 1.
وترك القيود كما هي، في الشكل القياسي. ثم الحل النموذج المحول بطريقة السمبلكس.

$$[Min]Z = A_1 + A_2$$
$$S/c$$
$$X_1 + 3X_2 - S_1 + A_1 = 18$$
$$4X_1 + 2X_2 - S_2 + A_2 = 32$$
$$X_1, X_2, S_1, S_2, A_1, A_2 \geq 0$$

إيجاد الحل الابتدائي الأساسي الممكن: نفترض أن الإنتاج معدوم، لذلك $X_1 = X_2 = S_1 = S_2 = 0$

$$X_1 + 3X_2 - S_1 + A_1 = 18 \Rightarrow A_1 = 18$$
$$4X_1 + 2X_2 - S_2 + A_2 = 32 \Rightarrow A_2 = 32$$

الجدول-1		Cj	0	0	0	0	1	1	
B	C_B	$rhs=X_B$	**x1**	**x2**	**S1**	**S2**	**A1**	**A2**	النسبة X_B/x_1
$A1$	1	18	1	3	-1	0	1	0	18/1=18
A2	1	32	**(4)**	2	0	-1	0	1	32/4=8→
Z=50		**Zj**	**5**	**5**	**-1**	**-1**	**1**	**1**	
		Cj-Zj	-5↑	-5	1	1	0	0	

تحديد المتغير الداخل: أقل قيمة في سطر C_j-Z_j في حالة (Min) هي 5- المقابلة لعمود المتغير X_1. و X_2. اذن يمكننا الاختيار بينهم. X_1 هو المتغير الداخل في الجدول الموالي.
تحديد المتغير الخارج: أدنى قيمة موجبة في عمود النسبة X_B/x_i في حالة (Max أو Min) هي 8 اذن المتغير الخارج هو المتغير الاصطناعي A_2

قيمة المحور (Pivot) التي تمثل نقطة تقاطع سطر المتغير الخارج مع عمود المتغير الداخل، هي (4) للانتقال الى الجدول **الجديد** يمكن الاستعانة **بجداول مساعدة** لحساب القيم الجديدة في الجدول الجديد.
بالاعتماد على الأسس التالية: R= Row = سطر
السطر الذي ينتمي اليه المحور يتم **قسمة** جميع قيمه على قيمة **المحور**، كما يلي:

$R2$(جديد)=$R2$(قديم)÷4

$R2$(قديم) =	32	4	2	0	-1	0
$R2$(جديد)=$R2$(قديم)÷4	8	1	12	0	-1/4	0

أما الأسطر الأخرى فيتم حساب قيمها الجديدة كما يلي:
السطر الجديد =السطر القديم – [قيم **سطر المحور** الجديد × القيمة المقابلة للمحور في **السطر القديم**]
R2 (جديد) = R2(قديم) - [(1) × R1(جديد)]

$R1$(جديد)=$R1$(قديم) - $R2$(جديد)

$R1$(قديم) =	18	1	3	-1	0	1
$R2$(جديد) =	8	1	1/2	0	-1/4	0
$R1$(جديد)=$R1$(قديم) - $R2$(جديد)	10	0	5/2	-1	1/4	1

الجدول-2		Cj	0	0	0	0	1	
B	**C_B**	**$rhs=X_B$**	**$x1$**	**$x2$**	**$S1$**	**$S2$**	**$A1$**	النسبة X_B/x_2
$A1$	1	10	0	**(5/2)**	-1	1/4	1	10/5/2=4→
$x1$	0	8	1	1/2	0	-1/4	0	8/1/2=16
Z=10		**Zj**	**0**	**5/2**	**-1**	**1/4**	**1**	
		Cj-Zj	0	-5/2↑	1	-1/4	0	

هناك قيم في سطر C_j-Z_j سالبة. باعتبار الدالة Min فان شرط الأمثلية لم يتحقق. لذلك نواصل عملية الحل بالانتقال الى جدول أخر. حتى تحقق شرط الأمثلية.

تحديد المتغير الداخل: أقل قيمة في سطر C_j-Z_j في حالة (Min) هي (-5/2) المقابلة لعمود المتغير X_2.
اذن X_2 هو المتغير الداخل في الجدول الموالي.

تحديد المتغير الخارج: أدنى قيمة موجبة في عمود النسبة X_B/x_i في حالة (Max أو Min) هي 4 اذن المتغير الخارج هو المتغير الاصطناعي A_1

قيمة المحور (Pivot) التي تمثل نقطة تقاطع سطر المتغير الخارج مع عمود المتغير الداخل، هي (5/2) للانتقال الى الجدول **الجديد** يمكن الاستعانة **بجداول مساعدة** لحساب القيم الجديدة في الجدول الجديد.
بالاعتماد على الأسس التالية: Row =R = سطر
السطر الذي ينتمي اليه المحور يتم **قسمة** جميع قيمه على قيمة **المحور**، كما يلي:

$R1$(جديد)=$R1$(قديم) ×2/5

$R1$(قديم) =	10	0	5/2	-1	1/4
$R1$(جديد)=$R1$(قديم) ×2/5	4	0	1	-2/5	1/10

$R2$(جديد)=$R2$(قديم) - 12$R1$(جديد)

$R2$(قديم) =	8	1	1/2	0	-1/4
$R1$(جديد) =	4	0	1	-25	110
1/2×$R1$(جديد) =	2	0	1/2	-15	1/20
$R2$(جديد)=$R2$(قديم) – 1/2$R1$(جديد)	6	1	0	1/5	-3/10

3-الجدول		Cj	0	0	0	0	
B	**C_B**	**$rhs=X_B$**	**x1**	**x2**	**S1**	**S2**	**النسبة**
$x2$	0	4	0	1	-2/5	1/10	
$x1$	0	6	1	0	1/5	-3/10	
Z=0		**Zj**	**0**	**0**	**0**	**0**	
		Cj-Zj	0	0	0	0	

كل قيم C_j-Z_j أكبر أو تساوي الصفر. (تحقق شرط الأمثلية في حالة التدنية) $c_j - z_j \geq 0$ اذن الجدول الأخير يمثل الحل الأمثل للمرحلة الأولى. والتي تشترط التخلص من المتغيرات الاصطناعية $A_i = 0$.

الحل الأمثل: $[Min]Z = 0,\ X_1 = 6,\ X_2 = 4$

2- المرحلة الثانية:

بعد التخلص من المتغيرات الاصطناعية في المرحلة الأولى، يتم صياغة نموذج جديد بنفس شكل الدالة الأصلية (في هذه الحالة Min)، وبدون متغيرات اصطناعية.

$$[Min]Z = 2x_1 + 5x_2 + 0S_1 + 0S_2$$

- تكون مصفوفة القيود في الجدول الأخير من المرحلة الأولى هي نفسها في الجدول الأول للمرحلة الثانية (لإنشاء الجدول الأول، نعتمد نفس المتغيرات الأساسية بمعاملاتها الأصلية مع مصفوفة القيود للجدول الأخير) كما يلي:

1-الجدول		Cj	2	1	0	0	
B	**C_B**	**X_B**	**x1**	**x2**	**S1**	**S2**	**النسبة**
$x2$	1	4	0	1	-2/5	1/10	
$x1$	2	6	1	0	1/5	-3/10	
Z=16		**Zj**	**2**	**1**	**0**	**-12**	
		Cj-Zj	0	0	0	12	

كل قيم C_j-Z_j أكبر أو تساوي الصفر. (تحقق شرط الأمثلية في حالة التدنية) $c_j - z_j \geq 0$ اذن الجدول الأخير يمثل الحل الأمثل للنموذج.

الحل الأمثل: $[Min]Z = 16,\ X_1 = 6,\ X_2 = 4$

في العديد من النماذج البسيطة، بمجرد الانتقال الى المرحلة الثانية، نجد الجدول الأول يمثل الحل الأمثل.

تمرين 5:

$$[Max]Z = 5x_1 + 4x_2$$
$$S/c$$
$$4x_1 + 6x_2 \le 12$$
$$5x_1 + 6x_2 \le 30$$
$$2x_1 \le 14$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

1-تحويل البرنامج الى الشكل القياسي: نحول القيدود الى معادلات لتضاف اليها المتغيرات المتممة (الراكدة) و/أو الاصطناعية:

$$[Max]Z = 5X_1 + 4X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$
$$S/c$$
$$4X_1 + 6X_2 + S_1 = 12$$
$$5X_1 + 6X_2 + S_2 = 30$$
$$2X_1 + S_3 = 14$$
$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \ge 0$$

إيجاد الحل الابتدائي الأساسي الممكن: نفترض أن الإنتاج معدوم، لذلك $x_1 = x_2 = 0$

$$4X_1 + 6X_2 + S_1 = 12 \Rightarrow S_1 = 12$$
$$5X_1 + 6X_2 + S_2 = 30 \Rightarrow S_2 = 30$$
$$2X_1 + S_3 = 14 \Rightarrow S_3 = 14$$

1-الجدول		*Cj*	5	4	0	0	0	
B	C_B	$rhs=X_B$	***x1***	***x2***	***S1***	***S2***	***S3***	النسبة X_B/x_1
S1	0	12	**(4)**	6	1	0	0	12/4=3→
S2	0	30	5	6	0	1	0	30/5=6
S3	0	14	2	0	0	0	1	14/2=7
Z=0		***Zj***	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	
		Cj-Zj	5↑	4	0	0	0	

هناك قيم في سطر C_j-Z_j موجبة. باعتبار الدالة Max فان شرط الأمثلية لم يتحقق. لذلك نواصل عملية الحل بالانتقال الى جدول أخر. حتى تحقق شرط الأمثلية.

تحديد المتغير الداخل: أكبر قيمة في سطر C_j-Z_j في حالة (Max) هي (5) المقابلة لعمود المتغير X_1.
اذن X_1 هو المتغير الداخل في الجدول الموالي.

تحديد المتغير الخارج: أدنى قيمة موجبة في عمود النسبة X_B/x_i في حالة (Max أو Min) هي 3 اذن المتغير الخارج هو المتغير المتمم S_1

قيمة المحور (Pivot) التي تمثل نقطة تقاطع سطر المتغير الخارج مع عمود المتغير الداخل، هي (4)
للانتقال الى الجدول **الجديد** يمكن الاستعانة **بجداول مساعدة** لحساب القيم الجديدة في الجدول الجديد.
بالاعتماد على الأسس التالية: R= Row = سطر

السطر الذي ينتمي اليه المحور يتم **قسمة** جميع قيمه على قيمة **المحور**، كما يلي:

$R1$(جديد)=$R1$(قديم)÷4

$R1$(قديم) =	12	4	6	1	0	0
$R1$(جديد)=$R1$(قديم)÷4	3	1	3/2	1/4	0	0

$R2$(جديد)=$R2$(قديم) - 5$R1$(جديد)

$R2$(قديم) =	30	5	6	0	1	0
$R1$(جديد) =	3	1	3/2	1/4	0	0
5×$R1$(جديد) =	15	5	15/2	5/4	0	0
$R2$(جديد)=$R2$(قديم) - 5$R1$(جديد)	15	0	-3/2	-5/4	1	0

$R3$(جديد)=$R3$(قديم) - 2$R1$(جديد)

$R3$(قديم) =	14	2	0	0	0	1
$R1$(جديد) =	3	1	3/2	1/4	0	0
2×$R1$(جديد) =	6	2	3	1/2	0	0
$R3$(جديد)=$R3$(قديم) - 2$R1$(جديد)	8	0	-3	-1/2	0	1

2-الجدول		C_j	5	4	0	0	0	
B	***C***C_B	***rhs=***X_B	***x*1**	***x*2**	***S*1**	***S*2**	***S*3**	**النسبة**
$x1$	5	3	1	3/2	1/4	0	0	
$S2$	0	15	0	-3/2	-5/4	1	0	
$S3$	0	8	0	-3	-1/2	0	1	
***Z*=15**		***Zj***	**5**	**15/2**	**5/4**	**0**	**0**	
		Cj-Zj	0	-7/2	-5/4	0	0	

كل قيم C_j-Z_j أقل أو تساوي الصفر. (تحقق شرط الأمثلية في حالة تعظيم) $c_j - z_j \leq 0$ اذن الجدول الأخير يمثل الحل الأمثل.

الحل الأمثل: $[Max]Z = 15,\ X_1 = 3,\ X_2 = 0,\ S_1 = 0,\ S_2 = 15,\ S_3 = 8$

شرط الأمثلية: في كل مرة ننتهي من اعداد جدول السمبلكس، نتحقق من شرطي الأمثلية لـ Dantzig:

1- كل قيم $c_j - z_j \leq 0$. في حالة Max أو $c_j - z_j \geq 0$ في حالة Min

2- $x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$

تمرين 6:

$$[Max]Z = 3x_1 + 5x_2$$
$$S/c$$
$$4x_1 + 3x_2 \leq 12$$
$$2x_1 + 4x_2 \leq 8$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

1-تحويل البرنامج الى الشكل القياسي: نحول القيود الى معادلات لتضاف اليها المتغيرات المتممة (الراكدة) و/أو الاصطناعية:

1- الشكل القياسي:

$$
\begin{aligned}
&[Max]Z = 3x_1 + 5x_2 + 0s_1 + 0s_2 \\
&S/c \\
&4x_1 + 3x_2 + s_1 = 12 \\
&2x_1 + 4x_2 + s_2 = 8 \\
&x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

2-إيجاد الحل الابتدائي الأساسي الممكن: نفترض أن متغيرات الإنتاج معدومة: $x_1 = x_2 = 0$

$$
\begin{aligned}
&4x_1 + 3x_2 + s_1 = 12 \Rightarrow s_1 = 12 \\
&2x_1 + 4x_2 + s_2 = 8 \Rightarrow s_2 = 8
\end{aligned}
$$

الجدول-1		Cj	3	5	0	0	
B	***C_B***	***rhs=X_B***	***x*1**	***x*2**	***S*1**	***S*2**	النسبة X_B/x_2
$S1$	0	12	4	3	1	0	12/3=4
$S2$	0	8	2	**(4)**	0	1	8/4=2→
***Z*=0**		***Zj***	**0**	**0**	**0**	**0**	
		Cj-Zj	3	5↑	0	0	

تحديد المتغير الداخل: أكبر قيمة في سطر C_j-Z_j في حالة (Max) هي 5 المقابلة لعمود المتغير x_2. اذن x_2 هو المتغير الداخل في الجدول الموالي.

تحديد المتغير الخارج: أدنى قيمة موجبة في عمود النسبة X_B/x_i في حالة (Max أو Min) هي 2 لذلك نختار المتغير الخارج S_2

قيمة المحور (Pivot) التي تمثل نقطة تقاطع سطر المتغير الخارج مع عمود المتغير الداخل، هي 4 للانتقال الى الجدول **الجديد** يمكن الاستعانة **بجداول مساعدة** لحساب القيم الجديدة في الجدول الجديد. بالاعتماد على الأسس التالية: R= Row = سطر

السطر الذي ينتمي اليه المحور يتم **قسمة** جميع قيمه على قيمة **المحور**، كما يلي:

$R2$(جديد)=$R2$(قديم)÷4

$R2$(قديم) =	8	2	4	0	1
$R2$(جديد)=$R2$(قديم)÷4	2	1/2	1	0	1/4

أما الأسطر الأخرى فيتم حساب قيمها الجديدة كما يلي:

السطر الجديد =السطر القديم – [قيم **سطر المحور** الجديد × القيمة المقابلة للمحور في **السطر القديم]**

R2 (جديد) = R2(قديم) - [3 × R1(جديد)]

$R1$(جديد)=$R1$(قديم) - $3R2$(جديد)

$R1$(قديم) =	12	4	3	1	0
$R2$(جديد) =	2	1/2	1	0	1/4
$3\times R2$(جديد) =	6	3/2	3	0	3/4
$R1$(جديد)=$R1$(قديم) - $3R2$(جديد)	6	5/2	0	1	-3/4

الجدول-2		*Cj*	3	5	0	0	
B	C_B	***rhs=X_B***	***x1***	***x2***	***S1***	***S2***	**النسبة** X_B/x_1
S1	0	6	**(5/2)**	0	1	-3/4	6/5/2=12/5=2.4→
x2	5	2	1/2	1	0	1/4	2/1/2=4
***Z*=10**		***Zj***	**5/2**	**5**	**0**	**5/4**	
		Cj-Zj	12↑	0	0	-5/4	

هناك قيم في سطر C_j-Z_j موجبة. باعتبار الدالة Max فان شرط الأمثلية لم يتحقق. لذلك نواصل عملية الحل بالانتقال الى جدول أخر. حتى تحقق شرط الأمثلية.

تحديد المتغير الداخل: أكبر قيمة في سطر C_j-Z_j في حالة (Max) هي (12) المقابلة لعمود المتغير X_1.
اذن X_1 هو المتغير الداخل في الجدول الموالي.

تحديد المتغير الخارج: أدنى قيمة موجبة في عمود النسبة X_B/x_i في حالة (Max أو Min) هي 2.4 اذن المتغير الخارج هو المتغير المتمم S_1

قيمة المحور (Pivot) التي تمثل نقطة تقاطع سطر المتغير الخارج مع عمود المتغير الداخل، هي (5/2) للانتقال الى الجدول **الجديد** يمكن الاستعانة **بجداول مساعدة** لحساب القيم الجديدة في الجدول الجديد. بالاعتماد على الأسس التالية: R= Row = سطر

السطر الذي ينتمي اليه المحور يتم **قسمة** جميع قيمه على قيمة **المحور**، كما يلي:

$R1$(جديد)=$R1$(قديم) ×2/5

$R1$(قديم) =	6	5/2	0	1	-3/4
$R1$(جديد)=$R1$(قديم) ×2/5	12/5	1	0	2/5	-3/10

$R2$(جديد)=$R2$(قديم) – 1/2$R1$(جديد)

$R2$(قديم) =	2	1/2	1	0	1/4
$R1$(جديد) =	12/5	1	0	2/5	-3/10
1/2×$R1$(جديد) =	6/5	12	0	1/5	-3/20
$R2$(جديد)=$R2$(قديم) - 12$R1$(جديد)	4/5	0	1	-1/5	2/5

الجدول-3		*Cj*	3	5	0	0	
B	***C_B***	***rhs=X_B***	***x*1**	***x*2**	***S*1**	***S*2**	**النسبة**
*x*1	3	12/5	1	0	2/5	-3/10	
*x*2	5	4/5	0	1	-1/5	2/5	
***Z*=56/5**		***Zj***	**3**	**5**	**1/5**	**11/10**	
		Cj-Zj	0	0	-1/5	-11/10	

كل قيم C_j-Z_j أقل أو تساوي الصفر. (تحقق شرط الأمثلية في حالة تعظيم) $c_j - z_j \le 0$ اذن الجدول الأخير يمثل الحل الأمثل.

الحل الأمثل: $[Max]Z = 56/5, X_1 = 12/5, X_2 = 4/5$

الحالات الخاصة في طريقة السمبلكس: نتطرق الى هذه الحالات على سبيل المعرفة، بدون حل أمثلة، باعتبارها محتواه في برنامج بحوث العمليات للسنة المقبلة ان شاء الله.

1- عدم وجود حل ممكن: Infeasible solution نلاحظ هذه الحالة عندما يكون هناك تناقض بين القيود في النموذج الخطي.
2- تعدد الحلول المثلى: Alternative solution عندما يوازي مستقيم دالة الهدف أحد القيود. نلاحظ هذه الحالة عندما تكون معاملات أحد القيود التي تمر على الحل الأمثل من مضاعفات دالة الهدف.
3- أحد القيود لا يؤثر على الحل: Degeneracy تكون الموارد المتاحة في أحد القيود فائضة.
4- الحل الأمثل غير محدد: Unbounded solutions عندما تكون منطقة الحلول الممكنة غير محدودة تؤول الى + ما لانهاية. عندما تكون الدالة تعظيم ومنطقة الحل تؤول الى + ما لانهاية.

4- الفصل الرابع: النموذج المقابل (الثنائي) وتحليل الحساسية:

تساعد طرق حل النموذج الخطي متخذ القرار في توفير الحل الأمثل. لكن هذه البيانات ليس لها أهمية إذا لم يتم تفسيرها بشكل صحيح. إضافة إلى ذلك يمكن اجراء تحليلات اضافية ما بعد الأمثلية تفسر الحل وتوفر لمتخذ القرار بيانات إضافية لها أهمية بالغة. نذكر من بينها تحليل بيانات النموذج الثنائي وتحليل حساسية الحل الأمثل المتوصل إليه بدراسة مختلف التغيرات التي ستطرأ على الحل الأمثل في حالة تغير مختلف عناصر النموذج الرياضي مثل كمية الموارد المتاحة أو معاملات دالة الهدف أو تغير معاملات القيود. فهذه العناصر غالبا ما تكون مرتبطة بحالة عدم التأكد لأن محيط المؤسسة يعتبر غير ثابت وقابل للتغير الأمر الذي يفرض على متخذ القرار دراسة و تحليل المجال الذي يبقى فيه الحل أمثلا عن طريق دراسة تحليل الحساسية.

4-1- النموذج الثنائي: Dual Program

4-1-1- مفهوم النموذج الثنائي:

كل نموذج خطي أولي (أصلي) يتكون من مجموعة من المتغيرات ومجموعة من القيود، يمكن كتابته باستخدام نموذج ثنائي (مقابل) له. حيث تكون عدد متغيرات النموذج الأولي تساوي عدد قيود النموذج الثنائي. وعدد قيود النموذج الأولي تساوي عدد متغيرات النموذج الثنائي. والعكس صحيح. بمعنى أنه يمكن اعتبار النموذج الثنائي يمثل نموذج أولي لمقابله. ويكون النموذجين الأولي والثنائي متعاكسين في هدف الدالة. بمعنى أنه إذا كان النموذج الأولي يمثل تعظيم للأرباح (لأن متغيراته تقابل كمية الإنتاج). فان نموذجه الثنائي يمثل تدنية تكاليف استخدام موارد الإنتاج (لأن متغيراته تقابل كمية الموارد المستعملة في الإنتاج). بالإضافة الى أن تفسير الحل الأمثل للنموذج الثنائي بالغ الأهمية بالنسبة لمتخذ القرار. حيث يوضح فكرة أسعار الظل. والتي تبين مدى مردودية الوحدة الواحدة من وسائل الإنتاج. بمعنى إذا أضفنا وحدة واحدة من مورد معين فكم سيؤثر ذلك على دالة الهدف. ما يساعد متخذ القرار على معرفة مقدار مساهمة كل مورد من موارد الإنتاج المحدودة في تحقيق الربح. (عبيدات، 2009)

بالإضافة الى أهمية النموذج الثنائي من حيث التفسير الاقتصادي لحله الأمثل. فهو أيضا يوفر بيانات الحل الأمثل للنموذج الأولي. بمعنى إذا صعب حل النموذج الأولي من حيث كثرة القيود أو المتغيرات، أو إضافة المتغيرات الاصطناعية. فانه من الممكن تحويله الى نموذج ثنائي واستنتاج الحل الأمثل للنموذج الأولي من خلال الحل الأمثل للنموذج الثنائي. والعكس صحيح. أي يمكن استنتاج الحل الأمثل للنموذج الثنائي من خلال الحل الأمثل للنموذج الأولي في آخر جدول للسمبلكس.

4-1-2- تحويل النموذج الأولي الى النموذج الثنائي:

هناك طريقتين للتحويل نذكر منها واحدة فقط باعتبارها الأسهل، بصياغة النموذج الثنائي من الشكل القانوني للنموذج الأولية، فاذا كان النموذج الأولي غير قانوني (مختلط). نحوله أولا الى الشكل القانوني. ليسهل تحويله الى النموذج الثنائي. (Michael W. Carter، 2019)

الصيغة العامة للعلاقة بين النموذج الأولي والثنائي:

النموذج الثنائي		النموذج الأولي
$[Min]F = \sum_{i=1}^{m} (b_i)' Y_i$	$\Leftrightarrow$	$[Max]Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$
$\sum_{i=1}^{m} (a_{ij})' Y_j \geq (C_j)' \quad ; \quad j = 1,2,\dots,n$	$\Leftrightarrow$	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \leq b_i \quad ; \quad i = 1,2,\dots,m$
$Y_i \geq 0$	$\Leftrightarrow$	$x_j \geq 0$

نلاحظ أن في عملية التحويل يتم استعمال منقول مصفوفة القيود، بتبديل السطر الى العمود.

الصيغة المفصلة للنموذجين الأولي والثنائي:

النموذج الأولي:

$$[Max]Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

$$S/c$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \geq 0$$

النموذج الثنائي:

$$[Min]F = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m$$

$$S/c$$

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m \geq c_1$$

$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m \geq c_2$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m \geq c_n$$

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_m \geq 0$$

مثال توضيحي: المطلوب تحويل البرنامج الخطي التالي الى النموذج الثنائي.

إذا كان النموذج الأولي من الشكل المختلط كما يلي:

$$\begin{aligned}
&[Min]Z = 8x_1 + 12x_2\\
&S/c\\
&3x_1 + 5x_2 \le 25\\
&7x_1 + 12x_2 \ge 15\\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

نحول أولا النموذج الأولي الى الشكل القانوني: (تم شرح هذا التحويل في آخر الفصل الأول)

$$\begin{aligned}
&[Min]Z = 8x_1 + 12x_2\\
&S/c\\
&-3x_1 - 5x_2 \ge -25 && \rightarrow y_1\\
&7x_1 + 12x_2 \ge 15 && \rightarrow y_2\\
&3x_1 \ge 6 && \rightarrow y_3\\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

نلاحظ أن المتغيرات y_1, y_2, y_3 التي تنتمي الى النموذج الثنائي، تقابل القيود في النموذج الأولي.

إيجاد منقول مصفوفة القيود
$$\begin{pmatrix} -3 & 7 & 3 \\ 5 & 12 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 7 & 12 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}'$$

التحويل الى النموذج الثنائي:

$$\begin{aligned}
&[Max]F = -25y_1 + 15y_2 + 6y_3\\
&S/c\\
&-3y_1 + 7y_2 + 3y_3 \le 8 && \rightarrow x_1\\
&-5y_1 + 12y_2 \le 12 && \rightarrow x_2\\
&y_1, y_2, y_3 \ge 0
\end{aligned}$$

استنتاج الحل الأمثل للبرنامج الأولي من خلال سطر C_j-F_j للحل الأمثل للبرنامج الثنائي:

- القيمة المطلقة التي تقابل المتغيرات Y_i للنموذج الثنائي في سطر C_j-F_j، تمثل قيمة المتغيرات المتممة S_i للنموذج الأولي.
- القيمة المطلقة التي تقابل المتغيرات المتممة S_i' في سطر C_j-F_j للنموذج الثنائي، تمثل قيمة متغيرات الانتاج X_i للنموذج الأولي.
- والعكس صحيح، حيث يمكن استنتاج حلول النموذج الثنائي من خلال حلول النموذج الأولي.
- قيمة دالة الهدف المثلى F للنموذج الثنائي هي نفسها قيمة Z في النموذج الأولي.

مثال توضيحي: مقارنة النتائج الأخيرة للحل الأمثل، بين النموذج الأولي وشكله الثنائي:

- الجدول الأخير الذي يمثل الحل الأمثل للنموذج الأولي:

الجدول-3		*Cj*	4	5	0	0	
B	C_B	$rhs=X_B$	x_1	x_2	S_1	S_2	**النسبة**
x_1	4	3	1	3/2	1/4	0	
S_2	0	5	0	1/2	-1/4	1	
***Z*=12**		Z_j	**4**	**6**	**1**	**0**	
		Cj-Zj	0	-1	-1	0	

- الجدول الأخير الذي يمثل الحل الأمثل للنموذج الثنائي (لنفس النموذج الأولي السابق):

الجدول-3		*Cj*	12	8	0	0	
B	C_B	Y_B	y_1	y_2	S_1'	S_2'	**النسبة**
S_2'	0	1	0	-1/2	-3/2	1	
y_1	12	1	1	1/4	-1/4	0	
***F*=12**		F_j	**12**	**3**	**-3**	**0**	
		Cj-Fj	0	5	3	0	

ملاحظة: في حالة Max، تنتج قيم سالبة في سطر C_j-Z_j لذلك يتم استنتاجها بالقيمة المطلقة في الحل.

2-4 تحليل الحساسية: Sensitivity Analysis

1-2-4 مفهوم تحليل الحساسية:

نادرا ما تكون معاملات البرنامج الخطي مؤكدة. فغالبا تكون هذه المعاملات متوقعة. لذلك بعد إيجاد الحل الأمثل للبرنامج الخطي، يجب دراسة حساسية هذا الحل لأي تغير يطرأ على قيمة أحد معاملات النموذج. ويسمى أيضا تحليل ما بعد الأمثلية. (Borgonovo, 2017)

مثال توضيحي: (نفس التمرين الأول من الفصل الثالث، ص 66)

$$[Max]Z = 2x_1 + 4x_2$$
$$S/c$$
$$2x_1 + 4x_2 \leq 8$$
$$3x_1 + 6x_2 \leq 12$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

الشكل القياسي:

$$[Max]Z = 2x_1 + 4x_2 + 0s_1 + 0s_2$$
$$S/c$$
$$2x_1 + 4x_2 + s_1 = 8$$
$$3x_1 + 6x_2 + s_2 = 12$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

الجدول-1		C_j	2	4	0	0	
المتغيرات الأساسية B	C_B	$rhs=X_B$	x_1	x_2	S_1	S_2	أقل نسبة موجبة X_B/x_2
S_1	0	8	2	(4)	1	0	8/4=2→
S_2	0	12	3	6	0	1	12/6=2
Z=0		Z_j	**0**	**0**	**0**	**0**	
		C_j-Z_j	2	4↑	0	0	

					C_j		الجدول-2
	0	0	4	2	C_j		
النسبة	**$S2$**	**$S1$**	**$x2$**	**$x1$**	**X_B**	**C_B**	**B**
	0	1/4	1	1/2	2	4	$x2$
	1	-3/2	0	0	0	0	$S2$
	0	**1**	**4**	**2**	**Zj**		**Z=8**
	0	-1	0	0	Cj-Zj		

كل قيم C_j-Z_j أقل أو تساوي الصفر. (تحقق شرط الأمثلية في حالة التعظيم) $c_j - z_j \leq 0$ اذن الجدول الأخير يمثل الحل الأمثل.

الحل الأمثل: $[Max]Z = 8,\ X_1 = 0,\ X_2 = 2,\ S_1 = 0,\ S_2 = 0$

4-2-2- في حالة تغير أحد عوامل دالة الهدف بمقدار Δ : $C_2 = 4 + \Delta$ كيف يؤثر ذلك على دالة الهدف. وما هو مجال التغير الذي مهما تغيرت قيمة C_2 فان الحل الأمثل لا يتغير؟

للإجابة على هذا السؤال نقوم باستخدام نفس الجداول في حل المثال، لكن نعوض قيمة $C_2 = 4 + \Delta$ ونعيد الحساب باستخدام المعامل الجديد $(4+\Delta)$ لتتغير القيم المقابلة لـ Z_j و C_j-Z_j كما يلي:

الجدول-1		Cj	2	$4+\Delta$	0	0	
B المتغيرات الأساسية	**C_B**	**$rhs=X_B$**	**x_1**	**x_2**	**S_1**	**S_2**	**أقل نسبة موجبة X_B/x_2**
S_1	0	8	2	**(4)**	1	0	$8/4=2\rightarrow$
S_2	0	12	3	6	0	1	$12/6=2$
Z=0		**Z_j**	**0**	**0**	**0**	**0**	
		C_j-Z_j	0	$4+\Delta\uparrow$	0	0	

الجدول-2		Cj	2	4+Δ	0	0	
B	C_B	**rhs=X_B**	**x1**	**x2**	**S1**	**S2**	النسبة
$x2$	4+Δ	2	1/2	1	1/4	0	
$S2$	0	0	0	0	-3/2	1	
Z=8+2Δ		**Zj**	2+Δ/2	4+Δ	1+Δ/4	**0**	
		Cj-Zj	-Δ/2	0	-1-Δ/4	0	

باعتبار أن كل قيم C_j-Z_j أقل أو تساوي الصفر. (تحقق شرط الأمثلية في حالة التعظيم) $c_j - z_j \leq 0$

الحل الأمثل: $[Max]Z = 8 + 2\Delta,\ X_1 = 0,\ X_2 = 2,\ S_1 = 0,\ S_2 = 0$

نستنتج أن: $\begin{cases} -\Delta/2 \leq 0 \\ -1-\Delta/4 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ \Delta \geq -4 \end{cases} \Rightarrow \Delta \geq 0$

بمأن: $C_2 = 4 + \Delta$ اذن:

اذن: $\Delta = C_2 - 4 \geq 0 \Rightarrow C_2 \geq 4 \Rightarrow 4 \leq C_2 \leq +\infty$

نستنتج أن مهما تغير المعامل C_2 ضمن المجال $4 \leq C_2 \leq +\infty$
فان نقطة الحل الأمثل (0،2) لا تتغير، لكن تتغير قيمة دالة الهدف Z بدلالة القيمة الإضافية Δ كما يلي:

$$[Max]Z = 8 + 2\Delta,\ X_1 = 0,\ X_2 = 2,\ S_1 = 0,\ S_2 = 0$$

نلاحظ أنه لو كانت الزيادة في معامل X_1 عندما يكون $c_1 = 2$، فأن معامل المتغير x_1 في الصف C_j-Z_j من جدول السمبلكس النهائي سيكون مساويا للصفر. ولأن المتغير x_1 هو متغير غير أساسي عند نقطة الحل الأمثل باعتبار قيمته معدومة، فأنه سيكون هنالك حلول مثلى أخرى للنموذج.

3-2-4- سعر الظل Shadow prices:

تعريف:

سعر الظل للقيد الخطي i هو Y_i يمثل مقدار التغير في قيمة دالة الهدف Z إذا أضفنا وحدة واحدة للطرف الأيمن للقيد الخطي b_i، على ألا تتغير المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل وألا تتغير العوامل الأخرى.
أي أن Y_i يساوي قيمة التغير في دالة الهدف المثلى Z^* عندما نضيف قيمة b_i ضمن الحدود المسموحة بتحليل الحساسية. تسمى أسعار الظل غالبا الأسعار الاقتصادية. أي أن Y_i يحدد السعر الاقتصادي لشراء وحدة إضافية من المورد b_i.(Bhunia A.K., 2019)

إيجاد أسعار الظل من خلال النموذج الأولي:

سعر الظل Y_i يمثل الحل الأمثل للنموذج الثنائي، لكن يمكن استنتاجه من خلال حل النموذج الأولي، بدون الحاجة للتحويل الى النموذج الثنائي.

سعر الظل Y_i للقيد الخطي i يظهر في سطر C_j-Z_j من جدول السمبلكس النهائي (الأمثل) مقابل المتغير المتمم S_i لهذا القيد الخطي.

1- سعر الظل لقيد خطي مع دالة هدف من الشكل Max يظهر بقيمة سالبة في سطر C_j-Z_j من جدول السمبلكس النهائي (الأمثل) للنموذج الأولي مقابل المتغير المتمم S_i لهذا القيد الخطي. لكن يستنتج بالقيمة المطلقة لتصبح قيمته موجبة. لأن كل المتغيرات تخضع لشرط عدم السلبية.

2- سعر الظل لقيد خطي مع دالة هدف من الشكل Min يظهر بقيمة موجبة في سطر C_j-Z_j من جدول السمبلكس النهائي (الأمثل) مقابل المتغير المتمم S_i لهذا القيد الخطي. ويستنتج بتلك القيمة.

3-4- تمارين محلولة في النموذج الثنائي وتحليل الحساسية

1-3-4- تمارين النموذج الثنائي:

تمرين 1: المطلوب تحويل البرنامج الخطي التالي الى النموذج الثنائي.
النموذج الأولي:

$$
\begin{aligned}
&[Max]Z = 6X_1 - 5X_2 - 6X_3 \\
&S/c \\
&\quad 8X_1 + 9X_2 + 4X_3 \le 4 \\
&\quad 6X_1 + 5X_2 + 4X_3 \le 6 \\
&\quad 11X_1 - 6X_2 - 5X_3 \le 12 \\
&X_1, X_2, X_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

التحويل الى النموذج الثنائي:

$$
\begin{aligned}
&[Min]F = 4y_1 + 6y_2 + 12y_3 \\
&S/c \\
&\quad 8y_1 + 6y_2 + 11y_3 \ge 6 \\
&\quad 9y_1 + 5y_2 - 6y_3 \ge -5 \\
&\quad 4y_1 + 4y_2 - 5y_3 \ge -6 \\
&y_1, y_2, y_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

تمرين 2: المطلوب تحويل البرنامج الخطي التالي الى النموذج الثنائي.
النموذج الأولي:

$$
\begin{aligned}
&[Min]Z = 8X_1 - 4X_2 + 6X_3 \\
&S/c \\
&\quad 3X_1 + 5X_2 + 4X_3 \ge 6 \\
&\quad 5X_1 + X_2 + 3X_3 \ge 8 \\
&\quad 7X_1 - 2X_2 - X_3 \ge 8 \\
&\quad X_1 - 2X_2 + 4X_3 \ge 5 \\
&X_1, X_2, X_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

التحويل الى النموذج الثنائي:

$$[Max]F = 6y_1 + 8y_2 + 8y_3 + 5y_4$$
$$S/c$$
$$3y_1 + 5y_2 + 7y_3 + y_4 \leq 8$$
$$5y_1 + y_2 - 2y_3 - 2y_4 \leq -4$$
$$4y_1 + 3y_2 - y_3 + 4y_4 \leq 6$$
$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

تمرين 3: المطلوب تحويل البرنامج الخطي التالي الى النموذج الثنائي.
النموذج الأولي من الشكل المختلط:

$$[Max]Z = 7x_1 + 4x_2$$
$$S/c$$
$$2x_1 + 3x_2 \geq 6$$
$$4x_1 + 2x_2 \leq 8$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

تحويل النموذج الأولي الى الشكل القانوني:

$$[Max]Z = 7x_1 + 4x_2$$
$$S/c$$
$$-2x_1 - 3x_2 \leq -6$$
$$4x_1 + 2x_2 \leq 8$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

التحويل الى النموذج الثنائي:

$$[Min]F = -6y_1 + 8y_2$$
$$S/c$$
$$-2y_1 + 4y_2 \geq 7$$
$$-3y_1 + 2y_2 \geq 4$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

التمرين 4:

ليكن البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Min } Z = 24x_1 + 15x_2$$
S/c
$$6x_1 + 4x_2 \geq 24$$
$$4x_1 + 6x_2 = 48$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

المطلوب:

1- تحويل البرنامج الخطي الى النموذج المقابل (الثنائي).
2- ايجاد الحل الأمثل للنموذج المقابل باستخدام طريقة السمبلكس.
3- استنتاج الحل الأمثل للنموذج الأصلي.
4- تفسير كل النتائج اقتصاديا.

حل التمرين 4:

$$\text{Min } Z = 24x1 + 15x2$$
S/c
$$6x1 + 4x2 \geq 24$$
$$4x1 + 6x2 = 48$$
$$x1, x2 \geq 0;$$

التحويل الى الشكل القانوني:

$$\text{Min } Z = 24x1 + 15x2$$
S/c
$$6\,x1 + 4x2 \geq 24$$
$$4\,x1 + 6x2 \geq 48$$
$$-4x1 - 6x2 \geq -48$$
$$x1, x2 \geq 0;$$

التحويل الى النموذج المقابل:

$$\text{Max } F = 24y1 + 48y2' - 48y2''$$
S/c
$$6y1 + 4y2' - 4y2'' \leq 24$$
$$4y1 + 6y2' - 6y2'' \leq 15$$
$$y1, y2', y2'' \geq 0;$$

الشكل القياسي للنموذج المقابل:

$$\text{Max } F = 24y_1 + 48y_2' - 48y_2'' + 0S_1' + 0S_2'$$

S/c

$$6y_1 + 4y_2' - 4y_2'' + S_1' = 24$$

$$4y_1 + 6y_2' - 6y_2'' + S_2' = 15$$

$$y_1, y_2', y_2'', S_1, S_2 \geq 0$$

الجدول-1		C_j	24	48	-48	0	0	
B	**C_B**	**X_B**	**y_1**	**y_2'**	**y_2''**	**S_1'**	**S_2'**	النسبة $X_B y_2'$
S_1'	0	24	6	4	-4	1	0	24/4=6
S_2'	0	15	4	(6)	-6	0	1	15/6=2.5→
F=0		**F_j**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	
		C_j -F_j	+24	+48↑	-48	0	0	

تحديد المتغير الداخل: أكبر قيمة في سطر C_j-Z_j في حالة (Max) هي 48 المقابلة لعمود المتغير y_2'. اذن y_2' هو المتغير الداخل في الجدول الموالي.

تحديد المتغير الخارج: أدنى قيمة موجبة في عمود النسبة X_B/x_i في حالة (Max أو Min) هي 2.5 لذلك نختار المتغير الخارج S_2'

قيمة المحور (Pivot) التي تمثل نقطة تقاطع سطر المتغير الخارج مع عمود المتغير الداخل، هي 6 للانتقال الى الجدول **الجديد** يمكن الاستعانة **بجداول مساعدة** لحساب القيم الجديدة في الجدول الجديد. بالاعتماد على الأسس التالية: R= Row = سطر

السطر الذي ينتمي اليه المحور يتم **قسمة** جميع قيمه على قيمة **المحور**، كما يلي:

$R2$(الجديد)=$R2$(القديم)÷6

$R2$(القديم) =	15	4	6	-6	0	1
$R2$(الجديد)=$R2$(القديم)÷6	5/2	2/3	1	-1	0	1/6

أما الأسطر الأخرى فيتم حساب قيمها الجديدة كما يلي:

السطر الجديد =السطر القديم – [قيم **سطر المحور** الجديد × القيمة المقابلة للمحور في **السطر القديم**]

R1 (جديد)= R1(قديم) - [4 × R2(جديد)]

$R1$(الجديد)=$R1$(القديم) – 4 $R2$(الجديد)

$R1$(القديم) =	24	6	4	-4	1	0
$R2$(الجديد) =	5/2	2/3	1	-1	0	1/6

$4\times R2$(الجديد) =	10	8/3	4	-4	0	2/3
$R1$(الجديد)=$R1$(القديم) - $4R2$(الجديد)	14	10/3	0	0	1	-2/3

الجدول-2		Cj	24	48	-48	0	0	
المتغيرات الأساسية	**المعاملات CB**	**الحل XB**	$y1$	$y2'$	$y2''$	$S1'$	$S2'$	**النسبة**
$S1'$	0	14	10/3	0	0	1	-2/3	
$y2'$	48	5/2	2/3	1	-1	0	1/6	
F=120		**Fj**	**32**	**48**	**-48**	**0**	**8**	
		Cj -Fj	-8	0	0	0	-8	

كل قيم C_j-F_j أقل أو تساوي الصفر. (تحقق شرط الأمثلية في حالة التعظيم) $c_j - F_j \leq 0$ اذن الجدول الأخير يمثل الحل الأمثل.

الحل الأمثل:

$y_1=0,\ y_2'=5/2\ ,y_2''=0$

Max $F=120$

استنتاج الحل الأمثل للنموذج الأصلي:

- القيمة المطلقة التي تقابل المتغيرات Y_i للنموذج الثنائي في سطر C_j-F_j، تمثل قيمة المتغيرات المتممة S_i للنموذج الأولي.
- القيمة المطلقة التي تقابل المتغيرات المتممة S_i' في سطر C_j-F_j للنموذج الثنائي، تمثل قيمة متغيرات الانتاج X_i للنموذج الأولي.
- والعكس صحيح، حيث يمكن استنتاج حلول النموذج الثنائي من خلال حلول النموذج الأولي.
- قيمة دالة الهدف المثلى F للنموذج الثنائي هي نفسها قيمة Z في النموذج الأولي.

$S_1=8,\ S_2=S_3=0$

$X_1=0,\ \ X_2=8$

$Z=120$

الإجابة الاقتصادية: على الشركة عدم انتاج أي وحدة من x_1 وانتاج 8 وحدات من x_2 لتحقيق أدنى تكلفة تقدر ب: 120 وحدة نقدية. مع استخدام 8 وحدات من موارد إضافية في القيد الأول، أي أن الوحدات المستخدمة = (8+24)

مع العلم (اذا اعتبرنا النموذج القانوني) فان الشركة يمكنها اضافة وحدة واحدة من وحدات الانتاج في القيد الثاني لتحقيق ربح قدره 2/5 و. بينما إضافة وحدات انتاج للقيود الأخرى لا يحقق أي ربح للشركة.
لكن في النموذج الأصلي القيد الثاني عبارة عن مساواة، لذلك لا يمكن إضافة اليه أي وحدة.

4-3-2- تمرين 5: في تحليل الحساسية:

$$[Max]Z = 20x_1 + 10x_2$$
$$S/c$$
$$5x_1 - 4x_2 \leq 24$$
$$2x_1 + 5x_2 \leq 13$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

الشكل القياسي:

$$[Max]Z = 20x_1 + 10x_2 + 0S_1 + 0S_2$$
$$S/c$$
$$5x_1 - 4x_2 + S_1 = 24$$
$$2x_1 + 5x_2 + S_2 = 13$$
$$x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0$$

الحل باستخدام طريقة السمبلكس:

الجدول -1		*Cj*	20	10	0	0	
B	C_B	***rhs=X_B***	x_1	x_2	S_1	S_2	النسبة X_B/x_1
S1	0	24	(5)	4	1	0	24/5=4.8→
S2	0	13	2	5	0	1	13/2=6.5
Z=0		***Zj***	**0**	**0**	**0**	**0**	
		Cj-Zj	20↑	10	0	0	

الجدول -2		*Cj*	20	10	0	0	
B	C_B	***rhs=X_B***	x_1	x_2	S_1	S_2	النسبة
x1	20	24/5	1	4/5	1/5	0	
S2	0	17/5	0	17/5	-2/5	1	
Z=96		***Zj***	**20**	**16**	**4**	**0**	
		Cj-Zj	0	-6	-4	0	

الحل الأمثل: $x1 = 24/5,\quad x2 = 0,\quad Z = 96$

كيف يؤثر تغير قيمة أحد المعاملات التالية على الحل الأمثل:
$c_1=20,\ c_2=10,\ b_1=24,\ b_2=13,\ a_{11}=5,\ a_{12}=4,\ a_{21}=2,\ a_{22}=5.$

1- تأثير تغير قيمة معامل دالة الهدف لمتغير غير أساسي:

في المثال السابق، المتغير x_2 غير أساسي في نقطة الحل الأساسي الممكنة المثلى. ما هو مقدار التغير في قيمة c_2 بحيث ألا تتأثر نقطة الحل الأساسي الممكنة المثلى؟

بصورة أخرى، لو كانت مساهمة المتغير x_2 في دالة الهدف هي: $c_2 = 10 + \Delta$

ما هي القيم الممكنة لـ Δ بحيث ألا تتأثر نقطة الحل الأساسي الممكنة المثلى؟
أي أننا نسأل عن تأثير قيمة Δ على البرنامج الخطي التالي:

$$[Max]\, Z = 20x_1 + (10+\Delta)x_2$$
$$S/c$$
$$5x_1 - 4x_2 \le 24$$
$$2x_1 + 5x_2 \le 13$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

لاحظ أن قيم المعاملات في الصف الأول من جدول السمبلكس يحدد فقط بعمليات أولية على الصفوف. أذا نظرنا إلى الصف الأول في الجدولين الأول والنهائي، نلاحظ أن معامل المتغير x_2 في الصف الأول تغير من 10- إلى 6+ (أي أننا أضفنا 16+).
لذا، لو كان معامل المتغير x_2 في الصف الأول من جدول السمبلكس الأول هو $(10+\Delta)$-، فإن معامل المتغير x_2 في الصف الأول من جدول السمبلكس النهائي سيكون $16 + (10+\Delta)$- أو $6-\Delta$.
أي أن الجدول النهائي سيكون على الصورة التالية:

الجدول -2		Cj	20	$10+\Delta$	0	0	
B	C_B	$rhs=X_B$	x_1	x_2	S_1	S_2	النسبة
$x1$	20	24/5	1	4/5	1/5	0	
$S2$	0	17/5	0	17/5	-2/5	1	
Z=96		***Zj***	**20**	**16**	**4**	**0**	
		$Cj-Zj$	0	-6	-4	0	

لكي يكون الحل أمثل، يجب أن تكون معاملات المتغيرات في الصف الأول من جدول السمبلكس غير سالبة. أذا، لكي تبقى نقطة الحل الأساسي الممكنة الحالية مثلى، لابد أن يكون:

$$6 - \Delta \geq 0$$

أو

$$-\infty \leq \Delta \leq 6$$

ولأن $c_2 = 10+\Delta$ و $\Delta \leq 6$، نقطة الحل الأساسي الممكنة الحالية ستبقى مثلى إذا كان:

$$-\infty \leq c_2 \leq 16$$

إذن طالما كان معامل المتغير x_2 في دالة الهدف في الفترة $[-\infty,16]$، يبقى الحل الأمثل هو:

$$x_1 = 24/5, \quad x_2 = 0, \quad Z = 96$$

لاحظ أنه عندما يكون $c_2 = 16$، فأن معامل المتغير x_2 في الصف الأول من جدول السمبلكس النهائي سيكون مساويا للصفر. ولأن المتغير x_2 هو متغير غير أساسي عند نقطة الحل الأساسي الممكنة المثلى، فأنه سيكون هنالك حلول أساسية ممكنة مثلى أخرى للمسألة.

2- تأثير تغير قيمة معامل دالة الهدف لمتغير أساسي:

في المثال السابق، المتغير x_1 هو متغير أساسي في نقطة الحل الأساسي الممكنة المثلى. ما هو مقدار التغير في قيمة c_1 بحيث أن لا تتأثر نقطة الحل الأساسي الممكنة المثلى؟.

بصورة أخرى، لو كانت مساهمة المتغير x_1 في دالة الهدف هي:

$$c_1 = 20 + \Delta$$

ما هي القيم الممكنة لـ Δ بحيث أن لا تتأثر نقطة الحل الأساسي الممكنة المثلى؟
أي أننا نسأل عن تأثير قيمة Δ على البرنامج الخطي التالي:

$$[Max]Z = (20+\Delta)x_1 + 10x_2$$
$$S/c$$
$$5x_1 - 4x_2 \leq 24$$
$$2x_1 + 5x_2 \leq 13$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

لاحظ أنه عندما انتقلنا من جدول السمبلكس الأول إلى جدول السمبلكس النهائي، قيمة معامل المتغير x_1 في الصف الأول تغيرت من 20- إلى صفر. أي أنه أضيفت 20+ إلى معامل المتغير x_1 في الصف الأول من جدول السمبلكس الأول. لذا لو كانت قيمة معامل المتغير x_1 في الصف الأول من جدول السمبلكس الأول هي
$-(20+\Delta)$ ،فإن قيمة معامل المتغير x_1 في الصف الأول من جدول السمبلكس النهائي ستكون

$$-(20+\Delta)+20 = -\Delta$$

أي أن جدول السمبلكس النهائي سيكون على الصورة التالية:

الجدول -2		C_j	$20+\Delta$	10	0	0	
B	**C_B**	**$rhs=X_B$**	**x_1**	**x_2**	**S_1**	**S_2**	**النسبة**
$x1$	$20+\Delta$	24/5	1	4/5	1/5	0	
$S2$	0	17/5	0	17/5	-2/5	1	
$Z=96+24/5\Delta$		**Z_j**	**$20+\Delta$**	**$16+4/5\Delta$**	$4+1/5\Delta$	**0**	
		C_j-Z_j	0	$-6-4/5\Delta$	$-4-1/5\Delta$	0	

لاحظ أن قيمة أي متغير أساسي في الصف الأول من جدول السمبلكس يجب أن تكون مساوية للصفر. هذا لا يتحقق هنا للمتغير الأساسي x_1.
بعد إجراء بعض العمليات الأولية على الصفوف (ضرب الصف الثاني بـ Δ وجمعه مع الصف الأول) نحصل على الجدول التالي:

هذا الجدول يوضح تأثير إضافة Δ إلى قيمة معامل المتغير x_1 في دالة الهدف.
لاحظ وجود Δ في الصف الأول من جدول السمبلكس النهائي في قيم المتغيران الغير أساسيان x_2 و s_1 وفي قيمة الطرف الأيمن.

لكي تبقى نقطة الحل الأساسي الممكنة الحالية مثلى، لابد أن تكون:

$$\left.\begin{array}{lll} 6+\dfrac{4}{5}\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \geq -7.5 \\ 4+\dfrac{1}{5}\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \geq -20 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \Delta \geq -7.5$$

إذن لكي تبقى نقطة الحل الأساسي الممكنة الحالية مثلى، لابد أن تكون:

$$-7.5 \le \Delta \le \infty$$

وبالتالي تكون:

$$12.5 \le c_1 \le \infty$$

إذن طالما كانت قيمة معامل المتغير x_1 في دالة الهدف تنتمي الى المجال] $[12.5,\infty$، تبقى نقطة الحل الحالية مثلى. أي أن الحل الأمثل سيكون:

$$x_1 = \frac{24}{5}, \quad x_2 = 0, \quad z = 96 + \frac{24}{5}\Delta$$

(لاحظ أن القيمة المثلى لدالة الهدف تعتمد على قيمة Δ المضافة).

3- تأثير تغير قيمة الطرف الأيمن لقيد خطي:

في المثال السابق، قيم الطرف الأيمن هي $b_1 = 24$ و $b_2 = 13$. كيف يؤثر تغير قيمة b_1 أو b_2 على نقطة الحل الأمثل الحالي؟

نفترض أن $b_1 = 24+\Delta$، ما هي قيم Δ الممكنة التي يبقى عندها الحل الأمثل هو نقطة الحل الأمثل الحالي (لكن قد تتغير قيم المتغيرات الأساسية)؟

أي أننا نسأل عن تأثير قيمة Δ على البرنامج الخطي التالي:

$$[Max]Z = 20x_1 + 10x_2$$

$$S/c$$

$$5x_1 - 4x_2 \le 24 + \Delta$$

$$2x_1 + 5x_2 \le 13$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

الجدول الأول للسمبلكس يكون كما يلي:

الجدول -1		C_j	20	10	0	0	
B	C_B	$rhs=X_B$	x_1	x_2	S_1	S_2	النسبة X_B/x_1
S1	0	$24+\Delta$	(5)	4	1	0	24/5=4.8→
S2	0	13	2	5	0	1	13/2=6.5
Z=0		***Zj***	**0**	**0**	**0**	**0**	
		Cj-Zj	20↑	10	0	0	

الجدول -2		Cj	20	10	0	0	
B	**C_B**	**$rhs=X_B$**	**x_1**	**x_2**	**S_1**	**S_2**	**النسبة**
$x1$	20	$24/5 + 1/5\ \Delta$	1	4/5	1/5	0	
$S2$	0	$17/5 – 2/5\ \Delta$	0	17/5	-2/5	1	
$Z= \quad 96 + \ 4\ \Delta$		**Zj**	**20**	**16**	**4**	**0**	
		Cj-Zj	0	-6	-4	0	

يبقى السؤال ما هي القيم الممكنة لـ Δ (وبالتالي لـ b_1) بحيث أن يبقى الحل الأمثل هو نقطة الحل الأساسي الممكن المثلى الحالية (لكن قد تتغير قيم المتغيرات الأساسية)؟

لكي يبقى الحل ممكناً، لابد أن يكون

$$x_1 \ \geq \ 0$$
$$s_2 \ \geq \ 0$$

أي أن

$$\left.\begin{array}{l} \frac{24}{5} + \frac{1}{5}\Delta \geq 0 \quad \Rightarrow \qquad \Delta \geq -24 \\ \frac{17}{5} - \frac{2}{5}\Delta \geq 0 \quad \Rightarrow \qquad \Delta \leq 8.5 \end{array}\right\} \Rightarrow \ -24 \leq \Delta \leq 8.5$$

وبالتالي

$$0 \leq b_1 \leq 32.5$$

- لتحليل الحساسية للمعامل b_2، ندرس تأثير تغيير قيمة الطرف الأيمن للقيد الخطي الثاني إلى $b_2 = 13 + \Delta$، سنجد أن جدول السمبلكس النهائي سيكون كما يلي:

الجدول -2		Cj	20	10	0	0	
B	**C_B**	**$rhs=X_B$**	**x_1**	**x_2**	**S_1**	**S_2**	**النسبة**
$x1$	20	24/5	1	4/5	1/5	0	
$S2$	0	$17/5 + \Delta$	0	17/5	-2/5	1	
$Z= \quad 96$		**Zj**	**20**	**16**	**4**	**0**	
		Cj-Zj	0	-6	-4	0	

لكي يبقى الحل ممكناً، لابد أن يكون

$$x_1 \geq 0$$
$$s_2 \geq 0$$

أي أن

$$\frac{17}{5} + \Delta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{17}{5} \leq \Delta \leq \infty$$

وبالتالي

$$9.6 \leq b_2 \leq \infty$$

لاحظ أن مفتاح تحليل الحساسية للطرف الأيمن لقيد خطي هو إيجاد متغير له معاملات مشابهه لمعاملات المتغير Δ الذي أضيف للطرف الأيمن من معادلة القيد الخطي. غالباً، المتغيرات التي لها معاملات مشابهه لمعاملات المتغير Δ هي المتغيرات المكملة أو الزائدة أو الاصطناعية التي أضيفت للقيود الخطية. (Nezameddin Faghih, 2021)

5- الفصل الخامس: مسائل النقل: Transportation problem

أصبح استخدام مبادئ وتقنيات البرمجة الخطية ضروري في جميع مجالات اتخاذ القرارات، وفي الكثير من الميادين التطبيقية خاصة مشاكل النقل والامداد، لأهمتها البالغة نظرا للتكاليف الباهظة التي تتحملها الشركات الكبرى في مجال النقل اللوجستي أو نقل الأشخاص أو ميادين أخرى لا تعد ولا تحصى، لذلك أصبح استخدام أساليب البرمجة الخطية أمر حتمي لتدنية التكاليف وتحقيق أرباح معتبرة، فالنقل الاقتصادي يعتبر من الأمور الضرورية لضمان بقاء واستمرار الشركات، باعتباره أحد العناصر المهمة والرئيسية في عملية توزيع السلع إلى المستهلك، ونقل المنتجات نصف المصنعة من مرحلة إنتاجية إلى أخرى في الشركات الصناعية، وتكمن أهميتها في النسبة العالية لتكاليف النقل مقارنة بمجموع تكاليف التصنيع والتوزيع، لذلك تسعى مختلف الشركات إلى استخدام الأساليب الرياضية بهدف تخفيض تكاليف النقل إلى أدنى مستوى ممكن.

صياغة نموذج النقل:

لصياغة نموذج النقل يجب توفر عدة بيانات كمية بدقة، أهمها تحديد **نقاط التوزيع** (المصدر) **ونقاط الاستلام** (الاستقبال)، مع تأكيد **كميات الطلب والعرض** المتوفرة. باعتبار طاقات التخزين في المستودعات، من حيث المساحة وعدد العمال، والتكلفة المخصصة لذلك. إضافة الى **تحديد المسارات** التي تتم عملية النقل من خلالها، مع تحديد **التكلفة الوحدوية** التي تختلف عبر **كل مسار**، (لعدة اعتبارات مختلفة من بينها طول المسار، تكلفة المركبة من حيث النقل، الصيانة، أجرة السائق وتكلفة الشحن ...)، إضافة الى **السعة القصوى** التي **يمكن** أن يتحملها المسار. (Shubinsky, 2022)

كما يشترط نموذج النقل مبدئيا ضرورة المساواة بين كمية العرض وكمية الطلب الاجمالية، الجدول التالي يوضح التكاليف الوحدوية لكل مسار مع تحديد كميات العرض والطلب بالتفصيل:

مراكز الاستلام

مراكز التوزيع

	D_1	D_2	. . .	D_n	العرض
S_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	. . .	C_{1n} X_{1n}	a_1
S_2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	. . .	C_{2n} X_{2n}	a_2
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
S_m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}		C_{mn} X_{mn}	a_m
الطلب	b_1	b_2	. . .	b_n	$\sum a_i = \sum b_j$

حيث أن:

S_i : مركز التوزيع i / $i=1,2,\ldots m$

D_j : مركز الاستلام j / $j=1,2,\ldots n$

a_i : كمية العرض في مركز التوزيع i

b_j : كمية الطلب في مركز الاستلام j

X_{ij} : الكميات المنقولة عبر المسار ij الذي يربط بين مركز التوزيع i ومركز الاستلام j

C_{ij} : تكلفة النقل الوحدوية عبر المسار ij الذي يربط بين مركز التوزيع i ومركز الاستلام j

بينما يمكننا كتابة الشكل العام للنموذج الرياضي لمسألة النقل كما يلي:

الـ هدف
$$[Min]Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} \times X_{ij}$$

$$S/c$$

ـد الـ عرض
$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \le a_i \quad / \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

ود الـ ط لب
$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} \ge bj \quad / \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

$$X_{ij} \ge 0$$

باعتبارنا نفترض لحل نموذج النقل أن كمية العرض تساوي كمية الطلب الاجمالية، وذلك لوجوب تلبية الكمية المطلوبة الكلية، ليتحول نموذج البرمجة الخطية إلى الصيغة التالية (Arabinda Tripathy, 2019) :

الـ هدف
$$[Min]Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} \times X_{ij}$$

$$S/c$$

ـد الـ عرض
$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i \quad / \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

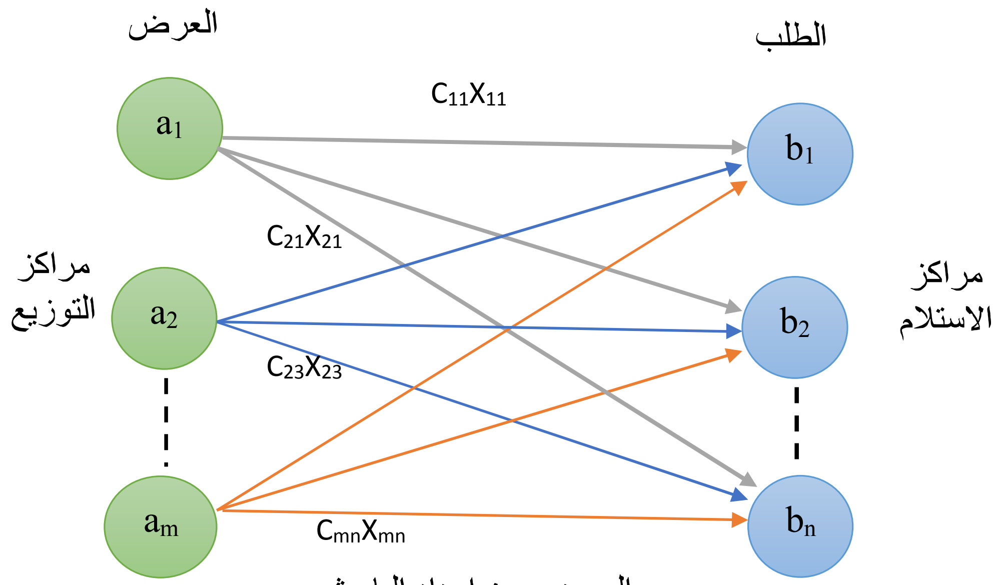
ود الـ ط لب
$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = bj \quad / \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

$$X_{ij} \ge 0$$

يحتوي هذا النموذج الرياضي على عدد كبير من المتغيرات والقيود، لذلك يلجأ الباحثون الى استخدام تقنيات خاصة لنماذج النقل. نتطرق لها في المحور التالي.

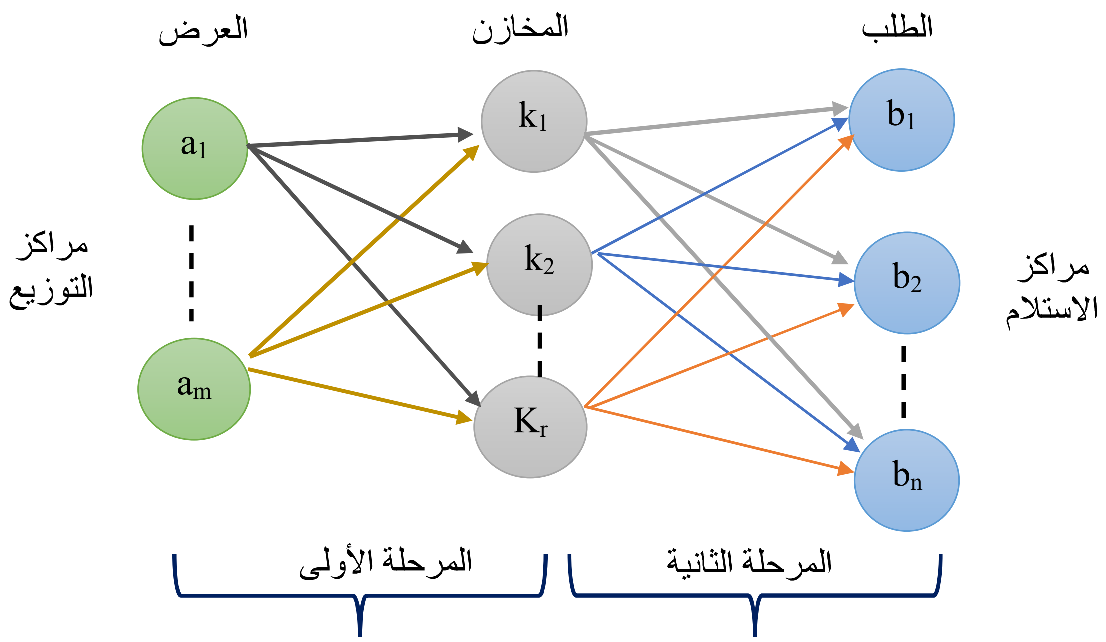
تمثيل مشكلة النقل بنظرية الشبكة:

تعتمد جميع مشاكل النقل على نظرية الشبكات، التي تمثل رسم بياني موجه يوضح مختلف المسارات التي تربط بين مراكز التوزيع ومراكز الاستلام، مع تحديد جميع البيانات المتعلقة بالشبكة، بما في ذلك تكاليف النقل بالنسبة لكل مسار. وبصفة عامة يمكن تمثيل نموذج النقل بمرحلة واحدة كما يلي:



المصدر: من اعداد الباحث

أما نموذج النقل متعدد المراحل فيمكن تمثيله كما يلي: (تدفقات متعددة المراحل) (Multiphase flow)



المصدر: من اعداد الباحث

طرق حل مسائل النقل:

لحل مسائل النقل يجب اتباع مرحلتين(Arabinda Tripathy, 2019) :

1- **مرحلة إيجاد الحل الابتدائي الممكن:** تعتبر مرحلة ابتدائية، كما في طريقة السمبلكس العادية.

2- **مرحلة تحسين الحل لإيجاد الحل الأمثل:** يتم من خلالها البحث عن الحل الأمثل.

بحيث يمكن استخدام عدة طرق مختلفة في كل مرحلة نذكر من أهمها:

1- **مرحلة إيجاد الحل الابتدائي الممكن:** تعتمد على عدة طرق مختلفة:

1- **طريقة الزاوية الشمالية الغربية:** North West-Corner Method

هذه الطريقة لا تعتمد اي اسلوب علمي في توزيع الكميات المتوفرة في مراكز التوزيع لتلبية طلبيات السوق، تبدأ بتوزيع الكميات من الزاوية الشمالية الغربية، بحيث تكون الأولوية في التوزيع للخلية الأعلى يسارا. ثم الاتجاه يمينا للأسفل، (يبدأ التوزيع من الشمال الغربي، لينتهي نحو الجنوب الشرقي).

المثال توضيحي:

شركة تملك 3 مراكز توزيع في مواقع مختلفة، تحاول توزيع سلعها الى 3 مراكز للاستلام، فاذا كانت كميات العرض والطلب وتكاليف نقل الوحدة الواحدة من السلع موضح في الجدول التالي.

المطلوب: إيجاد الحل الاساسي الممكن باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية.

	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1	15	21	10	150
S_2	11	7	16	140
S_3	24	22	14	50
الطلب	130	100	110	$\sum=340$

الحل:

التحقق من توازن العرض والطلب:

العرض= 150+140+50= 340

الطلب= 130+100+110= 340

بداية التوزيع حسب مبدأ الطريقة:

	D_1	D_2	D_3	العرض		
S_1	(15) 130	(21) 20	(10) /	150	20	0
S_2	(11) /	(7) 80	(16) 60	140	60	0
S_3	(24) /	(22) /	(14) 50	50	0	
الطلب	130	100	110	$\sum$=340		
	0	80	50			
		0	0			

1- نبدأ بتوزيع الكمية 130 وحدة باعتبارها في الزاوية الشمالية الغربية.
2- بعد كل توزيع نقوم بحساب الكمية المتبقية المقابلة للعمود وللسطر (باللون الرمادي).
3- نشطب على الخلايا المتبقية في السطر أو العمود المشبع (عندما تبقى الكمية 0).
4- نكرر العملية يمينا باتجاه الأسفل، حتى يتم توزيع كل الكمية.

التحقق من شرط إمكانية الحل: يجب دائما التحقق من هذا الشرط، للتأكد أن الحل الممكن غير منحل.

مجموع المتغيرات الأساسية = $m + n - 1$

$5 = 5$

مع العلم أن: المتغيرات الأساسية هي التي لا تساوي الصفر

مجموع المتغيرات الأساسية = مجموع الخلايا المملوءة (غير الفارغة)

الحل الابتدائي الأساسي الممكن:

$$X_{11} = 130,\ X_{12} = 20,\ X_{22} = 80,\ X_{23} = 60,\ X_{33} = 50,$$

حساب تكاليف النقل الاجمالية في الحل الابتدائي:

$$[Min]Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij} \times X_{ij} = (130 \times 15)+(20 \times 21)+(80 \times 7)+(60 \times 16)+(50 \times 14) = 4590$$

2- **طريقة التكلفة الدنيا:** Minimum-Cost Method

تعتمد طريقة التكلفة الدنيا في كل خطوة على بداية التوزيع من أقل تكلفة في الجدول. لأنها تأخذ التكاليف في الاعتبار. لذلك تعتبر أفضل من الطريقة الأولى، لأنها توفر حل ابتدائي بأقل تكاليف اجمالية.

ملاحظة: إذا تساوت التكاليف نختار الخلية التي تقابل أكبر كمية طلب، لتدنية التكاليف الاجمالية.

مثال توضيحي: المطلوب حل نفس المثال السابق بطريقة التكلفة الدنيا.

الحل:

	D_1	D_2	D_3	العرض		
S_1	15 / 40	21 / /	10 / 110	150	40	0
S_2	11 / 40	7 / 100	16 / /	140	40	0
S_3	24 / 50	22 / /	14 / /	50	0	
الطلب	130	100	110	$\sum$=340		
	90	0	0			
	50					

1- نبدأ بتوزيع الكمية 100 وحدة في المسار X_{22} لأنه يحمل أقل تكلفة تقدر بـ 7 و.ن.
2- بعد كل توزيع نقوم بحساب الكمية المتبقية المقابلة للعمود وللسطر (باللون الرمادي).
3- نشطب على الخلايا المتبقية في السطر أو العمود المشبع (عندما تبقى الكمية 0).
4- نكرر العملية في كل خطوة باختيار أقل تكلفة من الخلايا المتبقية، حتى يتم توزيع كل الكمية.

التحقق من شرط إمكانية الحل: يجب دائما التحقق من هذا الشرط، للتأكد أن الحل الممكن غير منحل.

مجموع المتغيرات الأساسية = $1 - n + m$

$5 = 5$

مجموع المتغيرات الأساسية = مجموع الخلايا المملوءة (غير الفارغة)

الحل الابتدائي الأساسي الممكن:

$$X_{11} = 40,\ X_{13} = 110,\ X_{21} = 40,\ X_{22} = 100,\ X_{31} = 50,$$

حساب تكاليف النقل الاجمالية في الحل الابتدائي:

$$[Min]Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij} \times X_{ij} = (100\times 7)+(110\times 10)+(40\times 11)+(40\times 15)+(50\times 24) = 4040$$

3- **طريقة فوجل التقريبية:** Vogel's Approximation Method

طريقة فوجل تأخذ في الاعتبار التكاليف، لكنها تعتمد على الاختيار بين الفروقات الكبيرة. لتجنب التوزيع في المسارات التي تحمل تكاليف عالية. حيث تعتمد في طريقتها الخطوات التالية:

1- نحسب الفرق بين اقل تكلفتين في كل سطر ثم في كل عمود لمصفوفة التكاليف. (باللون الأصفر)
2- نختار السطر أو العمود الذي يحمل أكبر فرق. ونحدد أقل تكلفة في ذلك السطر أو العمود المختار
3- نشطب على الخلايا المتبقية في السطر أو العمود المشبع (عندما تبقى الكمية 0).
4- نكرر نفس العملية في كل خطوة مع الخلايا المتبقية فقط، حتى يتم توزيع كل الكمية.

مثال توضيحي: المطلوب حل نفس المثال السابق بطريقة فوجل التقريبية.

	D_1		D_2		D_3		العرض			
S_1	15		21		10		150	5	5	5
		90		/		60		90	0	
S_2	11		7		16		140	4	5	5
		40		100		/		40	0	
S_3	24		22		14		50	8	10	/
		/		/		50		0		
الطلب	130		100		110		$\sum=340$			
	4	90	14	0	4	60		الخطوة 1		
	4	0	/		4	0			الخطوة 2	
	4		/		6					الخطوة 3

التحقق من شرط إمكانية الحل: يجب دائما التحقق من هذا الشرط

مجموع المتغيرات الأساسية = $m + n - 1$

$5 \quad = \quad 5$

مجموع المتغيرات الأساسية = مجموع الخلايا المملوءة (غير الفارغة)

الحل الابتدائي الأساسي الممكن:

$$X_{11} = 90,\ X_{13} = 60,\ X_{21} = 40,\ X_{22} = 100,\ X_{31} = 50,$$

حساب تكاليف النقل الاجمالية في الحل الابتدائي:

$$[Min]Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} \times X_{ij} = (90\times15)+(60\times10)+(40\times11)+(100\times7)+(50\times14) = 3790$$

ملاحظات:

- بعد مقارنة النتائج لطرق الحل المختلفة لإيجاد الحل الابتدائي الممكن، نتأكد أن طريقة فوجل تمثل أحسن الطرق باعتبارها توفر أدنى تكاليف اجمالية.
- عندما تكون عدد المتغيرات الأساسية أقل من m+n-1 يعرف الحل الأولي أنه منحل، لمعالجة هذه المشكلة يتم تخصيص كمية نقل صفرية واعتبارها كمتغير اساسي في خلية فارغة تحمل أقل كلفة.
- الخلايا غير الفارغة X_{ij} تعتبر متغيرات أساسية، لأن قيمتها غير معدومة في الحل. أما الفارغة فهي غير أساسية.
- في حالة عدم تساوي العرض والطلب في المجموع، نقوم بإضافة سطر أوعمود وهمي في الجانب الأقل، يحمل قيمة الفرق. وذلك لتحقيق شرط التوازن بينهما، ونكمل الحل بنفس الطريقة.

باعتبار أن محور تحسين الحل الابتدائي غير مدرج في البرنامج، يتم شرح طريقة واحدة بدون حل أمثلة.

2- **مرحلة تحسين الحل لإيجاد الحل الأمثل:** يمكن استخدام طرق مختلفة من بينها:

طريقة المسار المتعرج Stepping stone

يتم استخدام هذه الطريقة لاختبار أمثلية الحل الابتدائي، الذي تم ايجاده باستخدام الطرق السابقة، فان تبين أن الحل الابتدائي ليس أمثلا، يتم تحسين الحل حتى الوصول الى الحل الأمثل. عن طريق عدة خطوات، تعتمد على ادخال متغير غير أساسي (خلية فارغة) في مكان متغير أساسي (خلية مملوءة) بهدف تقليل التكاليف في حال دخولها في الحل. بنفس مبدأ طريقة السمبلكس تقريبا. لكنها تعتمد على مبدأ تحديد مسارات الخلايا الفارغة.

خطوات الحل في طريقة المسار المتعرج الحل:

- نحاول ادخال متغير غير أساسي في مكان متغير أساسي. بدون التأثير على توازن العرض والطلب.
- لتحديد **المتغير غير الأساسي** الداخل في الحل المقبل، والذي يمثل **خلية فارغة**:
- يتم **دراسة مسار** لكل خلية فارغة.
- يتم **حساب القيم الجبرية** لكل خلية فارغة، اعتمادا على تكاليف مسارها.
- يتم اختيار الخلية الفارغة التي تحمل القيمة الأشد **سلبية**. واختيارها **كمتغير داخل**.
- **نكرر** العمليات الى غاية الوصول الى **قيم جبرية** كلها **موجبة أو معدومة**.

شرط الأمثلية: عند الحصول على القيم الجبرية كلها أكبر أو تساوي الصفر، نستنتج أن توزيع الجدول الأخير يمثل الحل الأمثل.

مسار الخلية الفارغة: يتم رسم مسار لكل خلية فارغة بحيث ينطلق من الخلية الفارغة ثم يعود اليها، عن طريق رسم مضلع بزوايا قائمة. شرط أن تقع كل زوايا المضلع في الخلايا المملوءة. لتحمل إشارات (+)، (-) في كل زاوية بالتناوب.

مثال: لا يشترط أن يكون شكل المسار مربعا، بل يمكن أن تكون أضلاعه أكثر. لكن شكلها دائما اما عمودي أو أفقي. وكل زواياه قائمة. نلاحظ أن كلها تقع في الخلايا المملوءة، ما عدا خلية الانطلاق فارغة. والتي تبدأ بإشارة موجبة ثم تتغير.

	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1	15 40 +	21 /	10 – 110	150
S_2	11 40	7 100	16 /	140
S_3	24 50 –	22 /	14 + /	50
الطلب	130	100	110	$\sum=340$

الفصل السادس: مدخل للبرمجة غير الخطية Non-Linear Programming

مقدمة في البرمجة غير الخطية

البرمجة الخطية تعتبر طريقة لتحقيق أفضل النتائج في نموذج رياضي تمثل متغيراته بالعلاقات الخطية في حين أن البرمجة غير الخطية هي عملية لحل مشكلة الأمثلية، تكون القيود أو دالة الهدف غير خطية.

إذا كانت دالة الهدف غير خطية و/أو يوجد قيد غير خطي فإنه لدينا برنامج غير خطي. حيث يوجد أنواع كثيرة من البرامج غير الخطية مثل: إذا كان لدينا برنامج غير خطي وأن دالة الهدف دالة تربيعية والقيود خطية فإنه يسمى البرمجة التربيعية Quadratic Programming عندما لا يوجد قيود في البرنامج الرياضي فإنه لدينا برنامج غير خطي وغير مقيد. مهم جدا نوع الدوال في البرامج غير الخطية مثل التحدب والاتصال والقابلية للاشتقاق.(David G. Luenberger, 2021)

يمكن تقسيم البرمجة غير الخطية Nonlinear programming إلى قسمين رئيسيين هما البرمجة غير الخطية بمتغير Single variable والبرمجة غير الخطية متعددة المتغيرات Multivariable. كما قد تتشعب طرق البرمجة متعددة المتغيرات إلى فرعين هما: نظرية البرمجة التقليدية وخوارزميات البرمجة غير الخطية.

تمكن صياغة مسألة البرمجة غير الخطية أحادية البعد أو وحيدة المتغير على أنها تدنية أو تعظيم للدالة:

$$Z = f(x)$$

علما بأن f(x) دالة قد لا تكون خطية؛ ويكون البحث عن قيمة x التي تجعل الدالة Z مثلى. ويكون مجال البحث في مجموعة الأعداد الحقيقية (-∞,+∞). أما في حالة وضع قيد على متغير القرار x فإن المسألة تكون من الصيغة تعظيم دالة الهدف أو تدنيتها:

$$Z = f(x)$$

مع القيد:

$$a \le x \le b$$

وتسمى الأخيرة برمجة أحادية البعد مقيدة.

ومن طرق حل هذا النوع من المسائل تقنيات البحث المتتابع وبحث مجال الثلاث نقط وبحث فيبوناتشي وبحث متوسط الفترة الذهبية.

مفهوم البرمجة غير الخطية

البرمجة غير الخطية هي عملية حل مشاكل الأمثلية التي تتعلق ببعض القيود غير الخطية أو دالة الهدف غير خطية. وتتميز مسائل البرمجة غير الخطية بوجود مجموعة من المصطلحات التي تستدعي ضمنياً استخدام توابع لا خطية مثل: اللوغاريتم، الأسية، دالة جب أو تجب ...الخ. كما تهدف الى تدنية أو تعظيم دالة الهدف غير الخطية التي تخضع لقيود منضمة، قيود خطية أو قيود غير خطية. يمكن أن تكون هذه

القيود متراجحات أو المساواة. بالإضافة إلى ذلك، تساعد البرمجة غير الخطية في تحليل واختيار الصياغات المناسبة، مع تحديد الصياغة المثلى، وحساب المسارات المثلى وتحسين أداء المحفظة ومعايرة النموذج في تمويل الحساب(H. A. Eiselt, 2019) .
هناك نوعان من البرمجة غير الخطية على النحو التالي.

البرمجة غير الخطية بقيود

تتضمن البرمجة غير الخطية المقيدة إيجاد متجه x يقلل من الدالة غير الخطية f (x) مع مراعاة واحد أو أكثر من القيود. النقاط الداخلية، البرمجة التربيعية المتسلسلة، ومنطقة الثقة تعكس بعض خوارزميات البرمجة غير المقيدة الشائعة.

البرمجة غير الخطية بدون قيود

تتضمن البرمجة غير الخطية غير المقيدة إيجاد متجه x يمثل الحد الأدنى المحلي للدالة العددية غير الخطية(f (x . مثل شبه-نيوتن و Nelder Mead و Trust-region بعض خوارزميات البرمجة غير الخطية الشائعة غير المقيدة.

البرمجة التقليدية غير المقيدة للمسائل الحدية

لا يحتوي هذا النوع من البرمجة للمسائل الحدية على قيود أو شروط، ويكون المطلوب فيه غالباً إيجاد القيمة العظمى أو الدنيا لدالة الهدف

ولتكن:

$$Z = f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

وحلها هو البحث عن النقطة م التي تحقق العلاقة:

$$f(x_0 + h) \leq f(x_0)$$

وذلك في حالة التعظيم حيث أن $h=h_1, h_2, \ldots h_i$ $|h_i|$ كمية حقيقية موجبة وصغيرة بما فيه الكفاية لكل قيم $i=1,2,\ldots 3$. نستخدم لحل مثل هذا النوع من المسائل عدة طرق منها الانحدار عن طريق مفكوك تايلور للدالة تحت الدراسة وتعيين مصفوفة هس ومحدداتها لجزئية. كما يمكن استخدام طريقة نيوتن - رافسون

أما في حالة المسائل المقيدة فإن صياغة المسألة قد أخذ شكل تعظيم دالة الهدف:

$$Z = f(x)$$

تحت شروط المساواة:

$$g(x) = 0$$

ونفرض عادة أن كلا من $f(x)$ و$g(x)$ قابلة للاشتقاق ومشتقاتها مستمرة. كما قد نستخدم طريقة مضاعفات لاجرانج لحل المسألة.

وهناك خوارزميات البرمجة غير الخطية لحل المسائل غير المقيدة التي تشمل عدة طرق منها طريقة البحث المباشر التي نفرض فيها أن دالة الهدف وحيدة المنوال في مجال البحث عن حل أمثل لها. سيستخدم طريقة الانحدار لحل الخوارزميات غير المقيدة كذلك. أما في حالة المسائل المقيدة فإننا نستخدم برمجة الفصل والمقصود من ذلك أنه يمكن التعبير عن دالة الهدف بتحويل مجموع من الدوال كل منها الى وحيدة البعد. من الواضح أنه قد يتعذر فصل المتغيرات في بعض الدوال عن بعضها؛ ولكن في بعض الحالات يمكن ذلك. ومن هذه الطرق كذلك البرمجة التربيعية وتكون فيها دالة الهدف والقيود من الدرجة الثانية في بعض متغيرات القرار والبرمجة الهندسية والعشوائية التي تكون فيها بعض معالمها أو كلها متغيرات عشوائية وتحل أساساً بتحويل طبيعتها الاحتمالية إلى طبيعة وصفية محددة.

صياغة مسائل برمجة غير خطية:

كما لاحظنا أن مجال البرمجة غير الخطية واسع جدا وموضوعاتها متعددة ومتفرعة. ولعل أهم اختلافاتها عن البرمجة الخطية ظهور متغيرات القرار في دالة الهدف أو في القيود المرافقة (إن وجدت) في صيغة غير خطية. ولتبسيط الصياغة العامة لهذه المسائل يتم التأكد من صحة النموذج غير الخطي أولا، قبل اعتماده في الحل. وفي بعض الحالات يمكن تحويل النموذج الى شكل خطي لحله بالطريقة العادية، ومن تم استنتاج الحل الأمثل للمتغيرات الأصلية.

طرق حل البرمجة غير الخطية:

إن دراسة أساليب الحل المختلفة لمسائل البرمجة غير الخطية أدت إلى إيجاد صياغة خاصة تستخدم لإيجاد هذه الحلول. عند حل مسائل البرمجة غير الخطية قد يبدو الحل غير ممكن لوجود عدد لا نهائي من الحلول وإمكانات الحصول على حلول مثلى متعددة. لكن بدراسة خصائص التحدب والتقعر يصبح البحث عن الحل الأمثل ممكن. فعندما نتعامل مع متغيرات لدالة مستمرة ومحدودة فإن برهان فيرستراش يوفر قيمة عظمى أو دنيا إما عند نقطة داخل منطقة الحلول الممكنة أو ينتمي الى هذه الحدود. أما إذا كانت الدالة مستمرة على منطقة الدراسة يمكن تعيين النقاط المستقرة باستخدام حسابات تفاضلية تعطي جميع المشتقات التي يمكن إيجادها. حيث يتبين أنه ستوجد نقطة مستقرة في الداخل أو على الحدود إذا انعدمت المشتقات الجزئية لدالة غير مقيدة عند شعاع حل خاص وبنفس شكل نعالج الحالة المقيدة.

عند البحث عن حل لمسائل البرمجة غير الخطية يجب اختبار الحالات التالية:

- جميع النقاط التي تكون عندها المشتقات المستمرة من الدرجة الأولى تساوي الصفر.
- جميع النقاط داخل المنطقة التي تكون عندها المشتقات من الدرجة الأولى غير مستمرة.
- النقاط واقعة على حدود مجال الحل.

تأثير التقعر /والتحدب في البحث عن الحل الأمثل:

- **حد أعظم أو حد أدنى غير مقيد:**

في حالة نموذج البرمجة غير الخطية يتكون من دالة هدف فقط $f(x)$ وكانت الدالة محدبة أو مقعرة فإنه يوجد حل أمثل وحيد عند نقطة تقع اما داخل منطقة الحلول أين تنعدم جميع المشتقات أو عند نقطة حدية.

- **قيمة عظمى – مقيد:**

في حالة نموذج البرمجة غير الخطية يتكون من دالة هدف وقيود فإن احتمال الحل الأمثل الوحيد يعتمد على طبيعة دالة الهدف ومجموعة القيود، فإذا كانت دالة الهدف مقعرة وكانت مجموعة القيود تشكل منطقة محدبة عندها يوجد حل أعظم وحيد للمسألة.

- **قيمة دنيا – مقيد:**

في حالة نموذج البرمجة غير الخطية يتكون من دالة هدف وقيود وكانت دالة الهدف محدبة ومجموعة القيود تشكل منطقة محدبة فإن أي نقطة مستقرة ستكون حلاً أدنى.

- **القيمة الدنيا (العظمى) – لدالة مقعرة (محدبة)**

في حالة البحث عن قيمة دنيا (عظمى) لدالة مقعرة (محدبة) فإن الحل الأمثل يكون عند إحدى النقاط الحدية للقيود.

- **الدالة الخطية:**

في حالة الدالة الخطية محدبة ومقعرة. وكانت منطقة الحل محدبة يمكن إيجاد الحل عند الحدود.

يوجد طرق كثيرة لحل البرامج غير الخطية تعتمد على نوع البرنامج غير الخطي المراد حله. ومنها:

طريقة الحل المباشر تقوم على إيجاد جميع الحلول المحتملة (النقاط الساكنة) ومن ثم اختيار الأمثل منها. تشترط أن تكون الدالة متصلة وقابلة للاشتقاق (أحيانا مرتين أو أكثر). غير ممكنة عندما لا نستطيع إيجاد أو حصر جميع النقاط الساكنة.

طريقة الإلغاء Elimination تقوم على تجزئة منطقة الحل ثم إبقاء جزء واحد الذي يحتوي الحل الأمثل وحذف البقية. يمكن استخدامها للدوال غير المتصلة والدوال غير القابلة للاشتقاق.

طريقة التنصيف Bisection طريقة المقطع الذهبي Golden Section طريقة فيبوناتشي Fibonacci طريقة البحث ثنائي التفرع Dichotomous Search

طريقة الاستنباط Interpolation (الاستقراء أو الاستكمال) هي طريقة أو عملية رياضية لإنشاء نقاط بيانات جديدة اعتمادا على مجموعة من النقاط المنفصلة والمعلومة مسبقا.

طريقة نيوتن - رافسون Newton-Raphson

طريقة شبه - نيوتن Quasi-Newton

طريقة قاطع القوس Secant

طريقة الانحدار الحاد Steepest descent بعضها لا يحتاج المشتقات مثل طريقة الاستنباط التربيعي. Quadratic Interpolation

الخاتمة:

بعد التطرق الى أغلب المفاهيم النظرية حول رياضيات المؤسسة بما في ذلك صياغة البرنامج الخطي. إضافة الى طرق الحل المختلفة ومن خلال حل الكثير من التمارين. تأكدت الأهمية البالغة لهذه الطرق. في حل النماذج الرياضية. والتي تعجز الطرق التقليدية التي تعتمد فقط على الخبرة الشخصية عن حلها. حيث وجدت الحل الأمثل للكثير من المشاكل الاقتصادية الممكن حلها، مع تحقيق أكبر ربح أو تكلفة دنيا أقل من الحالات التي لم تستخدم فيها التقنيات الكمية، ما يوفر على المؤسسة تكلفة اضافية. لكن علينا معرفة أن التقنيات المقترحة تعتبر أساليب رياضية يمكن الاستفادة منها في نمذجة وتسيير المشكلات الاقتصادية في عدة مجالات مختلفة، لاسيما عملية تخطيط الانتاج، بالإضافة الى نقل وتوزيع السلع من مواقع العرض إلى محطات الطلب وهذا من أجل تحقيق أهداف المؤسسة، ورغم ذلك لا يمكن اعتبار هذه النماذج بالوسيلة المثلى وإنما هي أساليب علمية يمكن الاعتماد عليها لمساعدة وتوجيه القرارات الخاصة بحل مشاكل النقل في المؤسسات. حيث تبقى كل هذه الطرق والتقنيات مساعدة في عملية اتخاذ القرار الأمثل مما يوفر للمسير عدة خيارات مع استعمال خبرته وتجربته في توجيه الحلول المقترحة.

المراجع:

Borgonovo E (2017). ***Sensitivity Analysis_ An Introduction for the Management Scientist .*** Springer International Publisher.

Arabinda Tripathy, R. N. (2019). ***Operations Research in Development Sector.*** Springer Singapore.

Bhunia A.K., S. L. (2019). ***Advanced optimization and operations research.*** Springer.

David G. Luenberger, Y. Y. (2021). ***Linear and Nonlinear Programming.*** International Series in Operations Research & Management Science - Springer.

Greg H. Parlier, F. L. (2019). ***Operations Research and Enterprise Systems_ 8th International Conference, ICORES .*** Springer.

H. A. Eiselt, C.-L. S. (2019). ***Nonlinear Optimization _ Methods and Applications.*** International Series in Operations Research & Management Science - Springer International Publishing.

Michael Khachay, Y. K. (2019). ***Mathematical Optimization Theory and Operations Research.*** 18th International Conference, MOTOR 2019, Ekaterin.

Michael W. Carter, C. C. (2019). ***Operations Research_ A Practical Approach.*** Advances in Applied Mathematics Series).

Nezameddin Faghih, E. B. (2021). ***Quality Management and Operations Research_ Understanding and Implementing the Nonparametric Bayesian Approach.*** CRC Press Taylor & Francis.

Shubinsky, I. B. (2022). ***Technical Asset Management for Railway Transport_ Using the URRAN Approach .*** International Series in Operations Research & Management Science - Springer.

Vanderbei, R. J. (2020). ***Linear Programming_ Foundations and Extensions.*** Springer.

Yury Kochetov, I. B. (2020). ***Mathematical Optimization Theory and Operations Research_ 19th International Conference, MOT.*** Springer.

الأسطل ,ر .ع .(2016) .*بحوث العمليات وألساليب الكمية في صنع القرارات الإدارية* .جامعة فلسطين.

الحميدان-وآخرون ,س .ص .(2017) .*الأسس الرياضية للبرمجة الخطية* .دار جامعة الملك سعود.

الدش ,ع .ع .(2012) .*بحوث العمليات واتخاذ القرارات* .جامعة حلوان.

الشيخ ,أ .ا .(2009) .*بحوث العمليات* .المجموعة العربية للتدريب والنشر.

الطاسان ,خ .(2019) .*المدخل إلى البرمجة الخطية وتطبيقاتها في الإدارة* .جامعة الملك سعود.

المهتدى ,أ .م .(2004) .*الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية* .دار صفاء -عمان.

برونسون ,ر .(2004) .*سلسلة ملخصات شوم -بحوث العمليات* .الدار الدولية للاستثمارات الثقافية -مصر.

راتول ,م .(2006) .*بحوث العمليات* .ديوان المطبوعات الجامعية.

عبيدات ,م .ا .(2009) .*مقدمة في بحوث العمليات* .دار المسيرة -*عمان الأردن.

مخلوف ,إ .(2004) .*التحليل الكمي في الإدارة* .جامعة الملك سعود.

AUTHOR' SHORT BIOGRAPHY

Dr. Abdelaziz Refafa

الأستاذ رفافة عبد العزيز، متحصل على شهادة دكتوراه في العلوم التجارية تخصص الطرق الكمية المطبقة في التسيير، بعد مناقشة الأطروحة بعنوان(: دراسة نموذج شبكات بتدفقات متعددة السلع باستخدام طريقة توليد الأعمدة).
قبل ذلك تمت مناقشة رسالة الماجستير بعنوان: (Analyse des données CRM avec le Data Mining).
حيث نوقشت أيضا مذكرة الليسانس بعنوان: (EVALUATION DE PROJET D'INVESTISSEMENT DANS L'UNIVERS DU RISQUE ET DE L'INCERTITUDE EN UTILISANT LA SIMULATION DE MONTE CARLO ET L'ANALYSE DE SENSIBILITE).

E-mail: abdelaziz.refafa@univ-relizane.dz
ORCID iD: https://orcid...
Google Scholar ; https:// Abdellaziz Refafa - Google Scholar